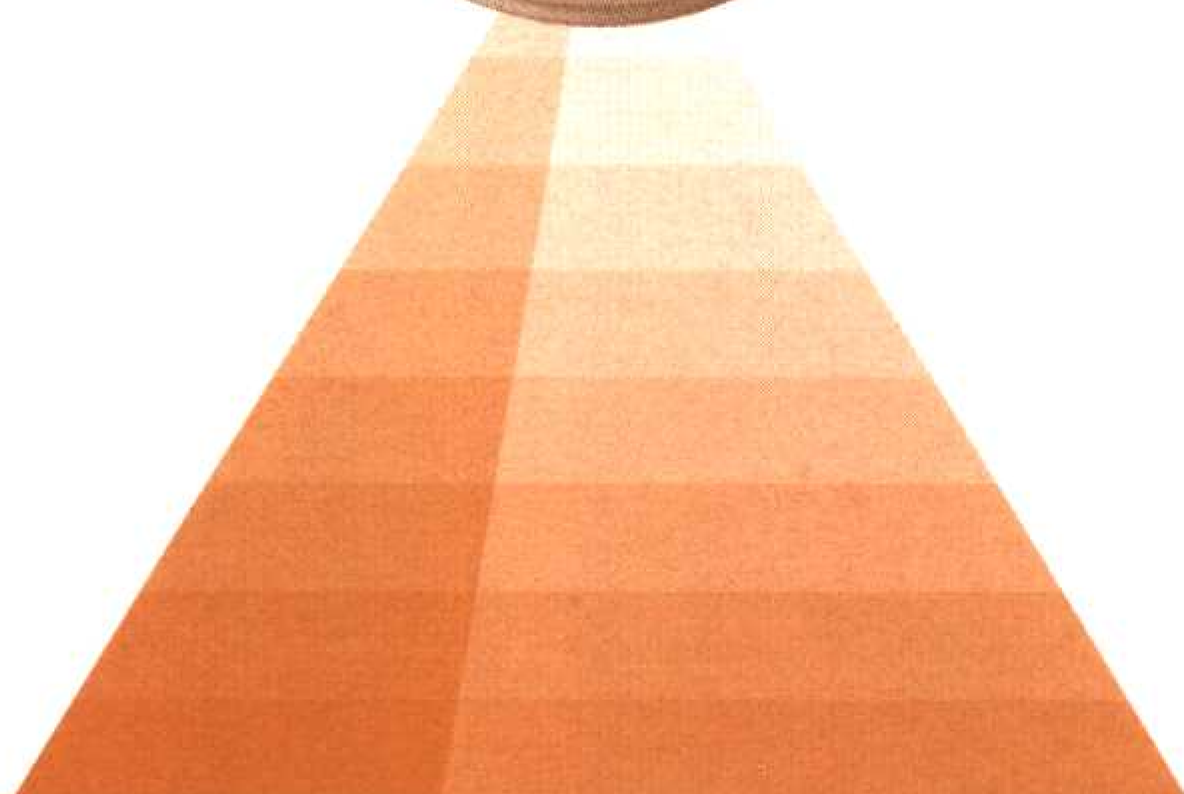
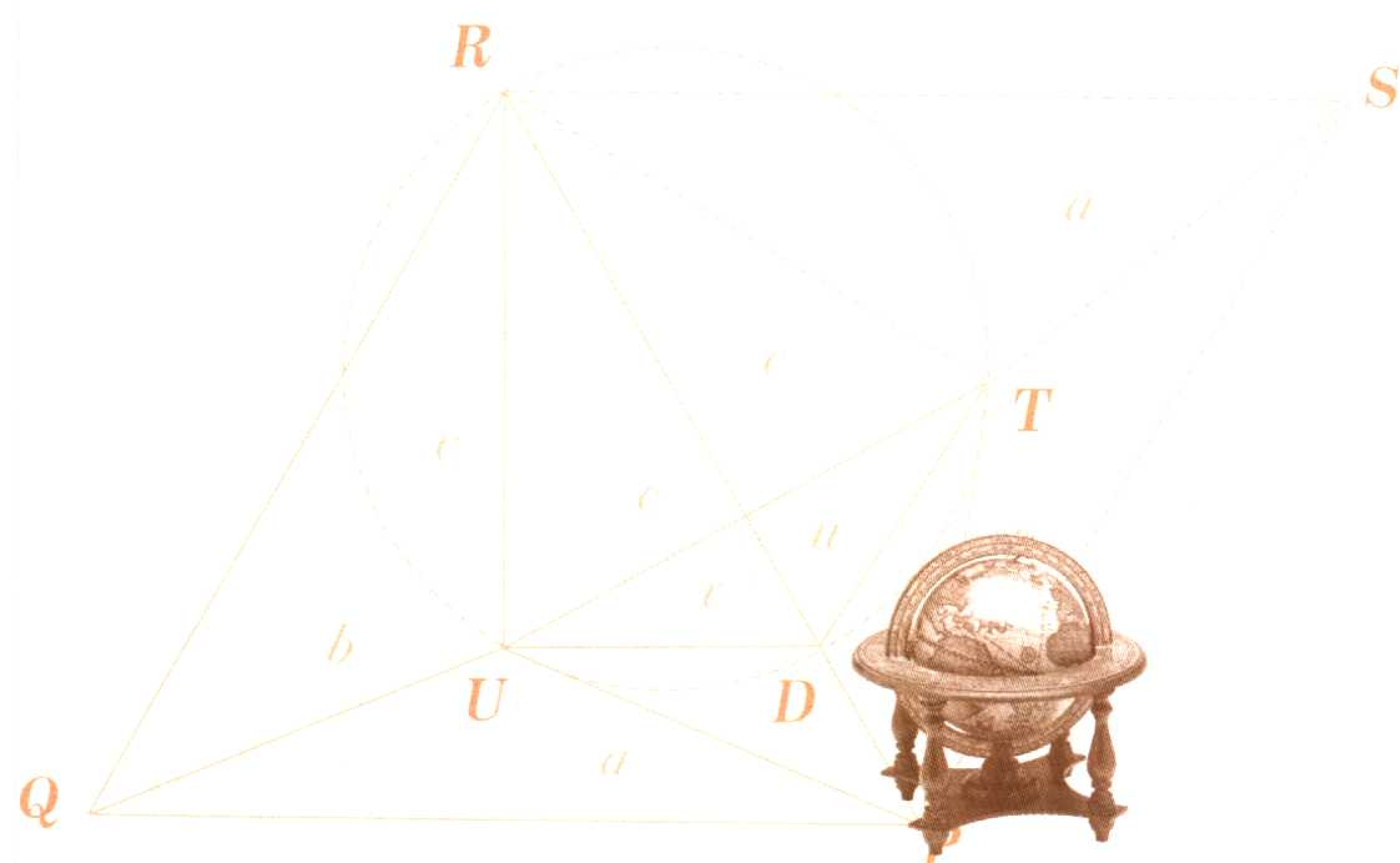




世界数学奥林匹克解题大辞典

中国数学奥林匹克委员会
南开大学数学系







《世界数学奥林匹克解题大辞典》编委会

顾　问

吴大任

名誉主编

陈省身

主　编

周学光

副主编

许以超　李成章(常务)　侯自新

韩凤岐　裘宗沪

委　员

王连笑　刘玉翘　许以超　李成章

吴振奎　侯自新　张筑生　杜锡录

周学光　胡晓光　夏兴国　黄玉民

韩凤岐　裘宗沪　舒五昌

代数卷主编

黄玉民　夏兴国

几何卷主编

吴振奎　王连笑　刘玉翘

数论卷主编

王连笑

组合卷主编

李成章

选择题卷主编

吴振奎

序 言



王元

数学奥林匹克是对青少年极其有益的一项活动.它通过科学与趣味相统一的丰富多彩的题目,使许许多多的优秀学生在中学时期就经受了考验,接受了各种现代数学思想的熏陶,使他们提高了能力,增长了知识,开阔了眼界.数学奥林匹克活动的广泛开展,不仅丰富了中学生的课外活动,促进了中学数学教学的改革,而且发现和培养了一大批有才能的青年,这些青年将成为我国科学界在下个世纪赶超世界先进水平的中坚力量.

数学竞赛中没有失败者.虽然每年参加中国数学奥林匹克的选手百余人,作为国家队出国参加国际数学奥林匹克的选手也只有六人,但是,那些因为运气不佳,培训不足,见识不广或临场发挥不理想等因素而没有获胜的学生也不是失败者.他们在参加竞赛及培训中所培养起来的求解难题的兴趣和欲望,那种永不满足,勇攀高峰的精神,分析问题的严密的逻辑思维,解决问题的灵活多样的应变能力以及对现代数学思想的理解和积累,正是进行成功的科学研究并在将来成为科学家的必要条件.因此说,这远比在一次竞赛中获胜更为宝贵.他们中的许多人进入大学后成为学习尖子,有些人正在攻读硕士和博士学位并成为数学研究队伍中的后起之秀,就是最有力的证明.即使对于那些进入大学后改学其他

专业的学生,他们也将因思维敏捷,头脑灵活,勇于创新和具有较强的数学能力而使自己终身受益.因此,数学奥林匹克必将继续下去.

数学奥林匹克已有一百多年的历史,且越来越受到重视,现在,每年举办数学奥林匹克的国家和地区已超过70个.已有的竞赛题目成千上万,其中构思独特、新颖别致、灵活深邃的题目有几千道之多,而且还在以每年几百道的速度继续增长.这些题目散载于国内外的各种书籍与杂志之中,任何个人手中的资料都很不完整,使用起来极不方便.这次河北少年儿童出版社邀请国内数学奥林匹克界的专家、教授和高级教练员共同精选了国内外数学奥林匹克的试题并给出精辟、准确的解答,编写了这套《世界数学奥林匹克解题大辞典》.这是一次很有意义的壮举,是一项艰苦而又巨大的工程,是我国数学奥林匹克事业的一项基本建设.本书的出版,必将推动我国的数学奥林匹克事业稳步地向前发展,有助于我国在国际数学奥林匹克中保持优势,立于世界数学强国之林,就此我以兴奋的心情对这套解题大辞典的出版表示热烈的祝贺,并对在此书编写过程中付出辛勤劳动的各位作者和出版过程中做出多方面努力的编辑人员及支持本书出版的各位领导表示衷心的感谢.

近10年来,我国学生在国际数学奥林匹克中不断取得好成绩,我国所提供的候选题也接连被选为试题,这是值得高兴的事情.但是,我们也应清醒地看到,与一些先进国家相比,我国开展数学奥林匹克和参加国际数学奥林匹克的时间毕竟不长,这方面的资料也不很完全.因此,这套辞典的内容也是不很完全的.此外,以后每年新出现的竞赛题目也要补充进来.希望大家继续努力,不断完善这套大辞典的内容,为数学奥林匹克事业做出新贡献.



目　录

第一章　计　数

1·1　在 1,2,3,4,5 的排列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 中,满足 $a_1 < a_2, a_2 > a_3, a_3 < a_4, a_4 > a_5$ 的排列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 共有多少种.

(中国上海市数学竞赛,1992 年)

[解]　满足要求的排列,5 只能在第二或第四个位置,即 $5 = a_2$ 或 $5 = a_4$.

(1) 当 $5 = a_2$ 时,$a_1 < a_2, a_2 > a_3$,因此 a_1 可以是 1,2,3,4 中的任一个,a_3,a_4,a_5 是另三个数,其中 a_4 是最大的,a_3,a_5 有两种选法.所以共有

$$C_4^1 \cdot C_2^1 = 8(\text{种}).$$

(2) 当 $5 = a_4$ 时,同样有 8 种.

所以共有 16 种排列.

1·2　如果一个非负整数有序对(m,n)在求和 $m+n$ 时无需进位(十进制),则称它为“简单”的.求所有和为 1492 的简单的非负整数有序对的个数.

(第 5 届美国数学邀请赛,1987 年)

[解]　因为在求和时各位都没有进位,所以个位加至2的方法有3种:

$$0+2,1+1,2+0.$$

十位加至 9 的方法有 10 种:

$$0+9,1+8,2+7,3+6,4+5,$$
$$5+4,6+3,7+2,8+1,9+0.$$

同理,百位加至 4 和千位加至 1 的方法分别有 5 种和 2 种.

综上，由乘法定理便知，满足要求的数对共有 $3\times10\times5\times2=300$ 个.

1·3 如果一个至少有两位的十进制正整数中，它的每一位数总比其右边位置的数小，则称之为“上升数”. 求上升数的总数.

（第 10 届美国数学邀请赛，1992 年）

[解] 按已知，上升数的各位数字互不相同. 又因首位数字不能为 0，故上升数至多有 9 位数字. 所以，上升数的各位数字一定是集合

$$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

的一个至少有两个元素的子集中的各数从小到大排列而成的.

因 S 有 9 个元素，故它的所有至少有两个元素的子集的总数为 $2^9-C_9^0-C_9^1=502$. 从而知共有 502 个上升数.

1·4 用 2,4,6 三个数字来构造六位数，但是不允许有两个连着的 2 出现在六位数中（例如 626442 是允许的，226426 就不允许），问这样的六位数共有多少个？

（中国上海市数学竞赛，1990 年）

[解 1] (1) 若六位数中没有 2，则每一位只能从 4 或 6 中选一个，这时有 $2^6=64$ 个.

(2) 若六位数中只有 1 个 2，则 2 有 $C_6^1=6$ 种位置选择，其余 5 个位置从 4 或 6 中选取，因此有 $6\cdot2^5=192$ 个.

(3) 若六位数中有 2 个 2，这时有 $2^4\cdot C_5^2=160$ 个.

(4) 若六位数中有 3 个 2，这时有 $2^3\cdot C_4^3=32$ 个.

由题意，不可能在六位数中出现 4 个或 4 个以上的 2.

于是共有

$$64+192+160+32=448\text{ 个}.$$

[解 2] 设用 2,4,6 三个数字能构造出 a_n 个符合题意的 n 位数，则

$$a_1=3,\quad a_2=8\begin{pmatrix}24,42,26,62,\\46,64,44,66.\end{pmatrix}.$$

若首位数 Y 是 2，则第二位数 Y 只能是 4 或 6，所以这样的 n 位数有 $2a_{n-2}$ 个.

若首位数 Y 不是 2，则首位数 Y 是 4 或 6，这样的 n 位数有 $2a_{n-1}$ 个.

于是有递推式

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad (n = 3,4,\cdots).$$

由此推出

$$a_3 = 2(a_1 + a_2) = 22,\ a_4 = 2(a_2 + a_3) = 60,$$

$$a_5 = 2(a_3 + a_4) = 164, a_6 = 2(a_4 + a_5) = 448,$$

即这样的六位数共 448 个.

1·5　当将写有数码的纸倒过来看时,数码0,1,8不变,数码6与9互变,其他数码在倒过来看时都没有意义.求将写有九位数的纸倒过来看时不变的九位数的个数.

(第 22 届莫斯科数学奥林匹克,1959 年)

[**解**]　当把写有九位数的纸倒过来时,首位数字变成末位,第2位数字变成第8位 … 第5位数字不动.故可将9位数字分成5组:首位与末位一组,第2,8两位一组,第3,7两位一组,第4,6两位一组,第5位自己一组.易见,第1组有4组不同值:(1,1),(8,8),(6,9),(9,6);第2,3,4三组各有5组不同值:(0,0),(1,1),(8,8),(6,9),(9,6);第5组有0,1,8三个不同值.故知满足题中要求的九位数的个数为 $4 \times 5^3 \times 3 = 1500$.

1·6　1447,1005,1231 这三个数有许多相同之处:它们都是四位数,最高位都是 1,都恰有两个相同的数字,一共有多少个这样的数?

(第 1 届美国数学邀请赛,1983 年)

[**解**]　首先,考察相同数字是1的正整数.由于首位是1,故另一个1有3种位置可以选择.另两位数字不能是1且不能相同,故有 P_9^2 种不同排法.因而有

$$m_1 = 3P_9^2 = 216.$$

其次,考察相同数字不是1的正整数.这时,相同数字有9种不同选法,这两个相同数字在后3位有3种不同排法.另一位数字既不能是1,又不能与相同数字相同,故有 8 种不同取法.因而有

$$m_2 = 9 \times 3 \times 8 = 216.$$

综上可知,满足要求的四位数共有 $m = m_1 + m_2 = 432$ 个.

1·7　任给 n 个互不相同的正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,用它们组成一切可能的和(分别有1至 n 个加数).求证在这些和数中最少存在$\frac{1}{2}n(n+1)$

个互不相同的数.

(第3届全俄数学奥林匹克,1963年)

[证] 不妨设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.考察下列各数

$a_1,\quad a_2,\quad \cdots,\quad a_{n-2},\quad a_{n-1},\quad a_n,$

$a_1 + a_n,\quad a_2 + a_n,\quad \cdots, a_{n-2} + a_n,\quad a_{n-1} + a_n,$

$a_1 + a_{n-1} + a_n,\quad a_2 + a_{n-1} + a_n,\quad \cdots, a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$

$\cdots \qquad \cdots$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$

显然,其中每一个数都大于它前面的一个数.所以这些数互不相同.这些数共有 $n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{1}{2}n(n+1)$ 个,故知所组成的和数中至少有$\frac{1}{2}n(n+1)$个互不相同.

另一方面,当 $a_i = i(i = 1,2,\cdots,n)$ 时,由它们所组成的每个和数 s 都满足 $1 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}n(n+1)$.可见它们至多有$\frac{1}{2}n(n+1)$个互不相同的数.

综上可知,在由 n 个互不相同的正数所组成的一切和数中,最少有$\frac{1}{2}n(n+1)$个互不相同的数.

1·8 设 $a < b < c < d$ 且 (x,y,z,t) 是 (a,b,c,d) 的任意排列,问表达式

$$n = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-t)^2 + (t-x)^2$$

可以取多少种不同的值?

(匈牙利数学奥林匹克,1946年)

[解 1] 因为 n 的表达式关于 (x,y,z,t) 是轮换对称的,故可设 $x = a$.又因表达式关于 y 和 t 是对称的,故对于 (b,c,d) 的6种不同排列,n 至多能取3个不同的值.

另一方面,因为 $a < b < c < d$,故有

$$\begin{aligned} & n(a,b,c,d) - n(a,b,d,c) \\ =& (b-c)^2 + (d-a)^2 - (b-d)^2 - (c-a)^2 \\ =& 2(bd + ac - bc - ad) = 2(b-a)(d-c) > 0, \end{aligned}$$

$$n(a,c,b,d) - n(a,b,c,d)$$

$$=2(ab+cd-ac-bd)=2(c-b)(d-a)>0,$$

由此可得

$$n(a,c,b,d)>n(a,b,c,d)>n(a,b,d,c),$$

即 n 可取 3 个不同的值.

[解 2] 注意,表达式

$$n(x,y,z,t)+(x-z)^2+(y-t)^2$$
$$=n(x,y,z,t)+(x^2+y^2+z^2+t^2)-2(xz+yt)$$

关于(x,y,z,t)是对称的,故其值与(x,y,z,t)是(a,b,c,d)的何种排列无关.又因上式右端第 2 项也是关于(x,y,z,t)对称的,故 $n(x,y,z,t)$的不同值的个数与 $xz+yt$ 所能取得的不同值的个数相等.

表达式 $v=xz+yt$ 的值取决于将(a,b,c,d)分成两对的分法,而这种分法恰有 3 种$\{a,b;c,d\}$,$\{a,c;b,d\}$,$\{a,d;b,c\}$,因此 v 有 3 个值:

$$v_1=ab+cd, v_2=ac+bd, v_3=ad+bc.$$

容易验证 $v_1>v_2>v_3$,故知 n 可以取 3 种不同的值.

1·9 设 s 是所有满足下列条件的有理数 r 的集合:

(1)$0<r<1$;

(2)$r=0.abcabcabc\cdots=0.\dot{a}b\dot{c}$,其中 a,b,c 不一定互异.

问当将 s 中的数 r 写成最简分数时,共有多少个不同的分子?

(第 10 届美国数学邀请赛,1992 年)

[解] 因为$0.\dot{a}b\dot{c}=\frac{abc}{999}$,又因 $999=3^3\times37$,所以,当正整数 abc 既不能被 3 整除又不能被 37 整除时,$\frac{abc}{999}$就是最简分数,分子就是 abc.在从 1 到 999 这 999 个正整数中,能被 3 整除的共有$\frac{999}{3}=333$个;能被 37 整除的共有$\frac{999}{37}=27$个;能被 3×37 整除的共有 9 个.由容斥原理知,这样的不同分子共有 $999-333-27+9=648$ 个.

再考察在上面排除掉的那些或是 3 的倍数或是 37 的倍数或二者都是的数中还有哪些可以作为最简分数的分子.

因为 $37^2>999$,所以凡是 37 倍数的 abc,与分母约去 37 之后不会再是 37 的倍数.因此,凡是 37 的倍数都不能是最简分数的分子.

但在 3 的倍数的 abc 中，却有一些可以在约去 3^3 后化出新的分子，即下列 12 个数：

$$\{81k \mid k = 1,2,\cdots,12\}$$

它们分别与 999 约去 27 后，得到的最简分数分别为

$$\frac{3k}{37}, k = 1,2,\cdots,12.$$

它们的分子分别为 3,6,9,⋯,36. 它们都是 3 的倍数，当然与前面的不同. 故知满足要求的不同分子共有 660 个.

1·10　在前 1000 个正整数中，有多少个可以表示成 $[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$ 的形式?其中 x 是某个实数.

（第 3 届美国数学邀请赛，1985 年）

[解 1]　令

$$f(x) = [2x] + [4x] + [6x] + [8x],$$

于是有 $f\left(x+\frac{1}{2}\right) = f(x) + 10$. 因此，当某正整数可以用 $f(x)$ 之值表达时，该整数加 10 也可用 $f(x)$ 的值来表达. 因而只须考虑前 10 个自然数用 $f(x)$ 表达的情形就够了.

注意，$f\left(\frac{1}{2}\right) = 10$. 当 $x \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$[2x] = 0$，故有

$$f(x) = [4x] + [6x] + [8x].$$

容易看出

(1) 当 $x \in \left(0,\frac{1}{8}\right)$时，$f(x) = 0$;

(2) 当 $x \in \left[\frac{1}{8},\frac{1}{6}\right)$时，$f(x) = 1$;

(3) 当 $x \in \left[\frac{1}{6},\frac{1}{4}\right)$时，$f(x) = 2$;

(4) 当 $x \in \left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$时，$f(x) = 4$;

(5) 当 $x \in \left[\frac{1}{3},\frac{3}{8}\right)$时，$f(x) = 5$;

(6) 当 $x \in \left[\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right)$时，$f(x) = 6$.

可见，当 $x \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$时，$f(x)$ 可表达 1,2,4,5,6,10 这 6 个自然数. 因此，在前 1000 个自然数中，$f(x)$ 可表达其中的 600 个数.

[解 2]　令

$$f_1(x)=[2x],f_2(x)=[4x],f_3(x)=[6x],f_4(x)=[8x],$$

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_4(x).$$

当 $f_j(x)$ 的值在 x 从小向大变化达到某点而增加1时，我们就把该点称为增值点，并把 $f_j(x)$ 在(0,50] 中的所有增值点的集合记为 $M_j,j=1,2,3,4$. 容易看出

$$M_1=\left\{\frac{i}{2}\mid i=1,2,\cdots,100\right\},$$

$$M_2=\left\{\frac{i}{4}\mid i=1,2,\cdots,200\right\},$$

$$M_3=\left\{\frac{i}{6}\mid i=1,2,\cdots,300\right\},$$

$$M_4=\left\{\frac{i}{8}\mid i=1,2,\cdots,400\right\}.$$

由此可见，$M_1\subset M_2\subset M_4,M_1\subset M_3,M_2\cap M_3=M_1=M_3\cap M_4$.

显然，当且仅当某点同时是两个 $f_j(x)$ 的增值点时，$f(x)$ 的值将增加 2，即跳过 1 个自然数不能表达. 同理，当某 x 同时是 3 个或 4 个 $f_j(x)$ 的增值点时，$f(x)$ 的值将跳过 2 个或 3 个自然数. 由上述分析可知 M_1 中每点恰是 4 个 $f_j(x)$ 的增值点，它们共跳过 300 个自然数. 此外，M_2-M_1 中的点同时是 $f_2(x)$ 与 $f_4(x)$ 的增值点，它们共跳过 100 个自然数. 易见，$f(x)$ 没有别的跳值点. 所以 $f(x)$ 可表达 600 个自然数.

1·11　对于 $0\leqslant x\leqslant 100$，求函数 $f(x)=[x]+[2x]+\left[\frac{5x}{3}\right]+[3x]+[4x]$ 所取的不同整数值的个数.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题，1988 年）

[解]　以 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 来分别表示函数 $[x],[2x],[3x],[4x]$ 和 $\left[\frac{5x}{3}\right]$ 的所有间断点的集合，则易知 $A_1\subset A_2\subset A_4$ 且

$$A_3=\left\{\frac{n}{3}\mid n=1,2,\cdots,300\right\},$$

$$A_4=\left\{\frac{n}{4}\mid n=1,2,\cdots,400\right\},$$

$$A_5=\left\{\frac{3n}{5}\mid n=1,2,\cdots,166\right\}.$$

由此可得

$$A_3 \cap A_4 = \{n \mid n = 1,2,\cdots,100\},$$

$$A_3 \cap A_5 = A_4 \cap A_5 = A_3 \cap A_4 \cap A_5 = \{3n \mid n = 1,2,\cdots,33\}.$$

由容斥原理知 $f(x)$ 的间断点的个数为

$$|A_3| + |A_4| + |A_5| - |A_3 \cap A_4| - |A_3 \cap A_5| - |A_4 \cap A_5| + |A_3 \cap A_4 \cap A_5|$$

$$= 300 + 400 + 166 - 100 - 33 - 33 + 33 = 733.$$

故知 $f(x)$ 所取的不同整数值的个数为 734.

1·12　考察一个仅由数字 1 和 2 组成的 100 位数,允许挑出任意 10 个连续的数字,并将前 5 个与后 5 个数字的位置互换.如果一个 100 位数可以由另一个经过若干次上述操作而得到,则称这两个数是合同的.问至多可以选出多少个两两不合同的仅由数字 1 和 2 组成的 100 位数?

(第 36 届莫斯科数学奥林匹克,1973 年)

[解]　因为每次操作时,都是将取出的 10 个数字中的前 5 个数字后移 5 位,后 5 个数字前移 5 位.故在操作过程中,无论操作了多少次,一个数字的所处位数与它开始时的位数之差一定是 5 的倍数.换句话说,当把 100 个数分成下列 5 组时

$S_j = \{5k + j \mid k = 0,1,2,\cdots,19\}, j = 1,2,3,4,5$,在操作过程中,每个数字的位数只能在组内变化,而且只要适当安排操作顺序,每个数字可以移到组内任何另一位置.因此,在合同的意义下,每组内的 20 位数字的相互位置无关,即无论怎样交换位置总是合同的,仅与其中 1 的个数有关,即只要 5 组数字中有一组中 1 的个数不同,两个数一定不是合同的.

对于每一组数来说,其中 1 的个数可为 $0,1,2,\cdots,20$ 个.故由乘法定理知,互不合同的由数字 1 和 2 组成的 100 位数至多有 21^5 个.

1·13　设正整数 M 在 n 进位表示之下的各位数字互不相同,并且除去最左边的数字外,每个数字都与它左边的某个数字相差 ± 1,试求所有这样的正整数 M 的个数.(答案用 n 的显函数以最简形式给出)

(第 19 届美国数学奥林匹克,1990 年)

[解] 首先,我们允许 0 作为最左的数字并用 $F(n)$ 表示满足要求的 M 的个数.于是

$F(1)=1$(这惟一的数即为 0);

$F(2)=4(0,01,1,10)$;

$F(3)=11(0,01,012,1,10,102,12,120,2,21,210)$;

$F(4)=26(0,01,012,0123,1,10,102,1023,12,120,1203,123,1230,2,21,210,2103,213,2130,23,231,2310,3,32,321,3210)$.

由上表中可见,最右边一位数字或为各位数字中最大的,或为最小的.让我们来证明这一点.

设满足要求的 n 进位表示数

$$M=\overline{k_1k_2\cdots k_m},\qquad 1<m\leqslant n,$$

记 $k_i=\min\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}$, $k_j=\max\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}$ 并设 $i,j<m$.不妨设 $i<j$.因为每位数字都与它左边某数字相差 ± 1,故对任何正整数 h, $k_i<h<k_j$,都必存在 $l<j$,使 $k_l=h$.特别对于 $h=k_m$,有 $k_l=k_m$, $l\neq m$,矛盾.

因而,$F(n+1)$ 个满足要求的 $n+1$ 进位表示的正整数可以分为 3 类:

(1)$n+1$ 个一位数:$0,1,2,\cdots,n$;

(2)n 进位中满足要求的 $F(n)$ 个数,右边添上一位数字,它比该数中已用到的最大数字大 1;

(3)n 进位表示中的 $F(n)$ 个数,将各位数字分别加 1,然后在右边添上原数的各位数字中的最小数.

由此即得递归关系式

$$F(n+1)=n+1+2F(n),$$
$$F(n+1)+(n+3)=2\{F(n)+(n+2)\}.$$

由此递推即得

$$F(n+1)+(n+3)=2^n\{F(1)+(1+2)\}=2^{n+2},$$
$$F(n)=2^{n+1}-n-2.$$

最后,在 $F(n)$ 计数中除去首位为 0 的数:$0,01,012,\cdots,012\cdots(n-1)$ 共 n 个数,便得所有满足要求的正整数 M 的总数为 $2^{n+1}-2n-2$.

1·14 设 S 是复平面上的单位圆周(即模等于 1 的所有复数的集

合)，f 是由 S 到 S 的映射，对于任何 $z\in S$，定义

$$f^{(1)}=f(z),f^{(2)}(z)=f(f^{(1)}(z)),\cdots,$$

$$f^{(k+1)}(z)=f(f^{(k)}(z)),k=2,3,\cdots.$$

如果 $c\in S$，使得

$$f^{(1)}(c)\neq c,\cdots,f^{(n-1)}(c)\neq c,f^{(n)}(c)=c,$$

则称 c 是 f 的 n_ 周期点. 设 m 是大于 1 的自然数，f 的定义如下：

$$f(z)=z^m,z\in S.$$

试求 f 的 1989_ 周期点的总数.

（第 4 届中国中学生数学冬令营，1989 年）

注 中国中学生数学冬令营即中国数学奥林匹克

[解] 我们把 f 的所有 1989_ 周期点的集合记为 T 并令 $B_j=\{z\in S\mid f^{(j)}(z)=z\},j=1,2,\cdots$.

(1) 若 $z_0\in S$ 是 $f^{(n)}$ 的不动点，即 $f^{(n)}(z_0)=z_0$，且 z_0 是 f 的 h_ 周期点，则必有 $h\mid n$.

设 $n=ph+q,0\leqslant q<h$，于是

$$z_0=f^{(n)}(z_0)=f^{(q)}(f^{(ph)}(z_0))=f^{(q)}(z_0).$$

由于 $q<h$，故由 h_ 周期点的定义便知 $q=0$，即 $h\mid n$.

(2) 因为 $1989=3^2\times13\times17$，所以，若 $z\in B_{1989}-T$，则 z 的周期 h 必是 1989 的真约数，因而 h 整除 663，153，117 这 3 数之一，即有

$$T=B_{1989}-(B_{663}\cup B_{153}\cup B_{117}).$$

$$|T|=|B_{1989}|-|B_{663}\cup B_{153}\cup B_{117}|. \quad ①$$

为了计算 ① 式右端第 2 项，将利用容斥原理得到

$$\begin{aligned}&|B_{663}\cup B_{153}\cup B_{117}|\\=&|B_{663}|+|B_{153}|+|B_{117}|-|B_{663}\cap B_{153}|-|B_{663}\cap B_{117}|\\&-|B_{153}\cap B_{117}|+|B_{663}\cap B_{153}\cap B_{117}|.\end{aligned} \quad ②$$

(3) $B_k\cap B_n=B_{(n,k)}$，其中 (n,k) 表示 n 与 k 的最大公约数.

由定义直接看出，当 $h\mid n$ 时，$B_h\subset B_n$，从而有 $B_{(n,k)}=B_n\cap B_k$. 反之，若 $z_0\in B_n\cap B_k,n>k$，记 $n=pk+q,0\leqslant q<k$，则 $z_0\in B_q$，因而 $z_0\in B_k\cap B_q,q<k$. 由此递推即可得到 $z_0\in B_{(n,k)}$. 再由 $z_0\in B_n\cap B_k$ 的任意性便知 $B_n\cap B_k\subset B_{(n,k)}$. 综上即得 $B_n\cap B_k=B_{(n,k)}$.

(4) 由 (3) 的结果可得

$$B_{663} \cap B_{153} = B_{51}, B_{663} \cap B_{117} = B_{39},$$

$$B_{153} \cap B_{117} = B_9, B_{663} \cap B_{153} \cap B_{117} = B_3. \quad ③$$

将 ③ 代入 ②,便得

$$|B_{663} \cup B_{153} \cup B_{117}| = |B_{663}| + |B_{153}| + |B_{117}| - |B_{51}| - |B_{39}| - |B_9| + |B_3|. \quad ④$$

(5) 由已知

$$f^{(n)}(z) = z^{m^n}.$$

由此可知,$z \in B_n$ 的充分必要条件是

$$z \in S, \quad z = f^{(n)}(z) = z^{m^n},$$

即 z 是 $m^n - 1$ 次单位根.所以,$|B_n| = m^n - 1$.由此及 ④ 和 ① 式即得

$$|T| = m^{1989} - m^{663} - m^{153} - m^{117} + m^{51} + m^{39} + m^9 - m^3.$$

1·15 已知 5 个互不相同的正数可以分为两组,使得两组数的和相等,问一共有多少种不同的分为这样两组数的分法?

(第 48 届莫斯科数学奥林匹克,1985 年)

[解] (1) 如果分成和相等的两组数的个数分别为 1 和 4,即 5 数中最大数等于其他 4 个数之和,则显然只有 1 种分法.

(2) 设所分成的和相等的两组数的个数分别为 2 和 3:$\{m_1, m_2\}$,$\{m_3, m_4, m_5\}$ 且 $m_1 + m_2 = m_3 + m_4 + m_5$.由(1) 知,若存在另一种满足要求的分组法,一定仍是 2,3 分组.不妨设为 $m_1 + m_5 = m_2 + m_3 + m_4$,但这导致 $m_5 = m_2$,矛盾.

可见,满足题中要求的分组法只有 1 种.

1·16 n 元集合具有多少个不同的不交子集对?

(前捷克斯洛伐克数学奥林匹克,1973 年)

[解] 设 A 和 B 是两个不交子集.对于 n 元集合 M 中的任一元素 x,或者 $x \in A$,或者 $x \in B$,或者 $x \in M - (A \cup B)$,三者恰居其一.因而共有 3^n 种不同分法,即有 3^n 个不同的不交有序子集对.

如果子集对是无序的,即 $\{A, B\}$ 和 $\{B, A\}$ 视为同一对,则因 $\{\varnothing, \varnothing\}$ 次序交换后仍是它自己,故知这样的不交子集对的总数为

$$\frac{3^n - 1}{2} + 1 = \frac{3^n + 1}{2}.$$

1·17 对于 n 元集合 M 的任何两个子集 A 和 B,求得集合 $A \cap B$

的元素个数.求证所有求得的个数之和为 $n4^{n-1}$.

（波兰数学奥林匹克,1978 年）

[解] 我们用 A^c 表示 A 在 M 中的补集,即 $A^c = M - A$,于是有

$$\sum_{C=A\cap B}|C| = \sum_{A\subset M}\sum_{B\subset M}|A\cap B| = \sum_{A\subset M}\frac{1}{2}\sum_{B\subset M}(|A\cap B| + |A\cap B^c|)$$

$$= \sum_{A\subset M}2^{n-1}|A| = 2^{n-1}\cdot\frac{1}{2}\sum_{A\subset M}(|A| + |A^c|)$$

$$= n\cdot 4^{n-1}.$$

1·18 设 $S = \{1,2,\cdots,1990\}$,如果 S 的一个 31 元子集中的所有数之和是 5 的倍数,则称为"好子集".求 S 的所有好子集的个数.

（第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年）

[解] 对于 S 的任一子集 A,分别用 $|A|$ 和 $\|A\|$ 来表示 A 的元数和 A 中所有数之和.令

$F_k = \{A \mid A\subset S, |A| = 31, \|A\| \equiv k(\text{mod } 5)\}$,

其中 $k = 0,1,2,3,4$.

对于任意 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{31}\} = A \in F_0$,定义

$f_k(A) = \{x_1+k, x_2+k,\cdots,x_{31}+k\}$, $k = 1,2,3,4$,其中当 $x_i + k > 1990$ 时,理解为 $x_i + k - 1990$.因为 $31k\equiv k$, $1990\equiv 0(\text{mod } 5)$,所以 $f_k(A)\in F_k$.易见,映射 f_k 是由 F_0 到 F_k 的一个双射,故有

$$|F_0| = |F_1| = |F_2| = |F_3| = |F_4|.$$

又因 F_0,F_1,F_2,F_3,F_4 互不相交且 $\sum_{k=0}^{4}|F_k| = C_{1990}^{31}$.所以,$S$ 的好子集的总数为 $|F_0| = \frac{1}{5}C_{1990}^{31}$.

1·19 对给定的 $n\in N$,求和为 $6n$ 的所有不同的自然数三元组的个数.

（前南斯拉夫数学奥林匹克,1977 年）

[解] 设 (x,y,z) 是使 $x+y+z = 6n$ 的自然数三元组且有 $x\leqslant y\leqslant z$.当 $k = 1,2,\cdots,n$ 时,所有使 $x = 2k-1$ 的 (x,y,z) 为:

$(2k-1, 2k-1, 6n-4k+2), (2k-1, 2k, 6n-4k+1),$

$\cdots, (2k-1, 3n-k, 3n-k+1),$ ①

所有使 $x = 2k$ 的三元组为

$$(2k,2k,6n-4k),(2k,2k+1,6n-4k-1),$$
$$\cdots,(2k,3n-k,3n-k). \quad ②$$

① 和 ② 中三元组的个数为

$$S_k = [(3n-k)-(2k-2)]+[(3n-k)-(2k-1)]$$
$$= 6(n-k)+3.$$

求和即得所有三元组的总数为

$$S = \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n}[6(n-k)+3] = 6n^2-3n(n+1)+3n = 3n^2.$$

1·20 试证从$\{1,2,\cdots,49\}$中取出 6 个不同的数,使得其中至少有两个相邻,共有 $C_{49}^6 - C_{44}^6$ 种取法.

(保加利亚数学奥林匹克,1980 年)

[证] 首先,集合 $M = \{1,2,\cdots,49\}$ 的所有不同的 6 元子集的个数为 C_{49}^6.但是,其中 6 个数互不相邻的子集

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_6\},a_i+1 < a_{i+1},i = 1,2,3,4,5 \quad ①$$

不满足题中要求.因此,只须证明这样 6 元子集的个数为 C_{44}^6.

记满足 ① 的所有 6 元子集的集合为 A 并令

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_6\} \longrightarrow \{b_1,b_2,\cdots,b_6\}, \quad ②$$

其中

$$b_i = a_i - i + 1, i = 1,2,3,4,5,6. \quad ③$$

易见,$b_1,b_2,\cdots,b_6$ 互不相同且 $1 \leqslant b_1 < b_2 < \cdots < b_6 \leqslant 44$.
容易验证,由 ② 和 ③ 定义的映射是由集合 A 到集合 $S = \{1,2,\cdots,44\}$ 的所有不同的 6 元子集的集合 B 的一个双射.从而有

$$|A| = |B| = C_{44}^6.$$

1·21 甲队有 $2m$ 个人,乙队有 $3m$ 个人,现自甲队抽出 $14-m$ 人,乙队抽出 $5m-11$ 人,参加游戏.问甲、乙两队各有多少人?参加游戏的人有多少种不同选法?

(中国上海市数学竞赛,1962 年)

[解] 抽出人数必须满足下面的不等式组

$$\begin{cases} 0 \leqslant 14-m \leqslant 2m \\ 0 \leqslant 5m-11 \leqslant 3m \\ m \in N. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\frac{14}{3}\leqslant m\leqslant 14\\ \frac{11}{5}\leqslant m\leqslant\frac{11}{2}\\ m\in N.\end{cases}$$
$$\frac{14}{3}\leqslant m\leqslant\frac{11}{2},\qquad m\in N.$$
于是
$$m=5.$$
故甲队有 $2m=10$ 人,

乙队有 $3m=15$ 人.

自甲队抽出 $14-m=9$ 人,有 $C_{10}^{9}=10$ 种,

自乙队抽出 $5m-11=14$ 人,有 $C_{15}^{14}=15$ 种.

故参加游戏的人共有
$$C_{10}^{9}C_{15}^{14}=150$$
种不同的选法.

1·22 把含有12个元素的集合分成6个子集,使每个子集恰含两个元素,共有多少种分法?

(波兰数学奥林匹克,1970年)

[**解1**] 首先从12个元素中任取两个元素作为1个子集,共有 C_{12}^{2} 种选法.然后从余下的10个元素中任选两个元素作为1个子集,共有 C_{10}^{2} 种选法.依次选下去,直到分成6个子集为止,共有 $C_{12}^{2}\cdot C_{10}^{2}\cdot C_{8}^{2}\cdot C_{6}^{2}\cdot C_{4}^{2}\cdot C_{2}^{2}$ 种选法.

由于题中要求的6个子集与顺序无关,故对于分成6个子集的每种分法,在上述计数过程中恰被计数6!次.所以,满足要求的分法的种数为
$$S=\frac{1}{6!}C_{12}^{2}\cdot C_{10}^{2}\cdot C_{8}^{2}\cdot C_{6}^{2}\cdot C_{4}^{2}=11\times 9\times 7\times 5\times 3=10395.$$

[**解2**] 将12个元素分别记为 $a_1,a_2,\cdots,a_{12}$.第1个子集中除含 a_1 之外还有1个元素,可从后11个元素中任取,共有11种选法.然后在余下的10个元素中取下标最小的1个和另外9个元素中任取的1个元素组成第2个子集,共有9种选法.这样依次取下去,所得的分法互不相同,所以分法总数为

$S=11\times 9\times 7\times 5\times 3=10395.$

1·23 设 n 为偶数,从整数 $1,2,\cdots,n$ 中选取四个不同的数 $a,b,$

c,d,满足

$$a+c=b+d.$$

证明不同的选取方法(不考虑 a,b,c,d 的顺序)共有 $\frac{n(n-2)(2n-5)}{24}$ 种.

(澳大利亚数学奥林匹克,1989 年)

[证] 不妨设 $a>b>d$.由

$$a+c=b+d$$

得

$$d>c.$$

考虑从 $1,2,\cdots,n$ 中选出 3 个数 $a>b>c$,且满足 $a+c-b\neq b$ 的选法:从 n 个数选三个数 $a>b>c$ 有 C_n^3 种选法,其中满足 $a+c-b=b$,即 $a+c=2b$ 的,a 和 c 同奇偶的选法有

$$2C_{\frac{n}{2}}^{2}=2\cdot\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}=\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)(\text{种}).$$

所以取出的三元数组

$$\{(a,b,c)\mid n\geqslant a>b>c\geqslant 1,a+c-b\neq b\}$$

共有

$$C_n^3-\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)=\frac{n(n-2)(2n-5)}{12}\text{种}.$$

上述每个三元数组 (a,b,c) 确定一个符合题目要求的四元数组 (a,b,c,d),其中只要 $d=a+c-b$ 即可.

但每个四元数组 (a,b,c,d) 出现两次 (a,b,c) 和 (a,d,c)(因为 $d>c$)产生的四元数组.因此所求的答案为 $\frac{n(n-2)(2n-5)}{24}$.

1·24 把 n 个物体排成一行,如果这些物体的一个子集中任何两个元素均不相邻,则称这个子集是不亲切的.

证明含有 k 个元素的不亲切子集的个数是 C_{n-k+1}^{k}.

(第 16 届美国普特南数学竞赛,1956 年)

[证] 对于 n 个物体的有序集合的每个子集 S,我们把它的元素按照原来的顺序排成一行,每个元素都记为 A,再在空位上补上若干个 B,两者的总数为 n,就成为 A 与 B 的一个 n 级排列.其中,如果任何两个 A 都不相邻,则称这样的排列为不亲切排列.

这样每一个不亲切子集都对应一个不亲切排列，从而我们只需证明由 k 个 A 与 $n-k$ 个 B 组成的不亲切排列总数为 C_{n-k+1}^{k}.

事实上，我们把 $n-k$ 个 B 排成一行，这样在 $n-k$ 个 B 之间（包括两端）就有 $n-k+1$ 个空档，在这 $n-k+1$ 个空档中选出 k 个空档放入 A，这样，任意两个 A 都不相邻，就构成了一个不亲切排列，而在 $n-k+1$ 个空档中选出 k 个空档的选法恰有 C_{n-k+1}^{k}，从而本题得证.

1·25　S 为 m 个正整数对 (a,b)（$1\leqslant a<b\leqslant n$）所成的集. 求证至少有 $4m\cdot\dfrac{m-\frac{n^2}{4}}{3n}$ 个三元数组 (a,b,c) 使得 (a,b)，(a,c) 与 (b,c) 都属于 S.

（亚太地区数学奥林匹克，1989 年）

［证］　考虑 n 个点 $1,2,\cdots,n$. 如果 $(i,j)\in S$，则在 i 与 j 之间连一条线，我们来求这个图中的三角形的个数（即具有题中所述性质的三元数组 (a,b,c) 的个数）T.

设 $(i,j)\in S$. 记从 i 引出的线有 d_i 条（d_i 条中包含有 (i,j) 这一条）.

考虑以 (i,j) 为边的三角形，至少有

$$d_i+d_j-n(\text{个}).$$

由于每个三角形有三条边，所以 S 中至少有

$$T=\frac{1}{3}\sum_{(i,j)\in S}(d_i+d_j-n) \qquad ①$$

个三角形.

对于每个固定的 i，恰有 d_i 个 j 使 $(i,j)\in S$，所以在 ① 中的 d_i 出现了 d_i 次.

又注意到 (i,j) 既可作为从 i 引出的边又可作为从 j 引出的边，被计算了两次. 所以

$$\sum_{i=1}^{n}d_i=2m. \qquad ②$$

又由于

$$\sum_{(i,j)\in S}n=n\sum_{(i,j)\in S}1=nm. \qquad ③$$

由于 ① 中的 d_i 出现了 d_i 次，所以

$$\sum_{(i,j)\in S}(d_i+d_j)=\sum_{i=1}^{n}d_i^2.$$

由柯西不等式及②式得

$$\sum_{i=1}^{n}d_i^2\geqslant\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}d_i)^2$$

$$=\frac{1}{n}(2m)^2=\frac{4m^2}{n}. \qquad ④$$

由①,③及④得

$$T\geqslant\frac{1}{3}(\frac{4m^2}{n}-nm)=\frac{4m(m-\frac{n^2}{4})}{3n}.$$

1·26 若 X 是一个有限集,$|X|$ 表示集 X 中的元素的个数,S,T 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集,如果对每一个 $s\in S,s>|T|$,且对每一个 $t\in T,t>|S|$,就称有序对 (S,T) 是"允许的".

问集合 $\{1,2,\cdots,10\}$ 有多少个"允许的"有序子集对?并证明你的结论.

(第51届美国普特南数学竞赛,1990年)

[解] 记 A_n 为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的"允许的"有序子集对的数目.设 (S,T) 是一对"允许的"有序子集对.又设 S 有 i 个元素,T 有 j 个元素.

由题意,S 中的 i 个元素取自 $j+1,j+2,\cdots,n$. T 中的 j 个元素取自 $i+1,i+2,\cdots,n$.所以有

$$A_n=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}C_{n-i}^{j}C_{n-j}^{i}.$$

因为 $i\leqslant n-j,j\leqslant n-i$,故 $i+j\leqslant n$.记 $k=i+j$,则

$$A_n=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}C_{n-i}^{j}C_{n-j}^{i}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}C_{n-i}^{k-i}C_{n+i-k}^{i}.$$

交换求和次序得

$$A_n=\sum_{k=i}^{n}\sum_{i=0}^{n}C_{n+i-k}^{i}C_{n-i}^{k-i}=\sum_{k=0}^{n}C_{2n-k+1}^{k}.$$

上式的最后一个和式就是裴波那契数列($F_0=0,F_1=1,F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$)的第 $2n+2$ 项 F_{2n+2}.

所以对本题

$$A_{10}=F_{22}=17711.$$

1·27　将集合$\{1,2,\cdots,n\}$分成3个子集A_1,A_2,A_3,其中允许有空集,求满足下列条件的分法的种数:

(1) 当将每个子集中的数按递增顺序排列时,每相邻的两数的奇偶性不同;

(2) 若A_1,A_2,A_3均非空,则其中恰有1个集合的最小元是偶数.

（第28届国际数学奥林匹克预选题,1987年）

[解]　设$1\in A_1$,且A_2的最小元小于A_3的最小元.我们用依次将$2,3,\cdots,n$按要求放入3个集合的方法来构造A_1,A_2,A_3.首先,2有两种放法:放入A_1或A_2.假设小于k的自然数均有两种方法且已放妥.考察k的放法.

(1)A_2,A_3中尚均未放入元素.这时k可放入A_1或A_2,但不能放入A_3,共有两种放法.

(2)A_2中已有元素,但A_3中尚未放入元素.

(i)k与A_2中的最小数同为奇数.因为集合A_1和A_2中已放入的$k-1$个数中奇偶各半,故这两个集合中的最大元都是偶数.从而k可放入A_1或A_2,但不能放入A_3,共有两种放法.同理,当k与A_2的最小数同为偶数时也共有两种放法.

(ii)k与A_2中的最小数奇偶性不同.设k为奇数,于是A_1和A_2中已放入的$k-1$个数中奇偶各半.从而A_1和A_2中的最大数奇偶性不同.这样,奇数k恰可放入A_1与A_2之一,同时又可放入A_3,共有两种放法.同理,当k为偶数时也共有两种放法.

(3)A_2和A_3中均已有元素.在此之前$k-1$有两种放法.不妨设$k-1$既可放入A_1又可放入A_2而实际上放入了A_1,于是k可放入A_1或A_3,但不能放入A_2,共有两种放法.

综上可知,从2到n的每个数都有两种不同放法.从而知满足要求的分拆种数为2^{n-1}.

1·28　设集合$A=\{1,2,3,\cdots,366\}$.如果A的一个二元子集$B=\{a,b\}$满足$17\mid(a+b)$,则称B具有性质P.

(1) 求A的具有性质P的所有二元子集的个数;

(2) 求A的两两不交的具有性质P的二元子集个数的最大值.

（中国河北省数学竞赛,1994年）

[解]　$17\mid(a+b)$即为$a+b\equiv 0 \pmod{17}$,这又当且仅当

$a \equiv k \pmod{17}, b \equiv 17 - k \pmod{17}, k = 0,1,\cdots,16.$ ①

令

$A_k = \{n \mid n \equiv k \pmod{17}, n \in A\}, k = 0,1,\cdots,16$，于是 $A = \bigcup_{k=0}^{16} A_k$ 且 $|A_k| = 22, k = 1,2,\cdots,9$；$|A_k| = 21, k = 10,11,\cdots,16,0$. 于是 ① 式可改写成：$17 \mid (a+b)$ 当且仅当

$$a \in A_k, b \in A_{17-k}, k = 0,1,\cdots,16,$$

其中 $A_{17} = A_0$.

当 $a, b \in A_0$ 时，具有性质 P 的子集的个数为 $C_{21}^2 = 210$.

当 $1 \leqslant k \leqslant 7, a \in A_k, b \in A_{17-k}$ 时，具有性质 P 的二元子集的个数为 $21 \times 22 = 462$.

当 $a \in A_8, b \in A_9$ 时，具有性质 P 的二元子集的个数为 $22^2 = 484$.

综上可知，具有性质 P 的二元子集的总数为

$$210 + 462 \times 7 + 484 = 3928.$$

为计算(2)，注意，当 $a \in A_0, b \in A_0$ 时，由于 $|A_0| = 21$，故两两不交的二元子集的个数的最大值为 10. 对于 $1 \leqslant k \leqslant 7, a \in A_k, b \in A_{17-k}$. 由于 $|A_k| = 22, |A_{17-k}| = 21$，故两两不交的二元子集的个数的最大值为 21. 同理，当 $a \in A_8, b \in A_9$ 时，两两不交的二元子集最多有 22 个. 所以，两两不交的具有性质 P 的二元子集的个数的最大值为

$$10 + 21 \times 7 + 22 = 179.$$

1·29 设 P 是一个奇素数. 考察集合 $\{1,2,\cdots,2p\}$ 的满足下列两个条件的子集 A：

(1) $|A| = p$；

(2) A 中所有元素之和可被 p 整除.

试求所有这样的子集 A 的个数.

（第 36 届国际数学奥林匹克，1995 年）

[解 1] 记 $W = \{1,2,\cdots,2p\}$ 并令

$$U = \{1,2,\cdots,p\}, V = \{p+1, p+2, \cdots, 2p\}.$$

易见，对于 W 的任一异于 U 和 V 的 p 元子集 E，都有

$$E \cap U \neq \varnothing, E \cap V \neq \varnothing. \quad ①$$

如果 W 的两个满足条件 ① 的 p 元子集 S 和 T 适合下列两个条件

(i) $S\cap V=T\cap V$;

(ii) 只要编号适当, $S\cap U$ 的元素 $s_1,s_2,\cdots,s_m$ 和 $T\cap U$ 的元素 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 对于适当的 $k\in\{0,1,\cdots,p-1\}$,有

$$s_i-t_i\equiv k(\bmod\ p),i=1,2,\cdots,m.$$

我们就将这两个子集 S 和 T 划入同一类.

对于同一类中的不同子集 S 和 T,显然有 $k\neq 0$. 因而有

$$\sum_{i=1}^{p}s_i-\sum_{i=1}^{p}t_i\equiv mk\not\equiv 0(\bmod\ p).$$

这表明同一类中的不同子集的元素和模 p 的余数各不相同,因而每一类中至多有 p 个子集.

另一方面,对于 W 的每个异于 U 和 V 的 p 元子集 S,当保持 $S\cap V$ 中的元素不动,而将 $S\cap U$ 中的元素在 U 中进行轮换时,还可得到 $p-1$ 个 p 元子集,这 p 个子集当然属于同一类. 所以每一类都恰有 p 个子集,其中恰有一个子集的元素之和能被 p 整除.

综上可知,集 W 的满足条件(1) 和(2) 的子集的总数为

$$\frac{1}{p}(C_{2p}^{p}-2)+2.$$

[解 2] 为计算 W 的满足条件(1) 和(2) 的子集的个数,我们考察如下的生成函数

$$g(t,x)=(t+x)(t+x^2)\cdots(t+x^{2p})=\sum_{k,m}a_{km}t^kx^m, \quad ①$$

其中 a_{km} 是展开式中 t^kx^m 项的系数,它恰好表示 W 的适合下列两个条件的子集的个数.

(i) 该子集的元数为 $2p-k$;

(ii) 该子集的元素之和为 m.

记 $\varepsilon=e^{i\frac{2\pi}{p}}$ 并令 $E=\{\varepsilon^0,\varepsilon^1,\cdots,\varepsilon^{p-1}\}$,于是由 ① 有

$$\begin{aligned}\sum_{t\in E}\sum_{x\in E}g(t,x)&=\sum_{t\in E}\Big(\sum_{k,m}a_{km}t^k\big(\sum_{x\in E}x^m\big)\Big)\\&=\sum_{t\in E}\Big(\sum_{k,m,p,m}a_{km}t^k\Big)p=\Big(\sum_{p\mid k,p\mid m}a_{k,m}\Big)p^2.\ ②\end{aligned}$$

上述计算过程中用到如下的关系式

$$\sum_{j=0}^{p-1}\varepsilon^{jn}=\begin{cases}0,当\ p\nmid n,\\ p,当\ p\mid n.\end{cases}$$

另一方面，我们利用 $g(t,x)$ 的定义式而不利用其展开式来计算同一和式，又有

$$\begin{aligned}\sum_{t\in E}\sum_{x\in E}g(t,x)&=\sum_{t\in E}\sum_{x\in E}(t+x)(t+x^2)\cdots(t+x^{2p})\\&=\sum_{t\in E}\Big((t+1)^{2p}+\sum_{x\in E-\{1\}}(t+x)(t+x^2)\cdots(t+x^{2p})\Big)\\&=\sum_{t\in E}\Big((t+1)^{2p}+(p-1)(t^p+1)^2\Big)\\&=\sum_{t\in E}(t+1)^{2p}+4p(p-1)\\&=\sum_{t\in E}\Big(1+C_{2p}^{1}t+\cdots+C_{2p}^{2p}t^{2p}\Big)+4p(p-1)\\&=p(1+C_{2p}^{p}+1)+4p(p-1)=p(C_{2p}^{p}+4p-2).\qquad ③\end{aligned}$$

比较 ② 与 ③，得到

$$\sum_{p\mid k,p\mid m}a_{km}=\frac{1}{p}\Big(C_{2p}^{p}+4p-2\Big)=\frac{1}{p}\Big(C_{2p}^{p}-2\Big)+4.$$

上式左端除去 $a_{op(2p+1)}=1=a_{2p0}$ 这两项之后，余下的诸项之和就是满足条件(1) 和(2) 的子集的总数. 从而所求的子集的总数为

$$\sum_{p\mid k,p\mid m}a_{km}-2=\frac{1}{p}\Big(C_{2p}^{p}-2\Big)+2.$$

1·30 求满足 $[a,b,c]=20000$，$(a,b,c)=20$ 的所有正整数三元数组 $\{a,b,c\}$ 的组数.

(中国天津市代表队测验题，1992 年)

[解 1] 因为 $20000=2^5\times5^4$，$20=2^2\times5$，故可写

$$a=2^{a_1}5^{a_2},\ b=2^{b_1}5^{b_2},\ c=2^{c_1}5^{c_2},$$

其中指数满足关系式 $2\leqslant a_1,b_1,c_1\leqslant5$，$1\leqslant a_2,b_2,c_2\leqslant4$. 可见，$(a_1,a_2)$，$(b_1,b_2)$，$(c_1,c_2)$ 都将取值于如下的集合：

$$V=\{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$$

且使得

$$\min\{a_1,b_1,c_1\}=2,\max\{a_1,b_1,c_1\}=5,$$
$$\min\{a_2,b_2,c_2\}=1,\max\{a_2,b_2,c_2\}=4. \quad ①$$

因为 n 个元素中取 k 个元素的有重复的组合数为 C_{n+k-1}^k，故知从 V 中取 3 个元素的有重复的组合数为 C_{18}^3.

① 式中的 4 个约束条件恰有 1 个不成立的组合数为 C_{14}^3；恰有两个不成立时，若两个条件同行，则组合数为 C_{10}^3，若不同行，则组合数为 C_{11}^3；恰有 1 个成立时，组合数为 C_8^3；4 个约束条件都不成立时，组合数为 C_6^3. 于是由容斥原理知，所求的取法总数为

$$m=C_{18}^3-4C_{14}^3+4C_{11}^3+2C_{10}^3-4C_8^3+C_6^3$$
$$=56.$$

[解 2] 令 $a'=\frac{a}{20},b'=\frac{b}{20},c'=\frac{c}{20}$，于是条件化为 $(a',b',c')=1,[a',b',c']=1000$. 再写

$$a'=2^{a_1}5^{a_2},b'=2^{b_1}5^{b_2},c'=2^{c_1}5^{c_2},$$

其中 $0\leqslant a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2\leqslant 3$ 且满足

$$\min\{a_1,b_1,c_1\}=0,\max\{a_1,b_1,c_1\}=3,$$
$$\min\{a_2,b_2,c_2\}=0,\max\{a_2,b_2,c_2\}=3.$$

不妨设 $0\leqslant a_1\leqslant b_1\leqslant c_1\leqslant 3$.

(1) $b_1=0$，即 $a_1=b_1=0,c_1=3$.

(i) $\{a_2,b_2,c_2\}=\{0,1,3\}$ 或 $\{0,2,3\}$，共有 6 种不同组合；

(ii) $\{a_2,b_2,c_2\}=\{0,0,3\}$ 或 $\{0,3,3\}$，共有 4 种不同组合.

(2) $b_1=3$. 与(1)类似地可得共有 10 种不同的组合.

(3) $b_1=1$，于是 $a_1=0,c_1=3$.

(i) $\{a_2,b_2,c_2\}=\{0,1,3\}$ 或 $\{0,2,3\}$，共有 12 种不同组合；

(ii) $\{a_2,b_2,c_2\}=\{0,0,3\}$ 或 $\{0,3,3\}$，共有 6 种不同组合.

(4) $b_1=2$. 与(3)类似地可得共有 18 种不同组合.

综上可知，所有满足要求的不同三元数组共有 56 组.

1·31 对于满足关系式

$$a_1+2a_2+\cdots+na_n=1979 \quad ①$$

的 n 元自然数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，当 n 为偶数时称为偶的，当 n 为奇数

时称为奇的，求证奇组与偶组的组数同样多.

（第 21 届国际数学奥林匹克候选题，1979 年）

［证］ 首先，将满足条件 ① 的所有 n 元数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的集合记为 A_n. 令

$$A_n \ni a = (a_1,a_2,\cdots,a_n) \longrightarrow (b_1,b_2,\cdots,b_n) = b,$$

其中 $b_i = a_i + a_{i+1} + \cdots + a_n, i = 1,2,\cdots,n$. 易见，$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1979$ 且 $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$. 将所有这样的 n 元数组 b 的集合记为 B_n，则上述对应是由 A_n 到 B_n 的一个双射. 分别用 A 和 B 表示所有的 A_n，B_n 的并集. 于是只要对集合 B 证明同样的结论就行了.

对于 $b = (b_1,b_2,\cdots,b_n) \in B_n$，用 $\pi(b)$ 表示 n 元数组 b 的最后一个数 b_n，用 $\sigma(b)$ 表示使 $b_s = b_1 - s + 1$ 的下标 s 的最大值，其中 $1 \leqslant s \leqslant n$. 当 $\sigma(b) = s$ 时，便有 $b_2 = b_1 - 1, b_3 = b_2 - 1, \cdots, b_s = b_{s-1} - 1, b_{s+1} < b_s - 1$. 我们在集合 B 上定义映射 α 和 β. 如果 $\pi(b) \leqslant \sigma(b)$，则 $b_n \leqslant n - 1$. 否则便有 $n - 1 < b_n = \pi(b) \leqslant \sigma(b) \leqslant n$，从而 $b_n = \sigma(b) = n$，于是有

$$\begin{aligned}1979 &= b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1 = n + (n+1) + \cdots + (2n-1) \\ &= \frac{1}{2}n(3n-1).\end{aligned}$$

由于 1979 为素数，故上式对任何 $n \in N$ 都不成立. 这样，对于 $b = (b_1,b_2,\cdots,b_n) \in B$，令

$$\alpha(b) = (b_1 + 1, b_2 + 1, \cdots, b_{\pi(b)} + 1, b_{\pi(b)+1}, \cdots, b_{n-1}).$$

于是有 $\pi(\alpha(b)) = b_{n-1} > b_n = \pi(b) = \sigma(\alpha(b))$. 如果 $\pi(b) > \sigma(b)$，则令

$$\beta(b) = (b_1 - 1, b_2 - 1, \cdots, b_{\sigma(b)} - 1, b_{\sigma(b)+1}, \cdots, b_n, \sigma(b)),$$

其中 $b_n = \pi(b) > \sigma(b)$. 当 $\sigma(b) = n$ 时，有 $b_n - 1 > \sigma(b)$. 否则便有 $n = \sigma(b) < \pi(b) = b_n \leqslant \sigma(b) + 1 = n + 1$，从而有 $b_n = n + 1$. 于是

$$1979 = b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1 = \frac{1}{2}n(3n+1).$$

由于 1979 为素数，这对任何 $n \in N$ 都不成立. 因此，当 $\sigma(b) = n$ 时有

$$\beta(b) = (b_1 - 1, b_2 - 1, \cdots, b_n - 1, \sigma(b)) \in B_{n+1}.$$

这表明 $\sigma(\beta(b)) = n = \sigma(b)$，从而 $\pi(\beta(b)) = \sigma(b) = \sigma(\beta(b))$. 当 $\sigma(b) \leqslant n - 1$ 时，容易验证，$\pi(\beta(b)) = \sigma(b) \leqslant \sigma(\beta(b))$. 可见，对所有 $b \in B$，均有 $\pi(\beta(b)) \leqslant \sigma(\beta(b))$. 由定义可知 $\alpha(\beta(b)) = b$，

$\beta(\alpha(b)) = b$.

用 E 和 F 分别表示所有 B_{2m-1} 和 $B_{2m}(m \in N)$ 的并集,即分别表示所有奇组与偶组的集合.定义映射 $\gamma: E \longrightarrow F$ 如下:

$$\gamma(b) = \begin{cases} \alpha(b), \text{当 } \pi(b) \leqslant \sigma(b), \\ \beta(b), \text{当 } \pi(b) > \sigma(b). \end{cases}$$

容易验证,映射 γ 是由 E 到 F 的双射.这表明集合 B,从而集合 A 中的奇组与偶组个数同样多.

1·32　设 $1 \leqslant k < n$.考虑所有和为 n 的正整数的有限数列,求其中项数为 k 的数列的个数 $T(n,k)$.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年）

［解］　设 $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 是一个正整数数列,满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$.令

$$y_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_i, i = 1,2,\cdots,k,$$

则有 $0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_k = n$.于是 $\{y_1, y_2, \cdots, y_{k-1}\}$ 是集合 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ 的一个 $k-1$ 元子集,且对应

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_k\} \longrightarrow \{y_1, y_2, \cdots, y_{k-1}\}$$

是个双射,即一对一的对应.故得

$$T(n,k) = C_{n-1}^{k-1}.$$

1·33　整数 $1,2,\cdots,n$ 的排列满足:每个数或者大于它前面的所有数,或者小于它前面的所有数.试问有多少个这样的排列?

（第 21 届加拿大数学奥林匹克,1989 年）

［解］　记所求的排列个数为 a_n.

$n = 1$ 时,只有数 1,显然 $a_1 = 1$.

对于 $n \geqslant 2$,如果数 n 排在第 i 位,则它之后的 $n-i$ 个数完全确定,即只能是 $n-i, n-i-1, \cdots, 1$,而它之前的 $i-1$ 个数有 a_{i-1} 种排法.考虑到 n 的不同位置,则必有

$$a_n = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}.$$

由 $a_1 = 1$ 可得

$$a_2 = 1 + a_1 = 2,$$

$$a_3 = 1 + a_1 + a_2 = 4 = 2^2,$$

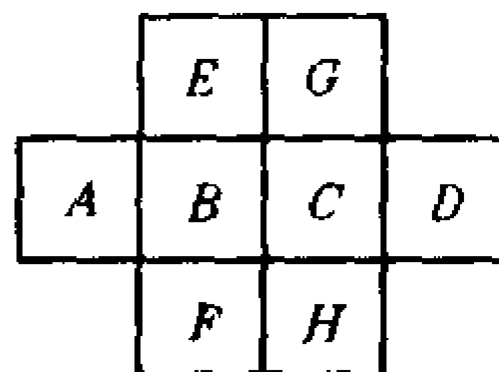
$$a_4 = 1 + a_1 + a_2 + a_3 = 8 = 2^3.$$

由此可猜测

$$a_n = 2^{n-1}.$$

此结论不难用数学归纳法证明.

1·34 在如下被截去的棋盘中,有 8 个正方形,如果两个正方形至少有一个公共顶点,就算它们是相连的.用 8 个数 1,2,3,4,5,6,7,8 给这些正方形标有不同的数,且相连的正方形标号数不相继,问不同的填数方法共有多少种?



(新加坡数学奥林匹克,1987 年)

[解] 如图,B 与 6 个正方形相连,将棋盘标号,由题设,相连的正方形标号数不相继,则 B 必须是 1 或 8.同样 C 必须是 1 或 8.

(1)$B = 1, C = 8$.这时 $D = 2, A = 7$,即 A, C, D 由 B 确定.

剩下的数是 3,4,5,6,和方格 E, F, G, H.由于 E, F 与 A 相连,则 E, F 只能在 3,4 上选择,G, H 在 5,6 上选择,所以共有二种选法.

(2)$B = 8, C = 1$.同样也有两种选法.

所以共有 4 种选法.

1·35 用 94 块规格为 $4 \times 10 \times 19$ 的砖一块放在一块的上面叠成一个 94 块砖高的塔,每块砖可随意摆放而为塔提供的高度分别为 4,10,19.问 94 块砖全部放上后,叠置成的塔的高度共有多少个不同的值?

(第 12 届美国数学邀请赛,1994 年)

[解] 首先注意,如果有 5 块砖各为塔高提供 10 的高度,则当把其中 3 块放扁,各提供 4 的高度,而另两块立起来,各提供 19 的高度时,塔高不变.所以在计算塔的不同高度时,总可以假定贡献为 10 的砖的块数小于 5.

设对塔的高度的贡献为 10,19 的砖的块数分别为 x, y,则贡献为 4 的砖的块数为 $94 - x - y$.于是塔的高度为

$$4(94 - x - y) + 10x + 19y = 376 + 6x + 15y, \quad ①$$

其中 $0 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant 94 - x$.从而不同的非负整数对 (x, y) 共有 $95 + 94 + 93 + 92 + 91 = 465$ 种.因此叠成的塔的高度至多有 465 个不同的值.

下面来证明①式给出的 465 个值互不相同.若不然,设有不同数对

$(x,y),(u,v)$ 所对应的塔高相等,即有

$$376+6x+15y=376+6u+15v. \qquad ②$$

由 ② 即得

$$2(x-u)=5(v-y). \qquad ③$$

③ 式表明 $5\mid(x-u)$.因为 $0\leqslant x\leqslant 4,0\leqslant u\leqslant 4$,故 $-4\leqslant x-u\leqslant 4$.从而必有 $x=u$.由此及 ③ 又得 $v=y$,矛盾.

综上可知,塔的高度共有 465 个不同的值.

1·36　求从 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中取出满足下列条件的 k 个不同元素 $(j_1,j_2,\cdots,j_k)$ 的组合数:

(1)$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n$;

(2)$j_i-j_{i-1}\geqslant m,i=2,3,\cdots,k,m\in N$.

(中国国家集训队训练题,1986 年)

[解]　令

$$j'_i=j_i-(i-1)(m-1),i=1,2,\cdots,k,$$

则由(2) 知

$$j'_{i+1}-j'_i=j_{i+1}-j_i-(m-1)\geqslant 1,i=1,2,\cdots,k-1.$$

再由(1) 又有

$$1\leqslant j'_1<j'_2<\cdots<j'_k\leqslant n-(k-1)(m-1).$$

易见,这个对应是个双射.从而知所求的组合数为 $C^k_{n-(k-1)(m-1)}$.

1·37　求从 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中任取 k 个元素的可以重复的组合数.

(中国国家集训队训练题,1986 年)

[解]　设取出的 k 个数为 $1\leqslant j_1\leqslant j_2\leqslant\cdots\leqslant j_k\leqslant n$.为了便于计算,我们作如下的变换:

$$j_i\longrightarrow j'_i=j_i+i-1,i=1,2,\cdots,k,$$

于是有

$$1\leqslant j'_1<j'_2<j'_3<\cdots<j'_k=j_k+k-1\leqslant n+k-1.$$

且容易验证,若 $(i_1,i_2,\cdots,i_k)\neq(j_1,j_2,\cdots,j_k)$,则变换后仍有 $(i'_1,i'_2,\cdots,i'_k)\neq(j'_1,j'_2,\cdots,j'_k)$.此外,这个变换还是可逆的:即对任意满足条件 $1\leqslant j'_1<j'_2<\cdots<j'_k\leqslant n+k-1$ 的一组 $(j'_1,j'_2,\cdots,j'_k)$,都有一组 $(j_1,j_2,\cdots,j_k)$ 对应于它.实际上,这时有

$$j_i=j'_i-i+1,i=1,2,\cdots,k.$$

可见,这个对应是个双射.因为$(j'_1,j'_2,\cdots,j'_k)$的取法总数为C_{n+k-1}^k,故所求的组合数也等于C_{n+k-1}^k.

1·38 求从集合$\{1,2,\cdots,n\}$中任取满足下列条件的k个数$\{j_1,j_2,\cdots,j_k\}$的组合数:

(1)$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n$;

(2)$j_{h+1}-j_h\geqslant m,h=1,2,\cdots,k-1$,其中$m>1$为固定的正整数;

(3)存在$h_0,1\leqslant h_0\leqslant k-1$,使得$j_{h_0+1}-j_{h_0}\geqslant m+1$.

(中国国家集训队训练题,1991年)

[解] 由36题的结果知,满足条件(1)和(2)的k元数组的个数为$C_{n-(k-1)(m-1)}^k$.这些数组中不满足条件(3)的数组必使(2)中等号成立,即这k个数是一个以m为公差的等差数列.显然,这样的数组被它的首项所惟一确定.而在$\{1,2,\cdots,n\}$中,可以作为这样首项的数恰有$n-(k-1)m$个,从而不满足条件(3)而只满足条件(1)、(2)的数组个数为$n-(k-1)m$个.所以,所求的k元数组的组合数为$C_{n-(k-1)(m-1)}^k-n+(k-1)m$.

1·39 用自然数来组成数列,使数列中的每一项都比它前一项的平方还大,而最后一项均为1969(这类数列可以具有不同的长度).求证具有这种性质的数列的个数少于1969.

(第32届莫斯科数学奥林匹克,1969年)

[证] 我们把以n结尾并具有题中所述性质的数列的总数记为$f(n)$,则待证的结论是$f(1969)<1969$.

首先,容易看出,$f(1)=1,f(2)=2,f(3)=2,f(4)=2$.

设当$k\geqslant5$时,对所有$n<k$都有$f(n)\leqslant n$.则当$n=k$时,把所有满足要求的数列的最后一项k去掉,则除了只有一项k的数列之外,其余数列都变成最后一项小于$\sqrt{k}$的数列且仍然具有题中要求的性质.故由归纳假设有

$$f(k)\leqslant1+\sum_{i=1}^{[\sqrt{k}]}f(i)\leqslant1+\sum_{i=1}^{[\sqrt{k}]}i$$

$$=1+\frac{1}{2}[\sqrt{k}]([\sqrt{k}]+1)<k,$$

这就完成了归纳证明.特别当$n=1969$时,便有$f(1969)<1969$.

第一章 计数

1·40　从字母表{0,1,2,3,4}中取 n 个数组成"词",使其中每相邻的两数之差都是1,问共能构成多少个单词?

（第28届国际数学奥林匹克预选题,1987年）

[解]　将要计数的单词称为"合格词".设末位数字为0,1,2的合格词的个数分别为 a_n, b_n, c_n. 由对称性知,末位为3和4的合格词的个数分别为 b_n 和 a_n. 按题中要求应有

$$a_{n+1} = b_n, b_{n+1} = a_n + c_n, c_{n+1} = 2b_n.$$

由此可得

$$b_{n+2} = 3b_n.$$

由于 $b_1 = 1, b_2 = 2$,故得

$$b_n = \begin{cases} 3^k, n = 2k+1, \\ 2 \times 3^{k-1}, n = 2k. \end{cases}$$

设合格词的总数为 m_n,则有 $m_1 = 5$ 且

$$\begin{aligned} m_n &= 2a_n + 2b_n + c_n = 2b_n + 4b_{n-1} \\ &= \begin{cases} 2 \times 3^k + 4 \times 2 \times 3^{k-1} = 14 \times 3^{k-1}, n = 2k+1, \\ 2 \times 2 \times 3^{k-1} + 4 \times 3^{k-1} = 8 \times 3^{k-1}, n = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

1·41　1,2,3,4,5,6的排列 $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$ 具有如下性质:对于 $i = 1,2,3,4,5$, $(n_1, n_2, \cdots, n_i)$ 都不是 $(1,2,\cdots,i)$ 的排列.求这种排列的个数.

（英国数学奥林匹克,1991年）

[解1]　显然, $n_1 \neq 1$.

$n_1 = 6$ 的5!个排列均满足题中要求.

$n_1 = 5$ 的5!个排列中, $n_6 = 6$ 的4!个不满足要求,故满足要求的排列个数为 $5! - 4!$.

$n_1 = 4$ 的5!个排列中, $n_6 = 6$ 或 $n_6 = 5, n_5 = 6$ 的排列不满足要求,故满足要求的排列个数为 $5! - 4! - 3!$.

$n_1 = 3$ 的5!个排列中,　形如3××××6,3×××65,3××645,3××564,3××654的排列不满足要求,故满足要求的排列个数为 $5! - 4! - 3! - 3 \times 2!$.

$n_1 = 2$ 的5!个排列中,形如2××××6,2×××65,2××645,2××564,2××654,21×××3,21××34,21××35,21×3×4,216345的排

列不满足要求，故满足要求的排列个数为$5!-4!-2\times3!-6\times2!-1$.

综上所述，满足要求的排列个数为

$$5!+(5!-4!)+(5!-4!-3!)+(5!-4!-3!-3\times2!)+(5!-4!-2\times3!-6\times2!-1)=461.$$

[解 2] 我们来计算不满足题中要求的所有排列的个数.设$(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6)$是个不满足要求的排列.于是存在$2\leqslant i\leqslant6$,使得

$$\{m_i, m_{i+1}, \cdots, m_6\}=\{i, i+1, \cdots, 6\}, \quad ①$$

$$\{m_j, m_{j+1}, \cdots, m_6\}\neq\{j, j+1, \cdots, 6\}, j=i+1, \cdots, 6, \quad ②$$

其中当$i=6$时，② 式不存在.我们把满足 ① 和 ② 的排列$(m_i, m_{i+1}, \cdots, m_6)$的个数记为$f(i)$,则有

$$f(6)=1, f(5)=2!-f(6)=1,$$
$$f(4)=3!-f(5)-2!f(6)=3,$$
$$f(3)=4!-f(4)-2!f(5)-3!f(6)=13,$$
$$f(2)=5!-f(3)-2!f(4)-3!f(5)-4!f(6)=71.$$

由此即得，不满足题中要求的排列个数为

$$S=\sum_{i=2}^{6}f(i)\cdot(i-1)!=259.$$

从而满足要求的排列个数为$6!-259=461$.

1·42 有多少方法能将从 1 到 n 的 n 个整数排成下面的排列：除了左边的第一个整数外，每个数都与它左方(不必相邻)的某一个数相差 1?

(第 26 届美国普特南数学竞赛，1965 年)

[解] 对于从 1 到 n 作符合题意的每一个排列都称之为 n 排列.

当 $n=2$ 时，可得 2 个 2 排列：

12 , 21.

当 $n=3$ 时，可得 $4=2^2$ 个 3 排列：

123,213,231,321.

当 $n=4$ 时，可得 $8=2^3$ 个 4 排列：

1234,2134,2314,3214,

2341,4321,3421,3241.

由以上,我们可以得到如下猜测:

(1)n 排列必定以 1 或 n 结尾.

(2)n 排列的个数为 2^{n-1}.

下面用数学归纳法证明这两个猜测:

(1) 对 $n=1,2,3,4$ 结论已成立.

假设对 $n=k$ 结论成立.

则当 $n=k+1$ 时,任取一个 $k+1$ 排列

$$\alpha=a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}.$$

若 $a_{k+1}\neq 1$ 或 $a_{k+1}\neq k+1$,我们从 α 中删去 $k+1$,则由归纳假设,这个 k 排列应以 1 或 k 结尾,即 $a_{k+1}=1$ 或 k.但 $k+1$ 不论位于前面的什么位置,α 都不能成为 $k+1$ 排列.出现矛盾.因而对 $k+1$ 排列也是以 1 或 $k+1$ 结尾.

从而对所有自然数 n,猜测(1) 成立.

(2) 假设 $n-1$ 排列的个数为 2^{n-2}.则对其每个末尾添上 n 即可得 n 排列,个数仍为 2^{n-2}.

对这样的每个 n 排列作下面的一一映射:

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}n\longrightarrow n+1-a_1,n+1-a_2,\cdots,n+1-a_{n-1},1$$

恰好得到以 1 结尾的 n 排列,也是共有 2^{n-2} 个.

由(1),n 排列必以 1 或 n 结尾,因此,所求全部 n 排列的个数为

$$2^{n-2}+2^{n-2}=2^{n-1}.$$

1·43 已知一个由 0 和 1 组成的数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,A 为等于(0,1,0)或(1,0,1)的三元数组(x_i,x_j,x_k)的个数,其中 $1\leqslant i<j<k\leqslant n$,对于 $1\leqslant i\leqslant n$,令 d_i 表示满足 $j<i$,并且 $x_j=x_i$,或者 $j>i$ 且 $x_j\neq x_i$ 的 j 的个数.

(1) 求证 $A=C_n^3-C_{d_1}^2-C_{d_2}^2-\cdots-C_{d_n}^2$;

(2) 给定奇数 n,求 A 的最大值.

(第 16 届美国数学奥林匹克,1987 年)

[解] 对于 $i=1,2,\cdots,n$,令

$D_i=\{x_j\mid x_j=x_i,1\leqslant j<i;x_j\neq x_i,i<j\leqslant n\}$,于是有 $|D_i|=d_i$.在 D_i 中任取二元与 x_i 共 3 项,按下标从小到大的顺序排成三元数组,所有这样数组的集合记为 S_i.显然,$|S_i|=C_{d_i}^2$.将所有不满足题

中要求的三元数组的集合记为 T,则 $S_i\subset T,i=1,2,\cdots,n$ 且诸S_i 两两不交.实际上,若$(x_i,x_j,x_k)\in S_i$,则 $x_i\neq x_j=x_k$;若$(x_i,x_j,x_k)\in S_j$,则 $x_i=x_j\neq x_k$;若$(x_i,x_j,x_k)\in S_k$,则 $x_i=x_j=x_k$.由此可知诸 S_i 两两不交.

另一方面,对于 T 中任一个三元数组(x_i,x_j,x_k),必为下列6种情形之一:(0,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(0,0,0),(1,1,1).按定义,前两种情形属于 S_j,中间两种情形属于 S_i,后两种情形属于 S_k.故有 $T\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}S_i$.从而得到

$$T=\bigcup_{i=1}^{n}S_i.$$

由此即得

$$A=C_n^3-|T|=C_n^3-C_{d_1}^2-C_{d_2}^2-\cdots-C_{d_n}^2.$$

再解(2).按 D_i 和d_i 的定义,对任一个二元数组(x_i,x_j),$1\leqslant i<j\leqslant n$,若 $x_i=x_j$,则 $x_i\in D_j$ 并在d_j 中计数一次;若 $x_i\neq x_j$,则 x_j 恰在 d_i 中计数一次.由此可见,所有 d_i 之和恰为所有二元数组的个数,即有 $\sum\limits_{i=1}^{n}d_i=C_n^2$.

为求 A 的最大值,只须求 $\sum\limits_{i=1}^{n}C_{d_i}^2$ 的最小值.这时,由柯西不等式有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2\leqslant n\sum_{i=1}^{n}d_i^2. \qquad ①$$

所以有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}C_{d_i}^2&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}d_i(d_i-1)=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}d_i^2-\sum_{i=1}^{n}d_i\right)\\&\geqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}d_i\right]\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}d_i\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i-1\right)\\&=\frac{1}{8}n(n-1)(n-3).\end{aligned} \qquad ②$$

因为 $n=2k+1$,所以 $n-1=2k,n-3=2k-2,\frac{1}{8}n(n-1)$

$(n-3)=\frac{1}{2}nk(k-1)=nC_k^2$.代入②式即得

$$\sum_{i=1}^{n}C_{d_i}^2\geqslant nC_k^2. \qquad ③$$

由①知,③式中等号成立当且仅当 $d_1=d_2=\cdots=d_n=\frac{1}{2}(n-1)$.容易验证,当数列中奇数项均为0而偶数项均为1时,所有 d_i 都相等.这表明③式右端所表示的最小值是可以取得的.从而知 A 的最大值为

$$A_0=C_n^3-nC_k^2=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)-\frac{1}{8}n(n-1)(n-3)$$
$$=\frac{1}{24}n(n^2-1).$$

1·44 设 $x\in N$.若一串自然数 $1=x_0,x_1,\cdots,x_l=x$ 满足

$$x_{i-1}<x_i,x_{i-1}\mid x_i,i=1,2,\cdots,l,$$

则称 $\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_l\}$ 为 x 的一条因子链,l 为该因子链的长度.$L(x)$ 与 $R(x)$ 分别表示 x 的最长因子链的长度和最长因子链的条数.试对于 $x=5^k\times31^m\times1990^n(k,m,n\in N)$,求 $L(x)$ 与 $R(x)$.

(第5届中国中学生数学冬令营,1990年)

[**解**] 先来推导 $L(y)$ 和 $R(y)$ 的一般表达式.设 $y\in N$ 的质因数分解式为

$$y=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot P_s^{\alpha_s}, \qquad ①$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 是互不相同的素数.因为 y 的因子链仅有有限多条,所以必存在最长的一条.若某一因子链相邻两数之商为合数,则可在这两数之间再插进一个数以加长因子链.因而最长因子链中,任何相邻两数之商都是素数.从1开始逐次乘以 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 之一,并且乘以 p_i 的次数为 $\alpha_i,i=1,2,\cdots,s$,最后得到①式所示的 y,总共经过 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$ 次乘法运算.因而知最长因子链的长度为

$$L(y)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s. \qquad ②$$

容易看出,如下元素

$$p_1,\cdots,p_1,p_2,\cdots,p_2,\cdots,p_s,\cdots,p_s \qquad ③$$

的任何一个排列都对应着①式的一条最长因子链,即当依次将某个排列中的前1个,前2个,前3个,$\cdots$,$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)$ 个数连乘时,就得到该排列所对应的最长因子链.反之,在①式的任一最长因子链中,

从前向后依次将相邻两项相除，所得的商即组成对应着该最长因子链的排列．显然，这个对应是个双射．根据有重复排列的公式，便知

$$R(y)=\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_s!}. \qquad ④$$

对于题中所给的 x，我们写

$$x=5^k\times 31^m\times 1990^n=2^n\times 5^{k+n}\times 31^m\times 199^n.$$

由公式 ② 和 ④ 即得

$$L(x)=k+m+3n,\ R(x)=\frac{(k+m+3n)!}{(k+n)!m!(n!)^2}.$$

1·45 设 $n\in N$．我们说集合 $\{1,2,\cdots,2n\}$ 的一个排列 $(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$ 具有性质 P，是指在 $\{1,2,\cdots,2n-1\}$ 中至少有一个 i，使得 $|x_i-x_{i+1}|=n$．求证对于任何 n，具有性质 P 的排列比不具有性质 P 的排列的个数多．

（第 30 届国际数学奥林匹克，1989 年）

［证 1］ 显然，只须证明具有性质 P 的排列数 m 大于全部排列数的一半．

设 $(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$ 中，k 与 $k+n$ 相邻的所有排列的集合为 M_k，$k=1,2,\cdots,n$，则由容斥原理知

$$m\geqslant\sum_{k=1}^{n}|M_k|-\sum_{1\leqslant k<h\leqslant n}|M_k\cap M_h|, \qquad ①$$

其中 $|M_k|$ 表示集合 M_k 的元数．

注意，对于 M_k 中的排列，当把 k 和 $n+k$ 视为一个数时，共有 $(2n-1)!$ 种不同排法，但 k 与 $k+n$ 相邻又有两种不同排法，故有

$$|M_k|=2(2n-1)!. \qquad ②$$

类似地有

$$|M_k\cap M_h|=4(2n-2)!. \qquad ③$$

将 ② 和 ③ 代入 ① 即得

$$m\geqslant 2n(2n-1)!-C_n^2\cdot 4(2n-2)!$$

$$=(2n)!-2n(n-1)(2n-2)!>\frac{1}{2}(2n)!.$$

［证 2］ 令 A 和 B 分别表示具有性质 P 和不具有性质 P 的所有排列的集合，C 表示恰有一个 $i\in\{1,2,\cdots,2n-1\}$，使得 $|x_i-x_{i+1}|=n$

的所有排列的集合. 显然, C 是 A 的真子集. 由此可见, 若能证明 $|B| \leqslant |C|$, 问题就解决了.

为证 $|B| \leqslant |C|$, 我们在 B 与 C 之间建立一个对应如下: 对任何 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_{2n}) \in B$, 当然有 $|y_1-y_2| \neq n$, 因此存在 $k>2$, 使得 $|y_k-y_1|=n$. 令排列 y 对应于

$$f(y)=(y_2, \cdots, y_{k-1}, y_1, y_k, \cdots, y_{2n}),$$

这就给出了一个由 B 到 C 的映射. 不难证明这个映射是个单射, 所以有 $|B| \leqslant |C| < |A|$.

1·46 P 为集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个排列, 一个元素 $j \in S_n$, 如果满足 $p(j)=j$, 则称为 P 的一个不动点. 令 f_n 为 S_n 的无不动点的排列个数, g_n 为恰好有一个不动点的排列个数.

求证 $|f_n-g_n|=1$.

(第 14 届加拿大数学奥林匹克, 1982 年)

[证] 我们首先证明无不动点的排列数 f_n 为

$$f_n = P_n^n - P_n^{n-1} + P_n^{n-2} - \cdots + (-1)^n P_n^0$$

$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r P_n^{n-r}.$$

显然, $f_1=0, f_2=1$.

分两种情况考虑:

(1) $1=f(i)$ 且 $i=f(1)$.

此时还有 $n-2$ 个元素, 其无不动点的排列数为 f_{n-2}. 又 $1=f(i)$, 而 $f(i)$ 有 $n-1$ 种选择, 因此共有 $(n-1)f_{n-2}$.

(2) $1=f(i)$ 且 $i \neq f(1)$.

此时显然无不动点的排列数为 f_{n-1}, 又 $1=f(i)$, 而 $f(i)$ 有 $n-1$ 种选择, 因此共有 $(n-1)f_{n-1}$.

于是有

$$f_n=(n-1)f_{n-1}+(n-1)f_{n-2},$$

$$f_n-nf_{n-1}=-[f_{n-1}-(n-1)f_{n-2}],$$

于是有

$$f_n-nf_{n-1}=(f_2-2f_1)(-1)^{n-2}=(-1)^{n-2}.$$

即

$$f_n-nf_{n-1}=(-1)^n,$$

$$\frac{f_n}{n!}-\frac{f_{n-1}}{(n-1)!}=\frac{(-1)^n}{n!},$$

$$\frac{f_{n-1}}{(n-1)!}-\frac{f_{n-2}}{(n-2)!}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{f_2}{2!}-\frac{f_1}{1!}=\frac{(-1)^2}{2!}.$$

相加可得

$$\frac{f_n}{n!}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!},$$

$$f_n=n!\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

$$=P_n^n-P_n^{n-1}+P_n^{n-2}-\cdots+(-1)^nP_n^0.$$

注意到,对 S_n 的每个恰有一个不动点的排列P,设 $p(j)=j$,则将 j 划去后得到的排列是集合

$$S_{n-1}=\{1,2,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n\}$$

的一个无不动点的排列,因此有

$$g_n=nf_{n-1}.$$

于是

$$g_n=n\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^rP_{n-1}^{n-1-r}$$

$$=\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^rnP_{n-1}^{n-1-r}$$

$$=\sum_{r=0}^{n-1}P_n^{n-r}(-1)^r.$$

从而

$$f_n-g_n=(-1)^nP_n^0=(-1)^n,$$

因此得到 $$|f_n-g_n|=1.$$

1·47 试证数 A_n,B_n,C_n 相等,其中 A_n 表示用 1×2 的矩形覆盖 $2\times n$ 的矩形的不同方法的种数,B_n 表示由 1 和 2 组成的和为 n 的不同数列的个数,而 C_n 定义为

$$C_n = \begin{cases} C_m^0 + C_{m+1}^2 + C_{m+2}^4 + \cdots + C_{2m}^{2m}, \text{当 } n = 2m, \\ C_{m+1}^1 + C_{m+2}^3 + C_{m+3}^5 + \cdots + C_{2m+1}^{2m+1}, \text{当 } n = 2m+1. \end{cases}$$

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)

[证] 显然,$A_1 = 1, A_2 = 2$. 对于 $2\times(n+1)$ 矩形的覆盖,如果最右面竖放 1 个 2×1 矩形,这样的覆盖法共有 A_n 种;如果最右面横放两个 1×2 矩形,这样的放法共有 A_{n-1} 种. 从而得到

$$A_{n+1} = A_n + A_{n-1}, n = 2,3,\cdots. \quad ①$$

此外,易知 $B_1 = 1, B_2 = 2$. 对于由 1 和 2 组成的和为 $n+1$ 的数列,最后一项为 1 的共有 B_n 个;最后一项为 2 的共有 B_{n-1} 个,故得

$$B_{n+1} = B_n + B_{n-1}, n = 2,3,\cdots. \quad ②$$

最后,显然有 $C_1 = 1, C_2 = 2$ 且有关系式

$$C_{n+1} = C_n + C_{n-1}, n = 2,3,\cdots. \quad ③$$

由于 ①,②,③ 给出了相同的递推关系式且初始条件也都相同,所以 $A_n = B_n = C_n, n = 1,2,\cdots$.

1·48　将自然数 3,4,5,…,1994,1995 排成一个数列 $\{a_k\}$,使得

$$k \mid a_k, \quad k = 1,2,\cdots,1993. \quad ①$$

问共有多少种不同排法?

(中国国家集训队测验题,1995 年)

[解] 除了 1994 和 1995 之外,每个自然数都可能排在以自己为号码的位置上. 因此,首先要安排 1994 和 1995 的位置.

由 ① 知,1994 和 1995 都只能排在以自己的某个约数为号码的位置上. 于是这个约数不能排在以自己为号码的位置上,又得排到以自己的一个约数为号码的位置上(后者当然也是原数的约数). 这样一个一个传递下去,直到最后一个约数排到第 1 号或第 2 号为止.

因为

$$1995 = 3\times 5\times 7\times 19, 1994 = 2\times 997,$$

所以从 1995 开始的顶替过程必然以最后排到第 1 号为止. 于是 1994 只能排在 2 号位. 这样一来,每种满足要求的排列都对应于 1995 的某些约数的一个排列,且这个对应是个双射,即一对一的映射. 事实上,其他数都只能排在以自己为号码的位置上. 否则必导致小数排在大号码,当然不能满足 ① 式的要求.

将约数排列从大到小，且只记相邻两个约数的倍数．例如，将 1995 $\longrightarrow$ 665 $\longrightarrow$ 35 $\longrightarrow$ 7 $\longrightarrow$ 1 记为 $(3,19,5,7)$．显然，每种排列中诸项之积都是 1995．

考察第 1 项为 3 的所有排列，计有 13 种：

$(3,5,7,19)$，$(3,5,19,7)$，$(3,5,7\times 19)$，

$(3,7,5,19)$，$(3,7,19,5)$，$(3,7,5\times 19)$，

$(3,19,5,7)$，$(3,19,7,5)$，$(3,19,5\times 7)$，

$(3,5\times 7,19)$，$(3,5\times 19,7)$，$(3,7\times 19,5)$，

$(3,5\times 7\times 19)$．

同理，分别以 5，7，19 为首项的排列也各有 13 种．从而，这样的排列（首项为素因数）数组共有 $13\times 4=52$ 个．

此外，首项为 3×5 的数组共有 3 种：

$(15,7,19)$，$(15,19,7)$，$(15,7\times 19)$．

同理，首项分别为 3×7，3×19，5×7，5×19，7×19 的数组也各有 3 个，共有 $6\times 3=18$ 个．最后，还有 5 个数组为

$(3\times 5\times 7,19)$，$(3\times 5\times 19,7)$，$(3\times 7\times 19,5)$，

$(5\times 7\times 19,3)$，(1995)．

综上可知，满足题中要求的排列的总数为 $52+18+5=75$．

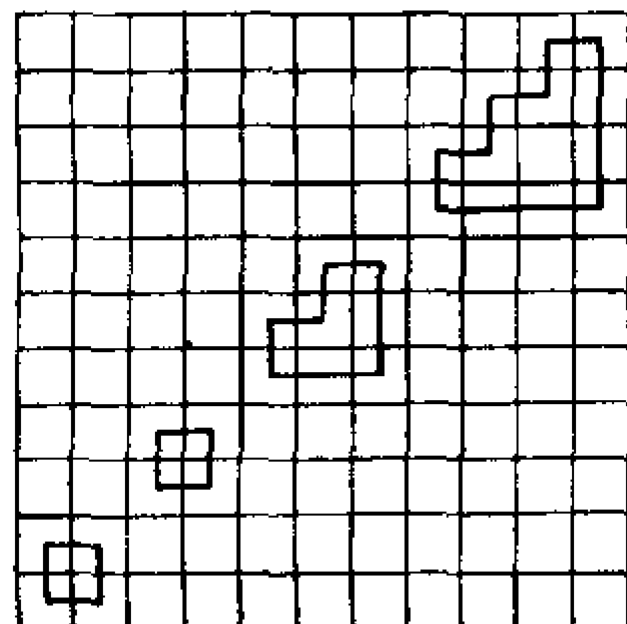
1·49 在规格为 11×11 的方格纸上标定 22 个方格，使得在每一行和每一列中都恰好标定两个方格．如果所标定的方格的一种排列方式，经过若干次行与行或列与列之间的互换而变成另一种排列方式，则认为这两种排列方式是等价的．问这些标定方格共有多少种互不等价的排列方式？

（第 29 届莫斯科数学奥林匹克，1966 年）

［解］ 考虑 22 个标定方格的中心，并将同行两点和同列两点间都连一条线段，于是得到一个有 22 个顶点，每点都是 2 度的偶图．由图论定理知，这个图一定是由一个或几个互不相交的圈构成的．由于图中圈的边都是水平或竖直的，故每个圈都有偶数条边且若有一个标定点在圈上，与该点同行或同列的标定点也在同一圈上．设图共分为 k 个圈，圈上的点对数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$，则 $n_1+n_2+\cdots+n_k=11$．

注意，当进行列与列或行与行之间的交换时，每个圈都仍然变为圈．而且每两个顶点数相同的圈，都可以通过行或列之间的交换而互

变.由此可见,两种排列方式不等价,当且仅当所有圈的顶点对数$\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}$不同.而这种不同的组又对应于11分拆为不小于2的整数之和的不同分法.由于这种分法有14个:11,9+2,8+3,7+4,6+5,7+2+2,6+3+2,5+4+2,5+3+3,4+4+3,5+2+2+2,4+3+2+2,3+3+3+2和3+2+2+2+2,故知22个标定点的不等价的排列方式共有14种.



1·50 在$m\times n$方格表的每个方格内都填入一个自然数,使得表中每一列数都自上而下严格递增,且每一行数都从左至右非严格递增.我们用$L(a_1,a_2,\cdots,a_k)$表示在方格表中填入a_1个1,a_2个2,$\cdots$,a_k个k的所有满足要求的不同填数法的总数,求证函数L的值与自变量的排列顺序无关.

(圣彼得堡代表队选拔试题,1992年)

[证] 显然,只须证明

$$L(a_1,a_2,\cdots,a_{p-1},a_p,a_{p+1},a_{p+2},\cdots,a_k)$$
$$=L(a_1,a_2,\cdots,a_{p-1},a_{p+1},a_p,a_{p+2},\cdots,a_k), \qquad ①$$

即函数L的值在交换某相邻二元时保持不变.

将$m\times n$数表中填有数$1,2,\cdots,k$的个数依次为$a_1,\cdots,a_{p-1},a_p,a_{p+1},a_{p+2},\cdots,a_k$的所有不同数表的集合记为$A$,填有数$1,2,\cdots,k$的个数依次为$a_1,\cdots,a_{p-1},a_{p+1},a_p,a_{p+2},\cdots,a_k$的所有不同数表的集合记为$B$.为证等式①,只要在集合$A$与$B$之间建立一个双射就可以了.

对任意数表$\alpha\in A$,考察表中填数为p或$p+1$的所有方格的集合M,称之为"带形".显然,带形M与方格表的每一列至多交于两个方格,而且这两个方格相邻,上格中写有p,下格中写有$p+1$.同时,如果带形M与方格表的某行之交多于1个方格,则这些方格左右相邻,且其中填有p的任一方格都在填有$p+1$的方格的左边.这时,M中共有a_p+a_{p+1}个方格,其中a_p个方格中写有p,a_{p+1}个方格中写有$p+1$.

设M与方格表中的q列之交各为两格,而与其他列之交至多1格.将这q对方格去掉后,M中的其余方格将分解为若干个互不相连的$1\times d$的"横条",这些横条中共分布着a_p-q个p和$a_{p+1}-q$个$p+1$.对其中每个$1\times d$横条,设其左边d_1个方格中写有p,右边d_2个方格中写

有 $p+1$. 现将横条中的左边 d_2 个方格中填入 p，右边 d_1 个方格中写入 $p+1$. 则当对每个横条中的数都作了这样改动之后(其余方格中的数不变)，所得的数表 β 中恰有 a_{p+1} 个 p 和 a_p 个 $p+1$，即 $\beta \in B$. 易见，由 $\alpha \longrightarrow \beta$ 的对应是个双射.

1·51　将一枚硬币掷出，若出现正面，点 P 就在数轴上移动 $+1$，若出现反面就不动，掷币次数不超过 12，而且点 P 到达了坐标点 $+10$ 就不再掷币了，问点 P 到过坐标 $+10$ 的所有不同情况有多少种?

(中国浙江省数学夏令营，1989 年)

[解]　最后一次掷币必须是正面.

(1) 掷 10 次正面可到点 $+10$，有一种.

(2) 掷 11 次，因为最后一次是正面，所以前 10 次掷币中需出现 1 次反面，其可能情况有 $C_{10}^{1}=10$ 种.

(3) 掷 12 次，因为最后一次是正面，所以前 11 次掷币中需出现 2 次反面，其可能情况有 $C_{11}^{2}=55$ 种.

所以共有 $1+10+55=66$ 种.

1·52　在掷硬币时，如果用 Z 表示正面朝上，用 F 表示反面朝上，那么掷硬币的序列就表示为由 Z 和 F 组成的序列. 我们可以统计在这种序列中正面紧跟着反面(FZ)的出现次数，正面紧跟着正面(ZZ)的出现次数，…. 例如序列

$$ZZFFZZZZFZZFFFF$$

是掷 15 次硬币的结果，其中有 5 个 ZZ，3 个 ZF，2 个 FZ，4 个 FF. 在掷 15 次硬币的序列中恰有 2 个 ZZ，3 个 ZF，4 个 FZ 和 5 个 FF 的序列共有多少个?

(第 4 届美国数学邀请赛，1987 年)

[解]　显然，一个掷硬币的序列可以视为是由 Z 段和 F 段相间组成的. 当从 Z 段进入 F 段时，分界处出现一个 ZF；当从 F 段进入 Z 段时，就出现一个 FZ.

由已知，序列中出现 4 个 FZ 和 3 个 ZF，因此这个序列必以 F 开头而以 Z 结尾且共分为 8 段：

$$(F)(Z)(F)(Z)(F)(Z)(F)(Z),$$

其中(F) 和(Z) 分别表示 F 段和 Z 段.

易见，相同字母的段中若有 $k>1$ 个字母，将分别产生 $k-1$ 个 ZZ

或 FF.既然序列中恰有 2 个 ZZ,故序列中必共有 6 个 Z.4 个 Z 段中每段先排好 1 个 Z,然后把余下的 2 个 Z 排入 1 个或 2 个 Z 段中,不同的排法共有 $C_4^1 + C_4^2 = C_5^2 = 10$ 种.

因为序列共有 15 项,除去 6 个 Z 之外,还有 9 个 F.把 9 个 F 分成 4 段,设 4 段中 F 的个数分别为 x_1, x_2, x_3, x_4,则有

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9,$$

问题化为求这个不定方程的正整数解组的个数.显然,它共有 $C_8^3 = 56$ 组解.

综上可知,满足题中要求的序列共有 560 个.

1·53 给定 n 个不同的字母,每个可用两次,配成 n 对,每一对中的两个字母可以相同也可以不同.用 u_n 表示不同的配对方式的种数(仅仅是对的顺序不同或某些对中两个字母的顺序不同,认为是同一种配对方式).求证

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - \frac{n(n-1)}{2}u_{n-2}.$$

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

[证] 考察 $n+1$ 个字母 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 b 的配对情形与前 n 个字母配对情形的关系.对于前 n 个字母的每种配对方式,加入一对(b, b),就得到 $n+1$ 个字母的一种配对方式.对于前 n 个字母配成 n 对的一种配对方式,从中任取一对数(a_i, a_j)并代之以(a_i, b),(a_j, b),则就得到 $n+1$ 个字母的一种配对方式.这样,共可得到$(n+1)u_n$ 种配对方式,但并不全是互不相同的.如果原先 n 个字母的配对中有两对(a_i, a_j),(a_i, a_j),$i \neq j$,那么按上述办法所得到的 $n+1$ 个字母的配对方式中就有两种相同的配对.对于不同的 i 和 j 共有 C_n^2 种不同的选择,而余下的 $n-2$ 个字母的配对共有 u_{n-2} 种不同方式,故有

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - \frac{1}{2}n(n-1)u_{n-2}.$$

1·54 在阿巴部落里有两个字母.已知这种语言的任何单词都不是另一个单词的词头.问这个部落的语言词典能否包含有:3 个各有 4 个字母的单词,10 个各有 5 个字母的单词,30 个各有 6 个字母的单词和 5 个各有 7 个字母的单词?

(第 17 届全苏数学奥林匹克,1983 年)

[**解**]　由两个不同字母,组成有 7 个字母的单词,共可组成 $2^7 = 128$ 个不同单词.但由于任何单词都不能是另一个单词的词头,故有 7 个字母的单词,其前 4,5,6 个字母不能和已有单词相同.这样的不合用的有 7 个字母的单词共有 $3\times 8 + 10\times 4 + 30\times 2 = 124$ 个.因而可用的有 7 个字母的单词只有 4 个,无法满足要求.

1·55　在某部落的语言中,任何由 0 和 1 所构成的含有 10 个数码的序列都是一个单词.两个单词为同义词,当且仅当其中一个词可由另一个经过如下程序而得到:即先从单词中划去若干个相连的数码,这些数码的和应为偶数,再将划去的数码按相反的顺序写在原位上.问该部落的语言中共有多少个意义不同的单词?

(圣彼得堡数学奥林匹克,1989 年)

[**解**]　我们把题中所述的同义词的数码变换称为同义变换.如果一个单词中左起第 1 个 0 的右边至少有两个 1,则可将第 1 个 0 起到右方第 2 个 1 为止的一段数码换为相反的顺序,这导致左起第 1 个 0 的右边 1 的个数至少减少 1 个.因此,每个单词都或为 0000000000 或为形如

$$\underbrace{11\cdots1}_{n个}\underbrace{00\cdots0}_{m个}1\underbrace{00\cdots0}_{9-n-m个} \qquad ①$$

的单词的同义词,其中 $n, m\geqslant 0, n+m\leqslant 9$.容易看出,形如 ① 的单词共有 55 个.所以,意义不同的单词共有 56 个.

事实上,当两个形如 ① 的单词中 n 不同时,两个单词当然不同义.当 n 相同而 m 不同时,因为同义变换不变 m 的值,所以两个单词也不同义.

1·56　由 A,B 两个字母组成的长为 15 的序列,满足以下条件:

对于连续两个字母,要求 AA 出现 5 次,AB,BA,BB 各出现 3 次.问这样的序列共有多少个?

比如在 $AABBAAAABAABBBB$ 中,AA 出现了 5 次,AB 出现了 3 次,BA 出现了 2 次,BB 出现了 4 次,不满足以上条件.

(日本数学奥林匹克,1991 年)

[**解**]　先考虑 A 开头的序列.

由于 AB,BA 与 BB 恰好出现 3 次,这样的序列结构是

$$\cdots A_1B_1\cdots A_2B_2\cdots A_3B_3\cdots A_4.$$

在 $B_i(i=1,2,3)$ 之后恰好插进 3 个 B.设在 B_i 之后插进了 x_i 个 B,则

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3.$$

这个方程的非负整数解的组数为 $C_{3+2}^2 = 10$ 个.

在 $A_i(i = 1,2,3,4)$ 之前插入 5 个 A. 设在 A_i 之前插入 y_i 个 A, 则

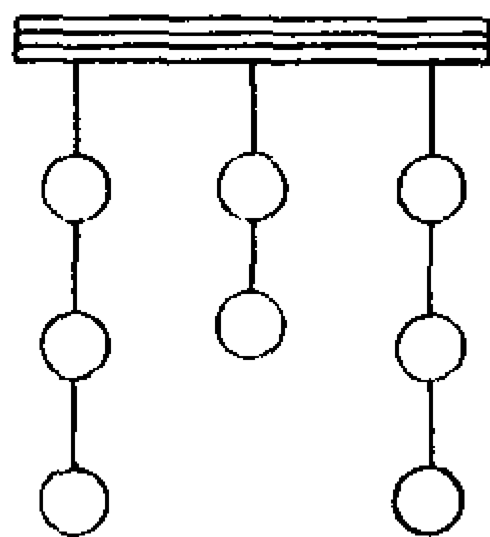
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5$$

这个方程的非负整数解的组数为 $C_8^3 = 56$ 个.

所以这样的序列共有

$$56 \times 10 = 560 \text{ 个}.$$

1·57 在一次射击比赛中, 有 8 个泥质靶子挂成右图所示的 3 列, 一位神枪手按如下规则打掉所有靶子:



(1) 首先选择将要有一个靶子被打掉的一列;

(2) 然后在被选中的一列中打掉尚存的最下面一个靶子.

问打掉这 8 个靶子共有多少种不同顺序?

(第 8 届美国数学邀请赛, 1990 年)

[解 1] 先考察最左边的一列, 打下这 3 个靶子的顺序有 C_8^3 种可能. 再考察中间一列, 打下这两个靶子的不同顺序有 C_5^2 种可能. 余下的 3 个号码是打下最后一列 3 个靶子的顺序. 所以不同顺序的总数为

$$S = C_8^3 \cdot C_5^2 = 56 \times 10 = 560.$$

[解 2] 8 个靶子号码的全排列有 8! 种. 但是每一列的靶子被打掉的顺序必须是由下到上, 不能随意排列, 所以, 所有不同顺序的总数为

$$S = \frac{8!}{3!2!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 6} = 560.$$

1·58 经理将要打印的信件交给秘书, 每次给一封, 且放在信封的最上面, 秘书一有空就从最上面拿一封信来打. 有一天共有 9 封信要打, 经理按第 1 封, 第 2 封, …, 第 9 封的顺序交给秘书. 午饭时, 秘书告诉同事, 已把第 8 封信打印好了, 但未透露上午工作的其他情况, 这个同事很想知道按什么顺序来打印. 根据以上信息, 下午打印的信的顺序有多少种可能? (没有要打的信也是一种可能.)

(第 6 届美国数学邀请赛, 1988 年)

[解] 我们分两种情形来分别计数.

(1) 第 9 封信在上午送给秘书. 令

$$T=\{1,2,3,4,5,6,7,9\},$$

则下午打印的每种可能都是 T 的一个子集,因为秘书可以把不在子集中的信件上午一送来就打完了,而未打别的信.集 T 有 8 个元素,故有 $2^8=256$ 个不同子集(包括空集).

(2) 第 9 封信在午后才送给秘书.令

$$S=\{1,2,3,4,5,6,7\},$$

则上午未打印的信的号码是 S 的一个子集.若将 9 排在子集之后,则与 (1) 中的情形相同,故只有子集中至少有一封信已于下午打印之后第 9 封信才送来的情形才是新的可能顺序.这又相当于把号码 9 放在该子集的非最后的位置上.对于有 k 个元素的子集,号码 9 有 k 个位置可放,即可放在第 $i-1$ 个元素之后和第 i 个元素之前,$i=1,2,\cdots,k$.于是不同顺序总数为

$$\sum_{k=0}^{7}kC_7^k=\sum_{k=1}^{7}7C_6^{k-1}=7\times 2^6=448,$$

即下午有 448 种可能的打印顺序.

1·59 8 个女孩和 25 个男孩围成一圈,任意两个女孩之间至少站两个男孩,问共有多少种不同的排列方法(只要把圆旋转一下就重合的排法认为是同一种)?

(中国高中数学联赛,1990 年)

[解] 固定女孩中的一个记为 A,对任何一个满足要求的圆排列,从 A 开始按顺时针方向将它变成一个直排.由于每个女孩后面至少有两个男孩,我们将每个女孩连同紧随其后的两个男孩对应于一个黑球,而其余的 9 个男孩每人对应于一个白球,则当只计男孩与女孩的不同而不计女孩与女孩,男孩与男孩之间的不同时,这个对应是双射,由此而导致的排列之间的对应也是双射.于是问题化为 8 个黑球与 9 个白球且第一球为黑球的所有不同排列数的计算.显然,这时不同排列的个数为 C_{16}^7.

对于黑球与白球的每种排列,其中每个黑球对应于一个三人组,其中第一人为女孩,后两人为男孩.将除 A 以外 7 个女孩分别排到后 7 个三人组中,共有 7!种排列法;将 25 个男孩排入到 25 个位置,计有 25!种不同排列法.由乘法原理便知,所求的不同排列共有 $\frac{16!25!}{9!}$ 种.

1·60　某班的男生与女生数相同(全班人数不少于 4 人).将他们以各种不同的方式排成一行,看看能否将这一行分成两部分,使得在每一部分中,男生和女生都各占一半.设不能这样分开的排法的个数为 a,恰有一种方法可以这样分开的排法的个数为 b,求证 $b=2a$.

(匈牙利数学奥林匹克,1972 年)

[证]　我们把男生对应于 $+1$,女生对应于 -1,于是每种排法都对应于一个以 $+1$ 和 -1 为项的数列.设这班学生数为 $2n$,于是数列的项数为 $2n$,且数列的 $2n$ 项之和为 0.这些数列中,所有不能分成两段,使每段各项之和都为 0 的数列所成的集合记为 A;所有的恰有一种方法可以分成两段,使每段各项之和都为 0 的数列的集合记为 B.显然,$|A|=a,|B|=b$.

由于将一个数列中的 $+1$ 和 -1 互换所得的新数列与原数列同属于 A 或同属于 B,故可只考虑集合 A,B 中以 $+1$ 开头的数列,并将这样数列所成的子集分别记为 A_1,B_1.显然,只须证明 $|B_1|=2|A_1|$.

B_1 中的数列都以 $+1$ 开头,且都可以惟一的方式分成两段,使每段的各项之和都为0.后段的开头可为 $+1$,也可为 -1,且当将后段中的 $+1$ 和 -1 互换时,所得的数列仍属于 B_1.我们将后段首项为 $+1$ 的数列构成的子集记为 B_1',后段首项为 -1 的数列构成的子集记为 B_1''.显然有 $|B_1'|=|B_1''|$.于是问题化为证明 $|B_1'|=|A_1|$.

下面我们用在 B_1' 和 A_1 之间建立一个双射的办法来证明 $|B_1'|=|A_1|$.设

$$B_1'\ni x=(x_1,x_2,\cdots,x_j,x_{j+1},\cdots,x_{2n}),$$

它可以惟一方式分成两段

$$(x_1,x_2,\cdots,x_j),(x_{j+1},\cdots,x_{2n}).$$

其中 $x_1=1,x_{j+1}=1,x_1+x_2+\cdots+x_j=0,x_{j+1}+\cdots+x_{2n}=0$,且 $S_k=x_1+x_2+\cdots+x_k\neq 0,k\neq j.k\leqslant 2n-1$.令

$$x\longrightarrow y=(x_{j+1},x_1,x_2,\cdots,x_j,x_{j+2},\cdots,x_{2n}).$$

因为 $x_1=1$ 且 $S_k\neq 0,k=1,2,\cdots,j-1$,且 S_k 与 S_{k+1} 之差为 1,故有 $S_k>0,k=1,2,\cdots,j-1$.又因 $x_{j+1}=1$,故数列 y 的前 k 项之和

$$T_k=x_{j+1}+S_{k-1}>0,k=1,2,\cdots,j+1,$$

$$T_k=S_k\neq 0,\qquad k=j+2,\cdots,2n-1.$$

由此可见 $y \in A_1$. 容易看出,这个映射是单射.

另一方面,对任意 $y \in A_1:(y_1, y_2, \cdots, y_{2n})$,由定义知 $T_k = y_1 + y_2 + \cdots + y_k > 0, k \leqslant 2n-1, T_{2n} = 0$. 特别地有 $T_2 = y_1 + y_2 > 0$, 故 $y_2 = +1$. 又因 $T_{2n} = 0$,故必有某些部分和 T_k 的值为 $+1$,设其中下标最小的一个为 T_{k_0}. 考察数列

$$x = (y_2, y_3, \cdots, y_{k_0}, y_1, y_{k_0+1}, \cdots, y_{2n}).$$

因为 $T_k \geqslant 2, k = 1, 2, \cdots, k_0 - 1$,故 x 的部分和

$$S_k = T_{k+1} - 1 \geqslant 1, k = 1, 2, \cdots, k_0 - 2,$$

$$S_{k_0-1} = T_{k_0} - 1 = 0,$$

$$S_k = T_k \neq 0, k = k_0, k_0 + 1, \cdots, 2n - 1.$$

可见,$x \in B_1'$,且在规定映射下,y 即为x 的映射象. 由 $y \in A_1$ 的任意性知映射为满射,从而为双射.

1·61　用 6 种不同的颜色来涂正方体的 6 个面,使不同的面涂有不同的颜色,共有多少种不同的涂色法(将正方体任意旋转之后仍然不同的涂色法,才被认为是不同的)?

(第 1 届莫斯科数学奥林匹克,1935 年)

[解]　将正方体的 6 面涂上互不相同的颜色,共有 $6! = 720$ 种涂色法. 但其中某些种涂色法仅仅是位置不同,将正方形旋转之后即可变成同一种. 按题中约定,这样的两种涂色法被认为是同一种.

对于一个已涂好 6 种颜色的正方体,可选取 6 面中的 1 面作为底面,共有 6 种不同选法. 然后从 4 个侧面中选取一个作为正面,有 4 种不同选法. 于是这个正方体共有 24 种不同位置,亦即在上面计数中,每种涂色法恰被计数 24 次. 故知不同的涂色法共有 30 种.

1·62　以各种不同的方法将 n 个黑球和 n 个白球排成一行,并计算每种这样排列中,球的颜色改变的次数,求证颜色改变次数为 $n-k$ 的排法和颜色改变次数为 $n+k$ 的排法的种数同样多$(0 < k < n)$.

(匈牙利数学奥林匹克,1968 年)

[证 1]　首先,我们来计算,当 v 为奇数时,有多少种方法可以使 n 个黑球与 n 个白球排成一行,使得颜色改变的次数恰好为 v.

设 $v = 2m + 1$. 在 n 个黑球与 n 个白球所排成的一行中,我们把相邻两次改变颜色之间的若干个同色球称为一段. 由于共改变颜色 $2m +$

1 次，所以这一行共有 $2m+2$ 段，其中黑球和白球各有 $m+1$ 段. 由此可见，改变颜色 v 次的每种排法，都对应于分别把 n 个黑球的一行和 n 个白球的一行分成 $m+1$ 段，然后把 $m+1$ 段黑球和 $m+1$ 段白球交替地排成一行所得. 但因排成一行时可从白球段开始，也可以从黑球段开始，所以对于 n 个黑球与 n 个白球的每种分段法，可以得到两种满足要求的排法. 而对黑球与白球的不同的一对分段法，得到的改变颜色 v 次的排法互不相同.

将排成一行的 n 个黑球分为 $m+1$ 段，相当于从 $n-1$ 个空隙中选取 m 个作段之间的分界线，所以共有 C_{n-1}^{m} 种取法. 因而，改变 v 次颜色的不同排法的总数为 $2(C_{n-1}^{m})^2$.

这样，当 $n-k$ 为奇数时，$n+k$ 也是奇数，于是改变 $n-k$ 次颜色和改变 $n+k$ 次颜色的所有不同排法的种数分别为

$$2(C_{n-1}^{m_1})^2, 2(C_{n-1}^{m_2})^2,$$

其中 $m_1=\frac{1}{2}(n-k-1)$, $m_2=\frac{1}{2}(n+k-1)$. 易见 $m_1+m_2=n-1$. 从而有 $C_{n-1}^{m_1}=C_{n-1}^{m_2}$. 可见，当 $n-k$ 为奇数时，颜色改变 $n-k$ 次的不同排法种数与颜色改变 $n+k$ 次的不同排法种数相等.

其次，当 v 为偶数时，记 $v=2m$. 这时，颜色改变次数为 $2m$ 的每种排法中，黑球与白球的段数之和为 $2m+1$. 或者有 $m+1$ 段黑球和 m 段白球，或者有 $m+1$ 段白球和 m 段黑球. 类似的论证表明，颜色改变次数为 $2m$ 的排法种数是 $2C_{n-1}^{m}C_{n-1}^{m-1}$.

当 $n-k$ 为偶数时，$n+k$ 也为偶数. 于是，颜色改变 $n-k$ 次和 $n+k$ 次的不同排法种数分别为

$$2C_{n-1}^{m_1}C_{n-1}^{m_1-1}, 2C_{n-1}^{m_2}C_{n-1}^{m_2-1},$$

其中 $m_1=\frac{1}{2}(n-k)$, $m_2=\frac{1}{2}(n+k)$. 易见 $m_1+m_2-1=n-1$，从而有

$$C_{n-1}^{m_1}=C_{n-1}^{m_2-1}, C_{n-1}^{m_1-1}=C_{n-1}^{m_2}.$$

由此可见，颜色改变 $n-k$ 次和 $n+k$ 次的不同排法的种数同样多.

[证 2]　我们记颜色改变 $n-k$ 次的所有不同排法所成的集合为 A，颜色改变 $n+k$ 次的所有不同排法所成的集合为 B，并通过建立 A 与 B 之间的一个双射来证明两个集合的元素个数相等.

(1) 对于任意 $a \in A$，设 a 的排法如下

○○○○●●●○○●●●　　　　○○●●○○●●●●○○　　　①

(前例是 $n = 6, k = 3$ 的情形，后例是 $n = 6, k = 2$ 的情形). 一行球的颜色改变 $n - k$ 次，故其中颜色相同的球共有 $n - k + 1$ 段. 设白球有 m_1 段，黑球有 m_2 段，则当第 1 球为白球时，我们有

$$m_1 = \begin{cases} \frac{1}{2}(n - k + 1), \\ \frac{1}{2}(n - k + 2), \end{cases} \quad m_2 = \begin{cases} \frac{1}{2}(n - k + 1), \text{当 } n - k \text{ 为奇数}, \\ \frac{1}{2}(n - k), \text{当 } n - k \text{ 为偶数}, \end{cases}$$

当第 1 球为黑球时，上述表示式互换.

(2)① 中所示的排法对应于 n 个白球分为 m_1 段和 n 个黑球分为 m_2 段的一种分法：

○○○○|○○　●●●|●●●　　　　○○|○○|○○　●●|●●●●　　　②

(3) 将 ② 中所示的分法中，所有分界线去掉并在原来没有分界线的空隙中填上分界线，于是得到新的分法

○|○|○|○○|○　●|●|●●|●|●　　　　○|○○|○○|○　●|●●|●|●|●　　　③

设这时白球分成 m'_1 段，黑球分成 m'_2 段，则有 $m_1 + m'_1 = n + 1, m_2 + m'_2 = n + 1$.

(4) 改变第 1 球的颜色(原为白球时，现在排黑球；原为黑球时，现在排白球) 并按 ③ 中的分段交替地排上黑球段与白球段，便得到排法如下

●○●○●●○●○○●○　　　　●○●●○○●○○●○●　　　④

这时，新排法中共有 $m'_1 + m'_2$ 段球，颜色改变 $m'_1 + m'_2 - 1$ 次. 因为 $m'_1 + m'_2 - 1 = 2(n + 1) - (m_1 + m_2) - 1 = 2n + 1 - (n - k + 1) = n + k$，所以，④ 中所示的排法属于 B. 这样，我们就建立了一个由 A 到 B 的映射.

容易看出，对于 $a, a' \in A, a \neq a'$，二者所对应的黑白球的分法不同，从而改换后所得的黑白球的分法 ③ 也不同，因而所对应的 B 中的排法也不同，这表明上述映射为单射. 又因这个映射过程是可逆的，当然是满射. 从而这个映射为双射.

1·63　在坐标空间中给定一个点集 E，它由 3 个坐标都是由 0 到 1982 之间的整数的所有点组成. 将 E 中每点都涂上红蓝两色之一，使

得顶点在 E 中而棱平行于坐标轴的每个长方体上的红色顶点数都能被 4 整除.问这样的不同涂色法共有多少种?

（第 24 届国际数学奥林匹克候选题,1983 年）

[**解**] 首先证明如下的引理.

引理 集合 E 中点的涂色满足题中要求的充分必要条件是,顶点在 E 中且边平行于坐标轴的每个矩形都有偶数个红顶点.

引理的证明 若有某个矩形 π_0 的红顶点数为奇数,不妨设它恰有 1 个红顶点.考察以 π_0 为公共界面的两个长方体,在二者中与 π_0 相对的面分别为 π_1 和 π_2.由于涂色满足题中要求,故矩形 π_1 和 π_2 各有 3 个红顶点.从而以 π_1 和 π_2 为一组相对面的长方体有 6 个红顶点,矛盾.这就证明了必要性.

设每个矩形都有偶数个红顶点.对于任意一个长方体,如果它的所有顶点都同色,则红顶点数当然能被 4 整除.如果它的顶点不全同色,则必有 1 条棱,它的两个端点异色.由于每个矩形都有偶数个红顶点,所以长方体中与它平行的另外 3 条棱中的每一条的两个端点都异色.从而长方体恰有 4 个红顶点.引理证毕.

设 E_1 是集合 E 与 3 条坐标轴之交的 $1+3\times1982$ 个点的集合.对于 E_1 的任意一种涂色法,存在 E 的惟一一种满足要求的涂色法,它在 E_1 上的涂色与给定涂色情形相同.为此考察函数

$$f(x,y,z)=\begin{cases}0,\text{当点}(x,y,z)\text{为红点},\\1,\text{当点}(x,y,z)\text{为蓝点},\end{cases}$$

并由 $f(x,y,z)$ 的值来确定点 (x,y,z) 的颜色.定义模2加法运算 $a\oplus b$ 如下:

$$a\oplus b=\begin{cases}0,\text{当 }a+b\text{ 为偶数},\\1,\text{当 }a+b\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

对于任意的 $(x,y,z)\in E$,令

$$f(x,y,z)=f(x,0,0)\oplus f(0,y,0)\oplus f(0,0,z).$$

容易验证,这一公式对于 E_1 中的点成立,且当按这样定义的函数值 $f(x,y,z)$ 来确定 $E-E_1$ 中的点的涂色时,边平行于坐标轴,顶点在 E 中的每个矩形都有偶数个红点.事实上,当矩形顶点依次为 $(x_1,y_1,z),(x_2,y_1,z),(x_2,y_2,z),(x_1,y_2,z)$ 时,由定义便有

$$f(x_1,y_1,z)\oplus f(x_2,y_1,z)\oplus f(x_2,y_2,z)\oplus f(x_1,y_2,z)$$

$$= f(x_1,0,0) \oplus f(0,y_1,0) \oplus f(0,0,z) \oplus f(x_2,0,0) \oplus f(0,y_1,0) \oplus f(0,0,z) \oplus f(x_2,0,0) \oplus f(0,y_2,0) \oplus f(0,0,z) \oplus f(x_1,0,0) \oplus f(0,y_2,0) \oplus f(0,0,z)$$

$$= 0,$$

即矩形有偶数个红点.这表明由 $f(x,y,z)$ 的值所确定的涂色满足题中要求.

另一方面,对于在 E_1 上的涂色与给定情形相同且满足题中要求的 E 的任一涂色情形,考察点 (x,y,z) 的函数值 $f_1(x,y,z)$.由引理知,顶点为 $(x,y,0)$,$(x,0,0)$,$(0,y,0)$,$(0,0,0)$ 的矩形有偶数个红顶点,故有

$$f_1(x,y,0) = f(x,0,0) \oplus f(0,y,0) \oplus f(0,0,0).$$

同理有

$$f_1(x,0,z) = f(x,0,0) \oplus f(0,0,0) \oplus f(0,0,z).$$

从而又有

$$f_1(x,y,z) = f_1(x,y,0) \oplus f(x,0,0) \oplus f_1(x,0,z)$$
$$= f(x,0,0) \oplus f(0,y,0) \oplus f(0,0,0) \oplus f(x,0,0) \oplus f(x,0,0) \oplus f(0,0,0) \oplus f(0,0,z)$$
$$= f(x,0,0) \oplus f(0,y,0) \oplus f(0,0,z) = f(x,y,z).$$

这就证明了由 E_1 的涂色到 E 的满足题中要求的涂色法的对应是一个双射.从而 E 的满足题中要求的不同涂色法的总数等于E_1 的涂色法总数 $2^{1+3\times1982} = 2^{5947}$.

1·64 设 X,Y 的正半轴上各有 m 个和 n 个定点,在此 m 及 n 个点中,每两点连一线段,如果每三条线段不共点,试确定所连全体线段交点的个数(不包括线段的端点).

(第 20 届美国普特南数学竞赛,1959 年)

[解] 在 X 轴及 Y 轴上各任取两点连成一个凸四边形,其对角线的交点必在第 Ⅰ 象限内.反之一切线段的交点中的每一个都对应一个有两边分别在 X 轴及 Y 轴上的凸四边形.

再由题设,在第 Ⅰ 象限内无三线段共点的情形出现,因此所连线段的交点是唯一确定的.

以 X 轴上任两点及 Y 轴上任两点组成的凸四边形共有

$$C_m^2C_n^2 = \frac{mn(m-1)(n-1)}{4}$$

个,此即为题设的交点的个数.

1·65　已知某凸 n 边形的任何两条对角线都不平行,任何3条对角线都不交于一点,求在 n 边形之外的对角线所在直线的交点总数.

（基辅数学奥林匹克,1978年）

[解]　n 边形有 n 个顶点,这 n 点之间连有 C_n^2 条线段,其中有 n 条是多边形的边,故对角线总数为 $m = C_n^2 - n = \frac{1}{2}n(n-3)$. 这 m 条对角线共有 C_m^2 个交点. 在这个计数过程中,每个顶点恰被计数 $k = C_{n-3}^2 = \frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ 次. 因而除顶点外,对角线的不同交点总数(包括形内与形外)为

$$\frac{1}{2}m(m-1) - kn = \frac{1}{8}n(n-3)(n^2-7n+14) = l.$$

容易验证,在多边形内部的对角线交点总数为 C_n^4. 从而在形外的对角线交点总数为

$$l - C_n^4 = \frac{1}{12}n(n-3)(n-4)(n-5).$$

1·66　在平面上给定5点,其中两两连线互不重合,互不平行也互不垂直. 经过其中每点作其余各点间连线的垂线. 问当不计已知的5点时,这些垂线的交点最多有多少个?

（第6届国际数学奥林匹克,1964年）

[解]　5个给定点之间两两连线共有10条,每3点构成一个三角形,共有 $C_5^3 = 10$ 个三角形. 由任何4点可连出6条直线,由第5点向这6条线分别作垂线,可作6条垂线,故总计有30条这样的垂线.

这30条垂线两两相交,共有 $C_{30}^2 = 435$ 个交点(包括重复计数和多余计数). 对于5点间10条连线的每一条,从另3点向它所作的垂线互相平行,彼此之间没有交点,所以要从总数435中减去30个不存在的交点. 又因10个三角形中每个的3条高共点,因而又要减去重复计数中多计的20个交点. 此外,由每个已知点都引出6条垂线,所以还要减去多计的 $5C_6^2 = 75$ 个交点. 这样,剩下的交点总数为

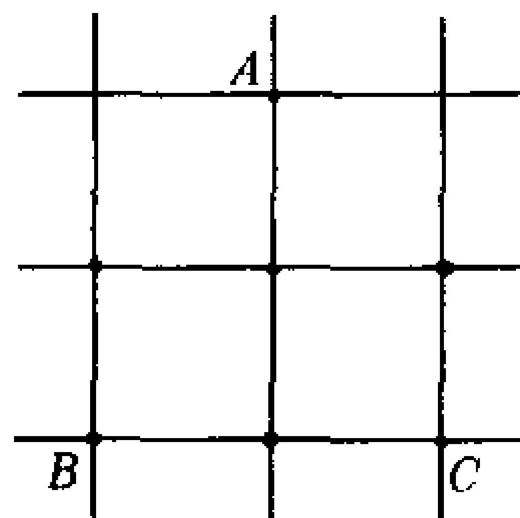
$$435 - 30 - 20 - 75 = 310.$$

显然,可以适当选定 5 点的位置,使得上述的 310 个交点都互不相同.所以,这些垂线之间的交点最多有 310 个.

1·67　已知规格为 2×2 的正方形纸片在边长为 1 的方格纸上盖住了不少于 7 个结点,问它到底盖住了几个结点?

（第 48 届莫斯科数学奥林匹克,1985 年）

[解]　如果正方形纸片盖住了相距 $2\sqrt{2}$ 的两个结点,则正方形恰好盖在 4 个方格上,从而盖住了 9 个结点.



按已知,正方形纸片至少盖住了 7 个结点,如果不是上述情形,则 7 个结点一定是第 1 行和第 2 行各 3 个,第 3 行 1 个结点如右图所示.考察 $\triangle ABC$.它的面积为 2,恰为正方形纸片面积的一半.容易证明,对于正方形内(包括边界)的三角形,当且仅当三角形的一条边与正方形的一条边重合且三角形的第 3 个顶点在正方形的重合一边的对边上时,三角形面积等于正方形面积的一半.既然正方形纸片盖住了 $\triangle ABC$,由此可知,它一定也是恰好盖住了方格纸上的 4 个方格,从而也是盖住了 9 个结点.

显然,2×2 的正方形纸片至多盖住 9 个结点,故知当正方形纸片盖住 7 个结点时,它盖住了 9 个结点.

1·68　一个凸多面体的表面由 12 个正方形,8 个正六边形和 6 个正八边形组成,且每个顶点都恰是一个正方形,一个正八边形和一个正六边形的公共顶点.在连结多面体顶点的线段中,有多少条在多面体内,而不是在面上或多面体的棱?

（第 6 届美国数学邀请赛,1988 年）

[解]　用 a,b,c,d 分别表示凸多面体的顶点数,棱数,面对角线数和体对角线数.

因为在每个顶点恰有 3 种面各 1 个,所以不同正方形的顶点必为多面体的不同顶点,故有 $a=4\times12=48$.又因每个顶点都引出 3 条棱而每条棱连结两个顶点,所以有 $b=\frac{3a}{2}=72$.

每个正方形面上有两条面对角线,12 个正方形面上共有 24 条面对角线.每个正六边形面上有 $C_6^2-6=9$ 条面对角线,8 个正六边形面上有 72 条面对角线.正八边形面上有 $C_8^2-8=20$ 条面对角线,6 个正八

边形面上有 120 条面对角线. 所以,凸多面体共有 $C = 216$ 条面对角线.

由于多面体是凸的,所以

$$d = C_{48}^{2} - b - c = 1128 - 72 - 216 = 840,$$

即凸多面体共有 840 条体对角线.

1·69　已知某城市的形状是矩形,它被许多条街道划分成许多正方形. 南北方向上共有 m 个正方形,东西方向共有 n 个正方形. 问从矩形的一个顶点到相对的顶点的最短路线共有多少条?

(基辅数学奥林匹克,1953 年)

[解]　易见,从矩形的一个顶点到它的相对顶点的最短路线由 $m + n$ 条线段组成(每个正方形的一条边都称之为一条线段),其中有 m 条线段是南北向的,n 条是东西向的. 显然,南北向的 m 条线段在 $m + n$ 条线段中的每个不同排列都惟一确定一条路线,而且路线不同所对的 m 条南北线段的位置也不同,即二者之间的对应关系是双射. 所以,所求的路线总数是 C_{m+n}^{m}.

1·70　设 O 是边长为 1 的方格纸上的一个固定的结点. 现以 P_k 表示方格纸上的以点 O 为起点,长度为 k 且各段都位于网格线上的所有不同折线的条数,求证对所有 k,都有 $P_k < 2 \times 3^k$.

(第 22 届莫斯科数学奥林匹克,1959 年)

[证]　对于 $k = 1$,显然有 $P_1 \leqslant 4 < 2 \times 3$. 设当 $k = m$ 时结论成立. 当 $k = m + 1$ 时,对于任何一条长度为 $m + 1$ 的满足要求的折线,去掉其最后长度为 1 的部分,就得到一条长度为 m 且满足要求的折线. 在这个对应过程中,至多有 3 条长为 $m + 1$ 的折线对应于同一条长度为 m 的折线,故有

$$P_{m+1} \leqslant 3P_m < 3 \times 2 \times 3^m = 2 \times 3^{m+1},$$

这就完成了归纳证明.

1·71　圆上有 n 个点($n > 1$),连结这 n 个点,依次记为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$,使得折线 $P_1P_2\cdots P_n$ 不自交,问这样的连结方法有多少种?

(原联邦德国数学奥林匹克,1986 年)

[解]　我们首先用数学归纳法证明:在 P_n 点确定的情况下,可能连结的方法有 2^{n-2} 种.

当 $n = 2$ 时,则连结 P_1P_2 只有一种方法,即 $1 = 2^{2-2}$ 种.

假设对 n 个点有 2^{n-2} 种连法，再增加一点 P_{n+1}.

由于对每一种连结 P_{n+1} 的方法，而 P_{n+1} 必须在 P_1 和 P_n 之间，因此连成的折线或是 $P_1P_2\cdots P_nP_{n+1}$，或是 $P_{n+1}P_1P_2\cdots P_n$，即有 2 种可能的选择.

由此可得，$n+1$ 个点有 $2\cdot 2^{n-2}=2^{(n+1)-2}$ 种连法，因而对 $n+1$，命题成立.

由以上，对 $n>1$ 个点，当 P_n 点确定之后，有 2^{n-2} 种连法.

因为 P_n 的选择有 n 种可能，所以符合题目要求的连接方法有 $n\cdot 2^{n-2}$ 种.

1·72 设 M 是平面上所有整点的集合，M 中的点 $\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$ 构成的一条折线满足 $P_{i-1}P_i=1$，$i=1,2,\cdots,n$，则称这条折线长度为 n. $F(n)$ 表示起点 P_0 在原点而终点 P_n 在 x 轴上的长度为 n 的不同折线的条数，求证 $F(n)=C_{2n}^{n}$.

（波兰数学奥林匹克，1991 年）

［证］ 考察有 m 步是向 y 轴正向走的折线. 因为折线从原点出发，最后要回到 x 轴，所以必有 m 步是向 y 轴负向走的，其余的 $n-2m$ 步则既可向 x 轴正向又可向 x 轴负向走. 因此，这种折线的条数为 $C_n^mC_{n-m}^m\cdot 2^{n-2m}$. 从而知长度为 n 的所有不同折线的条数为

$$F(n)=\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}C_n^mC_{n-m}^m\cdot 2^{n-2m}. \qquad ①$$

下面用母函数法来计算 ① 式右端的和数. 考察恒等式

$$(1+x)^{2n}=(1+2x+x^2)^n.$$

上式左端 x^n 的系数为 C_{2n}^n，右端 x^n 的系数为

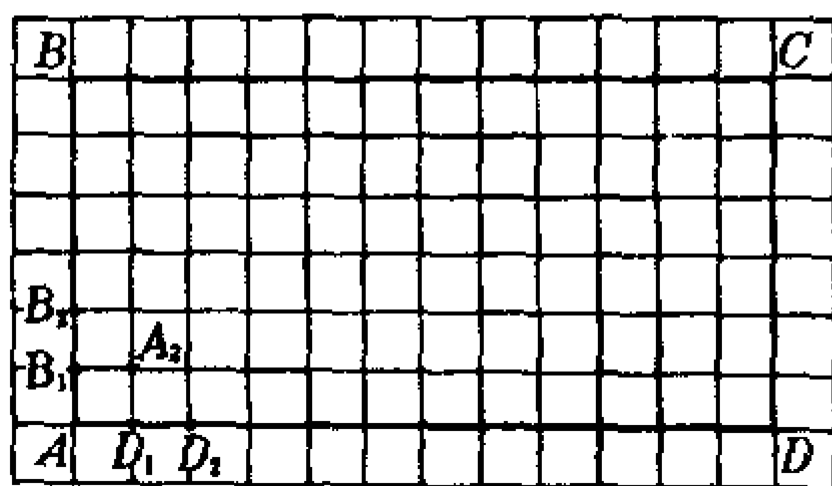
$$\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{n!}{m!(n-2m)!m!}\cdot 2^{n-2m}=\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}C_n^mC_{n-m}^m\cdot 2^{n-2m} \qquad ②$$

由 ① 和 ② 即得 $F(n)=C_{2n}^n$.

1·73 在方格纸上沿网格线画一个矩形 $ABCD$ 且使 AD 是 AB 的 k 倍($k\in N$). 考察 A 和 C 之间沿网格线的所有可能的最短路径. 求证在这些最短路径中，第一条边在 AD 之上的路径的条数是第一条边在 AB 之上的 k 倍.

（第 6 届全俄数学奥林匹克，1966 年）

[证 1] 设方格边长为 1 而矩形 $ABCD$ 的规格为 $m\times n$ 且 $m=kn$. 我们关于 $m+n$ 用数学归纳法来证明. 用 b_1,d_1,b_2,d_2,a_2 分别表示从顶点 B_1,D_1,B_2,D_2,A_2 到 C 的沿网格线的最短路径的条数.



当 $m=1$ 或 $n=1$ 时,命题结论显然成立. 当 $m>1,n>1$ 时,由归纳假设,对于 $(m-1)\times n$ 和 $m\times(n-1)$ 的矩形分别有

$$\frac{d_2}{a_2}=\frac{m-1}{n},\quad \frac{a_2}{b_2}=\frac{m}{n-1}.$$

因而有

$$\frac{d_1}{b_1}=\frac{d_2+a_2}{b_2+a_2}=\frac{\frac{d_2}{a_2}+1}{\frac{b_2}{a_2}+1}=\frac{\frac{m-1}{n}+1}{\frac{n-1}{m}+1}=\frac{m}{n}=k,$$

这就完成了归纳证明.

[证 2] 显然,从 A 到 C 的每条路径都由 m 段水平网格线与 n 段竖直网格线所组成. 将每条路径的 $m+n$ 段网格线按先后顺序排号,则只要 n 段竖直网格线的号码确定了,路径便惟一确定了. 因而,经过 D_1 的最短路径的条数为 C_{m+n-1}^{n};经过 B_1 的条数为 C_{m+n-1}^{n-1}. 从而二者的比值为

$$\frac{(m+n-1)(m+n-2)\cdots(m+n-n)}{n!}\cdot\frac{(n-1)!}{(m+n-1)(m+n-2)\cdots(m+n-n+1)}=\frac{m}{n}=k.$$

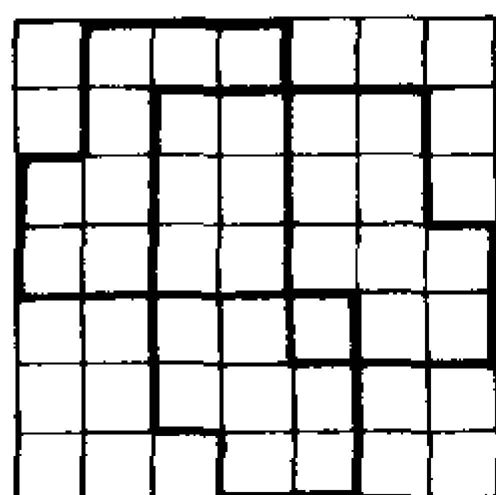
1·74 设纸上所画的网络线由 n 条水平直线和 n 条竖直直线组成. 问沿着这些网络线可以作出多少条不同的具有 $2n$ 段的闭折线,使得其中每条折线都经过每条水平线和每条竖直线?

(第 26 届莫斯科数学奥林匹克,1963 年)

[解] 沿着网络线的闭折线必然是横竖交错的,所以必有 n 个水平段和 n 个竖直段. 容易看出,折线被它的顶点组所惟一确定,而顶点组又被水平段和竖直段的一组排列

$$\{i_1,j_1,i_2,j_2,\cdots,i_n,j_n\} \qquad ①$$

所惟一确定，其中$\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}$和$\{j_1,j_2,\cdots,j_n\}$都是$(1,2,\cdots,n)$的排列. 这样一来，我们就得到一个由排列①到折线的映射，它显然是满射但不是单射. 因为对任意$1\leqslant k\leqslant n$，排列



$$\{i_k,j_k,\cdots,i_n,j_n,i_1,j_1,\cdots,i_{k-1},j_{k-1}\},$$

$$\{i_k,j_{k-1},i_{k-1},j_{k-2},\cdots,j_1,i_1,j_n,i_n,\cdots,i_{k+1},j_k\}$$

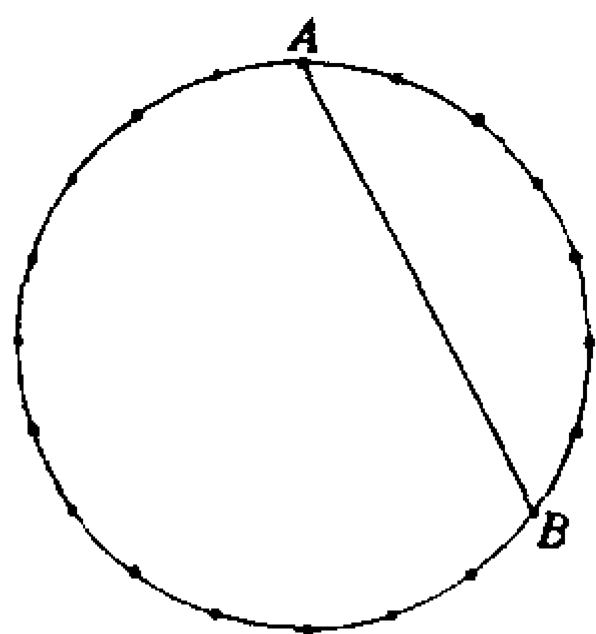
所对应的折线都是同一条，所以这个映射是倍数为$2n$的倍数映射.

因为所有形如①的排列的个数是$(n!)^2$，故知不同的闭折线的条数为$\frac{1}{2}n!\cdot(n-1)!$.

1·75　在圆周上给定20个点，并用10条既无公共端点又互相不交的弦来连结它们，问共有多少种不同的连线法？

（第13届莫斯科数学奥林匹克，1950年）

[解]　设当圆周上有$2n$个点时，用n条弦来连结它们时满足要求的不同连线法的总数为k_n. 在给定点中选定一点A并设它与点B间有弦AB相连，则点A和B将圆周分成的两条弧中，每条内部都有偶数个给定点. 设由A顺时针到B的圆弧内部有$2j$个点，则另一条弧的内部有$2(9-j)$个点. 两条弧内的给定点的不同连线数分别为k_j和k_{9-j}. 故知以弦AB为一条弦的不同连线法的种数为$k_j\cdot k_{9-j}$. 从而得到如下的递推关系式



$$k_n=k_{n-1}+k_1k_{n-2}+k_2k_{n-3}+\cdots+k_{n-2}k_1+k_{n-1}.$$

容易看出，$k_1=1,k_2=2$. 由上面递推关系式可以依次算出：$k_3=5,k_4=14,k_5=42,k_6=132,k_7=429,k_8=1430,k_9=4862,k_{10}=16796$. 即所求的不同连线法的总数为16796.

1·76　在平面上给定n个点，其中任何3点都不共线. 允许在两点之间连线，但所连出的线段彼此不能相交(可以有公共端点)，求证可能连出的线段数的最大值与点对的选择无关.

（基辅数学奥林匹克，1971年）

[证]　设这n个点的凸包是凸多边形M，且M有m条边. 因为任何两个给定点间连出的线段都不会与M的边界相交，所以无论怎样连

结，迟早都要把多边形 M 的 m 条边都连出来.

下面我们来证明，当连结线段数达到最大值时，在多边形 M 内部连出的线段数也都是相同的.我们指出，当按要求连结线段并达到线段条数的最大值时，这些线段一定将多边形 M 分成若干个三角形，每个三角形的顶点都是给定点.实际上，若分出的诸区域中还有 n 边形($n\geqslant 4$)，则在它的内部至少还可连出 1 条对角线，此与已连线段数的最大性矛盾.

设多边形 M 被分成 k 个三角形，则这 k 个三角形的内角之和为 $k\pi$.另一方面，对于这 k 个三角形的内角和，多边形 M 的内角的贡献为 $(m-2)\pi$.多边形 M 之内的每个给定点的贡献是 2π，和为 $(m-2)\pi+(n-m)2\pi$.从而得到

$$k=2(n-m)+(m-2)=2n-m-2.$$

又因每个三角形有 3 条边，k 个三角形有 $3k$ 条边(包括重复计数)，而多边形 M 的边仅为一个三角形的边，M 内部每条连线则是两个三角形的公共边，故得连线总数为

$$L=\frac{1}{2}(3k+m)=3n-m-3,$$

这显然是与连线次序无关的常数.

1·77　已知 A 和 E 为正八边形的一组相对顶点.一只青蛙从点 A 开始跳跃，如果青蛙在任一个异于 E 的顶点，那么它可以跳到两个相邻顶点之一，而当它跳到点 E 时就停在那里.设 e_n 为经过 n 步跳跃到达点 E 的不同路线的条数.求证

$$e_{2n-1}=0,e_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1}-y^{n-1}),n=1,2,\cdots,$$

其中 $x=2+\sqrt{2},y=2-\sqrt{2}$.

注　一条 n 步的路线是指顶点的一个序列 $(P_0,P_1,\cdots,P_n)$，它满足条件

(1) $P_0=A,P_n=E$;

(2) 对每个 $i,0\leqslant i\leqslant n-1,P_i\neq E$;

(3) 对每个 $i,0\leqslant i\leqslant n-1,P_i$ 与 P_{i+1} 是正八边形的两个相邻顶点.

(第 21 届国际数学奥林匹克，1979 年)

[证]　设正八边形为 $ABCDEFGH$，从顶点 A 出发经过 n 步到达

B,C,D,A 的不同路线的条数分别记为 b_n,c_n,d_n,a_n. 由对称性知，由 A 出发经过 n 步到达 H,G,F 的不同路线的条数分别为 b_n,c_n,d_n. 注意，青蛙在除 E 之外的任一顶点，都可以向两个相邻顶点中的一点跳一步，而跳到顶点 E 就不动了，故有

$$e_n = 2d_{n-1}, a_n = 2b_{n-1}, d_n = c_{n-1},$$
$$c_n = b_{n-1} + d_{n-1}, b_n = a_{n-1} + c_{n-1}. \quad ①$$

由 ① 式可得

$$\begin{aligned} e_n &= 2d_{n-1} = 2c_{n-2} = 2(b_{n-3} + d_{n-3}) \\ &= 2(a_{n-4} + c_{n-4}) + e_{n-2} = 4b_{n-5} + 2e_{n-2} \\ &= 4(c_{n-4} - d_{n-5}) + 2e_{n-2} = 4e_{n-2} - 2e_{n-4}, \quad ② \end{aligned}$$

这是一个关于 e_n 的递归关系式.

由于 $e_1 = e_3 = 0, e_2 = 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{1-1} - y^{1-1}), e_4 = 2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{2-1} - y^{2-1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(2+\sqrt{2}) - (2-\sqrt{2})]$，可见所求证的结论于 $n = 1,2$ 时成立. 设结论对 $n \leqslant k$ 成立，于是当 $n = k+1$ 时，由递推式 ② 及归纳假设立即得到 $e_{2k+1} = 0$，且有

$$\begin{aligned} e_{2k+2} &= 4e_{2k} - 2e_{2k-2} \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}}(x^{k-1} - y^{k-1}) - \frac{2}{\sqrt{2}}(x^{k-2} - y^{k-2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{(x+y)(x^{k-1} - y^{k-1}) - xy(x^{k-2} - y^{k-2})\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^k - y^k), \end{aligned}$$

即结论对 $n = k+1$ 也成立，这就完成了归纳证明.

1·78 蜗牛要在方格边长为 1 的足够大的方格纸上沿着网格线爬行长度为 $2n$ 的路程，路程的起点和终点都是同一个指定的结点. 求证供它爬行的不同路线的条数是 $(C_{2n}^n)^2$.

（第 23 届莫斯科数学奥林匹克，1960 年）

［证 1］ 蜗牛所爬过的每个方格的一条边称为一段. 由于蜗牛爬行的路线是封闭的，故知它向右爬行的段数与向左爬行的段数相等，向上和向下爬行的段数也相等. 因此，它向上和向右爬行的段数恰为 n，另外 n 段则是向下和向左爬行. 因此，我们首先从 $2n$ 段中选出 n 段作

为向上和向右爬行的路段，然后在这 n 段中选出 k 段作为向上爬行的路段，于是余下的 $n-k$ 段便都是向右爬行. 在另外的 n 段中，任选 k 段作为向下爬行的路段即可惟一确定一条路线. 因此，蜗牛爬行的不同路线的总数为

$$C_{2n}^{n}\cdot\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}\cdot C_{n}^{k}=C_{2n}^{n}\cdot\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}\cdot C_{n}^{n-k}=(C_{2n}^{n})^{2},$$

其中用到的组合恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}C_{n}^{n-k}=C_{2n}^{n}$$

是容易证明的. 因为左端 $C_{n}^{k}C_{n}^{n-k}$ 表示的是从 $2n$ 个元素中的前 n 个元素中取 k 个，从后 n 个元素中取 $n-k$ 个的组合数. 对 k 求和后所表示的当然是从 $2n$ 个元素中任取 n 个的组合数.

[证 2] 因为蜗牛向上爬行的段数与向下爬行的段数相等，向左爬行的段数和向右爬行的段数也相等. 故知向右和向上爬行的段数为 n 段，向左和向下爬行的段数也是 n 段. 前者共有 C_{2n}^{n} 种不同取法. 后者也恰有 C_{2n}^{n} 种不同取法. 两种取法各一次就惟一确定一条路线(两次都取到的路段为向右爬行的路段，两次都未选取的路段为向左爬行的路段，第 1 次取而第 2 次未取的路段是向上爬行的路段，第 2 次取而第 1 次未取的路段是向下爬行的路段). 从而知蜗牛爬行的不同路线的总数为 $(C_{2n}^{n})^{2}$.

1·79 在每格边长为 1 的方格纸上画一个半径为 100 的圆，它不经过方格纸的任一结点也不与任何一条网格线相切. 问这个圆可能穿过多少个方格?

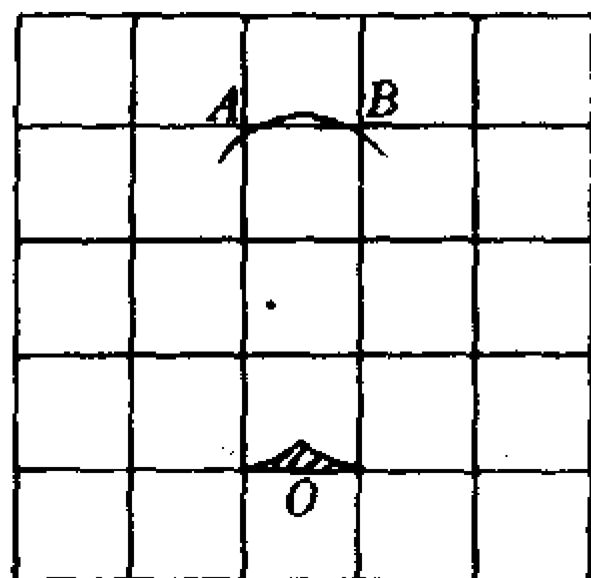
(第 2 届全苏数学奥林匹克，1968 年)

[解] 容易看出，不过结点，不与网格线相切且直径为 200 的圆周恰与 200 条水平线及 200 条竖直线相交，并且与每条直线都有两个交点. 于是交点共有 800 个，它们将圆周分成 800 段圆弧，每段弧在一个方格内，因此圆周至多穿过 800 个方格.

让我们来考察能否发生有两段圆弧属于同一个方格的情形. 如果能发生这样的情形，则称这样的方格为"奇异格". 下面我们来证明，奇异格可能没有，也可能有一个但至多一个.

设圆周与某格的某一条边 AB 相交于两点，让我们来看圆心 O 的

位置.这时点 O 与 A,B 的距离均大于100,而 O 到直线 AB 的距离小于100.因此点 O 的位置必在分别以 A,B 为心,以100为半径的两圆之外而且在与直线 AB 平行且相距100的水平网格线之上.确切地说,点 O 必在如上图所示的曲边三角形内.显然,沿方格的每一条边,都可在方格内作一个这样的曲边三角形,但4个曲边三角形并不能完全盖住整个方格,而当圆心落在盖不住的部分时,就没有奇异格.



综上可知,圆周穿过的方格数或为799,或为800.

1·80　已知一张 9×10 的矩形方格纸的每个正方形小格的边长为1.以方格纸结点为顶点,以网格线为边作正方形,问这样的正方形共可作出多少个?

(基辅数学奥林匹克,1979年)

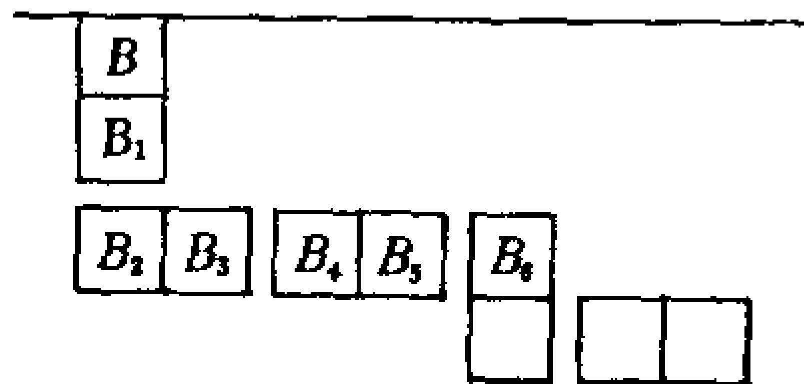
[解]　显然,每个满足题中要求的正方形被它的边长和左下角的顶点所惟一确定.对边长为 $k(k=1,2,\cdots,9)$ 的正方形,其左下顶点必落在所给矩形的左下方的 $(9-k)\times(10-k)$ 矩形的结点上.这些结点数为 $(10-k)(11-k)$.从而,满足题意的正方形的总数为

$$S=\sum_{k=1}^{9}(10-k)(11-k)=420.$$

1·81　在 1993×1993 的方格纸上标定两个处于同一条边缘的小方格 A 和 B,它们之间隔着奇数个小方格.现用 1×2 的矩形覆盖方格纸上除了1个标定方格外的其余部分,试证不盖 A 的盖法数与不盖 B 的盖法数相等.

(圣彼得堡数学选拔考试,1993年)

[证]　将方格纸像国际象棋棋盘那样染色,并假定4个角上的方格都是黑格.显然,A 和 B 格同色.若二者同为白格,则去掉其中1格后不能用 1×2 的矩形覆盖,即不盖 A 格的盖法数与不盖 B 格的盖法数均为零,结论自然成立.下面设 A 和 B 同为黑格.



对于方格表 T 的不盖 A 格的任意一种盖法 f,设其中盖住方格 B 的 1×2 矩形还盖住 B 的一个邻格 B_1.将这个矩形沿着由

B 到B_1 的方向平移1格而盖住 B_1 和 B_2. 原来盖住 B_2 的矩形盖住的另一个方格为 B_3,并将这个矩形沿着由 B_2 到 B_3 的方向平移1格而盖住 B_3 和 B_4. 如此继续下去,可得到由一串矩形所构成的链. 因为每个矩形都恰盖住黑格与白格各1个而且 B 为黑格,所以 B_{2k} 均为黑格,$k=2,4,6,\cdots$,从而这个链永远不会回到 B 格. 否则,移到 B 格之前的偶数号方格也是黑格,矛盾. 此外,这个链进行下去也不会中途出现一个循环圈,因而最后必然终止于 A 格. 这样,我们就得到一个 $T-B$ 的覆盖 g. 令 $T-A$ 的每个覆盖 f 对应于按上述程序所得到的 $T-B$ 的覆盖 g. 易见,这个对应是个双射,即一对一的对应. 所以,题中所论的两类覆盖的种数相等.

1·82　在坐标平面上画出下列直线

$$y=k, y=\sqrt{3}x+2k, y=-\sqrt{3}x+2k,$$

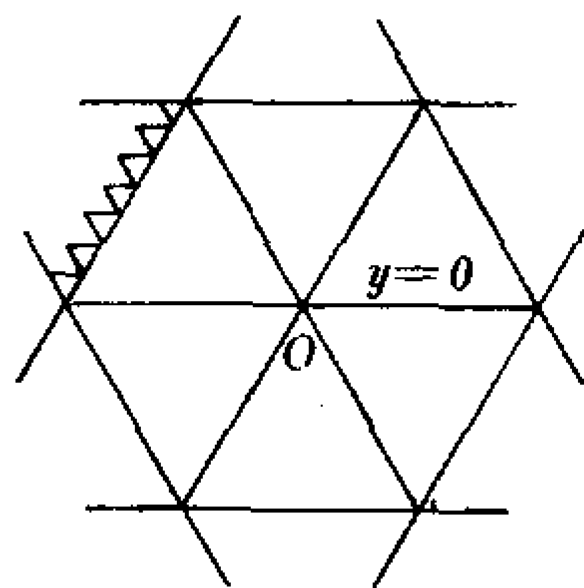
其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm10$,这63条直线可将平面划分出若干个等边三角形,求边长为$\frac{2}{\sqrt{3}}$ 的等边三角形的个数.

(第12届美国数学邀请赛,1994年)

[解]　最外面的6条直线围成了一个边长为$\frac{20}{\sqrt{3}}$ 的正六边形. 过原点的3条直线

$$y=0, y=\sqrt{3}x, y=-\sqrt{3}x$$

将这个正六边形分成6个边长均为$\frac{20}{\sqrt{3}}$ 的等边三角形. 因为每个这样的大三角形的边长是所论小三角形边长的10倍,所以每个大三角形可被分成100个小三角形. 从而正六边形被分成600个边长为$\frac{2}{\sqrt{3}}$ 的等边三角形. 此外,位于正六边形之外且有1条边位于正六边形边上的小等边三角形还有60个,正六边形的每条边的外面都有10个. 所以,边长为$\frac{2}{\sqrt{3}}$ 的等边三角形共有660个.



1·83　在圆上标出10个点,以这些点中的某些点为顶点能构造出多少个不同的凸多边形?(只有顶点全部相同时,才是相同的多边

形.)

（第7届美国数学邀请赛,1989年）

[解] 对于正整数 k, $3 \leqslant k \leqslant 10$,每选取 k 点便可构成一个凸多边形且点组不同时构成的多边形也不同. k 个点有 C_{10}^{k} 种不同取法,由于

$$C_{10}^{3}+C_{10}^{4}+C_{10}^{5}+\cdots+C_{10}^{10}$$
$$=2^{10}-C_{10}^{0}-C_{10}^{1}-C_{10}^{2}=968,$$

所以共可构成968个不同的凸多边形.

1·84 在平面上给定一个 n 点集 M,其中任何3点都不共线.两个端点都在 M 中的每条线段都标上数 $+1$ 和 -1 之一,并且标上 -1 的线段条数为 m.如果顶点都在 M 中的三角形的3条边上所标数之积为 -1,则称该三角形为负的.求证负三角形的个数与乘积 mn 奇偶性相同.

（罗马尼亚数学奥林匹克,1978年）

[证] 记负三角形的总数为 k.对于每个三角形,把标在其3边上的数连乘,然后把所有这样得到的乘积连乘,得到的乘积为 $(-1)^{k}$.另一方面,因为每条线段恰属于 $n-2$ 个三角形,所以其上所标的数在这个连乘积中出现 $n-2$ 次.因此,得到的连乘积又应为 $(-1)^{(n-2)m}$.这表明 k 与 $(n-2)m$ 奇偶性相同,从而 k 与 nm 奇偶性相同.

1·85 在圆周上给出了一个由点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 所组成的点集.考察所有以该点集中的点作为顶点的各种不同的凸多边形,并把这些多边形分成两组:第1组中的多边形都以 A_1 为一个顶点,第2组中的多边形则都不以 A_1 作为顶点.问哪一组中的多边形个数多?

（第16届莫斯科数学奥林匹克,1953年）

[解] 对于第2组中的任一多边形,将它加上一个顶点 A_1 之后就得到第1组的一个多边形,而且这个对应是单射.但是第1组中的 $\triangle A_1A_2A_3$ 不是第2组任一多边形的象,所以这个对应不是满射.故知第1组中多边形的个数多.

1·86 在凸1000边形中给定500个点,连同多边形顶点的共1500个点中,任何3点都不共线.将上述凸1000边形剖分为一些三角形,所有1500个点都是这些三角形的顶点,而且这些三角形除此之外别无其他顶点.在这样的剖分之下,凸1000边形被分成了多少

个三角形?

(第16届莫斯科数学奥林匹克,1953年)

[解] 设这个多边形被分成了 n 个三角形,则这些三角形的内角和为 $n\cdot180°$.另一方面,多边形的1000个顶点对内角和的贡献就是多边形的所有内角,其值为 $998\times180°$.凸1000边形内部的每个给定点对内角和的贡献为 $360°$.于是所有三角形的内角和又应为

$$998\times180°+500\times360°=1998\times180°.$$

故知共分成了 $n=1998$ 个三角形.

1·87 一张正方形纸的内部被针扎了1965个孔,这些孔和正方形的顶点之中的任何3点都不共线.引若干条互不相交的直线段,它们的端点都是这些孔或正方形的顶点,以将正方形分割成一些三角形,并且在这些三角形的内部和边上都不再有小孔.问一共引了多少条线段?共得到了多少个三角形?

(第28届莫斯科数学奥林匹克,1965年)

[解] 我们把1965个小孔和正方形的4个顶点所成的集合记为 M.显然,M 中的点都是一些三角形的公共顶点.我们从两方面来计算所有三角形的内角和.

设共分成了 n 个三角形,于是它们的内角和为 $n\cdot180°$.另一方面,这些三角形的内角的顶点都是 M 中的点.换句话说,它们的内角都是由 M 中的点提供的.正方形的每个顶点都提供 $90°$ 角,每个孔点则提供 $360°$ 角.所以,得到的 n 个三角形的内角和又应为

$$4\times90°+1965\times360°=1966\times360°.$$

故得 $n\cdot180°=1966\times360°$.解得 $n=3932$,即共得到3932个三角形.

这3932个三角形共有 3932×3 条边,其中有4条边是原正方形的4条边,不用另行引出.其他各边都是引出的线段,但每条线段恰为两个三角形的公共边,所以,引出的线段总数为

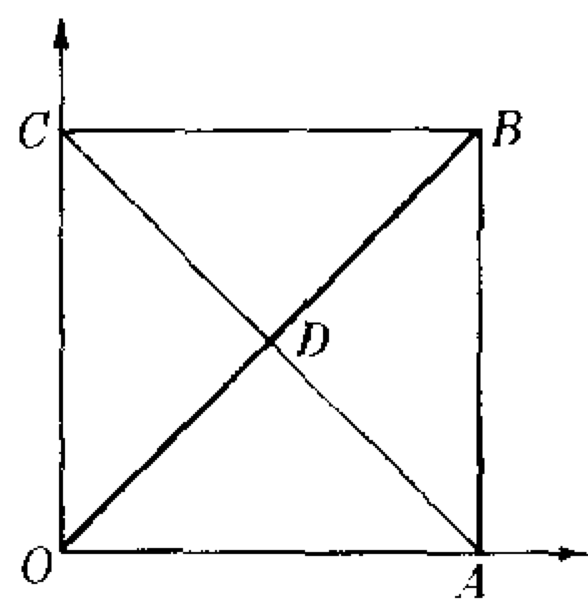
$$(3932\times3-4)\div2=5896.$$

1·88 三边长均为整数且最大边长为11的三角形,共有多少个?

(中国高中数学联赛,1983年)

[解] 设三角形另外两条边长分别为 x,y,则 $x\leqslant11,y\leqslant11$.满足这一条件的非负整数对对应于右图中正方形 $OABC(OA=11)$ 上的格点(包括边上的),这样的格点共有 $12\times12=144$ 个.

因为 x 和 y 作为三角形两边长还应满足 $x+y>11$，所以符合题意的格点应在 $\triangle ABC$ 上且不在边 AC 上．又因 $\triangle ABC$ 关于直线 OB 成轴对称，故知 $\triangle ABC$ 上的格点，除 DB 上的之外，恰有一半符合要求．又因点 D 不是格点，所以，符合题意的格点数恰为正方形上格点总数的 $\frac{1}{4}$．可见，满足要求的三角形共有 36 个．



1·89　设 $P_1,P_2,\cdots,P_{2n+3}$ 为平面上的 $2n+3$ 个点，其中任何 3 点都不共线，任何 4 点都不共圆．过其中 3 点作圆，使其余 $2n$ 个点在圆内和圆外各有 n 个点，这种圆的个数记为 K，求证

$$K>\frac{1}{\pi}C_{2n+3}^{2}.$$

（第 28 届国际数学奥林匹克候选题，1987 年）

［证］　首先证明对任意两点 P_i,P_j，一定存在第 3 点 P_k，使得过 P_i,P_j,P_k 3 点的圆满足题中的要求．为此，不妨设直线 P_iP_j 的上方的点数 $m\geqslant n+1$．因为任何 3 点不共线，任何 4 点不共圆，故可将直线上方的 m 点按对线段 P_iP_j 的张角从小到大排列为 $P_{k_1},P_{k_2},\cdots,P_{k_m}$，即有

$$0^\circ<\angle P_iP_{k_1}P_j<\angle P_iP_{k_2}P_j<\cdots<\angle P_iP_{k_m}P_j<180^\circ.$$

由此可知，过 p_i,p_j,p_{k_1} 3 点的圆内的点数不少于 n；过 P_i,P_j,P_{k_m} 3 点的圆内的点数不多于 n．若两圆中有一圆内恰有 n 个点，则它就满足要求．否则，前者内部点数大于 n，后者内部点数小于 n．而当顺次考察过 $P_i,P_j,P_{k_h}(h=1,2,\cdots,m)$ 3 点的圆时，圆内给定点的个数每次恰减少 1 个．故知其中必有 1 个圆满足题中要求．

这样一来，对于 $\{P_1,P_2,\cdots,P_{2n+3}\}$ 中的任意两点都可以作出 1 个圆满足题中要求．于是共可得到 C_{2n+3}^{2} 个圆．但在这个计数过程中，每个圆可被计数 3 次，故得

$$K\geqslant\frac{1}{3}C_{2n+3}^{2}>\frac{1}{\pi}C_{2n+3}^{2}.$$

1·90　已知平面上有 n 条直线，其中任何两条不平行，任何 3 条不共点．这些直线互相相交共有多少个交点？这些直线可生成多少个三角

形?这些直线把平面分成了多少部分?其中有多少部分是无界的?

(基辅数学奥林匹克,1976年)

[解] 由于任何两条直线不平行,任何3条不共点,故每两条直线有一个交点,每个交点也仅仅是这两条直线的交点.所以交点数与直线对的数目相等,共有 $C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$ 个.

由已知条件可知,每3条直线彼此相交构成一个三角形,且这个对应也是一对一的.所以,三角形的总数为 $C_n^3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$.

下面用递推法来计算 n 条直线把平面分成多少部分.设 k 条直线把平面共分成的部分数为 a_k.第 $k+1$ 条直线与前 k 条直线共有 k 个互不相同的交点,它被这 k 个交点分成 $k+1$ 段.每段都将它所在的部分一分为二.因而有

$$a_{k+1}=a_k+k+1.$$

由此递推即得

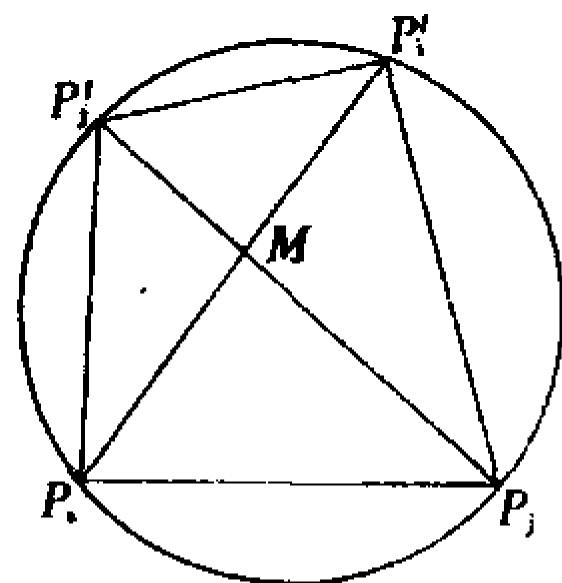
$$a_n=n+(n-1)+\cdots+2+a_1=\frac{1}{2}n(n+1)+1.$$

最后,我们注意,n 条直线中的每条都被另外的 $n-1$ 条截成 n 段,其中恰有两端的两条射线是无界的.因此共有 $2n$ 条射线.被 n 条直线所分成的诸部分中,围成每个无界区域的边界折线恰有两条是射线,而且每条射线恰是两个无界区域的公共边界.所以,共有 $2n$ 个无界部分.

1·91 设圆周上有 n 个点($n\geqslant6$),其中每两点间连一条弦且任何3条弦在圆内都没有公共点.问这些弦彼此相交共能构成多少个不同的三角形?

(中国国家集训队训练题,1991年)

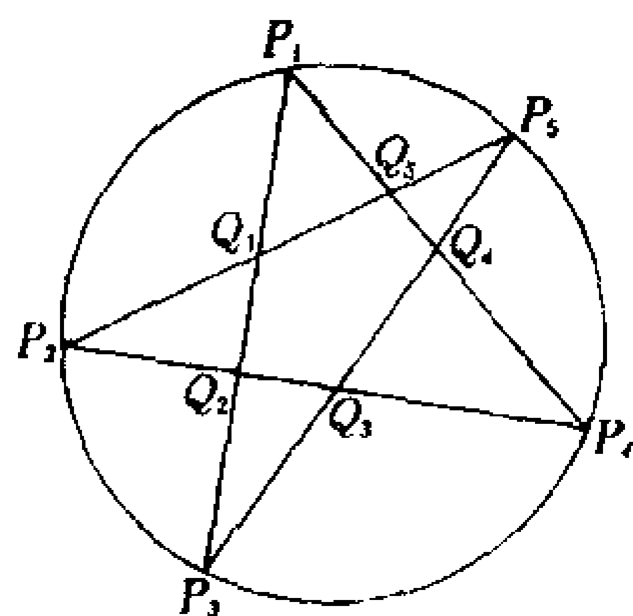
[解] (1)先考察3个顶点都在圆上的三角形的集合 S_1.设 T_1 是圆上 n 个已知点的所有三元子集的集合,则 $|T_1|=C_n^3$.显然,由三角形到它的3个顶点的对应是由 S_1 到 T_1 的一个双射,故有 $|S_1|=C_n^3$.



(2)其次考察2个顶点在圆上,1个顶点在圆内的三角形的集合 S_2.设 T_2 是 n 个已知点的所有四元子集的集合,则 $|T_2|=C_n^4$.

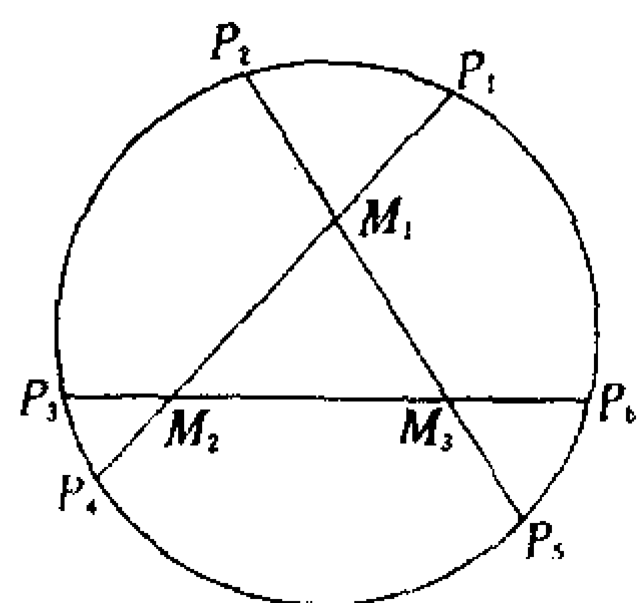
设 $\triangle MP_iP_j$ 是任一这样的三角形,其顶点 P_i,

P_j 是圆上的已知点，顶点 M 是弦 P_iP_i' 和 P_jP_j' 在圆内的交点．令 $\triangle MP_iP_j$ 对应于四点组 $\{P_i, P_j, P_i', P_j'\}$，则 $\triangle MP_jP_i'$，$\triangle MP_i'P_j'$ 和 $\triangle MP_j'P_i$ 也都对应于这同一个四点组．易见，这个映射是由 S_2 到 T_2 的倍数映射且倍数为 4．从而有 $|S_2| = 4C_n^4$．



(3) 再考察 1 个顶点在圆上，2 个顶点在圆内的所有三角形的集合 S_3．设 T_3 是 n 个已知点的所有五元子集的集合，则 $|T_3| = C_n^5$．

设 $\triangle P_1Q_1Q_5$ 是一个这样的三角形，其顶点 P_1 在圆上，顶点 Q_1 和 Q_5 在圆内（如图所示）．令 $\triangle P_1Q_1Q_5$ 对应于五点组 $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\} \in T_3$，这就定义了一个由 S_3 到 T_3 的倍数为 5 的倍数映射．故有 $|S_3| = 5|T_3| = 5C_n^5$．



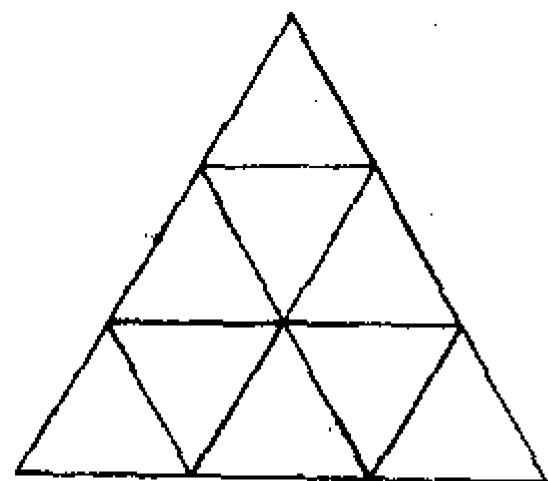
(4) 最后考察 3 个顶点都在圆内的所有三角形的集合 S_4．设 T_4 是 n 个已知点的所有六元子集的集合，则 $|T_4| = C_n^6$．

设 $\triangle M_1M_2M_3$ 是一个这样的三角形（如图所示）．令 $\triangle M_1M_2M_3$ 对应于六点组 $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\} \in T_4$．易见，这是一个由 S_4 到 T_4 的双射．从而有 $|S_4| = |T_4| = C_n^6$．

由加法原理知，所求的三角形的总数为 $S = C_n^3 + 4C_n^4 + 5C_n^5 + C_n^6$．

1·92　在图中，大三角形的边长为 3，由图中过各格点的直线所成的平行四边形的个数 $f(3) = 15$．在一般情况下，求边长为 n 的三角形中，相应的平行四边形的个数 $f(n)$．

（第 23 届加拿大数学奥林匹克，1991 年）



［解］　设两边分别与 $\triangle ABC$（边长是 n）的边 AB，BC 平行的平行四边形的个数为 $g(n)$．

在 BA，BC 的延长线上分别取 E，F，使 $BE = BF = n+1$，则 $EF = n+1$，并且上述平行四边形的每一边恰好与 EF 相交于一点，这 4 个点互不相同，且都是 EF 上的格点（即将 EF 等分为 $n+1$ 份的分点）．

反之，从 EF 上的 $n+2$ 个格点（包括端点 E，F 在内）中任取四点，

过靠近 E 的两点作 AB 的平行线，过另两点作 BC 的平行线，便可得到上述的平行四边形，所以

$$g(n)=C_{n+2}^{4},$$

从而

$$f(n)=3\times g(n)=3C_{n+2}^{4}.$$

1·93　已知 99 条直线将平面分成 n 个部分，试在小于 199 的范围内求 n 的所有可能值.

（第 15 届莫斯科数学奥林匹克，1952 年）

[解]　当 99 条直线都互相平行时，把平面分成 100 部分；当 98 条直线互相平行而另一条与它们不平行时，把平面分成 198 部分. 当然，当 99 条直线共点时，也把平面分成了 198 部分. 下面证明在小于 199 的范围内，n 没有其他解.

(1) 设已知直线中有 k 条互相平行($2\leqslant k\leqslant 97$)，其余的每条直线都不与它们平行. 这时，k 条平行线将平面分成 $k+1$ 部分，其余的直线每加入 1 条，都至少增加 $k+1$ 个部分区域. 故所分成的部分数不少于 $(k+1)(99-k+1)\geqslant 3\times 98>200$. 可见，这种情形下 n 无解.

(2) 设任何两条直线都不平行但有 k 条直线交于一点 $O(2\leqslant k\leqslant 98)$，而其余直线不过点 O. 这时，过点 O 的 k 条直线将平面分成 $2k$ 部分. 其余的直线每加入 1 条，都至少增加 $k+1$ 部分. 故所分成的部分数不少于 $2k+(99-k)(k+1)\geqslant 196+99>200$，$n$ 也无解.

综上可知，在小于 199 的范围内，n 的所有可能的值只有两个：100 和 198.

1·94　设凸 $n(n\geqslant 4)$ 边形中的任何三条对角线都不共点，问这个 n 边形被它的所有对角线分成多少块内部不交的小多边形部分？

（第 3 届莫斯科数学奥林匹克，1937 年）

[解 1]　设凸 n 边形被分成的诸区域中，边数最多的多边形为 m 边形，并设 k 边形的个数为 n_k，$k=3,4,\cdots,m$. 我们从两个方面来分别计算顶点数及内角和.

一方面，分成的诸多边形的顶点总数为

$$3n_3+4n_4+\cdots+mn_m,\qquad ①$$

诸多边形的内角总和为

$$n_3\cdot 180^\circ+2n_4\cdot 180^\circ+\cdots+(m-2)n_m\cdot 180^\circ.\qquad ②$$

另一方面,原 n 边形的每个顶点恰是 $n-2$ 个小多边形的公共顶点,而任何两条对角线的交点都是 4 个小多边形的顶点且这样的交点共有 C_n^4 个,故知诸多边形的顶点总数又应为 $n(n-2)+4C_n^4$. 由此及①得到

$$3n_3+4n_4+\cdots+mn_m=n(n-2)+4C_n^4. \qquad ③$$

此外,原来的 n 边形的内角和为 $(n-2)180°$,对角线间的每个交点对内角和的贡献为 360°,所以,诸多边形的内角和又应为 $(n-2)180°+C_n^4 360°$. 由此及②得到

$$n_3+2n_4+\cdots+(m-2)n_m=n-2+2C_n^4. \qquad ④$$

③-④得到

$$2(n_3+n_4+\cdots+n_m)=(n-1)(n-2)+2C_n^4,$$

$$n_3+n_4+\cdots+n_m=C_{n-1}^2+C_n^4,$$

即分成的小多边形的总数为 $C_{n-1}^2+C_n^4$.

[解2] 当 $n=k$ 时,记凸 k 边形被对角线所分成的小多边形的总数为 m_k. 当 $n=k+1$ 时,我们视顶点 A_{k+1} 是后加入的,考察由于它的加入增加了多少个小多边形.

首先,由顶点 A_{k+1} 共引出 $k-2$ 条对角线,它们将新增加的 $\triangle A_{k+1}A_1A_k$ 分成 $k-1$ 个小三角形,这些三角形全是新增加的. 其次,对角线 $A_{k+1}A_j(j=2,\cdots,k-1)$ 将凸 $k+1$ 边形的其余顶点分成两组: $\{A_1,A_2,\cdots,A_{j-1}\}$ 和 $\{A_{j+1},A_{j+2},\cdots,A_k\}$. 当且仅当两组各出一点所连的对角线与 $A_{k+1}A_j$ 相交. 由于任何三条对角线不共点,故新增加的小多边形的个数(上面已计数的除外)与新增的对角线交点数相同. 后者的总数为

$$\sum_{m=1}^{k-2} m(k-1-m)=\frac{1}{2}(k-1)^2(k-2)-\frac{1}{6}(k-1)(k-2)(2k-3)$$
$$=C_k^3.$$

这样一来,我们得到递推关系式

$$m_{k+1}=m_k+(k-1)+C_k^3.$$

由此递推即得

$$m_n=m_3+2+3+\cdots+(n-2)+C_3^3+C_4^3+\cdots+C_{n-1}^3$$
$$=C_{n-1}^2+C_4^4+C_4^3+C_5^3+\cdots+C_{n-1}^3$$

$$= C_{n-1}^2 + C_n^4.$$

[解 3] 凸 n 边形中对角线总数为

$$C_n^2 - n = \frac{1}{2}n(n-1) - n = \frac{1}{2}n(n-3) = C_{n-1}^2 - 1.$$

简记 $m = C_{n-1}^2 - 1$ 并将这 m 条对角线排定次序为 $l_1, l_2, \cdots, l_m$.

先将 l_1 去掉，则小多边形的总数将减少 $a_1 + 1$ 个，这里 a_1 为 l_1 与其他对角线相交的交点数(多边形的顶点不算在内). 在已去掉 $l_1, l_2, \cdots, l_{j-1}$ 后，再去掉对角线 l_j，小多边形总数又将减少 $a_j + 1$ 个，这里 a_j 为 l_j 与尚未去掉的所有对角线的交点数. 当把所有对角线都去掉之后，余下的多边形只有一个，即原来的 n 边形. 故分成的小多边形的总数为

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}(a_j + 1) + 1 &= \sum_{j=1}^{m} a_j + m + 1 \\ &= C_n^4 + (C_{n-1}^2 - 1) + 1 = C_n^4 + C_{n-1}^2.\end{aligned}$$

1·95 在平面上给出了 3000 条直线，其中任何两条都不平行，任何 3 条都不共点. 这些直线将平面分割成若干块多边形区域. 求证在这些多边形中，(a) 至少有 1000 个三角形；(b) 至少有 2000 个三角形.

(第 35 届莫斯科数学奥林匹克，1972 年)

[证] 对于任意一条直线 l，其他各直线的所有交点中有 1 个离它最近的交点. 则产生这个交点的两条直线与 l 围成一个三角形.

对于 3000 条直线中的每条都至少有 1 个三角形，至少共有 3000 个三角形. 但在这个计数过程中，每个三角形都被计数 3 次，故至少有 1000 个不同的三角形，这就证明了(a).

在平面上至多能找出两条这样的直线，使得所有其他直线的交点都位于它们的同一侧. 若不然，设有 3 条直线都具有这样的性质. 这时，3 条直线彼此相交将平面分成 7 部分，其他直线的所有交点只能全都位于其中的 1 部分中. 但第 4 条直线与这 3 条直线的 3 个交点显然不能全在一个部分中，矛盾. 由此可知，至少有 2998 条直线中的每条直线的两侧都有其他直线的交点，从而每条直线至少存在两个三角形，于是至少共有 $2998 \times 2 + 2 = 5998$ 个三角形. 每个三角形被计数 3 次，所以三角形总数

$$N \geqslant \frac{1}{3} \times 5998 = 1999\frac{1}{3}.$$

因三角形个数 N 为整数，故有 $N \geqslant 2000$.

1·96 今有 $n^2 + n$ 个直角，其中每个都是由两根长度为 1 的铁棒

焊接而成.用这些直角排列成一个正方形方格网,其中有 n^2 个 1×1 的小方格.我们把边向上和向右的直角称为 A 类的,把边向下和向左的直角称为 B 类的.求证方格网中 A 类直角与 B 类直角的个数相等.

(前苏联教委推荐试题,1991 年)

[证] 因为 $n\times n$ 的方格网中共有 $2(n^2+n)$ 条长度为 1 的边,所以 n^2+n 个直角全被用到且方格网中的每条小边都恰属于 1 个直角.

我们为方格网中的每条小边赋值如右图所示.易见,方格网中每个 A 类直角的两边上的数之和为 1,每个 B 类直角的两边上的数之和为 -1,另外两类直角(边向上和向左的直角称为 C 类,边向下和向右的直角称为 D 类)中每个角的两边上数之和均为 0.记方格网中 4 类直角的个数分别为 a,b,c,d.由赋值关于主对角线的反对称性(即值为 i 的边的对称边的值为 $-i$)知方格网中所有边的值之和为 0,故有

$$a\cdot1+b\cdot(-1)+c\cdot0+d\cdot0=0,$$

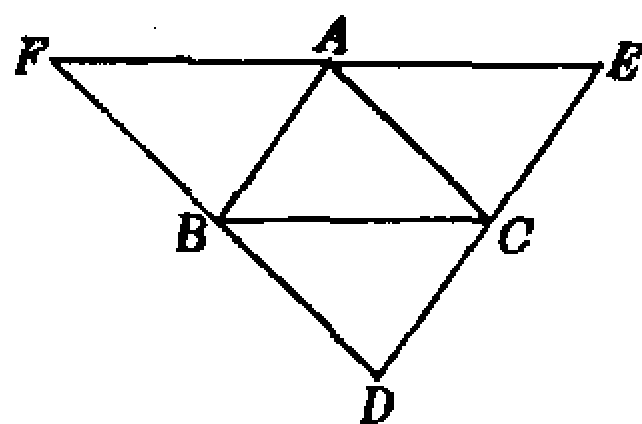
由此即得 $a=b$.

1·97 在平面上给定 $n(n>4)$ 个点,其中任何 3 点都不共线.试证至少存在 C_{n-3}^2 个以上述给定点为顶点的凸四边形.

(第 11 届国际数学奥林匹克,1969 年)

[证 1] 首先注意,任何 3 点都不共线的平面上的 5 点之中必可选出 4 点,使得以它们为顶点可以构成一个凸四边形.

其次,由 n 个给定点可以组成 C_n^5 个不同的五点组,于是每组至少可以构成一个凸四边形,共计至少有 C_n^5 个凸四边形(包括重复计数).另一方面,每个凸四边形恰属于 $C_{n-4}^1=n-4$ 个五点组,所以,不同的凸四边形的个数不少于 $\dfrac{1}{n-4}C_n^5$.



最后,用数学归纳法容易证明

$$\frac{1}{n-4}C_n^5 \geqslant C_{n-3}^2,$$

其中等号当且仅当 $n = 5,6$ 时成立.

[证 2] 以给定点中的任意3点为顶点可以作一个三角形,所有这样的三角形总共只有有限多个,故其中必有面积最大的一个(若这样的三角形不只一个，则任取其中之一)，记为 $\triangle ABC$. 过顶点 A,B,C 分别作对边的平行线,3条线交成 $\triangle DEF$(如上图所示),则 n 个给定点全都落在 $\triangle DEF$ 的内部或周界上,否则将导致与 $\triangle ABC$ 面积的最大性矛盾.

除 A,B,C3 点之外的 $n-3$ 个给定点中,任意两点所决定的直线至多与 $\triangle ABC$ 的两条边相交. 从而这两点以及不与它们所决定的直线相交的 $\triangle ABC$ 的那条边的两个端点就可构成一个凸四边形. 显然,这些凸四边形互不相同且至少有 C_{n-3}^2 个.

[证 3] 设这 n 个给定点的凸包是凸 m 边形,则 $3 \leqslant m \leqslant n$. 任取凸包的 3 个顶点为顶点作一个三角形,记为 $\triangle ABC$. 容易验证,其余 $n-3$ 个给定点中的任何两点所决定的直线都至多与 $\triangle ABC$ 的两条边相交. 以下论证同证 2.

1·98 在平面上给定 100 个点,其中任何 3 点都不共线. 考察以这些点为顶点的所有可能的三角形,求证其中至多有 70% 的三角形是锐角三角形.

(第 12 届国际数学奥林匹克,1970 年)

[证 1] 我们用数学归纳法来证明一般的结论:对于所有自然数 $n \geqslant 5$,题中的结论都成立.

设 M 是 n 个给定点的集合. 以 M 中的点为顶点的三角形的总数记为 $G(M)$,其中锐角三角形的总数记为 $S(M)$. 首先证明:如果 $\frac{S(M)}{G(M)} \leqslant a$ 对任意 n 点集 M 都成立,则当将点集 M 再增加一点而得到点集 M' 时,仍有 $\frac{S(M')}{G(M')} \leqslant a$.

设 $M' = \{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}\}$ 并令 $M_j = M' - \{A_j\}, j = 1,2,\cdots, n+1$. 于是有

$$G(M') = \frac{1}{n-2}\{G(M_1) + G(M_2) + \cdots + G(M_{n+1})\}, \quad ①$$

$$S(M')=\frac{1}{n-2}\{S(M_1)+S(M_2)+\cdots+S(M_{n+1})\},\qquad ②$$

而由假设有 $S(M_j)\leqslant aG(M_j)$, $j=1,2,\cdots,n+1$,从而得到

$S(M_1)+S(M_2)+\cdots+S(M_{n+1})\leqslant a\{G(M_1)+G(M_2)+\cdots+G(M_{n+1})\}$.

由此及 ①,② 即得 $\frac{S(M')}{G(M')}\leqslant a$.

其次,当 $n=4$ 时,M 由 4 点组成.这时 $G(M)=4$,且 4 个三角形中至少有一个非锐角三角形,故有 $S(M)\leqslant 3$.从而有 $\frac{S(M)}{G(M)}\leqslant 0.75$. 由此及前段证明的结论便知,当 M' 为五点集时,也有

$$\frac{S(M')}{G(M')}\leqslant 0.75.\qquad ③$$

但这时 $G(M')=C_5^3=10$ 而 $S(M')$ 为正整数,故有 $S(M')\leqslant 7$,再代入 ③ 即得

$$\frac{S(M')}{G(M')}\leqslant 0.7.\qquad ④$$

由 ④ 及前段证明便知当 $n\geqslant 5$ 时,对所有 n 点集 M 均有 $\frac{S(M)}{G(M)}\leqslant 0.7$.

[证 2] 我们证明本题的等价命题:至少有 30% 的非锐角三角形. 从给定点中任取 5 点.

(1) 设 5 点的凸包为凸五边形 $ABCDE$,则它的 5 个内角中至少有两个钝角.这时只有两种可能情形:两个钝角相邻或不相邻,不妨分别设 $\angle A,\angle B$ 为钝角或 $\angle A,\angle C$ 为钝角.但无论哪种情形,在四边形 $ACDE$ 中至少有一个内角不是锐角且显然与前两个钝角不同.所以,这时至少有 3 个非锐角三角形.

(2) 设点 E 在凸四边形 $ABCD$ 之中,不妨设点 E 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BCD$ 之内. 这时 $\{\angle AEB,\angle BEC,\angle CEA\}$ 和 $\{\angle BEC,\angle CED,\angle DEB\}$ 每组中至少有两个钝角且其中至多有一个角重复出现,故至少有 3 个钝角三角形.

(3) 设点 D 和 E 都在 $\triangle ABC$ 中,如(2) 中一样地可以证明这时至少有 4 个钝角三角形.

综上可知,无论哪种情形,都至少有 3 个非锐角三角形.由于 5 点所能构成的三角形共有 $C_5^3=10$ 个,故知在任何五点组中,非锐角三角形

都至少有 30%．从而当把由 100 个给定点所组成的所有可能的五点组中的三角形放在一起(包括重复计数)时，非锐角三角形至少占 30%．

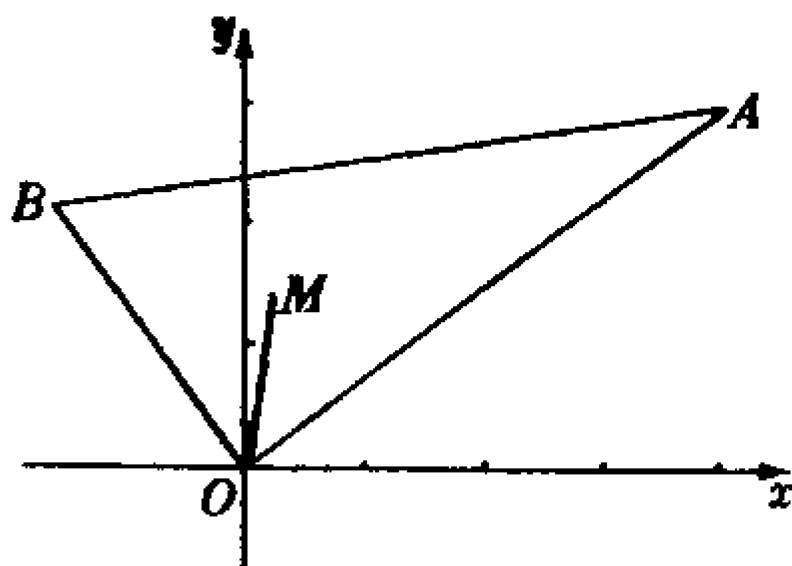
另一方面，因为每个三角形都恰好在 C_{97}^2 个五点组中出现，即在上述计数过程中，每个三角形重复的次数同样多，所以在由 100 个给定点为顶点的所有不同的三角形中，非锐角三角形至少占 30%．

1·99　设点 M 在平面上的坐标为$(p\times1994,7p\times1994)$，其中 p 是某个素数，求满足下列条件的直角三角形的个数：

(1) 三角形的 3 个顶点都是整点，而且 M 是其直角顶点；

(2) 三角形以坐标原点为内心．

(第 9 届中国中学生数学冬令营，1994 年)



［解］　连结坐标原点 O 及点 M，记线段 OM 的中点为$I(p\times997,7p\times997)$．把满足题中要求的每个直角三角形都关于点 I 作中心对称，即把点(x,y) 变为点$(p\times1994-x,7p\times1994-y)$．于是，满足题中要求的每个整点直角三角形都变为一个与之全等的整点三角形，原三角形的内心变到点 M，直角顶点变到坐标原点．由此可见，只须统计直角顶点在原点而内心在点 M 的直角三角形的个数即可．

考察满足上述条件的整点直角 $\triangle OAB$．记 $\angle xOM=\beta,\angle xOA=\alpha$，注意到 $\mathrm{tg}\beta=7,\alpha+\dfrac{\pi}{4}=\beta$，便有

$$\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\mathrm{tg}\beta-1}{1+\mathrm{tg}\beta}=\frac{3}{4}. \qquad ①$$

因此直角边 OA 上的任一点的坐标都可写成$(4t,3t)$．由于 A 为整点，故有 $t\in N$，且 $OA=5t$．又因 $OB\perp OA$，故知点 B 的坐标为$(-3s,4s)$，其中 $s\in N$．于是 $OB=5s$．直角 $\triangle OAB$ 的内切圆半径$r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}OM=5p\times1994$．我们写

$$OA=2r+k,OB=2r+h, \qquad ②$$

由于 OA,OB,r 都是 5 的倍数，故自然数 k,h 也都是 5 的倍数．

由圆的切线长定理可知

$$AB=(r+k)+(r+h)=2r+k+h.$$

再由勾股定理便有

$$O = AB^2 - OA^2 - OB^2 = (2r+k+h)^2 - (2r+k)^2 - (2r+h)^2$$
$$= 2kh - 4r^2.$$

由此解得　$kh = 2r^2$. 又因 $\frac{k}{5}, \frac{h}{5}$ 都是自然数，故有

$$\frac{k}{5} \cdot \frac{h}{5} = 2^3 \times 997^2 \times p^2. \qquad ③$$

当 $p \neq 2$ 和 $p \neq 997$ 时，由 ③ 可得

$$\begin{cases} \frac{k}{5} = 2^i \times 997^j \times p^n, \\ \frac{h}{5} = 2^{3-i} \times 997^{2-j} \times p^{2-n}, \end{cases}$$

其中 $i = 0,1,2,3, j = 0,1,2, n = 0,1,2$. 由此可知，这时方程 ③ 有 $4 \times 3 \times 3 = 36$ 组不同的解. 当 $p = 2$ 时，方程 ③ 化为

$$\frac{k}{5} \cdot \frac{h}{5} = 2^5 \times 997^2. \qquad ③$$

与前类似地可知，方程③有 $6 \times 3 = 18$ 组不同的解. 同理，当 $p = 997$ 时，方程 ③ 有 20 组不同的解. 由 ② 知，这里所得的方程 ③ 的每组解都对应 1 个满足要求的直角三角形，且不同的解组对应于不同的直角三角形. 从而知所求的直角三角形的个数为

$$m = \begin{cases} 36, & \text{当 } p \neq 2, p \neq 997 \text{ 时}, \\ 18, & p = 2, \\ 20, & p = 997. \end{cases}$$

1·100　至少通过立方体三条棱的中点的平面共有几个？

（日本数学奥林匹克，1991 年）

[解]　立方体的 12 条棱的中点，任何 3 点都不共线.

由其中每 3 点决定一个平面，不考虑重复的情况则有 $C_{12}^3 = 220$ 个. 但是，其中 4 点共面的有 21 个. 六点共面的有 4 个.

因此重复计算的有

$$21 \times (C_4^3 - 1) + 4(C_6^3 - 1) = 139 \text{ 个}.$$

所以所求平面的总数为

$$220 - 139 = 81.$$

1·101　有数量足够多的三棱长为 2,3,5 的长方体. 在一棱长为 90 的正方体中，将这种长方体同方向整齐排列，填满为止. 求此时正方体

一对角线所穿过的长方体的个数.

（日本数学奥林匹克，1990 年）

［解］ 将正方体的三棱分别分为$\frac{90}{5}$，$\frac{90}{3}$，$\frac{90}{2}$等分，即 18，30，45 等分，则正方体被分为

$$\frac{90^3}{2\times3\times5}=24300$$

个 $2\times3\times5$ 的长方体.

此时正方体一对角线穿过长方体个数为

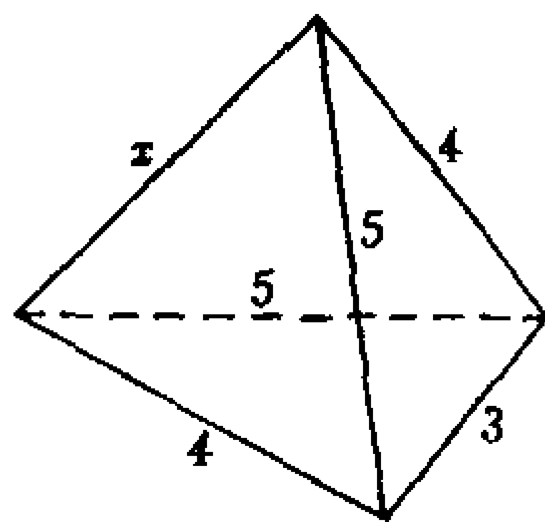
$$\left(\frac{90}{5}-1\right)+\left(\frac{90}{3}-1\right)+\left(\frac{90}{2}-1\right)-\left[\left(\frac{90}{5\times3}-1\right)+\left(\frac{90}{3\times2}-1\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{90}{5\times2}-1\right)\right]+\left(\frac{90}{2\times3\times5}-1\right)=65.$$

1·102 现有边长分别为 3，4，5 的三角形两个，边长分别为 4，5，$\sqrt{41}$ 的三角形四个，边长分别为$\frac{5}{6}\sqrt{2}$，4，5 的三角形六个.用上述三角形为面，可以拼成多少个四面体？

（中国高中数学联赛，1987 年）

［解］ 将所给的 3 种三角形依次编号为 1，2，3 号.易知 1 号和 2 号三角形都是直角三角形，而 3 号是钝角三角形.由抽屉原理知四面体的 4 个面中，至少有两面是同号三角形.此外，不难证明，在一个四面体中，如果有两个侧面三角形全等，则另两个侧面三角形或者是全等三角形，或者都是等腰三角形.由于所给的三角形中没有等腰三角形，所以，四面体的 4 个侧面三角形必然是两组全等三角形.

(1) 用两个 1 号三角形.

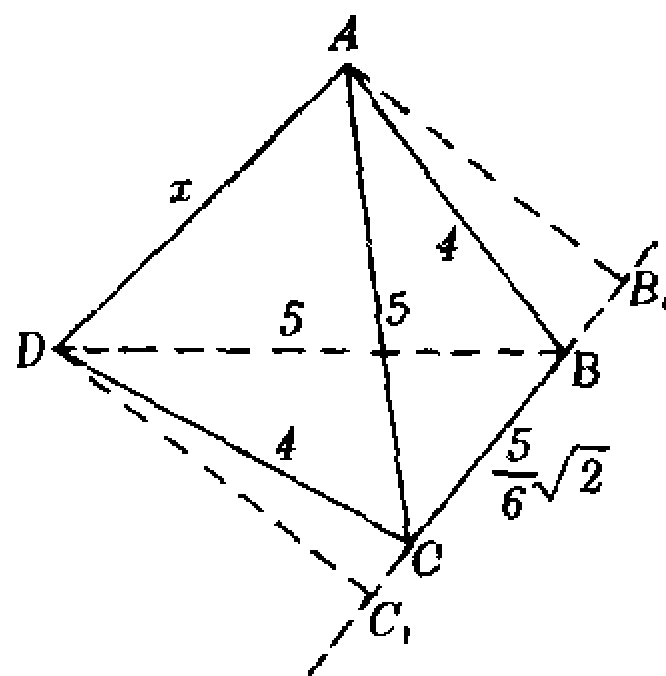


参看右图.因为长为 3 的棱是两条长为 4 的棱的公垂线，故有 $x>3$.又因$\frac{5}{6}\sqrt{2}<3$，所以 x 不能为$\frac{5}{6}\sqrt{2}$，即两个 1 号和两个 3 号三角形不能拼成四面体.另一方面，设两条长为 4 的对棱的夹角为 θ，由异面直线上点的距离公式有

$$x^2=3^2+4^2+4^2-2\cdot4^2\cos\theta.$$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，$x = \sqrt{41}$，所以用两个1号和两个2号三角形可以拼成一个四面体.

(2) 用两个 3 号三角形.



参看右图. 在四面体 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 是两个3号三角形. 记 $a = BC = \frac{5}{6}\sqrt{2}$，$AD = x$. 分别过 A, D 作直线 BC 的垂线，交直线 BC 于B_1 和 C_1. 易见，$\triangle AB_1C \cong \triangle DC_1B$，故有 $CC_1 = BB_1 = y, AB_1 = DC_1 = h$. 由勾股定理有

$$5^2 - (a + y)^2 = h^2 = 4^2 - y^2.$$

解得 $y = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a} - a\right)$. 由此可得，异面直线 AB_1, DC_1 的公垂线长 $d = B_1C_1 = a + 2y = \frac{a}{a} = 5.4\sqrt{2} > \sqrt{50}$. 从而有

$$x \geqslant d > \sqrt{50} > \sqrt{41} > \frac{5}{6}\sqrt{2}.$$

由此可知，用4个3号三角形，或用两个2号三角形及两个3号三角形都不能拼成四面体.

(3) 用 4 个 2 号三角形.

若能构成四面体，则两条长为 4 的棱都是两条长为 5 的棱的公垂线，这是不可能的.

综上可知，用所给的三角形为侧面，只能拼成一个四面体.

1·103　在空间中给出不在同一平面上的 4 个点 问以这 4 点作为 8 个顶点中的 4 个，能作出多少个不同的平行六面体?

（第 7 届全苏数学奥林匹克，1973 年）

［解 1］　每个平行六面体被它的一个顶点和三个中截面(过平行六面体的中心且平行于一组侧面的平面) 所惟一确定. 这样的中截面与平行六面体的 8 个顶点等距.

对于给定的 4 点，共存在 7 个与 4 点等距的平面，它们中的每一个都与以 4 个给定点为顶点的四面体的某些条棱交于中点. 确切地说，在平面一侧有 3 点，另一侧有 1 点的中截面共有 4 个；在平面两侧各有两点的中截面共有 3 个. 从这 7 个中截面中任选 3 个组成“三平面组”，共

可组成 $C_7^3=35$ 个三平面组.

注意,平行六面体的三个中截面交于一点,即它的中心.所以,在上述的三平面组中,如果某组中的3个平面不交于一点,则它就不能分别作为平行六面体的3个中截面.这样的三平面组共有6组,即平行于以给定4点为顶点的四面体的每条棱的三平面组各有一组.余下的29组均可作为平行六面体的中截面,故知共可作出29个不同的平行六面体.

[解2] 因为4点不共面,所以作出的平行六面体中,每个侧面至多有其中3点,至少有其中1点.这时,每个给定点恰在3个侧面上.

(1) 六个侧面上每面各有两点.这时,给定4点恰是平行六面体上一组互不相邻的4个顶点.显然,这样的平行六面体只能作出1个.

(2) 六个侧面中,有一个面上有3点,一个面上有1点,其余四个面上各有两点.这时,在一个侧面上的三点构成一个三角形,它的两条边是平行六面体从一个顶点发出的两条棱,而另一条边则是所在侧面的对角线.第4个给定点则只能是发出两条棱的那点的相对顶点.由于从4点中取3点在一个侧面上的取法有4种,取三角形一条边为该侧面对角线的取法有3种,故这样的平行六面体共可作出12个.

(3) 六个侧面中,其上有1,2,3个给定点的侧面各两个.这时,各有3个给定点的两个侧面必然相邻,二者的公共棱的两个端点都是给定点,记为 A,B,另外两点记为 C,D.于是两组线段 $\{CA,BD\}$ 和 $\{CB,AD\}$ 中恰有一组是平行六面体的两条棱.以4个给定点为顶点的四面体 $ABCD$ 共有6条棱,选取其中一条作为平行六面体的棱,共有6种选法.然后再选一组对棱作为平行六面体的棱,有两种选法.由乘法原理知可作出12个不同的平行六面体.

(4) 六个侧面中,其上有1,3个给定点的侧面各3个.这时,必有一个给定点,它与另外3点的3条连线恰为平行六面体从一个顶点发出的3条棱.容易看出,这样的平行六面体共可作出4个.

综上,由加法原理即知,满足要求的平行六面体共有29个.

1·104 将正四面体的每条棱都5等分,过每个分点作两个平面,使二者分别平行于四面体中不过该点的两个侧面 问这些平面将四面体划分成多少部分?

(中国国家集训队测验题,1994年)

[解] (1) 首先看当将四面体的每条棱都 2 等分并按题中要求作平面后的情形. 易见,这时得到 4 个四面体和 1 个八面体共 5 个部分.

(2) 再考察当将四面体的棱 3 等分并按题中要求作平面后的情形. 这时,把底层去掉,就得到一个每条棱都 2 等分的正四面体. 我们称之为"削底四面体". 对每个侧面都这样做之后,共得到 4 个削底四面体. 由(1) 知每个削底四面体都被分成 5 部分,共有 20 部分.

另一方面,每两个削底四面体之交恰为 1 个小四面体,故上述 20 部分中有 6 个小四面体各被计数两次. 于是不重复的部分共有 14 个. 此外,原四面体去掉 4 个削底四面体之后,还余下 1 个小四面体,即以原四面体的 4 个侧面的中心为顶点的四面体. 从而知四面体被分成了 15 部分.

(3) 然后考察将四面体的每条棱都 4 等分且按题中规定作平面后的情形. 仍然将底层去掉所得的四面体称为削底四面体. 由(2) 知,每个削底四面体都被分成了 15 部分. 同时,每两个削底四面体之交是一个 2 层的四面体,每 3 个削底四面体之交是一个小四面体. 故由容斥原理可得

$$p_4 = 15 \times 4 - 5 \times 6 + 4 = 60 - 30 + 4 = 34,$$

即这时四面体被分成 34 部分.

(4) 最后考察四面体的每条棱都 5 等分且按题中要求作平面后的情形. 这时,每个削底四面体的棱都被 4 等分,两个削底四面体之交是 3 层的四面体,3 个之交是 2 层的四面体,4 个之交是 1 个小四面体. 于是由容斥原理便得

$$p_5 = 34 \times 4 - 15 \times 6 + 5 \times 4 - 1 = 65,$$

即四面体被分成 65 部分.

1·105 试作一圆,使它与平面上的 4 个给定点距离相等,问共能作出多少个不同的圆?

(第 6 届莫斯科数学奥林匹克,1940 年)

[解] (1) 当 A,B,C,D 四点共线时,若 $AB = CD$,则可作出 1 个圆. 否则,一个圆也作不出来.

(2) 当 4 个给定点共圆时,显然可以作出无穷多个圆,因为这时与它们所共的圆同心的每个圆都满足要求.

(3) 当 4 点中的任何 3 点都不共线且当两两分组并连线时,任何一

组线段都不平行时，共可作出 7 个不同的圆.

这时，我们可以把 4 点分成两个非空集合，使一组点在圆内，另一组在圆外，可以作出一个圆. 因为共有 7 种不同分法，故可作出 7 个不同的圆.

(4) 当 4 点中恰有 3 点共线时，上述 7 个圆中有一个作不出来，共可作出 6 个不同的圆.

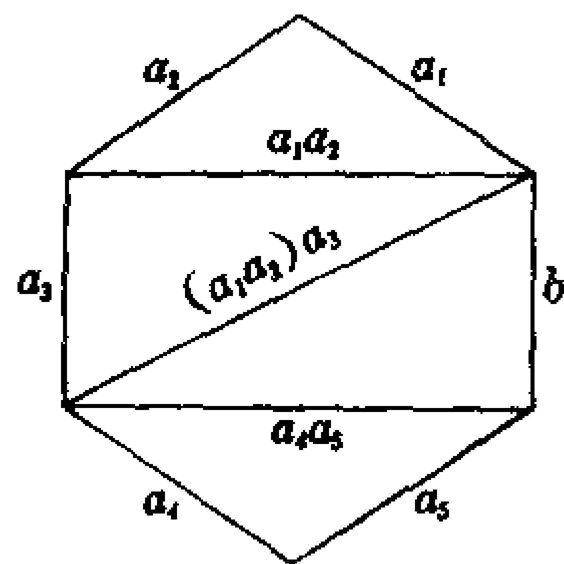
(5) 当以 4 个给定点为顶点的凸四边形为梯形且不是等腰梯形时，共可作出 6 个不同的圆. 当凸四边形为平行四边形时，共可作出 5 个不同的圆.

1·106 设有 3 个集合 A,B,C 定义如下：集合 A 表示 5 个数乘积 $a_1a_2a_3a_4a_5$ 加 3 个括号的所有不同方法的集合；B 表示凸六边形划分成 4 个三角形的所有不同方法的集合；C 表示将 4 个黑球和 4 个白球排成一行，使在任意一个位置之前，白球数都不少于黑球数的所有排法的集合. 求证 $|A|=|B|=|C|$.

(中国国家集训队训练题，1986 年)

[证] 按右图所示建立对应关系：将凸六边形的 6 条边分别对应于 6 个数 b，a_1,a_2,a_3,a_4,a_5，两个数的乘积就对应于以它们所对的边为两边的三角形的第 3 边. 容易验证，这个对应是个双射. 所以有 $|A|=|B|$.

$$b=((a_1a_2)a_3)(a_4a_5)\longrightarrow$$



将 A 中的每个元素最外面再加一层括号，然后将每个括号的左半个擦掉只留右半个括号，最后将 a_1 擦掉，并将 a_2,a_3,a_4,a_5 分别对应于一个白球，4 个括号的各右半括号分别对应于一个黑球，便得对应如下：

$$((a_1a_2)a_3)(a_4a_5)\longrightarrow(((a_1a_2)a_3)(a_4a_5))\longrightarrow a_2)a_3)a_4a_5))$$
$$\longrightarrow ○●○●○○●●.$$

容易验证，这个对应也是个双射. 所以有 $|A|=|C|$. 从而有 $|A|=$

$|B|=|C|$.

1·107 从给定的6种不同颜色中选用若干种颜色,将一个正方体的6个面涂色,每面涂一种颜色,每两个有公共棱的相邻面都涂有不同的颜色,问不同的涂色方案共有多少种?(如果两个涂色的正方体中的一个经若干次翻转,可以使两个正方体的涂色情形完全一致,则认为二者原来的涂色方案是同一种)

(中国高中数学联赛,1996年)

[解1] (1)使用6种颜色时,可使第1种颜色的面向上,侧面的4种颜色中选定一种向前,于是不同的涂色方案的种数为

$$6!\div6\div4=30.$$

(2)使用5种颜色时,从6色中选5色,5色中选定1色涂相对两面,不妨设为上面和下面.然后从另4色中选定一种向前,于是后面是另3色之一.余下两色涂左右两面,可以经翻转互换.所以不同涂色方案的种数为

$$C_6^5C_5^1\times3=6\times5\times3=90.$$

(3)使用4种颜色时,从6色中选4色,4色中选2色各涂相对两面,不同涂色方案的种数为

$$C_6^4C_4^2=15\times6=90.$$

(4)使用3种颜色的不同涂色方案的种数为 $C_6^3=20$.

综上可知,不同的涂色方案的总数为 $30+90+90+20=230$.

[解2] (1)使用6种颜色时,总可以使第1种颜色朝下,并从另外5种颜色中任选1种涂上面,有5种选法;从其余4色中指定一种涂后面,并从另3种色中任选一种涂前面有3种选法;余下两种涂左右两面,有两种选法.共有30种选法.

(2)使用5种颜色时,恰有一种颜色涂在两个面上.显然,这一定是相对的两面,总可使为上下两面.这有6种选法;另5色中选用4种各涂一面.选4色有5种选法,4色中指定一种涂后面,另选3种中的一种涂前面,有3种选法;余下两种涂左右两面,可进行互换,由乘法原理知其有 $6\times5\times3=90$ 种涂色方案.

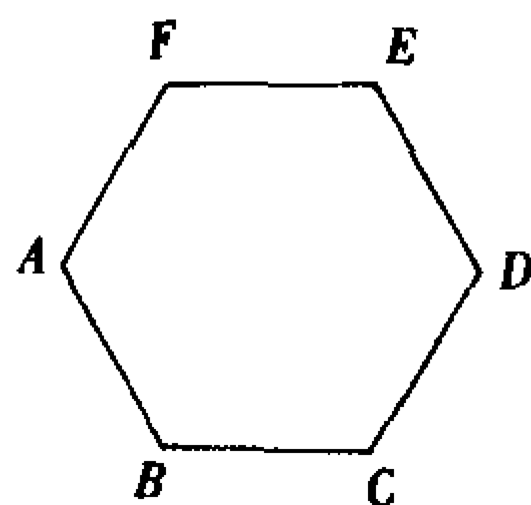
(3)使用4种颜色时,恰有两种颜色分别涂在两组相对面上,而由对称性知另两种颜色的涂法只有1种,所以不同涂色方案共有 $C_6^4C_4^2=90$ 种.

(4)使用 3 种颜色时,由对称性知共有 $C_6^3=20$ 种.

综上可知,满足题中要求的不同涂色方案共有 $30+90+90+20=230$ 种.

1·108 设 $ABCDEF$ 为正六边形,一只青蛙开始在顶点 A 处,它每次可随意地跳到相邻两个顶点之一,若在 5 次之内跳到点 D,则停止跳动;若 5 次之内不能到达点 D,则跳完 5 次也停止跳动.问这只青蛙从开始到停止,共有多少种不同跳法?

(中国高中数学联赛,1997 年)



[解] 由图中可知,青蛙经过 1 次,2 次或 4 次跳动之后不可能位于点 D.故青蛙的可能跳法只有下列两种:

(1)青蛙跳 3 次到达点 D,共有 2 种不同跳法;

(2)青蛙一共跳 5 次后停止.这时,青蛙跳 3 次后不在点 D 的跳法共有 $2^3-2=6$ 种.后 2 次的不同跳法共有 4 种.故这种类型的跳法共有 24 种.

综上可知,满足题中要求的不同跳法共有 26 种.

1·109 从 0,1,2,……,9 这 10 个数中取出 3 个数,使其和是不小于 10 的偶数,不同的取法共有多少种?

(中国高中数学联赛,1998 年)

[解 1] 从5 个偶数中取出 3 个数,共有 $C_5^3=10$ 种不同取法.从 5 个偶数中取 1 个数,并从 5 个奇数中取两个数组成三数组,共有 $5C_5^2=50$ 种不同取法.所以和为偶数的不同取法共有 60 种.

在上述 60 种取法中,3 数之和小于 10 的取法共有{0,1,3}、{0,1,5}、{0,1,7}、{0,2,4},{0,2,6},{0,3,5},{1,2,3},{1,2,5},{1,3,4}9 种.

综上可知,满足要求的不同取法共有 51 种.

[解 2] (1)含 9 的三数组共 20 个(从余下 4 个奇数中取 1 个,从 5 个偶数中取 1 个);

(2)不含 9 而含 8 的三数组共 12 个;

(3)不含 9 和 8 但含 7 的三数组共 12 个,但其中{7,1,0}不行;

(4)不含 9,8 和 7 而含 6 的三数组共有{6,5,3},{6,5,1},{6,4,2},{6,4,0}和{6,3,1}5 组;

(5)不含9、8、7、6而含5且和不小于10的三数组共有{5,4,3},{5,4,1}和{5,3,2}3组.

综上可知,满足要求的不同取法共有$20+12+11+5+3=51$种.

1·110 已知直线$ax+by+c=0$中的系数a,b,c是取自集合$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$中的3个不同元素,并且该直线的倾斜角为锐角.求所有这样的不同直线的条数.

(中国高中数学联赛,1999年)

[解] 设直线的倾斜角为θ,于是θ为锐角,所以$\mathrm{tg}\theta=-\frac{a}{b}>0$.不妨设$a>0,b<0$.

(1)当$c=0$时,a有3种取法,b也有3种取法.由于$3x-3y=0$,$2x-2y=0$和$x-y=0$为同一条直线,故应去掉两条重复的直线.所以这样的直线共有$3\times3-2=7$条.

(2)当$c\neq0$时,a有3种取法,b有3种取法,c有4种取法,且易见其中任何两条直线均不相同,故这样的直线共有$3\times3\times4=36$条.

综上可知,满足要求的直线共有43条.

1·111 一个递增的整数数列,如果它的第1项为奇数,第2项为偶数,第3项为奇数,第4项为偶数,依此类推,则称它为交错数列.空集也当作一个交错数列.每项都取自集合$\{1,2,\cdots,n\}$的所有交错数列的个数记为$A(n)$.显然,$A(1)=2,A(2)=3$,求$A(20)$并说明理由.

(英国数学奥林匹克,1994年)

[解] 当$n=1$时,空集$\varnothing$和$\{1\}$是两个交错数列,故有$A(1)=2$.当$n=2$时,除上述两个之外又增加了交错数列$\{1,2\}$,所以$A(2)=3$.

设$\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$是取自集合$\{1,2,\cdots,n\}$的非空交错数列.按定义,$a_1=1$或$a_1\geqslant3$且a_1为奇数.当$a_1=1$时,数列$\{a_2-1,a_3-1,\cdots,a_m-1\}$是取自集合$\{1,2,\cdots,n-1\}$的一个交错数列.这时,定义

$$\{1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}\xrightarrow{f}\{a_2-1,a_3-1,\cdots,a_m-1\}$$

则映射f是由取自集合$\{1,2,\cdots,n\}$的首项为1的所有交错数列的集合到取自集合$\{1,2,\cdots,n-1\}$的所有交错数列的集合的一个双射.所以取自集合$\{1,2,\cdots,n\}$且首项为1的所有交错数列的个数为$A(n-1)$.

当奇数$a_1\geqslant3$时,数列$\{a_1-2,a_2-2,\cdots,a_m-2\}$是取自$\{1,2,\cdots,$

第一章 计数

$n-2\}$的非空交错数列.定义映射

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}\xrightarrow{g}\{a_1-2,a_2-2,\cdots,a_m-2\},$$

则映射 g 是由取自$\{1,2,\cdots,n\}$的首项 $a_1\geqslant 3$ 的所有交错数列的集合到取自$\{1,2,\cdots,n-2\}$的所有非空交错数列所成的集合的一个双射.所以取自$\{1,2,\cdots,n\}$的首项 $a_1\geqslant 3$ 的所有交错数列的个数为 $A(n-2)-1$.

综上,我们得到递推关系式

$$A(n)=A(n-1)+A(n-2). \qquad ①$$

注意,这恰好是斐波那契数列的递推公式.

因为 $A(1)=2=F_2,A(2)=3=F_3$,故由①可得

$$A(n)=F_{n+1},n=1,2,\cdots\cdots$$

特别地,有 $A(20)=F_{21}$.依次写出斐波那契数列的前 21 项

1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,4181,6765,10946,17711.

由此即得

$$A(20)=F_{21}=17711.$$

1·112　A 城有 n 个女孩和 n 个男孩,且每个女孩都认识所有的男孩.B 城有 n 个女孩 $g_1,g_2,\cdots,g_n$ 和 $2n-1$ 个男孩 $b_1,b_2,\cdots,b_{2n-1}$,其中女孩 g_i 认识男孩 $b_1,b_2,\cdots,b_{2i-1}$,但不认识其他男孩,$i=1,2,\cdots,n$.对于任意的 $r=1,2,\cdots,n$,从 A 城和 B 城各选取 r 个女孩与 r 个男孩组成 r 对舞伴,要求每个女孩的舞伴都是自己认识的男孩.分别将 A 城和 B 城满足要求的不同选法的种数记为 $A(r)$ 和 $B(r)$,求证 $A(r)=B(r),r=1,2,\cdots,n$.

(第 38 届国际数学奥林匹克预选题,1997 年)

[证]　为使用递推法起见,将题中的 $A(r)$ 和 $B(r)$ 分别记为 $A(n,r)$ 和 $B(n,r)$.

由于 A 城的 n 个女孩中每人都认识所有男孩,故有

$$A(n,r)=(C_n^r)^2\cdot r!=\frac{(n!)^2}{[(n-r)!]^2r!}. \qquad ①$$

下面我们来对 $B(n,r)$ 建立一个递归关系式,设 $n\geqslant 3$ 且 $2\leqslant r\leqslant n$.考察在 B 城中选取 r 对舞伴且使每个女孩都认识自己舞伴的所有

可能选法.分两种情况来计数.

当 g_n 是选中的 r 个女孩之一时,其余的 $r-1$ 对舞伴共有 $B(n-1,r-1)$ 种不同选法. g_n 可在余下的 $(2n-1)-(r-1)=2n-r$ 个男孩中任选 1 个男孩为舞伴,当然共有 $2n-r$ 种选法.由乘法原理知这种情况共有 $(2n-r)B(n-1,r-1)$ 种不同选法.

当 g_n 未被选中时,当然有 $r<n$.于是 r 个女孩全都选自 $g_1,g_2,\cdots,g_{n-1}$ 且她们的舞伴也都来自 $b_1,b_2,\cdots,b_{2n-3}$ 之中.所以不同选法的种数恰为 $B(n-1,r)$.

这样一来,当 $n\geqslant3$ 时总有

$$B(n,n)=nB(n-1,n-1),$$

$$B(n,r)=B(n-1,r)+(2n-r)B(n-1,r-1). \quad ②$$

其中 $r=2,3,\cdots,n-1$.

由①有

$$A(n-1,r)=\frac{[(n-1)!]^2}{[(n-1-r)!]^2r!},$$

$$A(n-1,r-1)=\frac{[(n-1)!]^2}{[(n-r)!]^2(r-1)!}.$$

由此可得

$$A(n,r)=A(n-1,r)+(2n-r)A(n-1,r-1). \quad ③$$

②和③式表明, $A(n,r)$ 与 $B(n,r)$ 满足相同的递归关系式.此外,对任意 $n\in N$,都有 $A(n,1)=n^2=B(n,1)$ 和 $A(2,2)=2=B(2,2)$.所以对此有 $n\in N$ 和 $r=1,2,\cdots,n$,均有 $A(n,r)=B(n,r)$.

1·113 设 $4\times4\times4$ 的大正方体由 64 个单位正方体组成.选取其中的 16 个单位正方体涂成红色,使得大正方体中每个由 4 个单位正方体构成的 $1\times1\times4$ 的小柱体中,都恰有 1 个红色单位正方体.问 16 个红正方体共有多少种不同取法?说明理由.

(第 14 届中国中学生数学冬令营,1999 年)

[解 1] 将大正方体按从前到后的顺序分成 4 层,每层都是一个 $1\times4\times4$ 的长方体.依次将 4 层编号为 1,2,3,4.将所有红正方体都投影到正面的 4×4 正方形的方格上,于是 16 个红正方体的投影互不相同且恰好充满 4×4 的正方形.按每个单位正方形是哪一层红正方体的投影而在该正方形中写上 1,2,3,4 之一.这样,红正方体的不同取法就与

4×4 正方形方格表的不同填数法一一对应.所以只须计算后者有多少种不同的填数法.

易知,每层的16个单位正方体中都恰有4个红正方体且4个红正方体既不同行又不同列,因此,4×4 正方形所填的16个数中,1,2,3,4各有4个,且每组4个相同的数在 4×4 数表中既不同行也不同列.

首先,将4个1填入 4×4 方格表中,既不同行又不同列,共有 $4!=24$ 种不同填法.

然后注意,第1行的另3个数只能是2,3,4各1个,有6种不同填法.

对于4个1的任何一种填数法,总可以经过层之间的交换而使4个1恰好排在主对角线的4个方格中.然后对第1行的后3个数进行轮换,可设第1行数恰为1,2,3,4.

1	2	3	4
2	1	4	3
		1	2
		2	1

考察第2行1列的方格,其中可填2,3,4之一.若填2,则第2行4个数为2,1,4,3.从而表中第3行4列和第4行3列方格中的数都只能是2.余下的左下角的 2×2 正方形的4个方格中必为3和4各两个且对角2数相同,有两种不同填法.若第2行1列的方格中填3,则第2行4个数依次为3,1,4,2,并从而导致只有惟一的填数法.同理,当第2行1列的方格中填4时,也只有惟一的填数法.可见,共有4种不同的填数法.

1	2	3	4
3	1	4	2
2	4	1	3
4	3	2	1

综上可知,共有 $24\times6\times4=576$ 种不同的填数法.从而16个红正方体共有576种不同取法.

[**解2**] 由解1知,16个红正方体的每种满足要求的取法恰对应于将 4×4 的方格表划分成4组,每组的4个方格既不同行又不同列的一种分法.故只须计数后者有多少种不同的分组方法.

用1,2,3,4来表示方格所属的组号并固定第1列4个方格依次属于第1,2,3,4组,于是不同分组法有下列24种:

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

1	2	4	3
2	3	1	4
3	4	2	1
4	1	3	2

1	3	2	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	2	3	1

1	3	4	2
2	1	3	4
3	4	2	1
4	2	1	3

1	3	4	2
2	4	3	1
3	2	1	4
4	1	2	3

1	4	2	3
2	3	1	4
3	2	4	1
4	1	3	2

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2

1	2	4	3
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	4	3
2	4	3	1
3	1	2	4
4	3	1	2

1	3	2	4
2	4	1	3
3	2	4	1
4	1	3	2

1	3	4	2
2	4	1	3
3	1	2	4
4	2	3	1

1	4	2	3
2	1	3	4
3	2	4	1
4	3	1	2

1	4	2	3
2	3	4	1
3	2	1	4
4	1	3	2

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

1	2	4	3
2	1	3	4
3	4	2	1
4	3	1	2

1	3	2	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	2	3	1

1	3	2	4
2	4	3	1
3	1	4	2
4	2	1	3

1	3	4	2
2	4	3	1
3	1	2	4
4	2	1	3

1	4	2	3
2	3	1	4
3	1	4	2
4	2	3	1

1	4	3	2
2	1	4	3
3	2	1	4
4	3	2	1

1	4	3	2
2	3	1	4
3	2	4	1
4	1	2	3

1	4	3	2
2	3	4	1
3	1	2	4
4	2	1	3

1	4	3	2
2	3	4	1
3	2	1	4
4	1	2	3

将 4 组方格分别对应于 4 层的红正方体,共有 24 种不同的对应方法,故知 16 个红正方体的所有不同取法共有 576 种.

第二章　数　集

2·1　任给5个整数，证明从中必能选出3个，使此3个数之和能被3整除.

(中国安徽省数学竞赛，1978年)

[证]　由于一个整数被3除时，余数只能是0,1,2.

(1) 若此5数被3除时，有3种余数，那么，把余数分别为0,1,2的3数相加，其和即能被3整除.

(2) 若此5数被3除时，至多有两种余数，由抽屉原理，至少有3个数的余数相同，则将此3数相加，其和即能被3整除.

2·2　试证在任意 n 个自然数构成的集合中，总有一个非空子集，它所含的各数之和可以被 n 整除.

(英国数学奥林匹克，1970年)

[证]　设 n 个自然数为 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 并考察下列 n 个和数

$$a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \cdots, a_1+a_2+\cdots+a_n$$

除以 n 的 n 个余数.若其中有一个余数为0，则该和中所有数所成的子集即为所求.若其中任何一个都不为0，则这 n 个余数只能从 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ 中取值.于是由抽屉原理知其中必有两个余数相同.将两个余数所对应的和数相减.减去相同项后，余下的各数所成的集合即为所求.

2·3　证明在 $2^1-1, 2^2-1, 2^3-1, \cdots, 2^{n-1}-1$ 中至少有一个数能被 n 整除，其中 n 是大于1的奇数.

(第6届全俄数学奥林匹克，1980年)

[证]　考虑 $2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^{n-1}$，这 n 个数被 n 除的余数为 $r_0, r_1, \cdots, r_{n-1}$.

由于 n 是大于 1 的奇数,故 $n \nmid 2^i (i = 0,1,\cdots,n-1)$.所以这 n 个余数 $r_0, r_1, \cdots, r_{n-1}$ 只能是

$$1,2,\cdots,n-1.$$

这 $n-1$ 种情形,因而一定有两个余数相等.不妨设 $r_k = r_l$,其中 $0 \leqslant k < l \leqslant n-1$,于是

$$n \mid 2^l - 2^k,$$

$$n \mid 2^k(2^{l-k} - 1).$$

因为 n 是大于 1 的奇数,2^k 是偶数,故 $(n, 2^k) = 1$,从而

$$n \mid 2^{l-k} - 1.$$

由于 $0 < l - k \leqslant n - 1$,所以 $2^{l-k} - 1$ 是 $2^1 - 1, 2^2 - 1, \cdots, 2^{n-1} - 1$ 中的一个,从而命题得证.

2·4 把从 1 到 $2n$ 的所有整数任意排成一行,然后将每个数都加上它所在位置的顺序号数,求证这 $2n$ 个和数中至少有两个在被 $2n$ 除时的余数相同.

(第 28 届莫斯科数学奥林匹克,1965 年)

[证] 若不然,则这 $2n$ 个和数除以 $2n$ 时的余数互不相同,即 0, 1,2,…,$2n-1$ 各 1 个.从而有

$$S \equiv (0+1+2+\cdots+2n-1) = \frac{1}{2}2n(2n-1) \equiv n \pmod{2n},$$

其中 S 表示 $2n$ 个和数之和.另一方面,先对 $2n$ 个和数求和又有

$$S = 2(1+2+\cdots+2n) = 2n(2n+1) \equiv 0 \pmod{2n},$$ 矛盾.

2·5 试证在任意 52 个整数中,必有两个数,它们之和或差是 100 的倍数.

(英国数学奥林匹克,1966 年)

[证] 考察这 52 个整数除以 100 时所得的非负余数 $r_1, r_2, \cdots, r_{52}$.这时有 $0 \leqslant r_i \leqslant 99, i = 1,2,\cdots,52$.它们分属于下列 51 个集合:

$$\{0\}, \{1,99\}, \{2,98\}, \cdots, \{49,51\}, \{50\}.$$

由抽屉原理知必存在 $1 \leqslant i < j \leqslant 52$,使 r_i 与 r_j 属于同一个集合.这样,当 $r_i = r_j$ 时,它们所对应的原二数之差是 100 的倍数;当 $r_i \neq r_j$ 时,它们所对应的原二数之和是 100 的倍数.

2·6 在前 100 个奇数 1,3,…,199 的集合 M 中,选出一个子集,使其中任何一数都不能被另一个数所整除,问此子集最多有多少个元

素?

(中国天津市代表队测验题,1990年)

[解] 令

$$S=\{2n+1\mid 33\leqslant n\leqslant 99\},$$

则 S 有67个元素且满足题中要求.若存在 $a,b\in S$,使 $a\mid b$,则因 a,b 都是奇数,故商 $\frac{b}{a}$ 也是奇数.从而 $\frac{b}{a}\geqslant 3,b\geqslant 3a\geqslant 201$,矛盾.

另一方面,令

$$T_m=\{k\mid k=3^r m,(m,3)=1,k\in M\},$$

则 $1\leqslant m\leqslant 199,(m,3)=1,(m,2)=1$.这样的 m 中共有67个.设 A 为 M 的任一元素数多于67的子集.由抽屉原理知其必有两个元素属于同一个 T_{m_0},从而二者中大的必能被小的整除.可见任何元数多于67的子集都不满足题中要求.故知所求的元数的最大值为67.

2·7 对任给的97个互异的正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_{97}$.试证一定存在4个正整数,仅用减号,乘号和括号将它们适当组合为一个算式,其结果是1984的倍数.

(中国北京市数学竞赛,1984年)

[证] 因为 $1984=64\times 31$.所以在 $a_1,a_2,\cdots,a_{65}$ 这65个互异的正整数中,至少有两个数模64同余,不妨设

$$a_1\equiv a_2\pmod{64},$$

$$64\mid a_1-a_2.$$

在 $a_{66},\cdots,a_{97}$ 这32个数中,至少有两个数模31同余,不妨设

$$a_{66}\equiv a_{67}\pmod{31},$$

$$31\mid a_{66}-a_{67}.$$

又因为 $(31,64)=1$,所以 $1984\mid(a_1-a_2)(a_{66}-a_{67})$.

2·8 设 n 为2的正整数幂,试证从任何含 $2n-1$ 个正整数的集合中总能取出 n 个数,使它们的和可被 n 整除.

(中国国家集训队训练题,1986年)

[证] 记 $n=2^k,k\in N$ 并关于 k 使用数学归纳法.

当 $k=1$ 时,$n=2,2n-1=3$.3个数中总有两个数奇偶性相同,二数之和当然能被2整除,即 $k=1$ 时命题成立.

设命题于 $k=m$ 时成立.当 $k=m+1$ 时,由于

$$2 \cdot 2^{m+1} - 1 = 2^m + 2^m + 2 \cdot 2^m - 1,$$

故从所给的 $2 \cdot 2^{m+1} - 1$ 个正整数中可依次选出 3 组数,使得每组都有 2^m 个数且其和能被 2^m 整除.记这 3 组数的和分别为 $2^m a, 2^m b, 2^m c$.

显然,a,b,c 这 3 个数中至少有 2 个数的奇偶性相同,不妨设为 a 和 b,记之为 $a + b = 2s, s \in N$,于是将相应的两组数合成一组,则这组共有 2^{m+1} 个数且其和为

$$2^m a + 2^m b = 2^m (a + b) = 2^{m+1} s,$$

可被 2^{m+1} 整除.这就证明了命题于 $k = m + 1$ 时成立.

2·9　给出一组自然数 4,14,24,…,94,104.首先从这些数中划去 1 个,然后在剩下的数中划去两个,接着再一次划去 3 个,最后一次划去 4 个.求证不可能在每次划去之后,剩下的诸数之和都可被 11 整除.

(第 31 届莫斯科数学奥林匹克,1968 年)

[证]　注意,这 11 个数之和为 $S = 4 + 14 + \cdots + 104 = 54 \times 11$,它显然是 11 的倍数.而这 11 个数中,惟一的一个是 11 倍数的数是 44.

若结论不成立,则每次划去之后的诸数之和都可被 11 整除,而第 4 次划去之后只余 1 个数,故只能为 44.但是第 1 次划去的 1 个数也必须是 11 的倍数,也只能是 44,矛盾.

2·10　试找出 50 个自然数,使得其中任何一个数都不能被另一个数整除,但是其中任何两个数之积都可被其余的每一个数所整除.

(第 50 届莫斯科数学奥林匹克,1987 年)

[解]　取 50 个素数 $p_1, p_2, \cdots, p_{50}$ 并令

$$n_i = \prod_{j \neq i} p_j, \quad j = 1, 2, \cdots, 50.$$

于是当 $k \neq i$ 时,n_k 不能整除 n_i.但对任何 $i \neq j$,$n_i n_j$ 都是 50 个素数乘积的倍数,故它能被任何 n_k 所整除.可见 $\{n_1, n_2, \cdots, n_{50}\}$ 满足要求.

2·11　设 $n \geqslant 4$ 是整数,求证集合 $\{1, 2, \cdots, 2n-1\}$ 的 n 元子集 S 中必有一个子集,其中所有元素之和是 $2n$ 的倍数.

(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年)

[证]　若 $n \notin S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,则下列 $2n$ 个数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, 2n - a_1, 2n - a_2, \cdots, 2n - a_n$$

都属于 $(0, 2n)$.由抽屉原理知其中必有两个数相等.又因 $a_i \neq n$,所以 $a_i \neq 2n - a_i, i = 1, 2, \cdots, n$.因而存在 $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$,使 $a_i = 2n - a_j$,

即 $a_i + a_j = 2n$.

若 $n \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,不妨设 $a_n = n$. 于是有 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\} \subset \{1, 2, \cdots, n-1, n+1, \cdots, 2n-1\}$. 又因 $n \geqslant 4$,故 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\}$ 至少有两个元素属于 $(0, n)$ 或属于 $(n, 2n)$. 不妨设 $a_1, a_2 \in (0, n)$. 于是 $a_1 \not\equiv a_2 (\bmod n)$. 考察下列 n 个整数

$$a_1, a_2, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \cdots, a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}.$$

若它们被 n 除的余数都不相同,则其中必有 1 个数是 n 的倍数;若有两数被 n 除的余数相同,则不是前两个数,于是两数之差是 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\}$ 中某些元素之和. 这样一来,集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\}$ 有一个子集,其中所有元素之和等于 kn. 若 k 为偶数,则它即为所求;若 k 为奇数,则将 $a_n = n$ 加入即满足要求.

2·12　设 $S = \{1, 2, \cdots, 1963\}$,问最多可以从 S 中选出多少个数,使得其中任何两数之和都不能被它们的差整除?

(第 26 届莫斯科数学奥林匹克,1963 年)

[解]　令

$$T = \{3k + 1 \mid k = 0, 1, \cdots, 654\},$$

则 $T \subset S$ 且 $|T| = 655$. T 中任意两数之差均是 3 的倍数但两数之和则不是 3 的倍数,故 T 中任意两数之和都不能被它们的差整除. 所以,所求的最大值不小于 655.

对于 S 的任一个 656 元子集 M,其中必有两数之差不大于 2. 设这两个数是 a 和 b 且 $a > b$. 若 $a - b = 1$,则显然 $(a - b) \mid (a + b)$;若 $a - b = 2$,则 $a + b$ 也是偶数,当然有 $(a - b) \mid (a + b)$. 这表明任何元数大于 655 的子集都不满足题中要求.

综上可知,最多可选出 655 个数,使其中任意两数之和都不能被它们的差整除.

2·13　设 $S = \{1, 2, \cdots, 50\}$. 求最小自然数 k,使 S 的任一 k 元子集中都存在两个不同的数 a 和 b,满足 $(a + b) \mid ab$.

(第 11 届中国中学生数学冬令营,1996 年)

[解]　对于满足条件 $(a + b) \mid ab$ 的 $a, b \in S$,记 $c = (a, b)$,于是 $a = ca_1, b = cb_1$,其中 $a_1, b_1 \in N$ 且 $(a_1, b_1) = 1$. 因而有

$$c(a_1 + b_1) = (a + b) \mid ab = c^2 a_1 b_1,$$

$$(a_1+b_1)\mid ca_1b_1.$$

因为$(a_1+b_1,a_1)=1,(a_1+b_1,b_1)=1$,故有

$$(a_1+b_1)\mid c. \qquad ①$$

又因 $a,b\in S$,所以 $a+b\leqslant 99$,即 $c(a_1+b_1)\leqslant 99$.由①知 $3\leqslant a_1+b_1\leqslant 9$.由此可知,$S$ 中满足条件$(a+b)\mid ab$的所有数对如下:

$a_1+b_1=3$:(6,3),(12,6),(18,9),(24,12),
(30,15),(36,18),(42,21),(48,24);

$a_1+b_1=4$:(12,4),(24,8),(36,12),(48,16);

$a_1+b_1=5$:(20,5),(40,10),(15,10),(30,20),
(45,30);

$a_1+b_1=6$:(30,6);

$a_1+b_1=7$:(42,7),(35,14),(28,21);

$a_1+b_1=8$:(40,24);

$a_1+b_1=9$:(45,36).

共有 23 对.

令

$$M=\{6,12,15,18,20,21,24,35,40,42,45,48\},$$

则$|M|=12$且上述23个数对中的每个数对都至少含有 M 中的1个元素.因此,若令 $T=S-M$,则$|T|=38$且 T 中的任何两数都不满足题中的要求.所以,所求的最小自然数 $k\geqslant 39$.

注意,下列 12 个数对

(6,3),(12,4),(20,5),(42,7),(24,8),(18,9),
(40,10),(35,14),(30,15),(48,16),(28,21),(45,36)

互不相交且都满足题中的要求.所以,对于 S 的任一 39 元子集,它只比 S 少11个元素,而这11个元素至多属于上述12 个数对中的11对,从而必有 12 对中的一对属于这个 39 元子集.

综上可知,所求的最小自然数 $k=39$.

2·14 设 A 为自然数组成的无限集,其中每个元素都是至多1987个素数的乘积(重数计算在内).求证必存在一个无限集 $B\subset A$ 和 $b\in N$,使 B 中任意两个数的最大公因数都是 b.

(第 28 届国际数学奥林匹克候选题,1987 年)

［证］　若每个素数都只是 A 中有限多个数的因数，则可取得一个无限集 $B\subset A$，使 B 中任意两个数都互素．取法如下：先任取 $a_1\in A$．因 a_1 是至多 1987 个素数的乘积而每个素数都只是 A 中有限多个数的因数，故可取得 $a_2\in A$，使 $(a_1,a_2)=1$．一般地，若已取得 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 两两互素，则与上同样的原因使得可以取出 $a_{k+1}\in A$，使它与前 k 个数中的每个都互素．

若存在素数 p_1 为 A 中无限多个数的因数，则令

$$A_1=\{\frac{a}{p_1}\mid a\in A,p_1\mid a\}.$$

于是 A_1 为无限集且像上面一样地有两种可能：或者存在无限集 $B_1\subset A_1$，使 B_1 中的任意两个数都互素，从而 $B=p_1B_1=\{a\mid\frac{a}{p_1}\in B_1\}$ 和数 p_1 即为所求，或者存在无限集 $A_2=\{\frac{a}{p_1p_2}\mid a\in A,p_1p_2\mid a\}$．若为后者，则继续进行下去．由于 A 中每个数至多有 1987 个素因数，所以进行若干次后必然可得到所要求的无限集 B 和数 b．

2·15　在任意 133 个正整数中，若至少有 799 对互素，则必可找到其中 4 个数 a,b,c,d，使 $(a,b)=(b,c)=(c,d)=(d,a)=1$．

（中国国家集训队训练题，1990 年）

［证］　将这 133 个正整数的集合记为 A，且对任何 $a\in A$，将 A 中与 a 互素的所有数的集合记为 S_a，$\left|S_{a_j}\right|=n_j,j=1,2,\cdots,133$．于是

$$n_1+n_2+\cdots+n_{133}\geqslant 2\times 799. \quad ①$$

统计所有 S_a 中的点对总数，我们有

$$m=C_{n_1}^2+C_{n_2}^2+\cdots+C_{n_{133}}^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{133}n_i^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{133}n_i.$$

由柯西不等式和 ① 有

$$m\geqslant\frac{1}{2\times133}\Big(\sum_{i=1}^{133}n_i\Big)^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{133}n_i\geqslant\frac{(2\times799)^2}{2\times133}-799>C_{133}^2.$$

于是由抽屉原理知存在数对 (a,c)，$(b,d)\subset A$，使得 $(b,d)\subset S_a\cap S_c$．由定义即知 $(a,b)=(b,c)=(c,d)=(d,a)=1$．

2·16　试证对每个正整数 n，都存在自然数 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，使得对所有 $k=1,2,\cdots,n-1$，都有 $a_{k+1}\mid(a_1+a_2$

$+\cdots+a_k)$

（中国国家集训队训练题，1986 年）

[证] 当 $n=2m$ 为偶数时，可将 n 个数排列如下：

$$m+1,1,m+2,2,\cdots,2m,m.$$

这时，我们有

$$\begin{aligned}&a_1+a_2+\cdots+a_{2i}\\=&(1+2+\cdots+i)+(m+1+m+2+\cdots+m+i)\\=&i(m+i+1)=ia_{2i+1};\\&a_1+a_2+\cdots+a_{2i-1}=i(m+i)=(m+i)a_{2i}.\end{aligned}$$

可见，当 n 为偶数时结论成立.

当 $n=2m+1$ 为奇数时，将前 $2m$ 个数按上述方式排好，而将 $2m+1$ 排在最后一项即可满足题中要求.

2·17 设 k 为正偶数，试证可以将自然数 $\{1,2,\cdots,k-1\}$ 排成一行 $(a_1,a_2,\cdots,a_{k-1})$，使得任何一段连续项的和均不能被 k 整除.

（中国国家集训队训练题，1990 年）

[证] 这时共有 $k-1$ 个数. 将除 $\frac{k}{2}$ 之外的数分成 $\frac{k}{2}-1$ 对：$\{1,k-1\},\{2,k-2\},\cdots\{\frac{k}{2}-1,\frac{k}{2}+1\}$. 首先将第 1 对数排在最前和最后，然后把第 2 对数交换顺序后分别排在次前和次后. 每对数的正序和反序交替使用，直到排完为止，最后将 $\frac{k}{2}$ 排在中间即可得到数列：

$$1,k-2,3,k-4,\cdots,\frac{k}{2},\cdots,4,k-3,2,k-1.$$

容易验证，从左至右每相邻两数之和依次为 $k-1,k+1,k-1,k+1,\cdots,k-1,k+1$，都不是 k 的倍数. 因此，任何连续偶数项之和都不是 k 的倍数. 又因 k 为偶数，所以 $k-1$ 个数之和 $\frac{1}{2}k(k-1)$ 也不是 k 的倍数.

只须再考察既不是所有项又是奇数项段之和的情形.

(1) 当从左端去掉 $2j\left(j<\frac{k}{2}\right)$ 项时，余下奇数项之和为

$$\frac{1}{2}k(k-1)-j(k-1)=\frac{1}{2}(k-2j)(k-1),$$

当然不是 k 的倍数.

(2) 当从右端去掉 $2j\left(j<\frac{k}{2}\right)$项时,由于

$$\frac{1}{2}k(k-1)\equiv\frac{k}{2}(\bmod\ k),j(k+1)\equiv j(\bmod\ k).$$

所以余下的奇数项之和也不是 k 的倍数.

(3) 当从左端去掉 $2j$ 项,右端去掉 $2i$ 项时$\left(i+j<\frac{k}{2}\right)$,不妨设 $i\leqslant j$. 于是左右各 $2i$ 项之和是 k 的倍数,问题化成前两种情形. 所以余下的奇数项之和也不是 k 的倍数.

2·18　A 是一个16位的正整数. 证明可以从 A 中取出相继若干位数码,使得其乘积是一个平方数. 例如 A 中某位数码是 4,就取这个数码.

(日本数学奥林匹克,1991 年)

[证]　设 $A=\overline{a_1a_2\cdots a_{16}}$,其中 $a_i\in\{0,1,2,\cdots,9\}$, $i=2,3,\cdots,16$, $a_1\in\{1,2,\cdots,9\}$.

由题设,若 $a_i=0,1,4,9$,则问题已得证.

今设 A 中的数码只含有 2,3,5,6,7,8. 这时 A 中若干相继位的数码之积是形如 $2^p\cdot 3^q\cdot 5^r\cdot 7^s$ 的数.

为简化问题,对于 p,q,r,s,我们以1表示其中的奇数,以0表示其中的偶数. 则问题化为证明存在四元有序数组(p,q,r,s)为(0,0,0,0)的情形.

首先,有序数组(p,q,r,s)对于 p,q,r,s 取奇数和偶数仅有 $2^4=16$ 种不同的形式.

再考察以下 16 个乘积:

$a_1,a_1a_2,a_1a_2a_3,\cdots,a_1a_2\cdots a_{16}$.

(1) 若其中有一个乘积是(0,0,0,0) 型,此时问题得证.

(2) 若其中没有一个乘积是(0,0,0,0) 型,这时 16 个乘积只有 15 种 1,0 组成的四数组,因此必有两个乘积所对应的四元有序数组(p,q,r,s)的奇偶型相同. 设这两个乘积是

$$a_1a_2\cdots a_{i-1}a_i,\quad a_1a_2\cdots a_{j-1}a_j.$$

$$(1\leqslant i\leqslant j\leqslant 16).$$

则这两个乘积的商 $a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_{j-1}a_j$ 对应的四元数组是(0,0,0,

第二章　数集

0), $a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_j$ 就是一个平方数.

2·19　已知 48 个自然数的乘积恰好有 10 个不同的质因数. 求证必可从 48 个数中挑出 4 个数,使得 4 数之积是一个完全平方数.

(第 49 届莫斯科数学奥林匹克,1986 年)

[证]　任取 48 个自然数中的两个数 a 和 b,按已知可写

$$ab = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_{10}^{\alpha_{10}}, \quad ①$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_{10}$ 为已知的 10 个不同质数而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{10}$ 都是非负整数. 定义映射

$$(a,b)\longrightarrow\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{10}\}. \quad ②$$

因为不同的二数组 (a,b) 共有 $C_{48}^2 = 1128$ 个,而十数组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{10}\}$ 按奇偶性来看只有 $2^{10} = 1024$ 个,故由抽屉原理知存在两个不同的二数组 (a,b) 和 (c,d),它们按 ② 对应的十数组奇偶性相同. 从而 $abcd$ 为一个完全平方数.

如果 a,b,c,d 互不相同,则它们即为所求;如果其中 $b = d$,则 ac 为一完全平方数.

除去两数 a 和 c,其余 46 个数所组成的不同二数组的个数 $C_{46}^2 = 1035 > 2^{10}$,故可重复上述过程而找到两个不同的二数组 (x,y) 和 (z,t),使得 $xyzt$ 为一个完全平方数. 如果 x,y,z,t 互不相同,则它们即为所求;如果其中 $y = t$,则 xz 为一完全平方数,从而 a,c,x,z 即为所求.

2·20　已知 1986 个自然数的乘积刚好有 1985 个不同的质因数,求证这 1986 个自然数中,或者有 1 个是完全平方数,或者有某几个数的乘积是完全平方数.

(第 49 届莫斯科数学奥林匹克,1986 年)

[证]　记这 1986 个自然数的集合为 A 并考察 A 的所有非空子集. 显然,这样的非空子集共有 $2^{1986}-1$ 个. 求出每个这样子集中的所有自然数之积,并将乘积表示成最大可能的完全平方数与一些互不相同的质数之乘积的形式(例如,将 $n = 2^{18}\cdot 3^{15}\cdot 5^{13}\cdot 7^9$ 表示为 $n = (2^9\cdot 3^7\cdot 5^6\cdot 7^4)^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$,而将 $m = 2^{16}\cdot 13^{10}$ 表示为 $m = (2^8\cdot 13^5)^2$),再令该子集对应于所有数之积除以最大可能的完全平方数之后所余的诸质因数的集合. 例如,当某子集中所有数之积为 n 时,它对应于 $\{3,5,7\}$,当另一子集中所有数之和为 m 时,它对应于空集. 这样一来,我们

就将 A 的每个子集都对应于一个质数集合，而这个质数集合是所有1986个自然数乘积中所出现的1985个质因数的集合 B 的一个子集. 这样的子集共有 2^{1985} 个. 因此，由抽屉原理便知，必有 A 的两个不同子集 A_1 和 A_2，对应于 B 的同一子集 $\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$. 这意味着 A_1 和 A_2 中的所有自然数之积可分别写成

$$n_1=a^2p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_k, n_2=b^2p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_k,$$

其中 a 和 b 是两个自然数. 这样一来，$n_1\cdot n_2$ 便是一个完全平方数. 但在 n_1n_2 中，将 $A_1\cap A_2$ 中的每个自然数都连乘了两次，因此在划去 A_1 和 A_2 的公共元素（自然是划去一个完全平方数）之后，所余下的数的乘积仍然是一个非零完全平方数，而它恰是 1 个或 n 个自然数之积.

2·21　设 M 是由 1985 个不同的正整数组成的集合，其中每个元素的素因子都不大于 26，求证从 M 中至少可以找到一个由 4 个不同元素组成的子集，使得这 4 个数的乘积等于某个正整数的 4 次方.

（第 26 届国际数学奥林匹克，1985 年）

［证］　因为不超过26的素数只有9个：2,3,5,7,11,13,17,19,23，所以对任何 $a\in M$，必可写成

$$a=2^{\alpha_1}\cdot3^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot23^{\alpha_9},$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_9$ 都是非负整数. 显然，$a\in M$ 被有序数组 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_9)$ 惟一确定且 M 中的 1985 个数对应于 1985 个互不相同的数组.

出现在这些数组中的非负整数 α_i，当然可能是奇数也可能是偶数. 但从奇偶性角度看来，这些数组中至多有 $2^9=512$ 个互不相同的数组，使其中任何两个数组中都至少有一对相应的数奇偶性不同. 换句话说，如果有 513 个这样的数组，则必可从中选出两个数组 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_9)$ 和 $(\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_9)$，使得

$$\alpha_i+\alpha'_i=2\beta_i, i=1,2,\cdots,9, \qquad ①$$

其中 β_i 都是非负整数.

因为 $1985=2\times513+959$，故从 M 中的 1985 个数所对应的 1985 个数组中，可以选出 513 对数组，使其中每对数组都满足关系式 ①，并由关系式 ① 给出相应的 513 个数组 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_9)$. 再由抽屉原理，这 513 个数组中必存在两个数组 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_9)$ 和 $(\beta'_1,\beta'_2,\cdots,\beta'_9)$，使得

$$\beta_i+\beta'_i=2\gamma_i, i=1,2,\cdots,9,$$

其中 γ_i 都是非负整数. 于是,$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_9)$ 和 $(\beta'_1,\beta'_2,\cdots,\beta'_9)$ 所对应的 4 个数的相应数组满足

$$\alpha_i+\alpha'_i+\alpha''_i+\alpha'''_i=2\beta_i+2\beta'_i=4\gamma_i,i=1,2,\cdots,9.$$

这意味着这 4 个数的乘积是某个正整数的四次方.

2·22 能否把所有自然数分组,使得在第 i 组中恰有 i 个数,$i=1,2,\cdots$,且使每组中的所有数之和都恰为某自然数的 7 次方?

(第 31 届莫斯科数学奥林匹克,1968 年)

[解] 令

$$A_1=\{1\},A_2=\{2,2^7-2\},A_3=\{3,4,3^7-3-4\},$$

$$A_k=\{a_1,a_2,\cdots,a_{k-1},k^7-a_1-a_2-\cdots-a_{k-1}\},$$

$$k=4,5,6,\cdots,$$

其中 A_k 中的前 $k-1$ 个数是 $A_1,A_2,\cdots,A_{k-1}$ 中没有用过的最小 $k-1$ 个自然数. 显然,A_k 中 k 个数的和是 k^7 且每个自然数都恰属于某一个 A_k. 这就是说,$\{A_k\mid k=1,2,\cdots\}$ 满足题中要求,可见题中所要求的划分是可以实现的.

2·23 已知53个不同的自然数的和不超过1990,求证其中必有两个数,其和为 53.

(第 53 届莫斯科数学奥林匹克,1990 年)

[证] 若不然,记 53 个已知自然数的集合为 S 并考察下列数对

$$\{i,53-i\},i=1,2,\cdots,26,$$

显然,其中每对数中至多有 1 个数属于 S. 从而 S 中的所有数之和

$$m\geqslant(1+2+\cdots+26)+(53+54+\cdots+79)$$
$$=2133>1990,$$

此与已知矛盾.

2·24 设 A 为从等差数列

$$1,4,7,\cdots,100$$

中任意选取 20 个相异整数所成之集合. 证明在 A 中必有两个相异整数,其和为 104.

(第 39 届美国普特南数学竞赛,1978 年)

[解] 将数列

$$1,4,7,\cdots,100$$

分成 18 个不相交的集合如下：

$$\{1\},\{52\},\{4,100\},\{7,97\},\cdots,\{49,55\}.$$

于是任取的20个整数中,必定有两个数属于后面16个二元集合中的一个.这一对整数的和即为104.

2·25　任意给定70个不超过200的互不相同的自然数,求证其中必有某两个数的差或为4,或为5,或为9.

（圣彼得堡数学奥林匹克,1991年）

[证]　记给定的70个数为 $a_1,a_2,\cdots,a_{70}$.考察如下的210个自然数

$$a_1,a_2,\cdots,a_{70},$$
$$a_1+4,a_2+4,\cdots,a_{70}+4,$$
$$a_1+9,a_2+9,\cdots,a_{70}+9,$$

其中的所有数都是不超过209的自然数.于是由抽屉原理便知,其中必有两数相等且这两个数既不同行也不同列.显然,两个数去掉后一项(如果是第1行的数则不必)所得的 a_i 与 a_j 便满足题中要求.

2·26　给定20个都不超过70的自然数 $a_1<a_2<\cdots<a_{20}$.求证在差 $a_j-a_k,1\leqslant k<j\leqslant 20$ 中,至少有4个相同.

（前南斯拉夫数学奥林匹克,1977年）

[证]　若不然,则对每个自然数 $j,1\leqslant j\leqslant 69$,值为 j 的差数至多3个.考察下列19个差:

$$a_{i+1}-a_i,i=1,2,\cdots,19.$$

易见,其中分别等于1,2,3,4,5,6的差至多各有3个,其余的差值都不小于7.于是有

$$70>a_{20}-a_1=(a_{20}-a_{19})+(a_{19}-a_{18})+\cdots+(a_2-a_1)$$
$$\geqslant 3\times(1+2+3+4+5+6)+7=70,$$

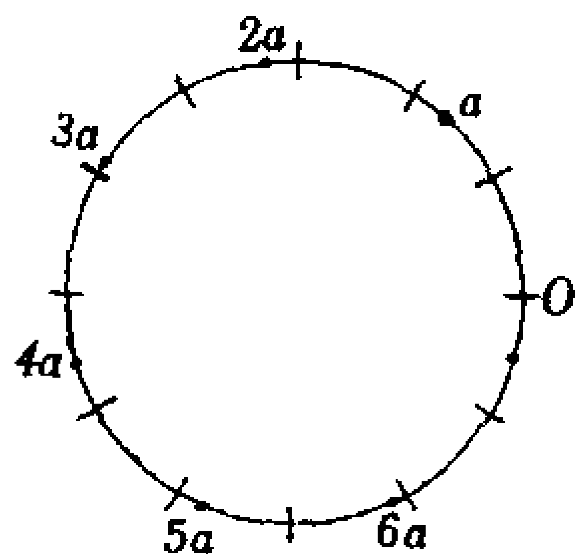
矛盾.

2·27　设 a 是任一正数,求证在 $a,2a,\cdots,(n-1)a$ 这 $n-1$ 个数中,至少存在一个数,它和与它最近的整数之差不超过 $\frac{1}{n}$.

（匈牙利数学奥林匹克,1927年）

[证]　显然,结论只与数 a 的分数部分 $a-[a]$ 有关.取一个周长为1的圆并设想将数轴缠绕在圆周上,于是所有整点都重合于圆周上

的同一点，记为点 O. 将圆周从点 O 开始，等分为 n 份并且约定，按逆时针方向，每段弧的终点属于该弧而起点不属于该弧，即这 n 段弧都是半开的. 从点 O 开始，在圆周上标出长为 $a, 2a, \cdots, (n-1)a$ 的弧的终点，并在这些点相应地标上 $a, 2a, \cdots, (n-1)a$.



如果第 1 段弧或第 n 段弧中有 1 个点，则这个点所对应的数 $ka(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 便满足要求. 若不然，则这 $n-1$ 个点全都落在其余的 $n-2$ 段弧上. 由抽屉原理知总有两点 $pa, qa(1 \leqslant p < q \leqslant n-1)$ 落在同一段弧中. 由此可知，$(q-p)a$ 必落在第 1 段弧或第 n 段弧中，矛盾.

2·28 用 $\sigma(S)$ 表示非空的整数集合 S 的所有元素的和. 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_{11}\}$ 是正整数的集合且 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{11}$，又设对每个正整数 $n \leqslant 1500$，都存在 A 的子集 S，使得 $\sigma(S) = n$. 求 a_{10} 的最小可能值.

（第 21 届美国数学奥林匹克，1992 年）

［解］ 令 $A_0 = \{1,2,4,8,16,32,64,128,247,248,750\}$，则 A_0 满足题中要求且 $a_{10} = 248$，故知 a_{10} 的最小可能值不超过 248.

另一方面，为保证 A 满足题中要求，A 中前 10 个数之和必须不小于 750. 又因 A 中前 8 个数之和最大为 255，故 $a_9 + a_{10}$ 的最小可能值为 495，从而 a_{10} 至少为 248. 故知 a_{10} 的最小可能值为 248.

2·29 设 $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots$ 是一个正整数数列，满足

$$x_{7t-6} + \cdots + x_{7t} \leqslant 12 \quad (t = 1, 2, \cdots).$$

记 $S_i = x_1 + \cdots + x_i$. 求证对任意正整数 n，一定有下标 j, k，其中 $j < k$，使得

$$S_k - S_j = n$$

成立.

（中国天津市数学竞赛，1979 年）

［证］ 由题设得

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 \leqslant 12,$$

$$x_8 + x_9 + \cdots + x_{14} \leqslant 12,$$

…… ……

$$x_{7n-6}+x_{7n-5}+\cdots+x_{7n}\leqslant 12.$$

将以上诸式相加得

$$S_{7n}\leqslant 12n.$$

由于 x_i 是正整数,则必有

$$S_1<S_2<\cdots<S_{7n}\leqslant 12n. \qquad ①$$

$$n+S_1<n+S_2<\cdots<n+S_{7n}\leqslant 13n. \qquad ②$$

对于 $14n$ 个正整数 $S_1,S_2,\cdots,S_{7n};n+S_1,n+S_2,\cdots,n+S_{7n}$ 均不大于 $13n$,因此必有两个数相等,由于组 ① 的任两数严格不等,组 ② 的任两数也严格不等,所以这相等的两数,必有一数在组 ①,一数在组 ②,且组 ① 的数等于组 ② 的数,不妨设组 ① 的数为 S_k,组 ② 的数为 $n+S_j$,则有

$$S_k=n+S_j$$

即

$$S_k-S_j=n.$$

2·30 设 $n>3$,且 n 是自然数,$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为整数,满足

$$1\leqslant a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n\leqslant 2n-3.$$

求证存在不同的整数 i,j,k,l,m,使得

$$a_i+a_j=a_k+a_l=a_m.$$

(日本数学奥林匹克,1990 年)

[证] (1) 当 $n=4$ 时,由

$$1\leqslant a_0<a_1<a_2<a_3<a_4\leqslant 5$$

及 $a_i(i=0,1,\cdots,4)$ 为整数可得

$$(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4)=(1,2,3,4,5).$$

从而有

$$a_0+a_3=a_1+a_2=a_4=5.$$

结论显然成立.

(2) 假设 $n=k(k\geqslant 4)$ 时命题成立.则 $n=k+1$ 时,由于

$$1\leqslant a_0<a_1<\cdots<a_k<a_{k+1}\leqslant 2(k+1)-3=2k-1.$$

若 $a_{k+1}\leqslant 2k-2$,则 $a_k\leqslant 2k-3$,从而由归纳假设命题成立.

若 $a_{k+1}=2k-1$,则

$$1\leqslant a_0<a_1<\cdots<a_k\leqslant 2k-2,$$

我们把1到$2k-2$这$2k-2$个数分成$k-1$组:$(1,2k-2),(2,2k-3),(3,2k-4),\cdots,(k-1,k)$.由于$a_0$到$a_k$有$k+1$个数,由抽屉原理,至少有两组包含的全是$a_0$到$a_k$的数,从而存在$i,j,k,l,m$,使得

$$a_i+a_j=a_k+a_l=2k-1=a_{k+1}=a_m.$$

即当$n=k+1$时,命题成立.

综上可知,总可以找到5个不同的数,使

$$a_i+a_j=a_k+a_l=a_m.$$

2·31　求最小正整数n,使在任何n个无理数中,总存在3个数,它们两两之和都仍是无理数.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1989年)

[解]　显然,$\{\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$这4个数中的任何3个数中都有一对相反数,二者之和为0,当然不是无理数.可见,所求的最小正整数$n\geqslant 5$.

设x,y,z,u,v是5个无理数.我们用5个点来代表它们.若两数之和为有理数,则在相应两点间连一条红线,否则就连一条蓝线.于是得到一个二染色的5个顶点的完全图K_5.我们要证的结论化为图中必有蓝三角形.

若不然,则图中或有红三角形或者没有单色三角形(3边同色的三角形).

若为前者,设$\triangle XYZ$是红三角形,于是3个和数$x+y,y+z,z+x$都是有理数.从而

$$x=\frac{1}{2}\{(x+y)+(x+z)-(y+z)\}$$

也是有理数,矛盾.

若为后者,即二染色的K_5中没有单色三角形.容易证明,这时每点引出的4条线都是2红2蓝并且5条红线和5条蓝线各构成一个有5条边的圈.不妨设红圈是$XYZUV$.于是5个和数$x+y,y+z,z+u,u+v,v+x$都是有理数.从而

$$x=\frac{1}{2}\{(x+y)+(z+u)+(v+x)-(y+z)-(u+v)\}$$

也是有理数,矛盾.

2·32　设A是整数集合,其中的最小元素是1,最大元素是100.除

1外,它的每个元素都等于 A 中两个元素之和(可以是一个元素的2倍).求集合 A 的元数的最小值.

(第14届全苏数学奥林匹克,1980年)

[解] 集合{1,2,4,8,16,32,36,64,100}满足要求且共有9个元素,故所求的最小值不超过9.

若集合 A 满足题中要求且只有8个元素:$1=a_1<a_2<\cdots<a_7<a_8=100$,则因 $a_{i+1}\leqslant 2a_i$,故有 $a_i\leqslant 2^{i-1}$,$i=1,2,\cdots,8$.由于 $a_6\leqslant 32$,$a_7\leqslant 64$,故 $a_8=2a_7$,$a_7=50$.又因 $a_5\leqslant 16$,$a_6\leqslant 32$,故 $a_6=25$.这时 $a_6\neq 2a_5$,然而因 $a_4\leqslant 8$,$a_5\leqslant 16$,$a_4+a_5<a_6$,矛盾.

综上可知,集合 A 最少有9个元素.

2·33 试证从任何11个十进制无穷小数中,都能找出两个小数来,使得在它们的差的十进制表达式中,或者含有无穷多个0,或者含有无穷多个9.

(第26届莫斯科数学奥林匹克,1963年)

[证] 将每个小数写成一行,第2个排在第1个下面,第3个又排在第2个下面,…,最下面一行是第11个小数,并将相同的位数上下对齐,于是我们得到一个11行无穷列的数表,每列都有11个数字.

由抽屉原理知,每列的11个数字中必有两个数字相同,我们称之为"数字对".由于每列至少有1个数字对,故知整个数表中有无穷多个数字对.又因由两个给定小数组成的数对只有有限多个,故由抽屉原理又知,必存在两个无穷小数,二者在无穷多位数上数字相同.在两个小数相减时,若下一位不借位,则相同数字之差为0;若下一位借位,则相同数字之差为9.从而再由抽屉原理即知,这两个小数的差中,或者有无穷多个0,或者有无穷多个9.

2·34 设 S 是{1,2,…,1989}的一个子集,且 S 中任意两数之差都不等于4或7,问 S 中最多有多少个元素?

(第7届美国数学邀请赛,1989年)

[解] 首先指出,集合{1,2,…,1989}中的任意11个连续自然数中最多能有5个数属于 S.

以 $T=\{1,2,\cdots,11\}$ 为例进行证明.考察 T 的下列子集:

{1,5},{2,6},{3,7},{4,8},{5,9},{6,10},{7,11},

{1,8},{2,9},{3,10},{4,11}.

显然,T 中的每个数恰属于这 11 个子集中的两个. 对于 T 中的任何 6 个数,它们恰属于这些子集中的 12 个,由抽屉原理知必有两个数属于其中同一个子集,即两数之差为 4 或 7. 因而 T 中任何 6 个数都不能同时属于 S.

另一方面,$T' = \{1,3,4,6,9\}$ 中任何两数之差都不等于 4 或 7,它们可以同时属于子集 S. 故知 T 中最多有 5 个数可以属于 S.

因为 $1989 = 181 \times 11 - 2$,所以 S 中的元素数不超过 905. 又因集合

$$\{1,3,4,6,9,12,14,15,17,20\}$$

任何两数之差都不等于 4 或 7,所以集合

$$\{k + 11n \mid k = 1,3,4,6,9, n = 0,1,2,\cdots,180\}$$

中任何两数之差都不等于 4 或 7,且它有 905 个元素. 故知 S 中最多有 905 个数.

2·35　考察由 n 个不同的砝码组成的砝码组,其中每个砝码的重量均为不超过 21 克的整数克. 问当 n 最小为多少时,砝码组中必定存在两对砝码的重量之和相等?

（第 18 届全俄数学奥林匹克,1992 年）

[解]　当 7 个砝码的重量克数分别为 1,2,3,5,8,13,21 时,容易验证,任何两对砝码的重量和都互不相同. 事实上,两对的 4 个砝码中,最重的砝码所在的对的重量和较重. 由此可知,所求的最小值不小于 8.

下面来证明,在任何 8 个砝码中,都能找出两对砝码来,使它们的重量和相等.

由于 8 个砝码共可组成 $C_8^2 = 28$ 个不同的砝码对(两个“对”不同,是指两对中都至少有 1 个砝码不属于另一对),而每一对砝码的重量之差的绝对值(简称为差)都不超过 20 克且都为正整数,故至多有 20 个不同的差值. 因此,必能选出不同的 8 组砝码对:

$$\{(a_i,b_i),(c_i,d_i)\}, i = 1,2,\cdots,8, \quad ①$$

使得

$$b_i - a_i = d_i - c_i, i = 1,2,\cdots,8. \quad ②$$

(1) 如果 ① 中的 8 组砝码对中有某组的 4 个砝码 a,b,c,d 互不相同,则由 ② 便得 $a + d = b + c$,两对砝码(a,d),(b,c) 便满足要求.

(2) 设①中的8组砝码对中的每组的4个砝码都不是互不相同.这时,若8个砝码中有两个重量相同,则显然有两个砝码对的重量和相等.以下设8个砝码的重量互不相等.于是由②知 $b_i = c_i, i = 1,2,\cdots,8$.这样一来,①中的每组砝码对都化成三元组

$$\{a_i, b_i, d_i\}, i = 1,2,\cdots,8, \quad ③$$

满足条件

$$a_i + d_i = 2b_i, i = 1,2,\cdots,8, \quad ④$$

即 b_i 为 a_i 与 d_i 的等差中项,因此它不能是最轻或最重的砝码,而只能是中间的6个砝码之一.由抽屉原理知,$b_1, b_2, \cdots, b_8$ 中总有两个相同,设为 $b_i = b_j (i \neq j)$.于是由④便有 $a_i + d_i = a_j + d_j$.易见,a_i, d_i, a_j, d_j 互不相同.从而 (a_i, d_i) 和 (a_j, d_j) 满足题中要求.

综上可知,砝码数 n 的最小值为8.

2·36　已知一个集合由10个互不相同的十进制的两位正整数所组成,求证它必有两个不交的子集,使得两子集中各数之和相等.

(第14届国际数学奥林匹克,1972年)

[证]　记给定的10个正整数的集合为 M,则 M 共有不同子集 $2^{10} = 1024$ 个.除去空集和 M 本身,尚有非空子集1022个.由已知,这些子集中每个的元素之和都不大于 $99 \times 9 = 891$ 且不小于10,故由抽屉原理知总有 M 的两个不同子集 M_1 和 M_2,使二者中元素之和相等.

再令

$$S_i = M_i - (M_1 \cap M_2), i = 1,2,$$

则 S_1 和 S_2 便是 M 的两个不交的非空子集且二者中元素之和相等.

2·37　设 $n \in N$ 且设两组自然数中的每个数都小于 n,每组中的数互不相同,两组数的总个数不小于 n,求证必可从两组数中各取出1个数,使二数之和等于 n.

(匈牙利数学奥林匹克,1953年)

[证]　设两组数分别为 A 组和 B 组,令

$$B' = \{b' \mid b' = n - b, b \in B\},$$

则 B' 也是互不相同的自然数的集合,其中每个数都小于 n 且 $|B'| = |B|$.

因为 $|A| + |B'| = |A| + |B| \geqslant n$ 且两个集合 A 和 B' 中的每

个自然数都属于$\{1,2,\cdots,n-1\}$，故由抽屉原理知其中必有两个数相同.因同组数互不相同，所以两数分别属于 A 和B'，设为 $a\in A,b'\in B',a=b'$.于是与 b' 相应的$b\in B$，满足 $a+b=n$.

2·38　从$\{1,2,\cdots,100\}$中任取55个不同的数，问其中是否必有两个数，使得二数之差等于：$(a)9$；$(b)11$？

（原苏联教委推荐试题，1990 年）

［解］　考察下列 91 个数对：

$$(i,i+9),i=1,2,\cdots,91. \quad ①$$

易见，1，2，…，9 和 92，93，…，100 这 18 个数中的每个数都恰属于上述 91 对数中之一，而其余的 82 个数中的每个数都恰属于上述 91 对数中的两对.因此，任意的 55 个数；都至少属于 ① 中的 $18+37\times2=92$ 个数对.由抽屉原理知其中必有两个数属于 ① 中同一对数，即二数之差为 9.

此外，当所取的 55 个数为 1，2，…，11，23，24，…，33，45，46，…，55，67，68，…，77，89，90，…，99 时，其中任何两数之差都不等于 11.

综上可知，任取的55个数中必有两数之差等于9，但不一定有两数之差等于 11.

2·39　设 $S=\{1,2,\cdots,20\}$，是否从 S 的任一个 10元子集中总可取出 4 个数，使其中两数之差等于另两数之差？

（基辅数学奥林匹克，1980 年）

［解 1］　S 中所有数对的差（取正值）共有 19个不同的值：1，2，…，19.对于 S 的任一个 10 元子集，从 10 个数中任取两数作差，共有 45 种不同取法，所得的45个差当然不多于19个不同的值.由抽屉原理便知，这 10 个数中必存在 3 个不同的数对$(i,j),(k,l),(s,t)$，使得 $i-j=k-l=s-t>0$.显然，$i\neq k,k\neq s,s\neq i,j\neq l,l\neq t,t\neq j$，否则将导致 3 对数中有两对相同.此外，$j=k,l=s,t=i$ 不能同时成立，否则有

$$\begin{aligned}3(i-j)&=(i-j)+(k-l)+(s-t)\\&=(k-j)+(s-l)+(i-t)=0,\end{aligned}$$

矛盾.这表明$(j,k),(l,s),(t,i)$ 中至少有 1 对是由不同整数组成的.不妨设 $j\neq k$.

(1) 若 $l=s$，则由 $i\neq s$ 知$i\neq l$.于是4个数 i,j,k,l 互不相同且

$i - j = k - l$.

(2) 若 $i = t$，则由 $l \neq t$ 知 $l \neq i$. 于是 i, j, k, l 即为所求.

(3) 若 $l \neq s, i \neq t$，再考察 $(t, k), (l, i), (j, s)$ 这 3 个数对. 与上面类似地可证，其中至少有 1 对中的两数不同. 不妨设为 $t \neq k$，于是 k, l, s, t 即为所求.

综上所述，S 中的任一个 10 元子集中均可取出 4 个数，使其中两数之差等于另两数之差.

[解2] 若不然，则存在 S 的一个 10 元子集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{10}\}$，$a_1 < a_2 < \cdots < a_{10}$，其中任何 4 数都不能使两数之差等于另两数之差. 于是两组差数 $\{a_2 - a_1, a_4 - a_3, a_6 - a_5, a_8 - a_7, a_{10} - a_9\}$，$\{a_3 - a_2, a_5 - a_4, a_7 - a_6, a_9 - a_8\}$ 都是由互不相同的正整数构成的. 因而有

$$(a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) + (a_8 - a_7) + (a_{10} - a_9) \geqslant 15,$$

$$(a_3 - a_2) + (a_5 - a_4) + (a_7 - a_6) + (a_9 - a_8) \geqslant 10.$$

两式相加即得

$$20 \geqslant a_{10} > a_{10} - a_1 = \sum_{i=1}^{9}(a_{i+1} - a_i) \geqslant 25,$$

矛盾.

2·40 设 $S = \{-(2n-1), -(2n-2), \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, 2n-1\}$，求证 S 的任一个 $2n+1$ 元的子集中必有 3 个数之和为零.

（中国国家集训队训练题，1990 年）

[证] 若不然，则存在 S 的一个 $2n+1$ 元的子集 H，其中任何 3 个数之和都不为零.

(1) 首先证明，$0 \notin H$. 如果 $0 \in H$，则其余的 $2n$ 个整数分属于如下 $2n-1$ 个数对：

$$(-i, i), i = 1, 2, \cdots, 2n-1,$$

由抽屉原理知其中必有一对的两个数都属于 H. 二者加上 0，3 数之和为零，矛盾.

(2) 设 H 中绝对值最小的元素为 d，不妨设 $d > 0$. 令

$H^+ = \{x \mid x \in H, x > d\}$，$H^- = \{x \mid x \in H, x < -d\}$，

$H^{+-} = \{d - x \mid x \in H^+\}$，$H^{-+} = \{-d - x \mid x \in H^-\}$.

显然，这些集都不是空集且由反证假设知

$$H^+ \cap H^{-+} = \varnothing. \quad ①$$

若 $-d \notin H$，则由 ① 有

$$2n-1 \geqslant |H^+ \cup H^{-+}| = |H^+| + |H^{-+}| = 2n,$$

矛盾.故必有 $-d \in H$.于是 $H^- \cap H^{+-} = \varnothing$ 及

$$|H^+| + |H^{-+}| = |H^+| + |H^-| = 2n-1.$$

故有

$$H^+ \cup H^{-+} = \{1,2,\cdots,2n-1\},$$
$$H^- \cup H^{+-} = \{-1,-2,\cdots,-(2n-1)\}. \quad ②$$

将 H^+，H^- 中各数之和分别记为 h^+ 和 h^-，则 H^{+-} 和 H^{-+} 中各数之和分别为 $|H^+|\cdot d - h^+$ 和 $-|H^-|\cdot d - h^-$.于是由 ② 便得

$$h^+ + h^- + |H^+|\cdot d - h^+ - |H^-|\cdot d - h^- = 0,$$
$$(|H^+| - |H^-|)d = 0.$$

因 $|H^+| + |H^-| = 2n-1$，故 $|H^+| - |H^-|$ 为奇数，故得 $d=0$，矛盾.这就证明了 S 中必有 3 数之和为零.

2·41　设 $n>1$，$S=\{1,2,\cdots,3n\}$，求证 S 的任一 $n+2$ 元子集中必有两个数，它们的差大于 n 而小于 $2n$.

（匈牙利数学奥林匹克，1952 年）

［证 1］　设 T 为 S 的任一 $n+2$ 元子集.因结论只与两数之差有关，故可设 T 中的最大元为 $3n$.若不然，则可将 T 中的 $n+2$ 个数同时加上一个数，使最大元变成 $3n$.

由于最大元为 $3n$，故若其他 $n+1$ 个数中有 $\{n+1,n+2,\cdots,2n-1\}$ 中之一，问题就解决了.否则，其余的 $n+1$ 个数都属于下列 n 对数：

$$(1,2n),(2,2n+1),(3,2n+2),\cdots,(n,3n-1).$$

由抽屉原理知，必有一对的两个数都属于 T，且这两数便满足题中要求.

［证 2］　取一个圆并将它 $3n$ 等分，然后用 $3n$ 个分点按逆时针顺序依次代表数 $1,2,\cdots,3n$.将其中的任意 $n+2$ 个点涂成黑色，其余分点涂成白色，于是问题化为证明必有两个黑点，它们把圆周分成的两段弧的长度都大于圆周的 $\frac{1}{3}$.

若不然，则任何两个黑点分圆周所成的两条弧中，总有一条的长度不大于圆周长的 $\frac{1}{3}$.

为方便计，我们把和为整个圆周的不交的两条弧称为是互补的，把

除端点为黑点外，内部不含黑点的圆弧称为自由弧.由反证假设知，自由弧不可能既大于圆周的$\frac{1}{3}$，又小于圆周的$\frac{2}{3}$.否则，它的两个端点满足题中要求.因而，最长的自由弧或者不超过圆周的$\frac{1}{3}$，或者不小于圆周的$\frac{2}{3}$.另一方面，由反证假设还可知，对于圆周上的任一黑点，以它为中心，长为圆周$\frac{2}{3}$的弧的补弧的内部不能有黑点.因此，最长的自由弧不小于圆周的$\frac{1}{3}$.

如果最长的自由弧等于圆周的$\frac{1}{3}$，则圆周上只能有3个黑点，它们恰为圆内接正三角形的3个顶点.这时，3个黑点所对应的3条自由弧互不相交，但黑点数$3 < n+2$，矛盾.

如果最长的自由弧不小于圆周的$\frac{2}{3}$，则黑点全都位于其补弧上，至多有$n+1$个黑点，矛盾.

2·42 设自然数n具有如下性质：从自然数$1,2,\cdots,n$中任取50个不同的数时，其中必有两数之差等于7.求n的最大值.

（中国初中数学联赛，1987年）

[解] 从1开始连续取7个自然数，然后越过7个自然数再从15开始连续取7个自然数，这样继续下去直到98，共取得49个自然数.再加上99，即得到50个自然数：

$$14i+j, i=0,1,\cdots,6, j=1,2,\cdots,7 \text{ 及 } i=7, j=1.$$

易见，这50个数中任意两数之差都不等于7.所以，所求n的最大值小于99.

当$n=98$时，将98个数分成7个集合：

$\{1,8,15,\cdots,85,92\}$,

$\{2,9,16,\cdots,86,93\}$,

$\{3,10,17,\cdots,87,94\}$,

$\{4,11,18,\cdots,88,95\}$,

$\{5,12,19,\cdots,89,96\}$,

$\{6,13,20,\cdots,90,97\}$,

$\{7,14,21,\cdots,91,98\}$,

其中每个集合中恰含 14 个数且每相邻两数之差为 7. 任取的 50 个数分属于这 7 个集合,由抽屉原理知必有 1 个集合中至少含 8 个取定的数. 8 个数中必有两数相邻,二者之差为 7.

综上可知,n 的最大值为 98.

2·43　从 n 个实数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 最多能挑出几组不同的三项等差数列?

(第 9 届美国数学奥林匹克,1980 年)

[解]　为了便于计数,我们将每个三项等差数列都对应于它的中项并分别求出以 a_i 为中项的不同等差数列的最多组数.

当 n 为奇数时,记 $n = 2k+1$. 对于每个给定的中项 a_i, $2 \leqslant i \leqslant k+1$, 有 $i-1$ 个可能的首项 $a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}$. 因而以 a_i 为中项的三项等差数列至多有 $i-1$ 组. 所以,以 $a_i(2 \leqslant i \leqslant k)$ 为中项的等差数列的组数至多为

$$\sum_{i=2}^{k}(i-1) = \frac{1}{2}k(k-1).$$

由对称性知,以 $a_i(k+2 \leqslant i \leqslant n-1)$ 为中项的等差数列组数也至多为 $\frac{1}{2}k(k-1)$. 再加上以 a_{k+1} 为中项的至多 k 个等差数列,便知不同的三项等差数列的总数为

$$S = k(k-1) + k = k^2 = \frac{1}{4}(n-1)^2. \quad ①$$

当 $n = 2k$ 为偶数时,与前段类似地可知所有三项等差数列的总数为

$$S = k(k-1) = \frac{1}{4}(n-1)^2 - \frac{1}{4}. \quad ②$$

将 ① 与 ② 结合起来便知,对于正整数 n,所求的三项等差数列的组数至多为

$$S = \left[\frac{(n-1)^2}{4}\right]. \quad ③$$

容易看出,当数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为等差数列时,所有不同的三项等差数列的总组数恰为 ③ 中给出的 S. 所以,③ 中给出的 S 就是所求的数列组数的最大值.

2·44　从集合 $\{1, 2, \cdots, 1982\}$ 中删去一些数,使得在剩下的数中,任何一个数都不是另外两个数的乘积. 问最少应删去多少个数才能做

到这一点?

（第16届全苏数学奥林匹克,1982年）

[解] 因为 $45\times46=2070$,故当删去43个数:2,3,…,44后,所得的集合便满足题中要求.

另一方面,当从集合中至多删去42个数时,下面43个集合

$$\{k,89-k,k(89-k)\},k=2,3,\cdots,44$$

中至少有一个集合中的3个数均未被删掉,不满足题中要求.

故知所求的最小值为43.

2·45 试证在任意13个实数中,总有两个数 c 和 d,满足

$$0<\frac{c-d}{1+cd}<2-\sqrt{3}.$$

（中国国家集训队训练题,1990年）

[证] 设这13个数为 $a_1,a_2,\cdots,a_{13}$.令

$$x_i=\operatorname{arctg}a_i,$$

则 $x_i\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),i=1,2,\cdots,13$.由抽屉原理知,其中存在两个数 x_i 和 x_j,使得 $0<x_i-x_j<\frac{\pi}{12}$.于是有

$$0<\operatorname{tg}(x_i-x_j)<\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3},$$

再利用三角公式 $\operatorname{tg}(x_i-x_j)=\frac{\operatorname{tg}x_i-\operatorname{tg}x_j}{1+\operatorname{tg}x_i\operatorname{tg}x_j}$ 即得所欲证.

2·46 求最小正整数 n,使得在区间(1,1000)中任取 n 个不同的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 时,其中总有两个数 $a_i,a_j,1\leqslant i,j\leqslant n$,满足不等式

$$0<a_i-a_j<1+3\sqrt[3]{a_ia_j}. \quad ①$$

（中国国家集训队测验题,1990年）

[解] 因为

$$\begin{aligned}a_i-a_j&=(\sqrt[3]{a_i}-\sqrt[3]{a_j})(\sqrt[3]{a_i^2}+\sqrt[3]{a_ia_j}+\sqrt[3]{a_j^2})\\&=(\sqrt[3]{a_i}-\sqrt[3]{a_j})\left[(\sqrt[3]{a_i}-\sqrt[3]{a_j})^2+3\sqrt[3]{a_ia_j}\right],\end{aligned}$$

故知①式成立的充分必要条件是

$$0<\sqrt[3]{a_i}-\sqrt[3]{a_j}<1. \quad ②$$

当 $a\in[1,1000]$ 时,$\sqrt[3]{a}\in[1,10]$.由抽屉原理知当 $n\geqslant11$ 时,必存在

a_i 和 a_j 使 ② 成立,从而 ① 式也成立.

当 $n=10$ 时,取 $\sqrt[3]{a_i}=i, i=1,2,\cdots,10$,则其中任何两数都不满足②式(这时②式化为等式),不满足题中要求.所以,所求的最小正整数 $n=11$.

2·47　设 A 是一个正整数的集合且对任意 $x,y\in A$,都有 $|x-y|\geqslant\frac{xy}{25}$,求证 A 中最多有 9 个元素.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

[证]　设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}, x_{i+1}=x_i+d_i, d_i>0$. 由条件 $|x-y|\geqslant\frac{xy}{25}$ 易知,A 中至多有 1 个元素不小于 25,从而有 $x_{n-1}\leqslant 24$.

由已知有

$$d_i=|x_{i+1}-x_i|\geqslant\frac{x_{i+1}\cdot x_i}{25}=\frac{(x_i+d_i)x_i}{25},$$

解得

$$d_i\geqslant\frac{x_i^2}{25-x_i}. \qquad ①$$

从 $x_5\geqslant 5$ 出发,由 ① 式得到 $d_5\geqslant\frac{25}{20}>1$,故有 $x_6\geqslant 7$. 再由 ① 式又得 $d_6>2, x_7\geqslant 10; d_7>6, x_8\geqslant 17; d_8>36, x_9\geqslant 54>25$. 可见,$A$ 中至多有 9 个元素.

另一方面,容易验证集合 $\{1,2,3,4,5,7,10,17,54\}$ 满足题中要求.从而知集合 A 中最多有 9 个元素.

2·48　求所有的由不同正整数(至少 2 个)组成的集合,使其中各数之和等于它们的积.

(中国国家集训队训练题,1986 年)

[解]　显然,1 在集合中起着保持积不动而增大和的作用,而且它是具有这种性质的惟一正整数.

先设集合中的 n 个数中不含 1 且 $1<a_1<a_2<\cdots<a_n$,于是 $a_j>j, j=1,2,\cdots,n$. 因 $n\geqslant 2$,故有

$$a_na_{n-1}-a_n-a_{n-1}=(a_n-1)(a_{n-1}-1)-1\geqslant 1,$$

$$a_na_{n-1}\geqslant a_n+a_{n-1}+1. \qquad ①$$

其中等号成立当且仅当 $a_n = 3, a_{n-1} = 2$. 从而当 $n \geqslant 3$ 时,

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \geqslant a_n a_{n-1} 2 > a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + 1.$$

依此类推,便得

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 \geqslant a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + 1. \qquad ②$$

① 式和 ② 式结合起来表明,凡不含 1 的集合都不满足要求,而且 ② 式还意味着当 $n \geqslant 3$ 时,即使将 1 添入集合中也不能满足要求.

由 ① 知当 $n = 2$ 时,只有 $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3$ 才满足题中要求. 又当 $n = 1$ 时,$a_1 \cdot 1 < a_1 + 1$,所以任何 $\{1, a_1\}$ 都不满足题中要求.

总结起来,满足题中要求的集合只有一个,即为 $\{1,2,3\}$.

2·49　考察由 $n(n \geqslant 3)$ 个自然数所成的集合,其中任何 3 个数都不成等差数列. 求证在所有这样的集合中存在一个集合,它的所有元素的倒数之和为最大.

(第 3 届拉丁美洲数学奥林匹克,1988 年)

[证]　对每个满足题中要求的集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,记 $S_A = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$.

对于任意两个自然数 a 和 b,至多有 3 个数 $2a - b, \frac{a+b}{2}, 2b - a$ 能分别与 a, b 构成等差数列. 令

$$M = \{1, 2, \cdots, n + 3C_{n-1}^2\}.$$

易见,对于 M 中的任何两个元素,都可以找到不与这两个元素成等差的第 3 个元素;对于这 3 个元素,可以找到不与 3 个元素中的任何两个成等差的第 4 个元素;…;最后,当有 $n - 1$ 个元素时,可以找到不与其中任何两个成等差的第 n 个元素. 这表明 M 中存在满足题中要求的 n 个自然数的子集. 这样的 n 元子集只有有限多个,故其中必有一个使其所有元素的倒数之和最大,记这个子集为 $A \subset M$.

对于满足题中要求的任一 n 元集合 B,若 $B \subset M$,则有 $S_B \leqslant S_A$. 若 $B - M \neq \varnothing$,则 $|B \cap M| < n$. 因 $|M| = n + 3C_{n-1}^2$,故可依次用 M 中的元素代替 $B - M$ 中的元素. 显然,每次都使 S_B 增大. 从而也有 $S_B \leqslant S_A$. 这表明对所有满足要求的 n 元集合来说,S_A 最大.

2·50　设自然数 $n \geqslant 5$,n 个不同的自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足条件:对集合 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的任何两个不同的非空子集 A 和 B,A

中所有数之和与 B 中所有数之和都不相等.在上述条件下,求倒数和

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

的最大值.

（中国上海市数学竞赛,1994 年）

[**解**] 首先证明如下的引理.

引理 设 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 满足题 中的条件,则对任何自然数 $k\leqslant n$,都有

$$\sum_{i=1}^{k}a_i\geqslant 2^k-1.$$

引理的证明 若不然,则有

$$\sum_{i=1}^{k}a_i\leqslant 2^k-2.$$

由于 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 共有 2^k-1 个不同的非空子集,它们的元素和都在 $\{1,2,\cdots,2^k-2\}$ 中取值.故由抽屉原理知,必有两个子集的元素和相等,此与已知条件矛盾.引理证毕.

考察表达式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$
$$=\frac{a_1-1}{a_1}+\frac{a_2-2}{2a_2}+\cdots+\frac{a_n-2^{n-1}}{2^{n-1}a_n}. \quad ①$$

令 $c_i=\frac{1}{2^{i-1}a_i}$,$d_i=a_i-2^{i-1}$,$D_k=\sum\limits_{i=1}^{k}d_i$,于是有 $c_1>c_2>\cdots>c_n$,且有

$$D_k=\sum_{i=1}^{k}a_i-(1+2+2^2+\cdots+2^{k-1})$$
$$=\sum_{i=1}^{k}a_i-(2^k-1)\geqslant 0. \quad ②$$

由 ① 和 ② 有

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}c_id_i=c_1D_1+C_2(D_2-D_1)+\cdots+c_n(D_n-D_{n-1})$$

$$= (c_1 - c_2)D_1 + (c_2 - c_3)D_2 + \cdots + (c_{n-1} - c_n)D_{n-1} + c_nD_n \geqslant 0.$$

因而有

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

另一方面,容易验证,集合 $S_0 = \{1,2,2^2,\cdots,2^{n-1}\}$ 满足题中的要求且有

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

综上可知,所求的表达式的最大值为 $2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

2·51　已知若干个正整数之和为 1976,求其积的最大值.

(第 18 届国际数学奥林匹克,1976 年)

[解]　因为和为 1976 的不同的正整数组只有有限多组,故所求的最大值必然存在.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是正整数且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1976$,其积 $P = x_1x_2\cdots x_n$ 取得最大值,则有

(1)$x_i \leqslant 4, i = 1,2,\cdots,n$.若有 $x_i > 4$,则因 $2 + (x_i - 2) = x_i$ 而 $2(x_i - 2) = 2x_i - 4 > x_i$,故当用 2 和 $x_i - 2$ 代替 x_i 时,将使乘积 P 的值变大,矛盾.

(2)$x_i \geqslant 2, i = 1,2,\cdots,n$.若有 $x_i = 1$,则 $x_ix_j = x_j < x_i + x_j$,故当用 $x_i + x_j$ 代替 x_i, x_j 时,将使乘积 P 变大,矛盾.

(3) 因为 $4 = 2 + 2 = 2 \times 2$,故若有 $x_i = 4$,则可用两个 2 来代替 x_i.这样一来,所有 x_i 都是 2 或 3.

(4) 由上述论证知可设 $P = 2^r \cdot 3^s$,其中 r 和 s 都是非负整数.因为 $2 + 2 + 2 = 3 + 3$,而 $2^3 < 3^2$,故必有 $r < 3$.又因 $1976 = 658 \times 3 + 2$,故知 $r = 1, s = 658$.所以,所求的最大值为 $P = 2 \times 3^{658}$.

2·52　设 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 均为复数,且满足

$$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| = 1,$$

求证在这 n 个复数中,必存在若干个复数,它们的和的模不小于 $\frac{1}{6}$.

(第 1 届中国中学生数学冬令营,1986 年)

[证 1]　不妨设 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 都异于 0.用从原点出发且辐角分别为 60°,180°,300° 的 3 条射线将复平面分成 3 个角形域.于是 3 个角形域

把给定的 n 个复数分成3组,位于射线上的复数同时属于以该射线为边的两个角形域.显然,3组复数中必有1组复数的模之和不小于$\frac{1}{3}$.设这组复数为 $z_1,z_2,\cdots,z_m$,且它们所在的角形域以正实轴为平分角线(另两种情形可类似地进行讨论).因为角形域的张角为120°,故其中任一复数在正实轴上的投影,即该复数的实部都不小于其模的$\frac{1}{2}$.从而有

$$\begin{aligned}|z_1+z_2+\cdots+z_m| &\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_m\\ &\geqslant \frac{1}{2}(|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_m|)\\ &\geqslant \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

[证2] 记 $z_k=x_k+iy_k,k=1,2,\cdots,n$.于是有

$$\begin{aligned}1=\sum_{k=1}^{n}|z_k| &\leqslant \sum_{k=1}^{n}|x_k|+\sum_{k=1}^{n}|y_k|\\ &=\sum_{x_k\geqslant 0}|x_k|+\sum_{x_k<0}|x_k|+\sum_{y_k\geqslant 0}|y_k|+\sum_{y_k<0}|y_k|.\end{aligned}$$

上述右端4个和数中必有1个不小于$\frac{1}{4}$,不妨设第1个和数是如此.由于这组数中所有的 x_k 同号,故有

$$\left|\sum_{x_k\geqslant 0}z_k\right|\geqslant\left|\sum_{x_k\geqslant 0}x_k\right|=\sum_{x_k\geqslant 0}|x_k|\geqslant\frac{1}{4},$$

当然,这组复数的和之模更大于$\frac{1}{6}$.

2·53 (1)证明:存在不全为零的三个整数 a,b,c,其中每一个的绝对值均小于 10^6,使得

$$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|<10^{-11}$$

成立.

(2)设 a,b,c 是不全为零的整数,且每一个的绝对值均小于 10^6.试证

$$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|>10^{-21}.$$

(第41届美国普特南数学竞赛,1980年)

[证] (1)设 $S=\{x\mid x=r+s\sqrt{2}+t\sqrt{3}\}$,其中 $r,s,t\in\{0,$

$1,2,\cdots,10^6-1\}$. 则 S 中有 10^{18} 个元素. 又设 $d=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})10^6$. 则 $0\leqslant x<d$.

把区间 $[0,d)$ 平均分成 $10^{18}-1$ 个小区间

$$[(k-1)e,ke],$$

其中 $e=\dfrac{d}{10^{18}-1}$, $k=1,2,\cdots,10^{18}-1$.

根据抽屉原理, S 的 10^{18} 个数中必定有两个数属于同一个小区间, 设这两个数为

$$x_1=r_1+s_1\sqrt{2}+t_1\sqrt{3}, x_2=r_2+s_2\sqrt{2}+t_2\sqrt{3},$$

则 $\quad x_1-x_2=(r_1-r_2)+(s_1-s_2)\sqrt{2}+(t_1-t_2)\sqrt{3}$

满足

$$|x_1-x_2|<\frac{1}{10^{18}-1}<10^{-11}.$$

记 $a=r_1-r_2$, $b=s_1-s_2$, $c=t_1-t_2$, 则 a,b,c 的绝对值均小于 10^6. 因此 $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$ 满足要求, 即 a,b,c 为所求的三个整数.

(2) 令 $F_1=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$.

并令 F_2,F_3,F_4 为形如 $a\pm b\sqrt{2}\pm c\sqrt{3}$ 的另外3数, 则 $F_i(i=1,2,3,4)$ 均不为零.

由题设可知

$$|F_i|<10^7,\quad i=1,2,3,4.$$

从而 $\quad \dfrac{1}{|F_i|}>10^{-7}, i=1,2,3,4,$

由于 $\quad |F_1F_2F_3F_4|\geqslant 1,$

则 $\quad F_1\geqslant\dfrac{1}{|F_2F_3F_4|}>10^{-21}.$

2·54 设 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$ 是整数的一个集合, 其中 $r>1$. 对于 S 的非空子集 A, 定义 $p(A)$ 为 A 中的一切整数的乘积. 设 $m(S)$ 表示所有 $p(A)$ 的算术平均数. 若 $m(S)=13$, 且有一正整数 a_{r+1}, 使得 $m(S\cup\{a_{r+1}\})=49$. 试确定 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 及 a_{r+1} 的值.

(第 20 届 加拿大数学奥林匹克, 1988 年)

[解] 对任何自然数 n 及 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$. A 的所有非空子集元素之积的和为

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+(a_1a_2+\cdots+a_1a_n+\cdots+a_{n-1}a_n)+(a_1a_2a_3$$

$$+ \cdots + a_{n-1}a_na_1) + \cdots + a_1a_2\cdots a_n$$
$$= (1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) - 1.$$

A 的所有非空子集的个数为 $2^n - 1$. 于是

$$m(A) = \frac{(1 + a_1)\cdots(1 + a_n) - 1}{2^n - 1},$$

即有

$$(1 + a_1)\cdots(1 + a_n) - 1 = m(A)(2^n - 1).$$

由此式可得(当 $n = r + 1$ 时)

$$(2^{r+1} - 1)m(S \cup \{a_{r+1}\}) + 1$$
$$= (1 + a_1)\cdots(1 + a_r)(1 + a_{r+1})$$
$$= [m(S)(2^r - 1) + 1](1 + a_{r+1}).$$

由题设　$m(S) = 13, m(S \cup \{a_{r+1}\}) = 49$ 有

$$49(2^{r+1} - 1) + 1 = [13(2^r - 1) + 1](1 + a_{r+1}).$$

由此式可算出

$$2^r = \frac{12(a_{r+1} - 3)}{13a_{r+1} - 85}. \qquad ①$$

注意到上式的右边是 a_{r+1} 的函数,它在区间$(-\infty, \frac{85}{13})$和$(\frac{85}{13}, +\infty)$上都是减函数.

由于当 $a_{r+1} = 1$ 时,①式的右边等于$\frac{24}{72} = \frac{1}{3}$. 所以当 $a_{r+1} = 1,2,3,4,5,6$ 时,①式右边是小于1的数. 因此只须讨论 $a_{r+1} \geqslant 7$ 的情形. 当 $a_{r+1} \geqslant 8$ 时,①式右边不是整数,所以只能有 $a_{r+1} = 7$.

由①式得

$$2^r = \frac{12 \times 4}{91 - 85} = 8.$$

所以 $r = 3$.

由此可得

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) = (2^3 - 1)m(S) + 1$$
$$= 7 \times 13 + 1 = 92.$$

于是有

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) = 92 = 2 \times 2 \times 23.$$

由此可得惟一的正整数解是

$$1+a_1=2, 1+a_2=2, 1+a_3=23,$$

即 $$a_1=1, a_2=1, a_3=22.$$

除此之外还有 15 组整数解，这可由 92 关于整数的不同分解得到，它们是

$(0,0,91)$, $(0,-2,-93)$, $(1,-3,-24)$,
$(-2,-2,91)$, $(-2,0,-93)$, $(0,1,45)$,
$(-2,-3,45)$, $(-2,1,-47)$, $(0,-3,-47)$,
$(0,3,22)$, $(-2,-5,22)$, $(-2,3,-24)$,
$(0,-5,-24)$, $(-3,-3,22)$, $(-3,1,-24)$,

2·55 给定 1991 个两两不同的正实数，其中任意 10 个数之积都大于 1，求证所有 1991 个数的乘积大于 1.

(德国数学奥林匹克，1991 年)

[解 1] 将给定的 1991 个正实数记为 $a_1, a_2, \cdots, a_{1991}$ 并设其中 a_1 最大，则 $a_1>1$，否则所有数都不大于 1，10 数之积也不大于 1，矛盾.

将除了 a_1 之外的 1990 个数分成 199 组，每组 10 个数. 于是每组 10 数之积都大于 1，从而 1991 个数之积也大于 1.

[解 2] 设给定的 1991 个正实数已按从小到大排序为 $a_1<a_2<\cdots<a_{1991}$. 因为

$$p_1=a_1a_2\cdots a_{10}>1,$$

所以 $a_{10}>1$，否则 $p_1\leqslant 1$. 由此可知

$$a_j>1, j=11,12,\cdots,1991.$$

因而有

$$a_1a_2\cdots a_{1991}=p_1a_{11}a_{12}\cdots a_{1991}>1.$$

2·56 设 $p\in N, n=2^p$. 考察 $E=\{1,2,\cdots,n\}$ 具有如下性质的子集 A：若 $x\in A$，则 $2x\notin A$. 求这样的子集 A 的元数的最大值.

(法国数学奥林匹克，1991 年)

[解] 对任意 $e\in E$，我们写 $e=2^st$，其中 s 是非负整数，t 是奇数. 按已知，若 $2^st\in A$，则 $2^{s-1}t\notin A$，$2^{s+1}t\notin A$. 因此，对每个 $t<n$，集合 A 与集合 $\{t,2t,2^2t,\cdots\}$ 的交的元素个数不多于集合 $\{t,2^2t,\cdots,2^{2m}t\}$ 的元素个数，其中 m 为使 $2^{2m}t\leqslant n$ 的最大非负整数. 所以，

$$|A|\leqslant\begin{cases}2^{p-1}+2^{p-3}+\cdots+2^2+1, & \text{当 } p \text{ 为奇数},\\ 2^{p-1}+2^{p-3}+\cdots+2+1, & \text{当 } p \text{ 为偶数}.\end{cases}$$

对上式右端求和即得

$$|A| \leqslant \begin{Bmatrix} \frac{1}{3}(2^{p+1}-1) \\ \frac{1}{3}(2^{p+1}+1) \end{Bmatrix} = \left[\frac{2}{3}n\right] + \varepsilon_p, \qquad ①$$

其中

$$\varepsilon_p = \begin{cases} 0, & 当 p 为奇数, \\ 1, & 当 p 为偶数. \end{cases} \qquad ②$$

易见,不等式 ① 中的等号是可以成立的,故知 $|A|$ 的最大值即为 $\left[\frac{2}{3}n\right]+\varepsilon_p$,其中 ε_p 如 ② 所给出.

2·57　设 $n,k\in N$ 且 $k\leqslant n$ 并设 S 是含有 n 个互异实数的集合.设 T 是所有形如 $x_1+x_2+\cdots+x_k$ 的实数的集合,其中 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是 S 中的 k 个互异元素.求证 T 中至少有 $k(n-k)+1$ 个互异的元素.

（第 34 届国际数学奥林匹克预选题,1993 年）

［证］　设 $s_1<s_2<\cdots<s_n$ 是 S 的 n 个元素并对元素数 n 使用数学归纳法来证明.

首先,当 $k=1$ 和 $k=n$ 时,结论显然成立.设 $k\leqslant n-1$ 且结论对 $S_0=\{s_1,s_2,\cdots,s_{n-1}\}$ 成立,并设 T_0 是当把 S 换成 S_0 时与 T 相应的集合.于是由归纳假设有

$$|T_0|\geqslant k(n-k-1)+1.$$

令 $x=s_n+s_{n-1}+\cdots+s_{n-k}$,并令

$$y_i=x-s_{n-i}, i=0,1,\cdots,k.$$

于是 $y_i\in T$　且有 $y_0<y_1<y_2<\cdots<y_k$.因为 y_0 是 T_0 中的最大元素,所以

$$y_i\in T, y_i\notin T_0, i=1,2,\cdots,k.$$

故有

$$|T|\geqslant|T_0|+k\geqslant k(n-k-1)+1+k=k(n-k)+1.$$

这就完成了归纳证明.

2·58　设 S 为 n 个正实数组成的集合,对 S 的每个非空子集 A,令 $f(A)$ 为 A 中所有元素的和.求证集合 $\{f(A)\mid A\subseteq S, A\neq\varnothing\}$ 可以分

拆为 n 个子集，每个子集中最大数与最小数之比小于 2.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1988 年）

［证］ 设 $S=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，且

$$u_1<u_2<\cdots<u_n.\quad u_i>0(i=1,\cdots,n).$$

令 $S_1=\{f(A)\mid A=\{u_1\}\}$.

$$S_k=\{f(A)\mid u_1+u_2+\cdots+u_{k-1}<f(A)\leqslant u_1+u_2+\cdots+u_k\}.$$
$$k=2,3,\cdots,n.$$

在 S_1 中最大数与最小数都相等，即都等于 u_1，所以有

$$\frac{\text{最大数}}{\text{最小数}}=\frac{u_1}{u_1}=1<2.$$

当 $k\geqslant 2$ 时，由于

$$u_1+u_2+\cdots+u_k\geqslant f(A),$$

所以每一个 $f(A)$ 的值属于某个 S_k.

若 $u_k\leqslant u_1+u_2+\cdots+u_{k-1}$，则在 S_k 中

$$\frac{\text{最大数}}{\text{最小数}}<\frac{u_1+\cdots+u_{k-1}+u_k}{u_1+\cdots+u_{k-1}}\leqslant 2.$$

若 $u_k>u_1+u_2+\cdots+u_{k-1}$，则由于满足

$$f(A)>u_1+u_2+\cdots+u_{k-1}$$

的集 A 必有某个元素 $u_i(i\geqslant k)$，所以 u_k 是 S_k 中的最小元素，于是

$$\frac{\text{最大数}}{\text{最小数}}=\frac{u_1+u_2+\cdots+u_{k-1}+u_k}{u_k}<2.$$

所以 S_k 中最大数与最小数的比小于 2. 因此 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 是符合要求的分拆.

2·59 设 $c\neq 1$ 是给定的正有理数. 试证自然数集可以表为两个不交的子集 A 与 B 之并，使得同一子集中任何两数之比都不等于 c.

（奥地利-波兰数学奥林匹克，1978 年）

［证］ 我们递归地构造集合 A 和 B. 令 $1\in A$ 且当已将 $1,2,\cdots,n-1$ 分到子集 A 和 B 并满足题中要求时，考虑数 n. 如果存在 $k_1\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，使 $\frac{k_1}{n}=c$，则将 n 分到不含 k_1 的子集；如果存在 $k_2\in\{1,$

$2,\cdots,n-1\}$,使得$\frac{n}{k_2}=c$,则将 n 分到不含k_2的子集;如果这样的 k_1 与 k_2 均不存在,则令 $n \in A$. 由于$\frac{k_1}{n}<1,\frac{n}{k_2}>1$,故 k_1 与 k_2 不能同时存在,所以不会导致矛盾. 易见,这样分得的子集 A 和B 满足题中的要求.

2·60 设正整数 n 具有如下性质:在从$\{1,2,\cdots,1988\}$中任取的 n 个数中,总有 29 个数组成一个等差数列,求证 $n>1788$.

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)

[证] 首先从$\{1,2,\cdots,1988\}$中删除 29 的所有倍数,共 68 个. 将余下的 1920 个数分成 69 个集合:

$A_k=\{1+29k,2+29k,\cdots,28+29k\},k=0,1,2,\cdots,67,$

$A_{68}=\{1973,1974,\cdots,1988\}.$

由于 29 为素数,故当$(d,29)=1$时,公差为 d 的等差数列

$$a,a+d,\cdots,a+28d$$

中的 29 个数模 29 互不同余,其中必有 29 的倍数. 由于这样的数已被删除,故在剩下的数中不存在与 29 互素的公差 d 的 29 项等差数列.

下面再考察以 29 的倍数,即以 29 或 58 为公差的 29 项等差数列的情形. 删去集合 A_{28},A_{57} 中的所有数,共删去 56 个数. 由于公差为 29 的等差数列的 29 项必分别属于 $A_0,A_1,\cdots,A_{68}$ 中相继的 29 个集合,公差为 58 的等差数列的 29 项则分别属于 $A_0,A_1,\cdots,A_{68}$ 中相间的 29 个集合,故两者均必有某项属于 A_{28} 或 A_{57}. 从而在删除 A_{28},A_{57} 的所有数之后,即不存在任何 29 项的等差数列.

易见,两次共删除了 $68+2\times28=124<200$,所以余下的数多于 1788. 这就证明了只有 $n>1788$,才可能具备题中所述的性质.

2·61 考察集合$\{1,2,\cdots,n\}$的所有可能的不包含相邻自然数的子集. 求证这些子集中的数的乘积的平方和等于$(n+1)!-1$. 例如,当 $n=3$ 时,有 $1^2+2^2+3^2+(1\cdot3)^2=23=4!-1$.

(圣彼得堡数学奥林匹克,1990 年)

[证] 当 $n=1,2$ 时,结论显然成立. 设结论于 $n<k$ 时成立. 当 $n=k$ 时,将满足要求的所有子集分成两类:包含数 k 的所有子集为第 1 类,不包含数 k 的为第 2 类. 显然,第 1 类中的子集都不包含 $k-1$,所以,其中的数的乘积的平方和为

$$S_1 = k^2[(k-1)!-1]+k^2, \qquad ①$$

而第 2 类子集中的数的乘积的平方和则为

$$S_2 = k!-1. \qquad ②$$

将 ① 和 ② 相加即得

$$S = S_1 + S_2 = (k+1)!-1.$$

这就完成了归纳证明.

2·62　设$1 \leqslant r \leqslant n$,考虑集合$\{1,2,\cdots,n\}$的所有含$r$个元素的子集及每个这样子集中的最小元素.用$F(n,r)$表示所有这样的最小数的算术平均值.求证

$$F(n,r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

(第 22 届国际数学奥林匹克,1981 年)

[证 1]　集合$\{1,2,\cdots,n\}$的r元子集共有C_n^r个.如果一个r元子集中的最小数为j,则其余$r-1$个元素必都取自$\{j+1,\cdots,n\}$.所以,最小元为j的r元子集共有C_{n-j}^{r-1}个.于是有

$$\sum_{j=1}^{n-r+1} C_{n-j}^{r-1} = C_n^r. \qquad ①$$

利用 ① 式,可以算出所有r元子集的最小数的和为

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-r+1} jC_{n-j}^{r-1} &= C_n^r + \sum_{j=2}^{n-r+1}(j-1)C_{n-j}^{r-1} \\ &= C_n^r + C_{n-1}^r + \sum_{j=3}^{n-r+1}(j-2)C_{n-j}^{r-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-r} C_{n-j}^r = C_{n+1}^{r+1}.\end{aligned}$$

由此可得

$$F(n,r) = \frac{C_{n+1}^{r+1}}{C_n^r} = \frac{n+1}{r+1}.$$

[证 2]　集合$S = \{1,2,\cdots,n\}$的不同的r元子集共有C_n^r个,故这些r元子集的最小元之和为$F(n,r)C_n^r$.另一方面,考察集合$M = \{0,1,\cdots,n\}$.它共有C_{n+1}^{r+1}个不同的$r+1$元子集.再将这样的$r+1$元子集中的最小元去掉,便得到S的r元子集.按照这个原则,我们就建立了一个从M的所有$r+1$元子集到S的所有r元子集的一个映射.显

然,对于 S 的任意一个 r 元子集 A,如果它的最小元为 i,则 A 恰有 i 个原象:

$$\{0\}\cup A,\{1\}\cup A,\cdots,\{i-1\}\cup A.$$

这意味着 i 恰好是 A 的原象的个数.因而 S 的所有 r 元子集的最小元的和恰等于 M 的所有 $r+1$ 元子集的个数,即有

$$F(n,r)C_n^r = C_{n+1}^{r+1}.$$

由此即得

$$F(n,r)=\frac{n+1}{r+1}.$$

2·63　设集合 $M=\{1,2,\cdots,1000\}$.对于 M 的任一非空子集 X,令 α_X 表示 X 中最大数与最小数之和,求所有这样的 α_X 的算术平均值.

(中国高中数学联赛,1991 年)

[解 1]　将集合 M 的非空子集进行配对:对于每个非空集合 $X\subset M$,令

$$X'=\{1001-x\mid x\in X\},$$

则当 $M\supset X_1\neq X$ 时,$X'\neq X'_1$.于是所有非空子集可以分成两类:(1)$\{X\mid X\subset M,X'\neq X\}$;(2)$\{X\mid X\subset M,X'=X\}$.

显然,对于第 2 类的 X,有 $\alpha_X=1001$.而对于第 1 类中的一对 X 和 X',又有 $\alpha_X+\alpha_X{}'=2002$.由此可见,所有 α_X 的算术平均值为 1001.

[解 2]　首先,对于每个 $i\in M$,我们来计算以它为最大数的集合的个数和以它为最小数的集合的个数.易见,这两个数分别为 2^{i-1} 和 2^{1000-i}.因而,所有 α_X 的和为

$$S=\sum_{i=1}^{1000}(2^{i-1}+2^{1000-i})i.$$

将和 S 与自己的反向求和式相加,便得

$$S=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{1000}(2^{i-1}+2^{1000-i})i+\sum_{i=1}^{1000}(2^{1000-i}+2^{i-1})(1001-i)\right\}$$

$$=1001\sum_{i=1}^{1000}(2^{i-1}+2^{1000-i}).$$

由于上式右端的和式恰为所有非空子集的总数,故知所有 α_X 的算术均值为 1001.

2·64　已知 100 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_{100}$,它们的和等于 1,其中任何两

个相邻数的差的绝对值都小于$\frac{1}{50}$.试证可以从中选出 50 个数来,使它们的和数与$\frac{1}{2}$ 的差的绝对值小于$\frac{1}{100}$.

(第 22 届莫斯科数学奥林匹克,1959 年)

[证] 令

$A=\{x_1,x_3,x_5,\cdots,x_{99}\}$,$B=\{x_2,x_4,x_6,\cdots,x_{100}\}$.如果 A 中 50 个数之和与$\frac{1}{2}$ 的差小于$\frac{1}{100}$,则问题就解决了.若不然,不妨设 A 中 50 个数之和不大于$\frac{1}{2}-\frac{1}{100}$,于是 B 中 50 个数之和不小于$\frac{1}{2}+\frac{1}{100}$.

首先将 A 中的x_1 换成 x_2,得到的集合记为 A_1,再将 A_1 中的 x_3 换成 x_4,得到的集合记为 A_2,…,最后将 A_{49} 中的 x_{99} 换成 x_{100},便得到集合 B.集合中 50 个数的和也从不大于$\frac{1}{2}-\frac{1}{100}$ 逐步变到不小于$\frac{1}{2}+\frac{1}{100}$.因为每次都恰好把集合中的 1 个数换成了它的相邻数,故换数前后 50 个数之和的变化都小于$\frac{1}{50}$.从而 $A_1,A_2,\cdots,A_{49}$ 中必有一个集合中的 50 个数之和与$\frac{1}{2}$ 之差的绝对值小于$\frac{1}{100}$.

2·65 当$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$取遍$(1,2,\cdots,n)$的所有排列时,求表达式

$$(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+\cdots+(a_{n-1}-a_n)^2$$

的值的平均值.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

[解] $(1,2,\cdots,n)$的不同排列共有 $n!$ 种.将相应的 $n!$ 个和式 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})^2$ 再求和,记所得的和数为 S.对于任何 $1\leqslant r<s\leqslant n$,$(r-s)^2$ 都在 S 中出现 $2(n-1)!$次,而这样的项共有 C_n^2 个,故有

$$\begin{aligned}S&=2(n-1)!\sum_{r<s}(r-s)^2\\&=2(n-1)!\sum_{s=2}^{n}\sum_{r=1}^{s-1}(r^2-2rs+s^2)\\&=\frac{1}{3}(n-1)!\sum_{s=1}^{n}(2s^3-3s^2+s).\end{aligned}$$

因为

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \sum_{k=1}^{n}k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$

故得

$$\frac{S}{n!} = \frac{1}{3n}\left(\frac{1}{2}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)\right)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)n(n-1) = C_{n+1}^3,$$

即所求的平均值为 C_{n+1}^3.

2·66　设$[a_1, a_2, \cdots, a_n]$是1,2,…,n的一个排列,若$a_i > a_j$对于所有的$j > i$都成立,则称a_i是此排列的一个"大"数.

试计算全体$n!$个排列中,所有"大"数的算术平均值.

(第19届美国普特南数学竞赛,1958年)

[解]　令σ是一个排列,记$N_i(\sigma) = 1$表示σ的第i个数是"大"数,$N_i(\sigma) = 0$表示σ的第i个数不是"大"数.

可以证明从1到n的全体$n!$个排列中,$N_i(\sigma)$的平均值是$\frac{1}{n-i+1}$.

这是因为a_i前面的$i-1$个数共有P_n^{i-1}种排法,再把余下的$n-i+1$个数中送一个最大的排在第i个位置,从第$i+1$个位置之后的排法有p_{n-i}^{n-i}种,由此可得

$$\sum N_i(\sigma) = P_n^{n-1} \cdot P_{n-i}^{n-i} = n(n-1)\cdots(n-i+2)(n-i)!$$

从而$N_i(\sigma)$的平均值为

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-i+2)(n-i)!}{n!} = \frac{1}{n-i+1}.$$

取$i = 1,2,\cdots,n$,则得出本题所求"大"数的平均值为

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{2} + 1.$$

2·67　当n为何值时,存在$\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$,使得对于$k = 1,2,\cdots,n$,$|x_k - k|$互不相同?

(中国代表队模拟考试题,1991年)

[解]　显然,$|x_k - k|$只能取n个不同的值:0,1,…,$n-1$.若对$k = 1,2,\cdots,n$,$|x_k - k|$互不相同,则必是0,1,…,$n-1$各1个.又因

$|x_k-k|\equiv x_k-k(\bmod\ 2)$,故对 k 求和便知

$$\frac{1}{2}n(n-1)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-k|\equiv\sum_{k=1}^{n}(x_k-k)=0(\bmod\ 2).$$

由此可得 $4|n$ 或 $4|n-1$.

(1) 当 $n=4m$ 时,一个满足要求的排列如下:

$4m-1,4m-2,\cdots,3m+1,3m-1,3m-2,\cdots,2m,4m,$

$2m-1,2m-2,\cdots,m+1,3m,m,m-1,\cdots,1.$

(2) 当 $n=4m+1$ 时,一个满足要求的排列如下:

$4m,4m-1,\cdots,3m+2,3m,3m-1,\cdots,2m+1,4m+1,$

$2m,2m-1,\cdots,m+1,3m+1,m,m-1,\cdots,1.$

综上可知,当且仅当 $4|n$ 或 $4|n-1$ 时,满足要求的排列存在.

2·68　已知 $x_1,x_2,\cdots,x_{1990}$ 是 $1,2,\cdots,1990$ 的任一排列,求表达式

$$||\cdots||x_1-x_2|-x_3|-\cdots|-x_{1990}| \quad ①$$

的最大值.

(第 24 届全苏数学奥林匹克,1990 年)

[解]　注意到对于任何非负整数 x,y,z,总有 $|x-y|\leqslant\max\{x,y\}$,$\max\{\max\{x,y\},z\}=\max\{x,y,z\}$,便知对所有 $n=1,2,\cdots,1990$,均有

$$||\cdots||x_1-x_2|-x_3|-\cdots|-x_n|\leqslant\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}.$$

由此可知 ① 式的值不超过 1990. 但是,因为 ① 式的值的奇偶性与和数

$$x_1+x_2+\cdots+x_{1990}=1+2+\cdots+1990=995\times1991$$

的奇偶性相同,故它不能等于 1990.

另一方面,对于任何 4 个相继自然数 $n,n+1,n+2,n+3$,我们有

$$|||n-(n+2)|-(n+3)|-(n+1)|=0,$$

故有

$$|\cdots|||2-4|-5|-3|\cdots|-(4k+2)|-(4k+4)|-(4k+5)|-(4k+3)|\cdots|-1986|-1988|-1989|-1987|-1990|-1|=1989.$$

综上可知,表达式 ① 的最大值为 1989.

2·69　把正整数 $1,2,\cdots,9$ 分成 3 组,每组都有 3 个数. 把每组中的

3个数连乘求积并令 A 表示3个乘积的最大值,求证 $A \geqslant 72$.

(基辅数学奥林匹克,1979年)

[证] 若不然,则存在一种分组法

$$\{1,2,\cdots,9\} = \{a_1,a_2,a_3\} \cup \{b_1,b_2,b_3\} \cup \{c_1,c_2,c_3\},$$

使得 $a_1a_2a_3 \leqslant 71, b_1b_2b_3 \leqslant 71, c_1c_2c_3 \leqslant 71$. 于是有

$$a_1a_2a_3b_1b_2b_3c_1c_2c_3 \leqslant 71^3. \quad ①$$

另一方面

$$\begin{aligned} a_1a_2a_3b_1b_2b_3c_1c_2c_3 &= 9! = (3 \times 4 \times 6)(2 \times 5 \times 7)(8 \times 9) \\ &= 72 \times 70 \times 72 = (71^2 - 1)(71 + 1) \\ &= 71^3 + 71^2 - 71 - 1 > 71^3. \quad ② \end{aligned}$$

②与①矛盾.

2·70 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 是任意10个两两不同的自然数,且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 1995$. 试求

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_9a_{10} + a_{10}a_1$$

的最小值.

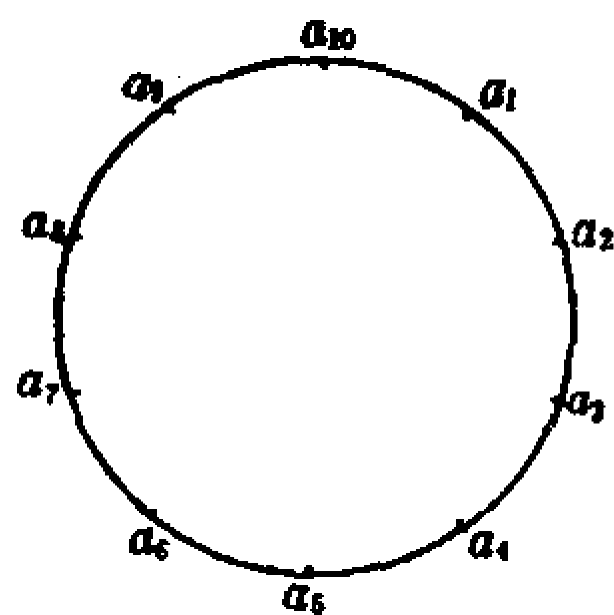
(第10届中国中学生数学冬令营,1995年)

[解] 将给定的10个自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 按顺时针方向依次写在一个圆周上,于是所论的表达式即为每两个相邻整数之积的和,记之为 $S(m)$,其中 $m = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$.

显然,10个两两不同的自然数之和的最小值为55. 因此,我们先来考察 $m = 55$ 的情形. 这时,$\{a_1, a_2, \cdots, a_{10}\} = \{1, 2, \cdots, 10\}$. 让我们来证明,当

$$a_1 = 10, a_2 = 1, a_3 = 9, a_4 = 3, a_5 = 7,$$
$$a_6 = 5, a_7 = 6, a_8 = 4, a_9 = 8, a_{10} = 2 \text{ 时},$$

$S(55)$ 的值最小.



对于这10个自然数的在圆周上的任一排列,不妨设 $a_1 = 10$. 若 $a_2 \neq 1$. 设 $a_j = 1, 3 \leqslant j \leqslant 10$. 这时,我们将弧段 a_2a_j 上的数整个地按反序排列,即将 $\{a_2, a_3, \cdots, a_{j-1}, a_j = 1\}$ 变成 $\{1, a_{j-1}, \cdots, a_3, a_2\}$. 这样一来,和值 S 仅在两处发生变化且变化值为

$$10a_2 + 1 \cdot a_{j+1} - (1 \cdot 10 + a_2a_{j+1})$$

$= (a_2 - 1)(10 - a_{j+1}) \geqslant 0.$

这表明在这一操作过程中,和值 S 是不增的,但操作之后有 $a_1 = 10, a_2 = 1$.

若 $a_{10} \neq 2$,设 $a_i = 2, 3 \leqslant i \leqslant 9$.像上面一样地将弧段 $a_i a_{10}$ 上的数整个地按反序排列,即将 $\{a_i, a_{i+1}, \cdots, a_{10}\}$ 变成 $\{a_{10}, a_9, \cdots, a_{i+1}, a_i\}$.这时和 S 的变化值为

$$a_{i-1}a_i + a_{10}a_1 - (a_i a_1 + a_{i-1}a_{10})$$
$$= (10 - a_{i-1})(a_{10} - 2) > 0,$$

即操作之后和值 S 变小了.

若 $a_3 \neq 9$,则又可类似地进行操作而使 $a_3 = 9$ 且和值 S 变小.这样进行下去即可得所欲证.

这样,和值 $S(55)$ 的最小值为

$$S_0(55) = 10 \times (1 + 2) + 9 \times (1 + 3) + 8 \times (2 + 4) + 7 \times (3 + 5) + 6 \times (4 + 5) = 224. \quad ①$$

下面来考察 $S(k)$ 与 $S(k - 1)(k > 55)$ 的关系.将和为 k 的 10 个自然数按大小排列为

$$b_1 > b_2 > b_3 > \cdots > b_{10}.$$

令 $b_{11} = 0$ 并令

$$d_i = b_i - b_{i+1}, i = 1, 2, \cdots, 10,$$

则 $d_i \geqslant 1$.因 $b_1 + b_2 + \cdots + b_{10} = k > 55$,所以 $\{d_1, d_2, \cdots, d_{10}\}$ 中至少有 1 个大于 1.将 b_i 所代表的 a_j 减去 1,则 10 个自然数仍然两两不同且和为 $k - 1$,这时显然有

$$S(k) \geqslant S(k - 1) + 3.$$

因上式对任一排列都成立,故对最小值亦然,即有

$$S_0(k) \geqslant S_0(k - 1) + 3. \quad ②$$

从而由 ① 和 ② 有

$$S_0(1995) \geqslant S_0(55) + 3 \times 1940 = 6044. \quad ③$$

另一方面,当

$a_1 = 1950, a_2 = 1, a_3 = 9, a_4 = 3, a_5 = 7,$

$a_6 = 5, a_7 = 6, a_8 = 4, a_9 = 8, a_{10} = 2$

时有

$$S(1995)=6044. \qquad ④$$

由③和④知所求的最小值为 6044.

2·71　将自然数 $1,2,3,\cdots,2n-1,2n$ 任意分成两组,每组 n 个数.将第一组按递增顺序写出为 $a_1<a_2<\cdots<a_n$;第二组按递减顺序写出为 $b_1>b_2>\cdots>b_n$.求证 $|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|=n^2$.

(第 19 届全苏数学奥林匹克,1985 年)

[证]　注意,第一组中不超过 n 的 a_i 的个数恰等于第二组中大于 n 的 b_j 的个数,故知每组 (a_i,b_i) 中恰有一数不大于 n,另一数大于 n.因而有

$$\begin{aligned}&|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|\\=&(n+1)+(n+2)+\cdots+2n-(1+2+\cdots+n)=n^2.\end{aligned}$$

2·72　能否把 $1,2,\cdots,1980$ 这 1980 个数分成互不相交的 4 组,使 4 组数的 4 个和数组成以 10 为公差的等差数列?

(基辅数学奥林匹克,1980 年)

[解]　如果可能,设第 1 组的和数为 s,于是后 3 组的和分别为 $s+10,s+20,s+30$.从而这 1980 个数之和为

$$S=s+(s+10)+(s+20)+(s+30)=4s+60,$$

即总和为 4 的倍数.但是,对这 1980 个数按等差数列求和又有

$$S=\frac{1}{2}\times1981\times1980=2\times495\times1981,$$

它不是 4 的倍数,矛盾.这说明题中的要求是无法实现的.

2·73　将集合 $\{1,2,\cdots,100\}$ 分成 7 个子集,求证其中至少有 1 个子集,其中要么含有 4 个数 a,b,c,d,使得 $a+b=c+d$,要么含有 3 个数 e,f,g,使得 $e+f=2g$.

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1981 年)

[证]　由抽屉原理知,必有一个子集中至少含有 15 个数.设子集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{15}\}\subset\{1,2,\cdots,100\}$ 且 $a_1<a_2<\cdots<a_{15}$.于是 A 中的 15 个数共可组成 $C_{15}^2=105$ 个不同的差 $a_j-a_k,1\leqslant k<j\leqslant15$.由于每个差的值都是不超过 99 的自然数,故由抽屉原理知其中必有两个差 $a_j-a_k,a_i-a_h(j<i)$,其值相等.若 $j=h$,则 $a_i+a_k=2a_j$;若

$j \neq h$,则 a_k, a_h, a_j, a_k 互不相同且 $a_j + a_h = a_i + a_k$.

2·74 将数{1,2,3,4,5}任意分成两组,则总可在其中一组中找到两个数,使它们的差也是同组中的数.

(匈牙利数学奥林匹克,1916年)

[证1] 设有一种将5个数分成 A, B 两组的分法使结论不成立.不妨设 $2 \in A$.

因为 $4-2=2$, $2-1=1$,故知 $1,4 \in B$.又因 $4-3=1$,所以有 $3 \in A$.于是,若 $5 \in A$,则 $5-3=2$,矛盾;若 $5 \in B$,则 $5-4=1$,矛盾.

[证2] 对于任意一种分法,由抽屉原理知个数较多的一组中至少有3个数.

(1) 设 A 组有4个数.若 A 中不含1,则4与2的差仍在 A 中;若 A 中不含2,则4与3的差仍在 A 中;若 A 中既含1又含2,则2与1的差仍在 A 中.

(2) 设 A 组有3个数.若 A 中任何两个数都不满足题中要求,则 A 只能是{1,3,5}或{3,4,5}.这时,另一组中的两个数{2,4}或{1,2}均满足题中要求.

2·75 能否将81个重量分别为 $1^2, 2^2, \cdots, 81^2$ 的砝码分成3组,使得每组27个砝码且对每组砝码的重量求和所得的3个和数相等?

(第13届莫斯科数学奥林匹克,1950年)

[解] 首先注意,对任意 $n \in N$,都有

$$\begin{aligned} n^2+(n+5)^2+(n+7)^2 &= 3n^2+24n+74, \\ (n+1)^2+(n+3)^2+(n+8)^2 &= 3n^2+24n+74, \qquad ① \\ (n+2)^2+(n+4)^2+(n+6)^2 &= 3n^2+24n+56. \end{aligned}$$

若记 $f(n)=3n^2+24n$,则当把前27个砝码分成9组时:

$$\begin{aligned} &\{1^2,6^2,8^2\},\{2^2,4^2,9^2\},\{3^2,5^2,7^2\}, \\ &\{11^2,13^2,18^2\},\{12^2,14^2,16^2\},\{10^2,15^2,17^2\}, \qquad ② \\ &\{21^2,23^2,25^2\},\{19^2,24^2,26^2\},\{20^2,22^2,27^2\}, \end{aligned}$$

其和分别为

$$\begin{aligned} &f(1)+74, f(1)+74, f(1)+56, \\ &f(10)+74, f(10)+56, f(10)+74, \qquad ③ \\ &f(19)+56, f(19)+74, f(19)+74. \end{aligned}$$

第二章 数集

由③可知当把表②中每列3组的9个砝码合为1组时,所得3组砝码重量之和相等.

再把28^2——54^2和55^2——81^2这各27个砝码类似地都分成重量和相等的3组.最后再于每段的3组中取1组合成1大组,共得3大组便满足题中要求.这就证明了题中所要求的分法是可以实现的.

2·76　给定n个整数:$a_1=1,a_2,\cdots,a_n$,其中$a_i\leqslant a_{i+1}\leqslant 2a_i$,$i=1,2,\cdots,n-1$,并且所有$n$个数之和为偶数.问能否将这些整数分成两组,使得两组中的整数之和相等?

(第20届莫斯科数学奥林匹克,1957年)

[解]　首先,将a_n和a_{n-1}分放于两组之中.然后依次放入a_{n-2},$a_{n-3},\cdots,a_1$,且每次放入和数较小的一组之中,当两组和数相等时,可任选一组放入,直到放完a_1为止.这样,我们就把n个给定数分成了两组.

由条件$a_i\leqslant a_{i+1}\leqslant 2a_i$可知,$a_i\leqslant 2^{i-1}$,$i=1,2,\cdots,n$.因此,当将$a_i$放入某组之后,两组整数之差不超过$2^{i-1}$.从而当全部放入两组之后,两组数之差不超过1.又因所有整数之和为偶数,故两组整数之和必相等.

2·77　设$k\in N$,M_k是从$2k^2+k$到$2k^2+3k$的$2k+1$个整数所成的集合.能否将M_k分拆成两个子集,使得两个子集中各数的平方和相等?

(第29届国际数学奥林匹克候选题,1988年)

[解]　答案是肯定的.事实上,把M_k中的前$k+1$个数的集合记为A,后k个数的集合记为B,便满足题中的要求.这时有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k}(2k^2+2k+i)^2-\sum_{i=0}^{k}(2k^2+k+i)^2\\
&=\sum_{i=1}^{k}[(2k^2+2k+i)^2-(2k^2+k+i)^2]-(2k^2+k)^2\\
&=k\sum_{i=1}^{k}(4k^2+3k+2i)-(2k^2+k)^2\\
&=k[(4k^2+3k)k+k(k+1)]-(4k^4+4k^3+k^2)\\
&=0.
\end{aligned}$$

2·78　试证对于每个大于1的整数r,都能找到一个最小的整数

$h(r)>1$,使在集合$\{1,2,\cdots,h(r)\}$分成r组的任何分划中,都存在整数$a\geqslant 0,1\leqslant x\leqslant y$,而使数$a+x,a+y,a+x+y$含于分划的同一组中.

(第26届国际数学奥林匹克候选题,1985年)

[证] 考察将$\{1,2,\cdots,2r\}$分成r组的任一分划.在$r,r+1,\cdots,2r$这$r+1$个数中,必有两个数u和v属于同一组,不妨设$u<v$.令

$$a=2u-v\geqslant 0,x=y=v-u\geqslant 1,$$

则$a+x=a+y=u,a+x+y=v$在同一组中.由此可见$h(r)\leqslant 2r$.

另一方面,考察$\{1,2,\cdots,2r-1\}$的如下分划:

$\{1,1+r\},\{2,2+r\},\cdots,\{r-1,2r-1\},\{r\}$.

显然,$a+x,a+y,a+x+y$不能同在$\{r\}$中.设它们都在$\{k,k+r\}$中,于是只能是$a+x=a+y=k,a+x+y=a+2x=k+r$.从而有$x=y=r$.这样一来,$a=k-r<0$,矛盾.而且由证明可知,当$n<2r$时,$\{1,2,\cdots,n\}$都不能满足要求.

综上可知,$h(r)=2r$.

2·79 能否将自然数集N划分为无穷多个无限子集,使得这些子集中的每一个都可以通过对另一个的每个元素加上相同的整数而得到?

(第44届莫斯科数学奥林匹克,1981年)

[解] 可以做到.取自然数的两个子集A和B:在A中含有所有这样的自然数,在它们的十进表达式中,凡自右数起的偶数位上皆是0;而在B中则包含了所有奇数位上皆为0的自然数.易见,每一个自然数n都可以惟一地表示成$n=a_n+b_n$,其中$a_n\in A,b_n\in B$.

设$B=\{b_1,b_2\cdots,b_k,\cdots\}$,令$A_0=A$及

$$A_k=\{a+b_k\mid a\in A\},k=1,2,\cdots,$$

则$A_0,A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$这无穷多个无限子集就满足题中要求.

2·80 是否存在两个无穷的非负整数的集合A和B,使得任一非负整数都能以惟一的方式表示成两项之和,其中一项属于A而另一项属于B?

(匈牙利数学奥林匹克,1966年)

[解] 可以实现.我们将非负整数的数位自右至左地依次编号为

1,2,3,4,….将凡偶数位数字均为0的所有非负整数作成的集合记为A,凡奇数位数字均为0的所有非负整数作成的集合记为B.易见,$A\cap B$中的惟一元素是0.

对于任何一个非负整数n,把它的所有偶位数字都改为0而保持奇位数字不动,我们得到一个非负整数$n_1\in A$;把n的所有奇位数字都改为0而保持偶位数字不动,又得到一个非负整数$n_2\in B$.显然有$n=n_1+n_2$.

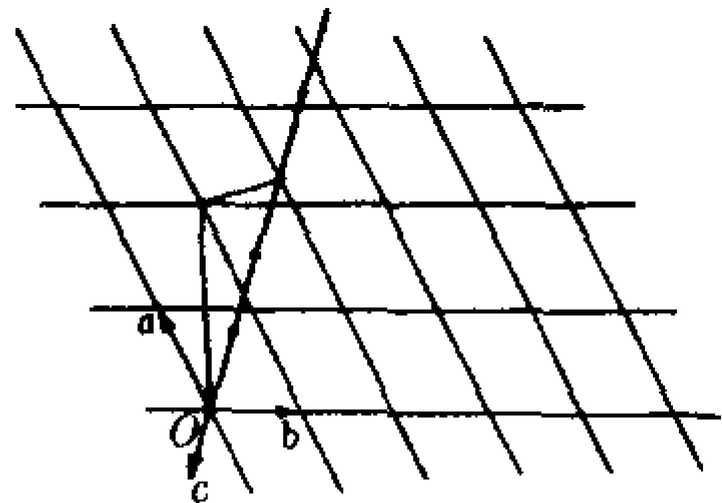
任取另一对非负整数$n'_1\in A,n'_2\in B,n'_1\neq n_1$.于是$n'_1$与$n_1$的所有偶位数字均为0,且奇位数字中至少有一位不同.由于一个A中的数与一个B中的数相加时所得的和的奇位数字与A中的数相同,偶位数字与B中的数相同,所以,$n'_1+n'_2\neq n_1+n_2=n$.这就证明了任一非负整数n分解成集合A和B中各一个数之和的方式的惟一性.

2·81　是否存在非零复数a,b,c及自然数h,使对任何整数k,l,m,只要$|k|+|l|+|m|\geqslant 1996$,就有$|ka+lb+mc|>\frac{1}{h}$?

(中国国家集训队选拔考试,1996年)

[解]　不存在.若不然,设有非零复数a,b,c及自然数h满足题中的要求.

考察复平面.不妨设复数a和b所对应的向量之间的夹角既不等于0也不等于π.取以向量$\vec{a}$和$\vec{b}$所在的直线为坐标轴且分别以$|a|$,$|b|$为单位长的斜坐标系.过坐标轴上的每个整点作平行于另一条坐标轴的直线.两组平行线互相相交将复平面划分成网格平面.这些网格是彼此全等的平行四边形.再考察复数c所对应的向量$\vec{c}$所在的直线.显然,对每个整数m,mc都对应这条直线上的一点,称之为c_整点.同时,每个c_整点都落在某个小平行四边形中(包括边界)(如图所示).记点mc所在的小平行四边形的左下顶点所对应的复数为$ka+lb$,于是$mc-ka-lb$所对应的复向量大小和方向如图中以$m\vec{c}$和$k\vec{a}+l\vec{b}$为两边的三角形的第3边所示但要将起点移至原点.这就是说,$mc-ka-lb$对应于以原点O为左下顶点的小平行四边形上的一点.显然,每个这样的差都对应于这个小平行四边形上的一点.显然,这



样的点有无穷多个.以下我们称这种点为标定点.

用平行于坐标轴的网格线将以原点 O 为左下顶点的单位平行四边形均分成足够小的平行四边形,使它们的长对角线小于$\frac{1}{h}$.因为这组小平行四边形共有有限多个,故由抽屉原理知,其中必有一个小平行四边形 M 中含有无穷多个标定点.

若有 M 中的两个标定点重合,设这两点代表的复数为 $m_1c-k_1a-l_1b$ 和 $m_2c-k_2a-l_2b$,于是 $(m_1-m_2)c+(k_2-k_1)a+(l_2-l_1)b=0$ 且 (m_1-m_2),(k_2-k_1) 和 (l_2-l_1) 不全为0.于是有

$$1996(m_1-m_2)c+1996(k_2-k_1)a+1996(l_2-l_1)b=0,$$

此与反证假设矛盾.这表明 M 中的标定点互不相同.

固定一个标定点 $mc+ka+lb$,并将其他标定点 $m'c+k'a+l'b$ 与它作差,则可得到无穷多个这样的差,且每个差都满足

$$|(m-m')c+(k-k')a+(l-l')b|<\frac{1}{h}. \qquad (*)$$

因为这无穷多组 $\{k-k',l-l',m-m'\}$ 互不相同而满足 $|k-k'|+|l-l'|+|m-m'|<1996$ 的只有有限多组,故其中必有一组使得

$$|k-k'|+|l-l'|+|m-m'|\geqslant 1996$$

和$(*)$式同时成立,此与反证假设矛盾.这就完成了全部证明.

2·82 试求所有正整数 k,使得集合

$$M=\{1990,1991,\cdots,1990+k\}$$

可以分解为两个不交的子集 A 与 B 且使两集中元素之和相等.

(第31届国际数学奥林匹克预选题,1990年)

[解] (1)设正整数 k 能使集 M 分解成满足题中要求的子集 A 与 B.于是 M 中所有元素之和为偶数,即

$$\sum_{n=0}^{k}(1990+n)=1990(k+1)+\frac{1}{2}k(k+1)$$

为偶数.因此,$k(k+1)\equiv 0(\bmod\ 4)$.由此可知 $k\equiv 0(\bmod\ 4)$ 或 $k\equiv 3(\bmod\ 4)$.换句话说,$k=4m+1$ 与 $k=4m+2(m=0,1,2,\cdots)$ 都不满足本题要求.

(2)设 $k\equiv 3(\bmod\ 4)$,则 $4\mid(k+1)$.令

$$A=\left\{1990+j\ \middle|\ j=4m,4m+3,m=0,1,\cdots,\left[\frac{k}{4}\right]\right\},$$

$$B = \{1990 + j \mid j = 4m+1, 4m+2, m = 0,1,\cdots,\left[\frac{k}{4}\right]\},$$

易见,这样的 A 和 B 满足要求.故知对所有非负整数 m, $k = 4m+3$ 都满足题中要求.

(3) 设 $k \equiv 0 \pmod 4$,于是 $k = 4m, m \in N$.因为 $|M|$ 为奇数,故有 $|A| \neq |B|$.不妨设 $|A| > |B|$,于是 $|A| \geqslant 2m+1$, $|B| \leqslant 2m$.因而,A 中元素之和不小于 $\sum\limits_{n=0}^{2m}(1990+n)$,$B$ 中元素之和不大于 $\sum\limits_{n=2m+1}^{4m}(1990+n)$,故得

$$\sum_{n=0}^{2m}(1990+n) \leqslant \sum_{n=2m+1}^{4m}(1990+n) = (2m)^2 + \sum_{n=1}^{2m}(1990+n).$$

化简得到 $2m^2 \geqslant 995$,解得 $m \geqslant 23$, $k \geqslant 92$.

往证当 $k \equiv 0 \pmod 4$ 且 $k \geqslant 92$ 时,M 存在满足要求的分解,当 $k = 92$ 时,令

$$A_1 = \{1990, 1991, \cdots, 1990+46\},$$
$$B_1 = \{1990+47, 1990+48, \cdots, 1990+92\}.$$

两集中元素之和分别为 $S_{A_1} = 1990 \times 47 + 1081$, $S_{B_1} = 1990 \times 46 + 1081 + 2116$, $S_{B_1} - S_{A_1} = 126$.再令

$$A = A_1 \cup \{2053\} - \{1990\}, B = B_1 \cup \{1990\} - \{2053\},$$

则集合 A 和 B 即为满足题中要求的分解.

当 $k > 92$ 时,我们将前93个数分组如上,而将后面的 $k - 92 = 4m$ 个数中的每相邻4数按(2)的办法处理即可得到所需要的分解.

综上可知,所求的所有 k 的集合为

$$\{k \mid k = 4m+3, m = 0,1,\cdots; k = 4m, m = 23, 24, \cdots\}.$$

2·83 求所有自然数 k,使得集合

$$S = \{1994, 1997, 2000, \cdots, 1994+3k\}$$

可以分成两个不交的集合 A 与 B 的并集,且使 A 中所有数之和是 B 中所有数之和的9倍.

(中国国家集训队测验题,1994年)

[解] 显然,$|S| = k+1$,且 S 中的 $k+1$ 个自然数之和为

$$M = \sum_{j=0}^{k}(1994+3j) = 1994(k+1) + \frac{3}{2}k(k+1)$$

$$= 1990(k+1) + \frac{1}{2}(k+1)(3k+8).$$

设集合 A 和 B 满足题中的要求，并记 B 中所有数之和为 x，于是 A 中所有数之和为 $9x$. 因而有

$$10x = 1990(k+1) + \frac{1}{2}(k+1)(3k+8),$$

$$x = 199(k+1) + \frac{1}{20}(k+1)(3k+8). \qquad ①$$

因 x 为整数，故必有 $20 \mid (k+1)(3k+8)$. 这又等价于

$$4 \mid (k+1)(3k+8), 5 \mid (k+1)(3k+8). \qquad ②$$

因为 $(k+1)(3k+8) = 5(k+1) + 3(k+1)^2$，所以 ② 中第 2 个关系式又等价于 $5 \mid (k+1)$，即 $k = 5m-1, m \in N$. 将此代入 ② 中第 1 个关系式，又有 $4 \mid m(15m+5)$. 这又可化简为 $4 \mid m(3m+1)$. 可见，应有 $m = 4t$ 或 $m = 4t+1, t \in N$.

(1) 当 $m = 4t$ 时，$k = 20t-1$，$|S| = 20t$，即 S 中共有 $20t$ 个自然数. 将 S 中的数从小到大排列，从 1994 起每 20 个数分成一组，则恰可分成 t 组. 每组中的最小数与最大数划归集合 B，而其余的 18 个数划归集合 A. 易见，这样得到的集合 A 与 B 满足题中要求.

(2) 当 $m = 4t+1$ 时，$k = 20t+4, t \in N$. 于是由 ① 有

$$\begin{aligned} x &= 199(20t+5) + \frac{1}{20}(20t+5)(60t+20) \\ &= 5(4t+1)(3t+200) \\ &\equiv 2(t+1) \cdot 2 \equiv t+1 \pmod 3. \end{aligned} \qquad ③$$

又因 S 中每个数除以 3 时都余 2，故由 ③ 又有

$$2|B| \equiv x \equiv t+1 \pmod 3.$$

由此可得

$$|B| = 4|B| = 2t+2 \pmod 3. \qquad ④$$

当 $t=1$ 时，$x = 5075$，$|B| \equiv 1 \pmod 3$. 但是，S 中任何一个数都小于 x 而任何 4 个数之和都大于 x，故 $k = 24$ 不满足要求.

当 $t=2$ 时，$x = 9270$，$|B| \equiv 0 \pmod 3$. 但是，S 中任何 3 个数之和都小于 9270 而任何 6 个数之和都大于 9270，故 $k = 44$ 不满足要求.

依次进行下去，直到 $t = 7$ 时，$x = 1990 \times 13 + 6175 = 1990 \times 16 + 205$，$|B| \equiv 1 \pmod 3$. 易见，$S$ 中最大的 13 个数之和

$$1990 \times 13 + (436 + 433 + \cdots + 400) = 1990 \times 13 + 5434$$

都比 x 小而最小的 16 个数之和

$$1990\times16+(4+7+\cdots+49)=1990\times16+424$$

都比 x 大.可见 $k=144$ 也不满足题中要求.

当 $t=8$ 时,$x=1990\times18+1140$,$|B|\equiv0(\bmod\ 3)$.

令

$$B=\{1994,1997,\cdots,2039,2210,2486\},$$

则 $|B|=18$ 且这 18 个数之和为

$$1990\times18+(4+7+\cdots+49+220+496)$$
$$=1990\times18+1140=x.$$

再令 $A=S-B$,便知 A 和 B 满足题中要求,即 $t=8$ 时有满足要求的分解.

由(1)知,如果某个自然数 k 满足题中要求,则对于 $k+20$,只要将后 20 个数按(1)中方法分别划归 A 和 B,即知 $k+20$ 也满足题中要求.由此可知,自然数 $k=20t+4$($t\in N$ 且 $t\geqslant8$)都可满足题中的要求.

综上可知,所求的所有自然数共有两族:$k=20t-1$,$t=1,2,\cdots$ 和 $k=20t+4$,$t=8,9,\cdots$.

2·84　将自然数集 N 分拆为两个不交的子集 A 和 B,满足下列条件:

(1) $1\in A$;

(2) A 中任何两个不同元素之和都不能写成 2^h+2 的形式,其中 $h=0,1,2\cdots$;

(3) B 中元素也具有(2)中所述的性质.

试证这种分拆法是惟一确定的并求 1987,1988 和 1989 所属的子集.

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)

[证]　因为 $1+2=2^0+2$,所以 $2\in B$.下面用归纳法来证每个自然数 $n\geqslant3$ 都有惟一确定的归属.

设小于 n 的所有自然数都已有了惟一的归属且满足题中的条件.对于 n,取自然数 k,使得 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$.

若 $n=2^k$,$k\geqslant2$,则由于 $2\in B$,故 n 只能属于 A.这时,对任意 $m\in A$,$m<n$,都有

$$2^k<n+m<2^{k+1},n+m\neq2^k+2,$$

即当 $n \in A$ 后条件(2) 仍然成立.

若 $n = 2^k + 1, k \geqslant 1$,则因 $1 \in A$ 且 $1 + n = 2^k + 2$,所以只能有 $n \in B$.像上面一样地可证条件(3) 仍然成立.

若 $n > 2^k + 1, k > 0$,则 $2^{k+1} + 2 - n < n$,必须且只须令 n 与 $2^{k+1} + 2 - n$ 在不同子集中.这时,设 $m < n$ 与 m 与 n 属于同一子集,于是有

$$2^k + 2 < n + m < 2^{k+2}, n + m \neq 2^{k+1} + 2,$$

即条件(2) 和(3) 仍然被满足.这就证明了题中要求的分拆是惟一确定的.

因为 $1987 = 2^{11} + 2 - 63, 63 = 2^6 + 2 - 3, 3 = 2 + 1 \in B$,所以 $63 \in A, 1987 \in B$.同理,因为 $4 \in A, 5 \in B$,所以 $1988 \in A, 1989 \in B$.

2·85　能否将整数集合分为3个子集合,使对任何整数 n,整数 n, $n - 50$ 和 $n + 1987$ 都分属 3 个不同的子集合?

(第 50 届莫斯科数学奥林匹克,1987 年)

[解]　不能实现.若不然,设存在满足要求的分法.我们用记号 $m \sim k$ 表示整数 m 和 k 属于同一个子集合,用 $m \nsim k$ 表示它们不属于同一个子集.下面我们来证明一个引理

引理　对任意整数 n,都有(1) $n \sim n + 1937$;(2) $n \sim n - 150$.

利用引理的结果,便有

$$0 \sim 1937 \sim 2 \cdot 1937 \sim \cdots \sim 50 \cdot 1937$$
$$= 646 \cdot 150 - 50 \sim 645 \cdot 150 - 50 \sim \cdots \sim -50,$$

即 $0 \sim -50$,此与已知矛盾.

引理的证明　首先,我们引入一个术语:如果三元组中的3个数分属于 3 个子集,则称这个三元组为"基本的".按已知,对任何整数 n,下列的三元组都是基本的:

$$(n - 50, n, n + 1987), (n - 100, n - 50, n + 1937),$$
$$(n + 1937, n + 1987, n + 2 \cdot 1987).$$

由上述第 2 和 3 个三元组可知, $n + 1937 \nsim n - 50, n + 1937 \nsim n + 1987$.再由第 1 个三元组便知 $n \sim n + 1937$,这就证明了(1).

由(1) 知可将上面第2个三元组中的 $n + 1937$ 换成 n,得到基本三元组$(n - 100, n - 50, n)$.由于 n 是任意的,故知$(n - 150, n - 100, n$

$-50)$ 也是基本三元组,从而得到 $n\sim n-150$.

2·86 设 p 是素数,问 k 是什么数时,集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 能划分成 p 个子集,使得每个子集中的各数之和都相等?

(第26届国际数学奥林匹克候选题,1985年)

[解] 我们把对于素数 p 满足要求的整数 k 的集合记为 V_p.显然,对于满足要求的任一划分,所得的 p 个子集中至多有1个集合中仅含1个元素,因此有 $k\geqslant 2p-1$.而且 p 必须整除所有数之和 $\frac{1}{2}k(k+1)$.下面证明,上述两个条件也是 $k\in V_p$ 的充分条件.

首先注意,对于 $X_k=\{1,2,\cdots,k\}$ 的一个满足要求的划分,都可生成一个 X_{k+2p} 的满足要求的划分,这只须把后面的 $2p$ 个数分成 p 组:$\{k+i,k+2p+1-i\},i=1,2,\cdots,p$,并分别加到前 k 个数所分成的 p 组中去就行了.由此可见,若 $k\in V_p$,则 $k+2p\in V_p$.

当 $p=2$ 时,$4\mid k$ 或 $4\mid(k+1)$.只须证明 $3,4\in V_2$.这可从 $\{1,2,3\}=\{1,2\}\cup\{3\}$ 和 $\{1,2,3,4\}=\{1,4\}\cup\{2,3\}$ 直接看出.

设 p 是奇素数,则条件为 $k=mp-1$ 或 $k=mp,m\geqslant 2$.这时只须验证 $2p-1,2p,3p-1,3p\in V_p$.

(1) $k=2p-1$,可将 X_{2p-1} 分划如下:

$\{1,2p-2\},\{2,2p-3\},\cdots,\{p-1,p\},\{2p-1\}$.

(2) $k=2p$,可将 X_{2p} 划分如下:

$\{1,2p\},\{2,2p-1\},\cdots,\{p,p+1\}$.

(3) $k=3p$,我们取 $a_i=3i,i=1,2,\cdots,p$;并将余下的 $2p$ 个数从大到小依次记为 $b_1,b_2,\cdots,b_p,c_1,c_2,\cdots,c_p$.容易验证

$$(b_i+c_i)-(b_{i+1}+c_{i+1})=3,i=1,2,\cdots,p-1.$$

从而 $a_i+b_i+c_i$ 是一个常数,即 $\{a_i,b_i,c_i\},i=1,2,\cdots,p$ 就是满足要求的划分.

(4) $k=3p-1$,选取 a_i,b_i,c_i 同(3),则

$\{a_i-1,b_i-1,c_i-1\},i=1,2,\cdots,p-1,$

$\{a_p-1,b_p-1\}$

就是满足要求的划分.

2·87 试求具有下述性质的最小自然数 n,使当将集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 任意分成两个不相交的子集时,必可从其中之一中选出3个不同的

数，其中两数之积等于第 3 数.

（第 29 届国际数学奥林匹克预选题，1988 年）

［解 1］ 按照从小到大分组的原则来处理，可将前 95 个自然数分成两组：

$A=\{1,2,3,4,5,7,9,11,13,48,60,72,80,84,90\}$,

$B=\{6,8,10,12,14,15,\cdots,47,49,50,\cdots,59,61,\cdots,71,73,\cdots,79,81,82,83,85,\cdots,89,91,\cdots,95\}$.

容易看出，无论 A 还是 B，其中的任何 3 数都不满足题中要求. 但当将 96 加入 A 或 B 时，都将出现 3 个数满足题中要求（$2\times48=96=8\times12$）.

下面用反证法来证明 $n=96$ 满足题中要求. 设 $\{1,2,\cdots,96\}=A\cup B$ 且没有满足要求的 3 个数. 因为 $2\times48=3\times32=96$，故若 $2,48\in A$，$3,32\in B$ 或相反，则无论 96 属于 A 还是 B 都将出现满足要求的 3 个数. 所以，这两对数或全在一集内或至少有一对要拆开.

(1) 若 $2,3,32\in A$，则因 $2\times3=6$，$32\div2=16$，$3\times32=96$，故知 6，16，96 同属于 B，矛盾.

(2) 若 $2,3,48\in A$，则因 $2\times3=6$，$48\div3=16$，$2\times48=96$，又导致 6，16，96 同属于 B，矛盾.

(3) $2,3\in A$，$32,48\in B$，则 $6\in B$，$8\in A$. 从而 $4\in B$，$24\in B$，矛盾.

(4) $2,32\in A$，$3,48\in B$. 无论 16 属于 A 还是 B，都导致矛盾.

(5) 若 $2,32,48\in A$，$3\in B$，则 $16,24,96\in B$. 从而 $8\in A$，$6\in B$. 但 $6\times16=96$，矛盾.

(6) 若 $3,32,48\in A$，$2\in B$，则 $16,96\in B$. 从而 $8\in A$，$6\in B$，矛盾.

综上可知，所求的最小自然数 $n=96$.

［解 2］ 用解 1 开头的例子可知所求的最小自然数 $n\geqslant96$. 下面证明对于 $\{1,2,\cdots,96\}$ 的任何一个分解 $\{1,2,\cdots,96\}=A\cup B$，$A$ 与 B 中总有一个集合中存在 3 个数满足题中要求.

若不然，不妨设 $2\in A$. 因为 $2\times3=6$，$2\times4=8$，所以 3 和 6，4 和 8 中都至少有 1 个数在 B 中.

(1) $3\in B$，$4\in B$. 因 $3\times4=12$，故 $12\in A$. 又因 $2\times6=12$，$2\times$

$12 = 24$,故 $6 \in B$,$24 \in B$.但 $4 \times 6 = 24$ 不能同在 B 中,矛盾.

(2)$3 \in B$,$8 \in B$.因 $3 \times 8 = 24$,故 $24 \in A$.又因 $2 \times 12 = 24$,$2 \times 24 = 48$,所以 $12 \in B$,$48 \in B$.由于 $3 \times 4 = 12$,$6 \times 8 = 48$,故又有 $4 \in A$,$6 \in A$,即 $\{4,6,24\} \subset A$,矛盾.

(3)$6 \in B$,$4 \in B$.于是 $24 \in A$.因此又有 $12 \in B$,$48 \in B$.因 $3 \times 4 = 12$,$6 \times 8 = 48$,所以 $3 \in A$,$8 \in A$,即有 $\{3,8,24\} \subset A$,矛盾.

(4)$6 \in B$,$8 \in B$.于是 $48 \in A$.因此又有 $24 \in B$,$96 \in B$.因 $3 \times 8 = 24$,$6 \times 16 = 96$,所以 $3 \in A$,$16 \in A$,即 $\{3,16,48\} \subset A$,矛盾.

综上可知,所求的最小自然数 $n = 96$.

2·88　能否将全体非负整数分为1968个集合,使得每个集合都非空且满足如下条件:如果数 m 可以由数 n 经过若干次划去两个相邻的相同数字或相同的数字组而得到,那么 m 和 n 就属于同一集合(例如,整数7,9339337,932233937,932239447都属于同一个集合)?

(第31届莫斯科数学奥林匹克,1968年)

[解]　首先来证明如下的引理.

引理　如果两个位数相同的自然数的区别仅仅是数字的排列顺序不同,则这两个自然数属于同一个集合.

显然,只须证明当把任一自然数的某相邻两位数字换位,而其他数字均不动时所得的自然数与原数属于同一集合就行了.

设自然数 n 的十进表示为

$$n = \overline{a_1 \cdots a_{i-1} a_i a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_m},$$

我们再考虑两个自然数

$$n' = \overline{a_{i+2} \cdots a_m a_i a_{i+1} a_1 \cdots a_{i-1}},$$

$$n'' = \overline{a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} a_i a_{i+2} \cdots a_m}.$$

将 n,n',n'' 的数字按左,中,右接起来成为一个自然数 k.当把前两段逐次消去后,得到 n'';当把后两段逐次消去后,得到 n.从而 n,k 和 n'' 都属于同一集合.

对于任何一个自然数,如果它的各位数字中有两位相同,则由引理知可将两位相同数字交换成相邻数字而消去,最终得到同集中的一个各位数字互不相同的非负整数.显然,这个数的位数至多10位.将每个集合中各取一个各位数字互不相同的非负整数作为该集合的代表,则按引理又知,这些代表数的各位数字所成的数字组合互不相同且都是

集合$\{0,1,2,\cdots,9\}$的非空子集.但这样的子集只有$2^{10}-1=1023$个,故知题中要求分成1968个集合是无法实现的.

2·89　试将集合$\{1,2,\cdots,1989\}$分为117个互不相交的子集A_i,$i=1,2,\cdots,117$,使得

(1) 每个A_i都含有17个元素;

(2) 所有A_i中诸元素之和都相同.

(第30届国际数学奥林匹克,1989年)

[解1]　因为$1989=117\times 17$,故可将$\{1,2,\cdots,1989\}$顺次分成17段,每段含117个数.显然,只要把每段的117个数适当地分别放入A_1,$A_2,\cdots,A_{117}$中以使条件(2)被满足,问题就解决了.

从第4段数开始,将偶数段从小到大依次放入$A_1,A_2,\cdots,A_{117}$中并将奇数段的数从大到小依次放入这117个子集中.易见,所有集合中的14个数之和都相等.于是问题归结为如何将前三段数$\{1,2,\cdots,351\}$放入每个集中3个数且使3数之和都相等.

把这些数中3的倍数抽出来从大到小排好:$\{351,348,345,\cdots,6,3\}$,共117个数.其余的234个数从小到大排列并分成两段,每段117个数,即$\{1,2,4,5,7,\cdots,173,175\}$和$\{176,178,179,\cdots,349,350\}$.将这两段数顺次放入$A_1,A_2,\cdots,A_{117}$之中便满足要求.事实上,若将这两段数中的数顺次相加,则其和为$\{177,180,183,186,\cdots,522,525\}$.由此可见,放入每个$A_i$的3数之和都是528.

[解2]　像在解1中那样地将$\{1,2,\cdots,1989\}$顺次分成17段,每段有117个连续自然数.将后4段中的前两段从小到大依次放入集合A_1,$A_2,\cdots,A_{117}$中,而将其中后两段从大到小依次放入集合$A_1,A_2,\cdots$,A_{117}中.显然,所有集合中所放入的4个数之和都相等.于是问题化为将$\{1,2,\cdots,1521\}$分成117个互不相交的子集,使得每个子集中有13个元素且所有子集中诸元素之和都相等.

将117个集合$A_1,A_2,\cdots,A_{117}$顺次分成13组,每组都有9个集合并分别记这些组为$B_1,B_2,\cdots,B_{13}$.将上面留下的13段数的每段中的117个数都顺次分成13组,每组数中都恰有9个连续自然数.对于每个k,$1\leqslant k\leqslant 13$,我们把第k段数所分成的13组数依次放入集合组B_k,$B_{k+1},\cdots,B_{13},B_1,B_2,\cdots,B_{k-1}$中.容易看出,每个集合组中的所有数之

和都相等.这样一来,余下的问题就是如何将每个集合组中的 13 组数适当放入本组中的 9 个集合中去.

不妨设 9 个集合是 $A_1, A_2, \cdots, A_9$. 将 13 组数的后 4 组中的前两组数从小到大依次放入 $A_1, A_2, \cdots, A_9$,而将其中后两组数从大到小依次放入 $A_1, A_2, \cdots, A_9$. 于是每个集合中所放入的 4 数之和都相等. 最后,将其余 9 组数中的第 j 组数从小到大依次放入集合 $A_j, A_{j+1}, \cdots, A_9, A_1, \cdots, A_{j-1}$ 中,$j = 1, 2, \cdots, 9$. 容易看出,这 9 个集合中的每个中的所有数之和都相等.

2·90　设 Q^+ 是所有正有理数的集合.

(1) 求证 Q^+ 可以分成 3 个互不相交的子集 A, B, C,使得 $BA = B, B^2 = C, BC = A$,其中对于 Q^+ 的任何两个子集 H 和 K, $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$,且 H^2 表示 HH;

(2) 试证所有正有理数的立方都在上述分解的子集 A 中;

(3) 求作一个满足(1)中要求的分解 $Q^+ = A \cup B \cup C$,使对每个正整数 $n \leqslant 34$, n 和 $n+1$ 都不同在 A 中,即有

$$\min\{n \mid n \in N, n \in A, n+1 \in A\} > 34.$$

(第 34 届国际数学奥林匹克预选题,1993 年)

[解]　(1) 首先令 $1 \in A$ 并将素数任意地分配到 A, B, C 中. 然后,对于任意有理数 x,将它写成素因数分解式

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_l^{\beta_l} s_1^{\gamma_1} s_2^{\gamma_2} \cdots s_m^{\gamma_m},$$

其中 $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$ 都是非零整数, p_i, q_j, s_k 都是素数且有 $p_i \in A, i = 1, 2, \cdots, n, q_j \in B, j = 1, 2, \cdots, l, s_k \in C, k = 1, 2, \cdots, m$. 按

$$(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_l) + 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_m) \equiv \begin{cases} 0, \\ 1, \pmod 3 \\ 2, \end{cases}$$

而分别将 x 划入子集 A, B, C 中. 容易验证,这个分解 $Q^+ = A \cup B \cup C$ 满足题中的要求.

(2) 由分解的性质还可导出下列关系式:

$AC = AB^2 = B^2 = C$;

$C^2 = CB^2 = AB = B$;

$A^2 = ABC = BC = A$.

由此可得

(i) 若 $x \in A$,则 $x^2 \in A^2 = A$.因而 $x^3 = x \cdot x^2 \in A^2 = A$;

(ii) 若 $x \in B$,则 $x^2 \in B^2 = C$.因而 $x^3 = x \cdot x^2 \in BC = A$;

(iii) 若 $x \in C$,则 $x^2 \in C^2 = B$.因而 $x^3 = x \cdot x^2 \in CB = A$.

综上可知,所有正有理数的立方都在 A 中.

(3) 现在来构造满足(3)中要求的分解.由(2)知,$1,8,27 \in A$.因为2与1相邻,故 $2 \notin A$.令 $2 \in B$,于是 $4 \in C$,$16 \in B$,$2 \times 16 \in B^2 = C$.

因为 $8 \in A$,故 $7 \notin A$.若 $7 \in B$,因 $4 \in C$,故 $28 \in A$,$27 \in A$,矛盾.故必有 $7 \in C$.因而又有 $14 \in A$,$28 \in B$.

因为 $14 \in A$,故 $13 \notin A$.因为 $27 \in A$,故 $26 \notin A$.又因 $2 \in B$,所以 $13 \notin C$.故必有 $13 \in B$.因而 $26 \in C$.

因为 $14 \in A$,故 $15 \notin A$.所以不能有 $3 \in B$,$5 \in C$ 或 $3 \in C$,$5 \in B$.因为 $8 \in A$,故 $9 \notin A$.所以 $3 \notin A$.若 $3 \in B$,$5 \in B$,则因 $4 \in C$,$7 \in C$,导致 $20,21 \in A$,矛盾.所以3和5不能同属于 B.若 $3 \in C$,则 $6 = 2 \times 3 \in BC = A$,于是 $5 \notin A$.这样一来,可以进行下去的路子只有两条:$(a) 3 \in C,5 \in C$;$(b) 3 \in B,5 \in A$.以下构造沿前者进行.

令 $3,5 \in C$.因 $4,7 \in C$,所以,$9,12,15,20,21,25,35 \in B$.又因 $2 \in B$,所以,$18,24,30 \in C$,$6,10 \in A$.

至此,不超过35的自然数还有9个未被划定:11,17,19,22,23,29,31,33,34.因为 $10 \in A$,故 $11 \notin A$.为了避免33,34同在 A 中,应防止出现 $11 \in B$,$17 \in C$.为此令 $11 \in B$,$17 \in B$.因 $2 \in B$,故有 $22,34 \in C$.又因 $3 \in C$,所以 $33 \in A$.余下的4个数19,23,29,31都是素数,可任意地分到 A,B,C 中.不妨将这4个数全划入 A 中.最后,再按(1)中的原则将大于35的自然数和其他正有理数分入 A,B,C 中,即得到满足题中要求的分解:

$A = \{1,6,8,10,14,19,23,27,29,31,33,\cdots\}$,

$B = \{2,9,11,12,13,15,16,17,20,21,25,28,35,\cdots\}$,

$C = \{3,4,5,7,18,22,24,26,30,32,34,\cdots\}$.

2·91 如果在集合 A 中,存在 m 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_m$(可以重复),满足等式 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} = a_m$,我们就称集合 A 是 m 项和相关的.已知集合 $\{1,2,\cdots,n_m\}$ 被任意地划分为两个不交的子集之并时,

这两个集合中都至少有1个是 m 项和相关的($m \geqslant 3$),求自然数 n_m 的最小值.

(中国国家集训队测验题,1991年)

[解] 对于$\{1,2,\cdots,m^2-m-2\}$,我们将它分解如下:

$S=\{1,2,\cdots,m-2,(m-1)^2,\cdots,m^2-m-2\}$,

$T=\{m-1,m,\cdots,m^2-2m\}$.

这时,T 中任何 $m-1$ 项之和不小于$(m-1)^2>m^2-2m$,故 T 不是 m 项和相关的. S 中的 $m-1$ 项中若不含$(m-1)^2$ 及其以后的元素,则其和不超过$(m-1)(m-2)<(m-1)^2$;否则,其和将不小于$(m-1)^2+(m-2)=m^2-m-1>m^2-m-2$,所以 S 也不是 m 项和相关的.这表明所求的最小正整数 $n_m \geqslant m^2-m-1$.

当 $n=m^2-m-1$ 时,设$\{1,2,\cdots,n\}=S\cup T$,且 $S\cap T=\varnothing$.不妨设 $1\in S$.如果 S 和 T 都不是 m 项和相关的,则必有 $1\cdot(m-1)=m-1\in T$.从而又有$(m-1)^2\in S$.又因 $1+(m-2)m=(m-1)^2$,故知 $m\in T$.这样一来,$m,m-1\in T,1,(m-1)^2\in S$,而且

$(m-2)\cdot m+1\cdot(m-1)=m^2-m-1=(m-2)\cdot 1+1\cdot(m-1)^2$,

即无论 m^2-m-1 属于 S 还是属于 T,都与反证假设矛盾.这表明 S 和 T 中至少有1个是 m 项和相关的.

综上可知,n_m 的最小值是 m^2-m-1.

2·92 给定集合

$$S=\{z_1,z_2,\cdots,z_{1993}\},$$

其中 $z_1,z_2,\cdots,z_{1993}$ 都是非零复数(可看作平面上的非零向量).求证可以把 S 中的元素分成若干组,使得

(1)S 中的每个元素属于且仅属于其中一组;

(2)每组中的任一复数与该组中所有复数之和的夹角不超过 90°;

(3)将任意两组中的所有复数分别求和,所得的两个和数之间的夹角大于 90°.

(第8届中国中学生数学冬令营,1993年)

[证] 考虑集合 S 的所有子集并计算每个子集中所有复数的和的模.因这样得到的模数只有有限多个,故其中必有最大数.将模取最大值的子集之一记为 A.如果 $S-A\neq\varnothing$,再将 $S-A$ 的所有子集中能

使其中所有复数之和的模达到最大的一个子集取为 B. 如果 $S-(A\cup B)\neq\varnothing$,则令 $C=S-(A\cup B)$. 我们指出,这样选取的至多3个子集便满足题中要求.

将 A,B,C 中所有元素之和分别记为 a,b,c.

(i) 对任意 $z\in A$,如果 z 与 a 的夹角为钝角,则 $-z$ 与 a 的夹角为锐角. 于是有 $|a+(-z)|>|a|$,即子集 $A-\{z\}$ 中所有元素之和的模大于 a 的模,此与 $|a|$ 的最大性矛盾. 这就证明了 A 中任一元素与 a 的夹角都不超过 90°. 同理,B 中任一元素与 b 的夹角也不超过 90°.

(ii) 对任意 $\xi\in S-A$,ξ 与 a 的夹角都是钝角. 否则又导致 $|a+\xi|>|a|$,矛盾. 同理,C 中任一元素 η 与 b 的夹角都是钝角. 由此可见,B 中所有元素均与 a 夹钝角,从而其和 b 与 a 夹钝角. 同理,c 与 a,c 与 b 都夹钝角,即(3) 成立.

(iii) 若存在 $\xi\in C$,使 ξ 与 C 夹钝角,则由(ii) 知,4 个数 a,b,c,ξ 两两之间都夹钝角,此不可能. 所以,C 中任一元素与 C 的夹角都不超过 90°.

2·93　设自然数集分解成 r 个互不相交的子集:$N=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_r$,求证其中必有 1 个子集 A,它具有如下性质 P:存在 $m\in N$,使对任何正整数 k,都能找到 $a_1,a_2,\cdots,a_k\in A$,满足

$$1\leqslant a_{j+1}-a_j\leqslant m,\ j=1,2,\cdots,k-1.$$

(第 31 届国际数学奥林匹克预选题,1990 年)

[证 1]　先证下面的引理:

引理　设 $N=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_r$ 且 $A_1,A_2,\cdots,A_r$ 两两不交. 若 $A_i\cup A_{i+1}\cup\cdots\cup A_r$ 包含有任意有限长度的相继自然数段. 而 A_i 不具有性质 P,则 $A_{i+1}\cup\cdots\cup A_r$ 中必定含有任意有限长度的相继自然数段.

引理的证明　若 A_i 不具有性质 P,则对于任给的 $m\in N$,存在 $k(m)\in N$,使得对于 A_i 的任何 $k(m)$ 个数 $a_1<a_2<\cdots<a_{k(m)}$,都可找到下标 $j\in\{1,2,\cdots,k(m)-1\}$,数 a_j 与 a_{j+1} 之间至少有 m 个相继自然数都不属于 A_i.

在 $A_i\cup A_{i+1}\cup\cdots\cup A_r$ 中选取一个长度为 $L=k(m)m$ 的相继自然数段. 若该段数中有 $k(m)$ 个数属于 A_i,则因 A_i 不具有性质 P,故

在这 $k(m)$ 个数中,存在两个数 a_j 与a_{j+1},它们之间有 m 个相继自然数都不属于 A_i,当然就都属于 $A_{i+1}\cup\cdots\cup A_r$.若选出的长度为 L 的相继自然数段中属于 A_i 的数少于$k(m)$个,则当把这 L 个相继自然数依次分成 $k(m)$ 段,每段恰有 m 个数时,由抽屉原理知其中必有一段 m 个数中不含A_i 中的数,当然都属于 $A_{i+1}\cup\cdots\cup A_r$.由 $m\in N$ 的任意性知引理成立.

回到原题的证明.若 A_1 具有性质 P,则结论成立;若 A_1 不具有性质 P,则由引理知 $A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_r$ 满足引理的条件.若 A_2 具有性质 P,则结论成立;若 A_2 不具有性质 P,则 $A_3\cup\cdots\cup A_r$ 又满足引理的条件.这样继续下去,或者在某一步得出 A_{i_0} 具有性质 P,或者进行到最后,得到 A_r 含有任意有限长度的自然数段,当然具有性质 P.

[证2] 如果 $M\subset N$ 中包含有任意有限长度的相继自然数段,则称 M 为N 的"长子集".我们将证明如下的加强命题:若将长子集 M 分解成 r 个两两不交的子集$A_1,A_2,\cdots,A_r$,则这些子集中必存在某个子集 A_i 具有性质P.显然,只要证明了这个命题,立即可知原题结论成立.

当 $r=1$时,命题显然成立.设命题于 $r=n$ 时成立.考察 $r=n+1$ 时的情形.设长子集 M 被分解成$n+1$个两两不交的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_n,A_{n+1}$:

$$M=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup A_{n+1}.$$

记 $Q=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$.若 Q 是M 的长子集,则由归纳假设知 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 中必有 1 个子集具有性质 P,当然命题成立.若 Q 不是长子集,则存在某个 $m_1\in N$,使得 Q 中不含任何相继的m_1 个自然数.由于M是N的长子集,故对任给的 $k\in N$,集 M中必含有长为km_1 的相继自然数段.将这个自然数段分成 k 段:$S_1,S_2,\cdots,S_k$,其中每段恰有 m_1 个相继自然数.由于 Q 中不含长为m_1 的相继自然数段,因此对每个 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$,都有 $a_i\in S_i$ 但$a_i\notin Q$.这意味着 $a_i\in M-Q=A_{n+1}$,即有$\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}\subset A_{n+1}$且$1\leqslant a_{j+1}-a_j\leqslant 2m_1,j=1,2,\cdots,k-1$.这就证明了命题于 $r=n+1$ 时也成立.

2·94 为了翻译电报内容,必须把所有的十位的"单词",即由 10 个点或横线所组成的符号分成两组,使得每个组中的任意两个单词之

间的差别都不少于3处.问这种分组能否实现?说明理由.

（第30届莫斯科数学奥林匹克,1967年）

［解］ 考察前8个符号相同的下列4个单词:

(* ··),(* ·－),(* －·),(* －－).

按条件,有8个符号相同的单词应分在不同的组.但若分成两组,这4个单词中必有两个分在一组,矛盾.故知题中要求的分组是不能实现的.

2·95 在一条纸带上依次写有80个非零数字,并将纸带剪成若干段,使每段带子上至少有两个数字,于是每段带子上的数字组成一个自然数.再将所得的这些自然数求和.试证至少存在两种不同的剪法,使得最后所加得的和数相等.

（第33届莫斯科数学奥林匹克,1970年）

［证］ 我们仅仅考察将纸带剪成38段,其中4段上各有3个数字,其余的34段上各有两个数字的情形.这时,4个3位数的和小于4000,34个两位数之和小于3400,故全部相加所得的和小于7400.但是,将纸带剪成38段,其中4段上各有3个数字,余下34段上各有两个数字的不同剪法的种数为$C_{38}^4 > 30 \times 30 \times 30 = 27000$.故由抽屉原理知,必有两种不同剪法,使得最后得到的和数相等.

2·96 已知集合M的元素都是整数,既有正整数又有负整数,且当$a,b \in M$时,$2a$和$a+b$也属于M.求证当$a,b \in M$时,$a-b \in M$.

（匈牙利数学奥林匹克,1967年）

［证］ 首先,用归纳法容易证明,若$c \in M$,则对任意$n \in N$,都有$nc \in M$.

设$a>0$是集合M中的最小正整数,$b<0$是M中的最大负整数,即绝对值最小的负整数.按已知,$a+b \in M$,且满足不等式$b<a+b<a$.由a和b的极端性知$a+b=0$.因此,$0 \in M$,且有$b=-a$.这样一来,对任何$a \in M$,$n \in Z$,都有$na \in M$.

我们断言,集合M中除了a的整数倍以外,不含任何其他元素.若不然,设有$x \in M$且有$ma<x<(m+1)a$,$m \in Z$.我们写

$$x = ma + r, 0 < r < a, r \in N.$$

但这时便有$r = x + (-m)a \in M$,此与a的最小性矛盾.这样一来,

$$M = \{na \mid n \in Z\}.$$

由于 M 中任意两数之差仍是 a 的整数倍，当然仍在 M 之中.

2·97　试证对于任何预先给定的自然数 m，必可选取适当的自然数 n，使得数 2^n 的一个前段（即把从某位开始后面的数字统统去掉）恰为 m.

（第 12 届莫斯科数学奥林匹克，1949 年）

［证］　按题意，要证的是存在自然数 n，使对某个自然数 k，满足关系式

$$10^k m \leqslant 2^n < 10^k(m+1). \qquad ①$$

取常用对数，① 式化为

$$k + \lg m \leqslant n\lg 2 < k + \lg(m+1). \qquad ②$$

② 式的几何意义在于，必可选取自然数 n，使 $n\lg 2$ 落在一族区间 $\{(k+\lg m, k+\lg(m+1)) \mid k=1,2,\cdots\}$ 之一中.

取一个周长为 1 的圆周，将从点 $1+\lg m$ 开始的正向半个数轴缠绕在圆周上，于是上述一族区间都重合在圆周开始处一段长度为 $\alpha = \lg(m+1) - \lg m$ 的圆弧上. 将圆周 l 等分，使每一份弧长都小于 α. 取自然数 N，使 $N\lg 2 > 10m$，然后把 $N\lg 2, (N+1)\lg 2, (N+2)\lg 2, \cdots$ 依次在圆周上表示出来. 因为 $\lg 2$ 的整数倍都是无理数，故在圆周上所取的上述无穷多个点互不相重. 于是对前 $l+1$ 个点应用抽屉原理便知，必存在自然数 $p, q, 1 \leqslant p < q \leqslant l+1$，使得点 $p\lg 2$ 和 $q\lg 2$ 落在同一段小圆弧中. 这意味着 $|p\lg 2 - q\lg 2|$ 的分数部分 $\delta < \alpha$. 不妨设沿圆周方向看，$q\lg 2$ 在 $p\lg 2$ 的前方. 这就是说，每增加 $(q-p)\lg 2$，相应的点在圆周上前进 δ. 因而在增加足够多次后，点总要进入第 1 段圆弧中，亦即有自然数 n，使 ② 式成立，从而 ① 式也成立.

2·98　设 S 为十进制中至多有 n 个数字的所有非负整数所成的集合，S_k 由 S 中那些数字之和小于 k 的元素组成. 对于怎样的 n，有 k 存在，使得 $|S| = 2|S_k|$？

（中国国家集训队训练题，1990 年）

［解］　对于任一个 n 位数 $A = \overline{a_1 a_2 \cdots a_n}$ $(0 \leqslant a_i \leqslant 9, i=1,2,\cdots,n)$，对应

$$A \longrightarrow B = \overline{b_1 b_2 \cdots b_n}$$

是位数不超过 n 的所有非负整数的集合到它自身的一个双射，其中 b_i

$= 9 - a_i, i = 1,2,\cdots,n$.若记 $d(A) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,则

$$d(A) + d(B) = 9n.$$

由此可见,对于任意 $0 < k \leqslant 9n$,$d(A) < k$ 的充分必要条件是 $d(B) > 9n - k$.因而有

$$\left|\left\{A \mid d(A) < \frac{9n}{2}\right\}\right| = \left|\left\{A \,\middle|\, d(A) > \frac{9n}{2}\right\}\right|. \qquad ①$$

当 n 为奇数时,$\frac{9n}{2}$ 不是整数,故①中左右两端的集合之并即为 S.所以当 $k = \left[\frac{9n}{2}\right] + 1$ 时,$|S| = 2|S_k|$.

当 n 为偶数时,$\frac{9n}{2}$ 是整数.当 $k = \frac{9n}{2}$ 时,$|S| > 2|S_k|$,$|S| < 2|S_{k+1}|$.这时满足要求的 k 不存在.

综上可知,当且仅当 n 为奇数时,满足要求的自然数 k 存在.

2·99 一个数集被称为是"单纯的",如果它不包含使得 $x + y = z$ 的元素 x, y, z.给定数集 $\{1,2,\cdots,2n+1\}$.求其单纯子集所能包含的最多元素的数目.

(原联邦德国数学奥林匹克,1982 年)

[解] 考虑 $\{1,2,\cdots,2n+1\}$ 的两个子集:

$$A = \{1,3,5,\cdots,2n+1\},$$
$$B = \{2,4,6,\cdots,2n\}.$$

由于集合 A 中任意二数之和为偶数,所以不包含使得 $x + y = z$ 的元素 x, y, z,因此集合 A 是一个单纯子集.A 的元素数目是 $n + 1$.

下面我们证明 $n + 1$ 是所求数目的最大值.

设 $\{a_0, a_1, \cdots, a_{n+1}\}$ 是集合 $\{1,2,\cdots,2n+1\}$ 的一个 $n+2$ 个元素的子集,我们证明它不是单纯子集,即存在3个元素 x, y, z,使 $x + y = z$.

设 $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1} \leqslant 2n + 1$,

记 $b_i = a_i - a_0, i = 1,2,\cdots,n+1$,则

$$b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < b_{n+1} \leqslant 2n + 1.$$

对于 $a_0, a_1, \cdots, a_{n+1}$ 及 $b_1, b_2, \cdots < b_{n+1}$ 这 $2n+3$ 个不大于 $2n+1$ 的正整数,其中必有两数相等,设 $a_i = b_j$,即

$$a_i = b_j = a_j - a_0,$$

从而 $$a_i + a_0 = a_j.$$

记 $a_i = x, a_0 = y, a_j = z$,从而 $x + y = z$,即 $n + 2$ 个元素的集合 $\{a_0, a_1, \cdots, a_{n+1}\}$ 不是单纯子集.

因此 $n + 1$ 是符合题目要求的最大值.

2·100 如果一个(互异)正整数的有限集合的所有元素之和是集合中所有数的公倍数,则称这个集合为"和倍集".求证正整数的每个有限集合都是某个和倍集的子集.

(第 34 届国际数学奥林匹克预选题,1993 年)

[证] 设给定的正整数的有限集是 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$.令
$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_r, m = [a_1, a_2, \cdots, a_r].$$
写 $m = 2^k n$,其中 n 和 k 都是非负整数且 n 为奇数.设 n 的二进展开式为
$$n = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 2 + \cdots + \varepsilon_t 2^t,$$
其中 $\varepsilon_i \in \{0,1\}, i = 0,1,\cdots,t$ 且 $\varepsilon_0 = \varepsilon_t = 1$.将集合
$$\{2^i s \mid 1 \leqslant i \leqslant t, \varepsilon_i = 1\}$$
并入给定集合 S 中,于是扩充后的集合中所有数之和为 ns.最后,再将集合
$$\{2^j ns \mid j = 0,1,\cdots,l-1\}, l = \max\{k, t\}$$
并入上述集合,则所得的集合 T 中所有数之和为 $2^l ns$.这个和数可被 m 整除,从而可被每个 a_i 整除.同时,这个和数又可被上述的诸 $2^i s$ 和 $2^j ns$ 整除.故知集合 T 为和倍集而 S 为它的子集.

2·101 设 $M = \{1,2,\cdots,20\}$,对于 M 的任一 9 元子集 S,函数 $f(S)$ 取 1 至 20 之间的整数值.试证不论 f 是怎样的函数,总存在 M 的一个 10 元子集 T,使得对所有 $k \in T$,都有 $f(T - \{k\}) \neq k$.

(第 17 届美国数学奥林匹克,1988 年)

[证] 如果 M 的一个 10 元子集 T 具有如下性质:对任何 $k \in T$,均有 $f(T - \{k\}) \neq k$,则称 T 为"好集".不是好集的 10 元子集称为"坏集".显然,问题就是证明好集的存在性.

若 T 为坏集,则有 $k_0 \in T$,使得
$$f(T - \{k_0\}) = k_0.$$
令 $S = T - \{k_0\}$,则

$$T = S \cup \{k_0\} = S \cup \{f(S)\}.$$

这表明坏集 T 可由它的某一个 9 元子集 S 生成，即 S 与 $\{f(S)\}$ 的并集构成坏集 T. 如果 $f(S) \in S$，则 $S \cup \{f(S)\}$ 是一个 9 元子集，而不是 10 元子集. 因而这时 S 不能按上述原则生成坏集. 可见，任一 9 元子集至多能按上述原则生成一个坏集. 从而知所有坏集的个数不超过 M 的所有 9 元子集的个数 C_{20}^{9}. 但 M 的所有 10 元子集的个数为 $C_{20}^{10} > C_{20}^{9}$，所以，好集必然存在.

2·102　设集合 $S = \{1,2,\cdots,50\}$，试求最小正整数 n，使得 S 中的每个 n 元子集中都有 3 个数能作为直角三角形的 3 边长.

（中国国家集训队测验题，1993 年）

［解］　首先证明如下的引理.

引理　如果正整数 x,y,z 满足方程

$$x^2 + y^2 = z^2, \tag{①}$$

则 3 个数中至少有 1 个数是 5 的倍数.

引理的证明　因为

$$\left.\begin{aligned}(5k+1)^2 &= 25k^2 + 10k + 1 \equiv 1,\\ 5k+2)^2 &= 25k^2 + 20k + 4 \equiv -1,\\ (5k+3)^2 &= 25k^2 + 30k + 9 \equiv -1,\\ (5k+4)^2 &= 25k^2 + 40k + 16 \equiv 1,\end{aligned}\right\} \pmod 5$$

所以，如果 x 和 y 都不是 5 的倍数，则 x^2 和 y^2 都模 5 等于 1 或 -1. 从而 z^2 只能模 5 等于 0，因此 z 是 5 的倍数.

回到原题的解. 考察以 10,15,25,40,45 分别作为直角三角形 1 条边长的所有勾股数组. 因为方程 ① 的正整数解可以表为

$$x = k(a^2 - b^2), y = 2kab, z = k(a^2 + b^2), \tag{②}$$

其中 $k,a,b \in N$，且 $(a,b) = 1, a > b$，故知这样的勾股数共有下列 11 组：

(10,8,6),(26,24,10),(15,12,9),(17,15,8),

(39,36,15),(25,24,7),(40,32,24),(41,40,9),

(45,36,27),(25,20,15),(50,40,30).

注意到前 9 组勾股数中每组都有 8,9,24,36 这 4 个数之一，可知集合

$$M = S - \{5,8,9,20,24,30,35,36,50\}$$

中任何 3 个数都不是一组勾股数. 所以，所求的最小正整数 $n \geqslant 42$.

另一方面,在下列9组勾股数

(3,4,5),(7,24,25),(8,15,17),(9,40,41),
(12,35,37),(14,48,50),(16,30,34),(20,21,29),　　③
(27,36,45)

中出现的27个数互不相同.故对 S 的任一个42元子集 M,不在 M 中的8个数至多属于③中的8组,从而至少有1组勾股数全在 M 中.

综上可知,所求的最小正整数 $n = 42$.

2·103　设 $M = \{2,3,\cdots,1000\}$.求最小自然数 n,使得 M 的任何 n 元子集中都存在3个互不相交的4元子集 S,T,U 满足下列3个条件

(1) 对于 S 中任何两个元素,大数都是小数的倍数.集合 T 和 U 也具有同样的性质.

(2) 对任何 $s \in S$ 和 $t \in T$,都有 $(s,t) = 1$.

(3) 对任何 $s \in S$ 和 $u \in U$,都有 $(s,u) > 1$.

（中国国家集训队选拔考试,1996年）

[解1]　注意到 $37 \times 27 = 999$,令 $A = \{3,5,\cdots,37\}$,于是 $|A| = 18$.令 $B = M - A$,则 $|B| = 981$ 且集合 B 不能同时满足题中要求(1)—(3).

若不然,设有 B 的3个互不相交的4元子集 S,T,U 满足(1)—(3).设 S 和 T 的元素按从小到大排列为 $s_1 < s_2 < s_3 < s_4$ 和 $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$.因为 $(s_4,t_4) = 1$,故二者中至少有1个奇数,不妨设 s_4 为奇数.又因 s_j 为 s_{j-1} 的倍数 $(j = 4,3,2)$,所以 s_1,s_2,s_3 都是奇数.于是

$$s_4 \geqslant 27s_1 \geqslant 27 \times 39 > 1000,$$

矛盾.这表明所求的最小自然数 $n \geqslant 982$.

下面我们来证明 M 的任一个982元子集 B 都可满足题中要求.注意,这时只有 M 中的17个元素不在 B 中.令

$$\begin{cases} S_1 = \{3,9,27,81,243,729\}, \\ T_1 = \{2,4,8,16,32,64\}, \\ U_1 = \{6,12,24,48,96,192\}, \end{cases} \quad \begin{cases} S_2 = \{5,15,45,135,405\}, \\ T_2 = \{41,82,164,328,656\}, \\ U_2 = \{10,20,40,80,160\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_3 = \{7,21,63,189,567\}, \\ T_3 = \{43,86,172,344,688\}, \\ U_3 = \{14,28,56,112,224\}, \end{cases} \quad \begin{cases} S_4 = \{11,33,99,297,891\}, \\ T_4 = \{47,94,188,376,752\}, \\ U_4 = \{22,44,88,176,352\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_5 = \{13,39,117,351\}, \\ T_5 = \{53,106,212,424\}, \\ U_5 = \{26,52,104,208\}, \end{cases} \quad \begin{cases} S_6 = \{17,51,153,459\}, \\ T_6 = \{59,118,236,472\}, \\ U_6 = \{34,68,136,272\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_7 = \{19,57,171,513\}, \\ T_7 = \{61,122,244,488\}, \\ U_7 = \{38,76,152,304\}, \end{cases} \quad \begin{cases} S_8 = \{23,69,207,621\}, \\ T_8 = \{67,134,268,536\}, \\ U_8 = \{46,92,184,368\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_9 = \{25,75,225,675\}, \\ T_9 = \{71,142,284,568\}, \\ U_9 = \{50,100,200,400\}, \end{cases} \quad \begin{cases} S_{10} = \{29,87,261,783\}, \\ T_{10} = \{73,146,292,584\}, \\ U_{10} = \{58,116,232,464\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{11} = \{31,93,279,837\}, \\ T_{11} = \{79,158,316,632\}, \\ U_{11} = \{62,124,248,496\}, \end{cases} \quad \begin{cases} S_{12} = \{35,105,315,945\}, \\ T_{12} = \{83,166,332,664\}, \\ U_{12} = \{70,140,280,560\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{13} = \{37,111,333,999\}, \\ T_{13} = \{89,178,356,712\}, \\ U_{13} = \{74,148,296,592\}. \end{cases}$$

将 S_i, T_i, U_i 中序号相同的3个数组成一个三数组,则共得57个三数组.因只有 M 中的17个数不在 B 中,故至少有40个三数组合于 B 中.这40个三数组分属于上述13组中,由抽屉原理知必有4个三数组在同一组中.将这4个三数组拼成 3×4 的数表,并将3行中的各4个数分别记为 S, T, U.易见,这3个4元集合满足题中的要求.

综上可知,所求的最小自然数为982.

[解2] 与解1中前两段一样地可以证明所求的最小自然数 $n \geqslant 982$.下面证明 M 的任一个982元子集 B 都满足题中的要求(1)—(3).这时,$|M - B| = 17$,即 M 中只有17个元素不在 B 中.

考察下列集合

$T_1 = \{3,9,27,81,243,729\}$, $T_2 = \{5,55,165,495\}$,

$T_3 = \{15,45,135,405\}$, $T_4 = \{7,49,147,441\}$,

$T_5 = \{21,63,189,567\}$, $T_6 = \{11,77,231,693\}$,

$T_7 = \{33,99,297,891\}$, $T_8 = \{13,39,117,351\}$,

$T_9 = \{17,51,153,459\}$, $T_{10} = \{19,57,171,513\}$,

$T_{11} = \{23,69,207,621\}$, $T_{12} = \{25,75,225,675\}$,

$T_{13} = \{29,87,261,783\}$, $T_{14} = \{31,93,279,837\}$,

$T_{15} = \{35,105,315,945\}$, $T_{16} = \{37,111,333,999\}$.

若 T_1 中至少有 4 个数属于 B,则取其中 4 个数的集合为 T.若 T_1 中至多有 3 个数在 B 中,则 T_1 中至少有 3 个数不在 B 中.于是 $T_2,T_3,\cdots,T_{16}$ 中的 60 个数中至多有 14 个数不在 B 中.从而这 15 个集合中总有 1 个是 B 的子集,记之为 T.这样一来,我们就选定了子集 T.易见,T 中的 4 个数至多有 3 个不同的素因数,而且其中之一是 3.

再考察下列集合

$S_1 = \{2,4,8,16,32,64,128,256,512\}$,

$S_2 = \{10,20,40,80\}$, $S_3 = \{14,28,56,112\}$,

$S_4 = \{22,44,88,176\}$, $S_5 = \{26,52,104,208\}$,

$S_6 = \{34,68,136,272\}$, $S_7 = \{38,76,152,304\}$,

$S_8 = \{46,92,184,368\}$, $S_9 = \{58,116,232,464\}$,

$S_{10} = \{62,124,248,496\}$, $S_{11} = \{74,148,296,592\}$,

$S_{12} = \{82,164,328,656\}$, $S_{13} = \{86,172,344,688\}$,

$S_{14} = \{94,188,376,752\}$, $S_{15} = \{106,212,424,848\}$.

若 S_1 中有 4 个数在 B 中,则取这 4 个数的集合为 S.若 S_1 中至多有 3 个数含在 B 中,则 S_1 中至少有 6 个数不在 B 中.从而 $S_2,S_3,\cdots,S_{15}$ 这 14 个集合的 56 个数中至多有 11 个数不在 B 中.又因这 14 个集合中 至多有两个集合中的数与 T 中的数不是互素.所以余下的至少 12 个集合中总有 1 个集合是 B 的子集,记之为 S.易见,S 与 T 满足题中要求(1) 和(2).

上述的 $S_1,S_2,\cdots,S_{15}$ 中除去 S 之后还有 14 个集合.再加上下列 4 个集合

$S_{16} = \{118,236,472,944\}$,$S_{17} = \{6,12,24,48\}$,

$S_{18} = \{96,192,384,768\}$,$S_{19} = \{30,60,120,240\}$,

共 18 个集合,其中至少有 1 个是 B 的子集,记为 U.因为 S 和 U 中的元素都是偶数且互不相同,所以 S,T,U 满足题中的条件(1)—(3).

综上可知,所求的最小自然数 $n = 982$.

2·104　设 $S = \{1,2,\cdots,280\}$.求最小自然数 n,使得 S 的每个 n

元子集中都含有 5 个两两互素的数.

（第 32 届国际数学奥林匹克，1991 年）

[解 1] 令

$$A_i = \{ik \mid k = 1,2,\cdots,\left[\frac{280}{i}\right]\}, i = 1,2,\cdots.$$

容易算出 $|A_2| = |140, |A_3| = 93, |A_5| = 56, |A_7| = 40, |A_6| = |A_2 \cap A_3| = 46, |A_{10}| = |A_2 \cap A_5| = 28, |A_{14}| = |A_2 \cap A_7| = 20, |A_{15}| = |A_3 \cap A_5| = 18, |A_{21}| = |A_3 \cap A_7| = 13, |A_{35}| = |A_5 \cap A_7| = 8, |A_{30}| = |A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 9, |A_{42}| = |A_2 \cap A_3 \cap A_7| = 6, |A_{70}| = |A_2 \cap A_5 \cap A_7| = 4, |A_{105}| = |A_3 \cap A_5 \cap A_7| = 2, |A_{210}| = |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = 1$. 令 $A = A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7$，则由容斥原理可以算出

$$|A| = 216.$$

由于在 A 中任取 5 个数时，必有两个数在同一个 $A_i(i \in \{2,3,5,7\})$ 之中，二者不互素，故知所求的最小自然数 $n \geqslant 217$.

另一方面，设 $T \subset S$ 且 $|T| = 217$. 记 S 中所有素数与 1 所成的集合为 M，则 $|M| = 60$.

(1) 若 $|T \cap M| \geqslant 5$，则问题已解决.

(2) 若 $|T \cap M| = 4$，设其余的素数从小到大排列为 $p_1, p_2, p_3, \cdots$，显然有 $p_1 \leqslant 11, p_2 \leqslant 13, p_3 \leqslant 17, p_4 \leqslant 19, p_5 \leqslant 23$. 于是有

$$\{p_1^2, p_1p_2, p_1p_3, p_1p_4, p_1p_5, p_2^2, p_2p_3, p_2p_4\} \subset S.$$

因为 S 中共有 220 个合数而这时 T 中有 213 个合数，故在 $S - T$ 中的合数只有 7 个，从而上面集合中的 8 个元素中总有一个含在 T 中，它与 $T \cap M$ 中的 4 个数一起即满足题中要求.

(3) 设 $|T \cap M| \leqslant 3$. 这时，至多有 S 中的 6 个合数不在 T 中. 若集合 $\{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2\}$ 中有 5 个或 4 个元素含在 T 中，则问题化为前两种情形. 以下设这 6 个合数中至多有 3 个含在 T 中，于是其他合数至多有 3 个不在 T 中. 因此，下面两个集合

$$\{2 \times 41, 3 \times 37, 5 \times 31, 7 \times 29, 11 \times 23, 13 \times 19\},$$

$$\{2 \times 37, 3 \times 31, 5 \times 29, 7 \times 23, 11 \times 19, 13 \times 17\}$$

的 12 个合数中至多有 3 个不在 T 中. 由抽屉原理知必有一个集合的至

少 5 个数含在 T 中. 显然,这 5 个数两两互素.

综上可知,所求的最小自然数 $n = 217$.

[解 2] 由解 1 的第一段论证知所求的最小自然数 $n \geqslant 217$. 现证后一半. 令

$B_1 = \{1$ 和 S 中的所有素数$\}$,

$B_2 = \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2\}$,

$B_3 = \{2 \times 41, 3 \times 37, 5 \times 31, 7 \times 29, 11 \times 23, 13 \times 19\}$,

$B_4 = \{2 \times 37, 3 \times 31, 5 \times 29, 7 \times 23, 11 \times 19, 13 \times 17\}$,

$B_5 = \{2 \times 31, 3 \times 29, 5 \times 23, 7 \times 19, 11 \times 17\}$,

$B_6 = \{2 \times 29, 3 \times 23, 5 \times 19, 7 \times 17, 11 \times 13\}$,

并令 $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6$. 因 $|B_1| = 60$ 且 $B_i \cap B_j = \varnothing, 1 \leqslant i < j \leqslant 6$, 故有 $|B| = 88$. 于是 $|S - B| = 192$.

对于任意的 $T \subset S, |T| = 217$, 都有 $|T \cap B| \geqslant 25$, 即 T 中至少有 25 个元素属于 B. 于是由抽屉原理知存在 $i_0, 1 \leqslant i_0 \leqslant 6$, 使得 B_{i_0} 中至少含有 T 的 5 个元素. 显然,这 5 个数两两互素. 所以,所求的最小自然数 $n = 217$.

[解 3] 由解 1 的第一段论证知所求的最小自然数 $n \geqslant 217$. 现证后一半. 令 1 和 S 中所有素数组成的集合为 M, 则 $|M| = 60$. 对于任意的 $T \subset S, |T| = 217$, 若 $|T \cap M| \geqslant 5$, 则问题自然解决, 以下设 $|T \cap M| \leqslant 4$, 于是 S 中的合数至多有 7 个不在 T 中. 令

$M_1 = \{2 \times 23, 3 \times 19, 5 \times 17, 7 \times 13, 11^2\}$,

$M_2 = \{2 \times 29, 3 \times 23, 5 \times 19, 7 \times 17, 11 \times 13\}$,

$M_3 = \{2 \times 31, 3 \times 29, 5 \times 23, 7 \times 19, 11 \times 17\}$,

$M_4 = \{2 \times 37, 3 \times 31, 5 \times 29, 7 \times 23, 11 \times 19\}$,

$M_5 = \{2 \times 41, 3 \times 37, 5 \times 31, 7 \times 29, 11 \times 23\}$,

$M_6 = \{2 \times 43, 3 \times 41, 5 \times 37, 7 \times 31, 13 \times 17\}$,

$M_7 = \{2 \times 47, 3 \times 43, 5 \times 41, 7 \times 37, 13 \times 19\}$,

$M_8 = \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 13^2\}$.

由这 8 个集合中至多有 7 个元素不在 T 中,故由抽屉原理知其中必有一个集合的 5 个元素全在 T 中. 它们显然两两互素. 故知所求的最小自然数 $n = 217$.

2·105　能否把 1,1,2,2,…,1986,1986 这些数排成一行,使得两个 i 之间恰好夹有 i 个整数,$i=1,2,\cdots,1986$?说明理由.

(第 1 届中国中学生数学冬令营,1986 年)

[解 1]　不能实现.若不然,将排成一行的 3972 个方格交替地涂上黑色和白色,例如将奇数号的方格涂黑,偶数号的方格涂白.然后将已排好的 3972 个数按排列顺序放到 3972 个方格中去,每格中放 1 个数.这时,两个相同的偶数所在的方格之间夹有偶数个方格,因而这两个偶数所在的方格是黑白格各一个,所以,993 对偶数所在的 1986 个方格中,恰有 993 个黑格和 993 个白格.另一方面,两个相同奇数之间夹有奇数个方格,因而它们所在的两个方格同色,所以,993 对奇数所在的 1986 个方格中,黑格数必为偶数而不能是 993,矛盾.这说明题中所要求的排列是无法实现的.

[解 2]　设满足要求的排列能够实现.这时,被夹元素的数目是由每两对数的互相位置决定的.两个 i 与两个 j 在这行数中的相互位置只有下列 3 种情形:

(1) i,j,i,j 或 j,i,j,i;

(2) i,j,j,i 或 j,i,i,j;

(3) i,i,j,j 或 j,j,i,i.

显然,前两种情形各有两个被夹元素,而第 3 种情形下没有被夹元素.可见,3 种情形下的被夹元素数都是偶数.从而被夹元素的总数必为偶数.另一方面,因为两个 i 之间恰好夹有 i 个数,$i=1,2,\cdots,1986$.故知被夹元素的总数又应为

$$1+2+\cdots+1986=\frac{1}{2}\times 1987\times 1986=1987\times 993,$$

这是一个奇数,矛盾.可见所要求的排列是不能实现的.

2·106　求所有具有如下性质的 $n\in N$.使得能够把 $2n$ 个数 1,1,2,2,3,3,…,n,n 排成一行,当 $k=1,2,\cdots,n$ 时,在两个 k 之间恰好夹有 k 个数.

(第 23 届国际数学奥林匹克候选题,1982 年)

[解]　设 $n\in N$ 具有题中要求的性质而 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$ 是相应的排列.当 $a_i=a_j=k$ 时,令 $m_k=\min\{i,j\}$,于是 $\max\{i,j\}=m_k+k+1$.因此,$2n$ 个下标之和为

$$\sum_{k=1}^{n}[m_k+(m_k+k+1)]=2\sum_{k=1}^{n}m_k+\frac{1}{2}n(n+3). \quad ①$$

另一方面,这 $2n$ 个下标之和又应为

$$\sum_{i=1}^{2n}i=n(2n+1). \quad ②$$

由 ① 和 ② 得到

$$2\sum_{k=1}^{n}m_k=n(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+3)=\frac{1}{2}n(3n-1). \quad ③$$

这意味着$\frac{1}{4}n(3n-1)$为整数.由于 n 与 $3n-1$ 奇偶性不同,所以其中的偶数必为 4 的倍数.于是仅有两种可能:$n=4l,4l-1,l\in N$.

下面用构造法证明,所有形如 $n=4l,4l-1(l\in N)n\in N$ 都具有题中所要求的性质.当 $n=4l,l\geqslant 2$ 时,满足要求的排列如下:

$4l-4,\cdots,2l,4l-2,2l-3,\cdots,1,4l-1,1,\cdots,2l-3,$

$2l,\cdots,4l-4,4l,4l-3,\cdots,2l+1,4l-2,2l-2,\cdots,2,$

$2l-1,4l-1,2,\cdots,2l-2,2l+1,\cdots,4l-3,2l-1,4l.$

其中每处的"…"都表示省略的诸项按等差级数变化且公差为 ± 2,删节号前的一项为首项而后一项为尾项.类似地,当 $n=4l-1,l\geqslant 2$时,满足要求的排列如下:

$4l-4,\cdots,2l,4l-2,2l-3,\cdots,1,4l-1,1,\cdots,2l-3,$

$2l,\cdots,4l-4,2l-1,4l-3,\cdots,2l+1,4l-2,2l-2,\cdots,2,$

$2l-1,4l-1,2,\cdots,2l-2,2l+1,\cdots,4l-3.$

最后,当 $n=3,4$ 时,满足要求的排列如下:

$$2,3,1,2,1,3;\quad 2,3,4,2,1,3,1,4.$$

2·107　设有限数集$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(n\geqslant 3)$满足条件 $a_1=a_n=0$ 和 $a_{k-1}+a_{k+1}\geqslant 2a_k,k=2,3,\cdots,n-1$,求证 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是非正数.

(波兰数学奥林匹克,1967 年)

[证]　设

$$a_j=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

如果 $1<j<n$,则由

$$2a_j\leqslant a_{j-1}+a_{j+1}\leqslant a_j+a_j=2a_j$$

便得 $a_{j-1}=a_j=a_{j+1}$. 同样地,若 $1<j-1<j$,则又可推得 $a_{j-2}=a_{j-1}=a_j=a_{j+1}$. 递推可得 $a_j=a_1$. 但已知 $a_1=0$,故 $a_j=0$,即 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是非正数.

2·108　能否选出100000个6位数的电话号码,使在同时划去它们的第 $k(k=1,2,3,4,5,6)$ 位数字之后,得到的恰为从00000到99999的所有5位数?

(第31届莫斯科数学奥林匹克,1968年)

[解]　令 S 是所有其数字之和为10的倍数的6位数的集合. 因为在任何前5位数字相同而末位数字从0到9的10个6位数中,恰有1个属于 S,故知 $|S|=100000$(包括前几位为0的6位数).

用 f_k 表示将 S 中的数对应到去掉第 k 位数字而得到的5位数的映射. 对于任何 $n,m\in S,n\neq m$,因为二者的数字之和都是10的倍数,故这两个6位数至少有两位数字互不相同. 所以,当去掉1位数字后,所得的两个5位数仍不相同. 这意味着 f_k 为单射. 又因 $|S|=100000$,故 f_k 又是到所有5位数的满射. 这就证明了集合 S 满足题中要求.

2·109　设自然数 $n>2$. 试构造一个由 n 个互异的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合,使得由其中任何两数之和所构成的集

$$S=\{a_i+a_j\mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}$$

所含的不同的数之个数最少. 还要构造一个由 n 个互异的数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 组成的集合,使得由其中任何两数之和所构成的集

$$T=\{b_i+b_j\mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}$$

所含的不同的数之个数最多.

(波兰数学奥林匹克,1968年)

[解]　设 $0<a_1<a_2<\cdots<a_n$,于是

$$a_1+a_2<a_1+a_3<\cdots<a_1+a_n<a_2+a_n<\cdots<a_{n-1}+a_n.$$

可见,S 中至少有 $2n-3$ 个不同的数. 令

$$a_i=i,i=1,2,\cdots,n,$$

则有 $a_i+a_j=i+j,3\leqslant i+j\leqslant 2n-1$. 易见,这时有

$$S=\{3,4,\cdots,2n-1\},$$

其中恰有 $2n-3$ 个互异的数.

因为集合 T 中至多有 C_n^2 个互异的数,故可令

$$b_i = 10^{i-1}, i = 1,2,\cdots,n.$$

于是 $b_i + b_j (i < j)$ 为一个 j 位数,其中右起第 i 位与 j 位两个数字为1,其余数字均为0.显然,对于不同的数对 (i,j),所得的和数 $b_i + b_j$ 也不同.这时 T 中恰有 C_n^2 个互异的数.

2·110 能否选择1983个不同的正整数,使它们都不大于 10^5 且其中任何三数都不是算术级数中的连续项?证明你的论断.

(第24届国际数学奥林匹克,1983年)

[解] 设 T 是所有这样的正整数的集合,其中每个数在3进表示中至多有11位数字,且每位数字都是0或者1,但不全为0.易知, $|T| = 2^{11} - 1 = 2047 > 1983$,且 T 中最大的数为 $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{10} = 88573 < 10^5$.

下面证明 T 中任何三个数都不是某算术级数中的连续三项.若不然,设 $x,y,z \in T$,使得 $x + z = 2y$,则 $2y$ 的3进表示中只含数字0和2,从而 x 和 z 的所有对应位的数字都相等,即有 $x = z$,此不可能.

综上,我们证明了确能选择1983个不同的正整数,使之满足题中要求.

2·111 二位数的集合 $\{00,01,\cdots,98,99\}$ 的子集 X 具有如下性质:在任一由数字所构成的无穷序列中,均有两个相邻数字构成 X 的元素.问 X 最少含多少个元素?

(第52届莫斯科数学奥林匹克,1989年)

[解] 对于任意的 $i,j \in \{0,1,\cdots,9\}$, X 中应当含有 ij 与 ji 之一,否则序列 $ijijij\cdots$ 不含 X 中的元素.这样的无序对 (i,j) 共有 $10 + C_{10}^2 = 55$ 个,所以有 $|X| \geqslant 55$.

另一方面,令

$$X = \{ij \mid 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant 9\},$$

则 $|X| = 55$,且对任一无穷序列,设 i 是其中的最小数码, j 为 i 的后一项,则 $ij \in X$.

综上可知, X 最少含有55个元素.

2·112 我们称一个非负实数集合 S 是好集,是相对于 S 中所有 x 和 y,或者 $x + y$ 在 S 中,或者 $|x - y|$ 在 S 中.例如,若 r 是正实数, n 是正整数,则 $S(n,r) = \{0,r,2r,\cdots,nr\}$ 就是好集.证明:每个除 $\{0\}$ 以外,有有限个元的好集,要么具有形式 $S(n,r)$,要么恰有4个

元.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1992 年）

［证］ 若 $A \neq \{0\}$ 是一个有限的好集，则它含有一个最小的正元 r 和一个最大的元 m.

对任何满足 $a+b>m$ 的元 $a<b$，必有 $b-a \in A$. 因此，对任何元素 a，$m-a \in A$. 特别地，$0=m-m \in A$.

若 $m=r$，则 $A=\{0,r\}=S(1,r)$.

若 $m \neq r$，则 $m-r \in A$. 若 $m-r=r$，则 $m=2r$. 若 A 包含第四个元 a，则 $r<a<2r$ 和 $2r-a \in A$，然而 $0<2r-a<r$ 与 r 为最小正元相矛盾. 因此

$$A=\{0,r,2r\}=S(2,r).$$

若 $m-r \neq r$，则 A 含有 $0,r,m-r,m$. 如果 A 不含其他的元素，则它构成一个好集.

假定 $A=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，其中 $n \geqslant 5$，
$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=m$ 和 $x_1=r$.

因为对所有的 i，$m-x_i \in A$，就必有

$$m-x_i=x_{n-i}.$$

注意到对于 $i<j<\frac{n}{2}$，有

$$x_{n-i}+x_{n-j}>m.$$

由此推出

$$x_{n-i}-x_{n-j}=(m-x_i)-(m-x_j)=x_j-x_i \in A.$$

我们必有

$$x_2-x_1=x_1=r, \quad x_3-x_1=x_2=2r,$$

等等. 因而对于 $1 \leqslant i<\frac{n}{2}$，$x_i$ 依次为 r 的整数倍.

先考虑 n 为偶数的情形.

对整数 $q \geqslant 2$，且 $qr<m-qr$，有

$$A=\{0,r,2r,\cdots,qr,m-qr,m-(q-1)r,\cdots,m-r,m\}.$$

但 $m-r+qr>m$，因此 $m-(q+1)r \in A$，它只能等于 qr，从而，$m=(2q+1)r$，$A=S(2q+1,r)$.

假定 n 是奇数，则对于整数 $q \geqslant 1$，且 $qr<\frac{m}{2}$，有

$$A=\{0,r,2r,\cdots,qr,\frac{m}{2},m-qr,$$
$$m-(q-1)r,\cdots,m-r,m\}.$$

但 $m-r+\frac{m}{2}>m$,因此$\frac{m}{2}-r=m-r-\frac{m}{2}\in A$,它只能等于 qr,从而,$m=2(q+1)r$,$A=S(2(q+1),r)$.

由此,推出 A 若不具有形式$S(k,r)$,则必恰有四个元.

2·113　是否存在集合 $M\subset N$,使得

(1) 任意大于 1 的 $n\in N$ 都可表为$n=a+b$,其中 $a,b\in M$;

(2) 如果 $a,b,c,d\in M$ 且都大于 10,则仅当 $a=c$ 或$a=d$ 时,有 $a+b=c+d$?

(第 24 届国际数学奥林匹克候选题,1983 年)

[解]　设满足题中要求的集合 M 存在.用 m_k 来表示集合M 中不超过 k 的数的个数,则适合 $10<a\leqslant k$ 的$a\in M$ 的个数为m_k-m_{10},而由这些数构成的不同数对的个数为

$$C_{m_k-m_{10}}^2=\frac{1}{2}(m_k-m_{10})(m_k-m_{10}-1).$$

令上述每对数 $a>b$ 都对应于它们的差$a-b$.于是这些差值互不相同.否则,设有 $a>b$ 与$c>d$,使得 $a-b=c-d$.因而 $a+d=c+b$.由(2)知$a=b$或$a=c$,前者与$a>b$矛盾,而后者意味着(a,b)与(c,d)是同一对数,矛盾.因为所有差值都小于 k,故有

$$k>C_{m_k-m_{10}}^2>\frac{1}{2}(m_k-m_{10}-1)^2.$$

因 $m_{10}\leqslant 10$,故对 $k=11,12,\cdots$,都有

$$m_k<\sqrt{2k}+m_{10}+1\leqslant\sqrt{2k}+11. \quad ①$$

另一方面,由①知任意 $n\in\{2,3,\cdots,2k\}$ 都可表为集合 M 中某两数之和,而且这两个数或者都不超过 k,或者恰有 1 个数 a 大于k 但小于 $2k$.因此,所有这种数对的个数既不小于 $2k-1$,又不大于

$$\frac{1}{2}m_k(m_k-1)+m_k(m_{2k}-m_k)=\frac{1}{2}m_k(2m_{2k}-m_k-1)$$
$$\leqslant\frac{1}{2}m_k(2m_{2k}-m_k).$$

于是对 $k>10$,有

$$m_k(2m_{2k}-m_k)\geqslant 4k-2. \quad ②$$

由 ① 有

$$m_{2k} < \sqrt{4k} + 11 = \alpha, m_k < \sqrt{2k} + 11 = \beta < \alpha.$$

因而由 ② 又有

$$\begin{aligned} 4k - 2 &\leqslant m_k(2\alpha - m_k) = [\alpha - (\alpha - m_k)][\alpha + (\alpha - m_k)] \\ &= \alpha^2 - (\alpha - m_k)^2 \leqslant 4k + 44\sqrt{k} + |2| - k(2 - \sqrt{2})^2, \end{aligned}$$

由此即得

$$k(2 - \sqrt{2})^2 - 44\sqrt{k} - 123 \leqslant 0,$$

上式左端是$\sqrt{k}$ 的二次三项式,首项系数为正,因而它不可能对所有 $k \in N$ 都取非正值,矛盾.这意味着满足题中要求的集合 M 不存在.

2·114 试证存在一个具有如下性质的正整数的集合 A,使对任何由无限多个素数组成的集合 S,都存在自然数 $k \geqslant 2, m \in A$ 及 $n \notin A$,m 和 n 均为 S 中 k 个不同元素的乘积.

(第 35 届国际数学奥林匹克,1994 年)

[证 1] 设 $q_1, q_2, \cdots, q_j, \cdots$ 是全体素数从小到大排成的数列,即有 $q_1 = 2, q_2 = 3, q_3 = 5, q_4 = 7, q_5 = 11, q_6 = 13, \cdots$.

令

$$A_1 = \{2q_i \mid i = 2,3,\cdots\},$$

$$A_2 = \{3q_iq_j \mid i < j, i = 3,4,\cdots, j = 4,5,\cdots\}.$$

一般地,对正整数 h,令

$$A_h = \{q_h q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_h} \mid h < i_1 < i_2 < \cdots < i_h\}. \quad ①$$

最后再令

$$A = \bigcup_{h=1}^{\infty} A_h. \quad ②$$

设 S 是由无限多个素数组成的集合

$$S = \{p_1, p_2, \cdots, p_t, \cdots\},$$

其中 $p_1 < p_2 < \cdots < p_t < \cdots$.于是有 $p_1 \geqslant 2, p_2 \geqslant 3, p_3 \geqslant 5, \cdots$.

设 $p_i = q_{ji}, i = 1,2,\cdots$.于是由 ① 知

$$m = p_1 p_2 \cdots p_{j_1+1} = q_{j_1} q_{j_2} \cdots q_{j_{j_1+1}} \in A,$$

$$n = p_2 p_3 \cdots p_{j_1+2} = q_{j_2} q_{j_3} \cdots q_{j_{j_1+2}} \notin A.$$

可见,只要取 $k = j_1 + 1$ 就可以了.

[证 2] 首先证明如下的引理.

引理　可以将自然数集 N 的至少含有两个元素的所有有限子集分成两类：甲类和乙类，使对任何一个自然数的无限集，总有自然数 $k \geqslant 2$ 及两个 k 元子集，这两个 k 元子集分属于甲类和乙类．

引理的证明　设 M 是 N 的一个 k 元子集，$k \geqslant 2$．如果在模 k 的意义下，M 中的 k 个元素属于同一个剩余类，则规定 M 属于甲类；否则 M 属于乙类．

对于 N 的任何一个无限子集 $B=\{b_1,b_2,\cdots\}$，取 $k=|b_1-b_2|+1 \geqslant 2$，于是 $b_1-b_2 \not\equiv 0 \pmod{k}$，所以 k 元子集 $\{b_1,b_2,\cdots,b_k\}$ 属于乙类．

另一方面，因为 B 为无限子集，故由抽屉原理知有 B 的一个无限子集 $\{b_{i_1},b_{i_2},\cdots\}$，使其中的所有元素都模 k 同余．从而 $\{b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_k}\}$ 属于甲类．这就证明了引理．

回到原题的证明．设所有素数从小到大排成的数列为 $p_1,p_2,\cdots,p_h,\cdots$，即有 $p_1=2,p_2=3,p_3=5,p_4=7,\cdots$．

我们按下述方法来构造集合 A．对于 N 的任何一个有限子集 $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$，$k \geqslant 2$，如果这个集合属于甲类，则令

$$p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k} \in A,$$

否则就令 $p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k} \notin A$．下面证明这样选取的集合 A 满足题中的要求．

对于任何无限个素数的集合 $S=\{p_{s_1},p_{s_2},\cdots\}$，其下标所成的集合 $\{s_1,s_2,\cdots\}$ 是 N 的一个无限子集．于是由引理知，存在两个 k 元子集 $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ 和 $\{j_1,j_2,\cdots,j_k\}$ $(k \geqslant 2)$ 分属于甲类和乙类．所以有

$$m=p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k} \in A, n=p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_k} \notin A.$$

2·115　把集合 $\{1,2,\cdots,10^6\}$ 划分成两个不交的子集，一个是所有可以表为一个完全平方数与一个完全立方数之和的数所成的子集，另一个是集中所有其余的数所成的子集．问哪一个子集元素较多？说明理由．

（第 22 届全俄数学奥林匹克，1996 年）

［解］　将第 1 个子集记为 A，按定义，对任何 $n \in A$，都存在 $k,m \in N$，使得

$$n=k^2+m^3.$$

由于 $n\leqslant 10^6$,所以 $k\leqslant 10^3$,$m\leqslant 10^2$,因而数对(k,m)的个数不超过 10^5 个,从而 $n\in A$ 的个数也不超过 10^5 个.可见,第 2 个子集的元数多.

2·116 设 $S=\{1,2,\cdots,10\}$.如果 S 的子集 T 至少含有 2 个元素且其中任意两个元素之差的绝对值大于 1,则称 T 具有性质 P,求 S 的所有具有性质 P 的不同子集的个数.

(中国上海市高中数学竞赛,1996 年)

[解] 设 a_n 是集合$\{1,2,\cdots,n\}$的具有性质 P 的所有不同子集的个数,并考察 a_{n+2}与 a_{n+1},a_n的关系.

集合$\{1,2,\cdots,n,n+1,n+2\}$的具有性质 P 的子集可以分为 3 类:

(1)2 元子集$\{j,n+2\}$,$j=1,2,\cdots,n$,共有 n 个.

(2)形如 $T_n\cup\{n+2\}$的子集,其中 T_n 为$\{1,2,\cdots,n\}$的具有性质 P 的子集,共有 a_n个.

(3)集合$\{1,2,\cdots,n,n+1\}$的所有具有性质 P 的子集,共有 a_{n+1} 个.

结合起来,得到递归关系式:

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n+n.$$

显然,$a_3=1$,$a_4=3$.于是由上面的关系式递推可得 $a_5=7$,$a_6=14$,$a_7=26$,$a_8=46$,$a_9=79$,$a_{10}=133$,即 S 的所有具有性质 P 的不同子集的个数为 133.

2·117 如果两个自然数是由同样的一组数字构成的,则称二者是相似的,例如 112,121,211 都是相似的.求证存在 3 个相似的 1995 位自然数,它们的各位数字都不是 0,且其中两个数之和等于第 3 个数.

(第 21 届全俄数学奥林匹克,1995 年)

[证] 注意,1995 是 3 的倍数,因而我们只要证明存在 3 个三位相似数满足题中其他要求就行了.

由于 $459+495=954$,故知三者合乎要求,将它们分别重复 665 次,所得的 3 个 1995 位数

$$\underbrace{459459\cdots459}_{\text{重复 665 次}},\underbrace{495495\cdots495}_{\text{重复 665 次}},\underbrace{954954\cdots954}_{\text{重复 665 次}},$$

便满足题中全部要求.

2·118 设 Z 表示所有整数的集合,对于固定的 $A,B,C\in Z$.令

$$M_1=\{x^2+Ax+B \mid x\in Z\},$$
$$M_2=\{2x^2+2x+C \mid x\in Z\},$$

求证对任何 $A,B\in Z$,都可选取 $C\in Z$,使得集合 M_1 与 M_2 互不相交.

(第 36 届国际数学奥林匹克预选题,1995 年)

[证] 如果 A 为奇数,则有

$$x(x+A)+B\equiv B(\bmod\ 2),$$

这表明 M_1 中的所有数都与 B 奇偶性相同,对于 M_2 中的数,有

$$2x(x+1)+C\equiv C(\bmod\ 2).$$

可见,为使 $M_1\cap M_2=\varnothing$,只须取 $C=B+1$ 即可.

如果 A 为偶数,则有

$$2x(x+1)+C\equiv C(\bmod\ 4).$$

又因 $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2$ 作为完全平方数模 4 时只能为 0 或 1,故由

$$x^2+Ax+B=\left(x+\frac{A}{2}\right)^2-\left(\frac{A}{2}\right)^2+B$$

知 M_1 中元素模 4 时只能与 $B,B+1$ 或 $B+3$ 同余.因而,当取 $C=B+2$ 时,$M_1\cap M_2=\varnothing$.

2·119 设 k,m,n 都是整数且满足 $1<n\leqslant m-1\leqslant k$,$S\subset\{1,2,\cdots,k\}$且 S 中任何 n 个不同元素之和都不等于 m,求子集 S 的元数 $|S|$ 的最大值.

(第 37 届国际数学奥林匹克预选题,1996 年)

[解] 记 $T=\{1,2,\cdots,k\}$.当 $m<\frac{1}{2}n(n+1)$时,T 中任何 n 个不同的数之和都不小于 $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)>m$.因而,$|S|$ 的最大值为 k,以下就 $m\geqslant\frac{1}{2}n(n+1)$的情形进行讨论.

设 l 为满足$(l+1)+(l+2)+\cdots+(l+n)>m$ 的最小自然数,于是集合$\{l+1,l+2,\cdots,k\}$中任何 n 个不同元素之和都大于 m.由于

$$nl+\frac{1}{2}n(n+1)=(l+1)+(l+2)+\cdots+(l+n)>m,$$

故得

$$l>\frac{m}{n}-\frac{1}{2}(n+1),$$

$$l=\left[\frac{m}{n}-\frac{1}{2}(n-1)\right].$$

由此可知，$|S|$的最大值不小于$k-l=k-\left[\frac{m}{n}-\frac{1}{2}(n-1)\right]$.

下面用反证法来证明，对于任何 $S\subset T$，$|S|>k-l$，S 中都存在 n 个不同的数，它们的和等于 m.

假设存在 $S\subset T$，$|S|>k-l$ 且 S 中任何 n 个不同元素之和都不等于 m. 令

$$X=\{A\mid A\subset T,|A|=n,\sum_{i\in A}i=m\},$$

$$X_j=\{A\mid A\in X,j\in A\},j=1,2,\cdots,k.$$

再令 $t=k-|S|$，于是 $t<l$，设 $T-S=\{x_1,x_2,\cdots,x_t\}$，因为 S 中任何 n 个不同元素之和都不等于 m，故对任何 $A\in X$，都必有 i，$1\leqslant i\leqslant t$，使得 $x_i\in A$. 从而有

$$X_{x_1}\cup X_{x_2}\cup\cdots\cup X_{x_t}=X.$$

当然有

$$\left|X_{x_1}\cup X_{x_2}\cup\cdots\cup X_{x_t}\right|=|X|. \qquad ①$$

接着证明

$$\left|X_{x_1}\cup X_{x_2}\cup\cdots\cup X_{x_t}\right|\leqslant\left|X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_t\right|. \qquad ②$$

不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_t$. 若$\{x_1,x_2,\cdots,x_t\}=\{1,2,\cdots,t\}$，则②式显然成立. 若$\{x_1,x_2,\cdots,x_t\}\neq\{1,2,\cdots,t\}$，则设 b 为不在$\{x_1,x_2,\cdots,x_t\}$中的最小自然数. 于是有

$$\left|X_{x_1}\cup X_{x_2}\cup\cdots\cup X_{x_t}\right|\leqslant\left|X_{X_1}\cup X_{X_2}\cup\cdots\cup X_{X_{t-1}}\cup X_b\right|. \qquad ③$$

事实上，③式等价于

$$\begin{aligned}&\left|X_{x_t}-(X_{x_1}\cup X_{x_2}\cup\cdots\cup X_{x_t-1})\right|\\ \leqslant&\left|X_b-(X_{X_1}\cup X_{X_2}\cup\cdots\cup X_{X_{t-1}})\right|.\end{aligned} \qquad ④$$

为简单计，将④式两端的集合分别记为 Y_1 和 Y_2. 任取 $A\in Y_1$，记 $A=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$，其中 $a_1<a_2<\cdots a_n$，于是由 Y_1 定义知 $x_t\in A$，$x_i\notin A$，$i=1,2,\cdots,t-1$. 若 $b\in A$，则 $A\in Y_2$. 若 $b\notin A$ 且 $x_t=a_n$，则因小于 b 的自然数都在$\{x_1,x_2\cdots x_t\}$中而且 $a_1\notin\{x_1,x_2,\cdots,x_t\}$，故有 $b\leqslant a_1$，又因 $b\notin A$，所以 $b<a_1$. 由于 $a_{n-1}+a_n\leqslant m$，故 $a_{n-1}+a_n-b\leqslant m-1\leqslant k$. 所以有

$$A'=\{b,a_1,a_2,\cdots,a_{n-2},a_{n-1}+a_n-b\}\in Y_2.$$

若 $b\notin A$ 且 $x_t=a_r, 1\leqslant r\leqslant n-1$，则因 $\{x_1,x_2,\cdots,x_t\}\neq\{1,2,\cdots,t\}$，故 $b<x_t=a_r$，从而有 $a_n<a_n+a_r-b\leqslant k$. 于是又有

$$A''=\{a_1,\cdots,a_{r-1},b,a_{r+1},\cdots,a_{n-1},a_n+a_r-b\}\in Y_2.$$

定义映射

$$Y_1\ni A\longrightarrow\begin{cases}A'\in Y_2,\text{当 } b\notin A \text{ 且 } x_t=a_n,\\ A''\in Y_2,\text{当 } b\notin A \text{ 且 } x_t=a_r,r<n.\end{cases}$$

则易见这个映射是个单射，故知④式成立.

若 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{t-1},b\}=\{1,2,\cdots,t\}$，则②式成立. 若 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{t-1},b\}\neq\{1,2,\cdots,t\}$，则可重复上面的程序，至多重复 t 次，必可得到集合 $\{1,2,\cdots,t\}$. 可见，总有②式成立.

将①与②结合起来，得到

$$|X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_t|\geqslant|X|.$$

又因 $X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_t\subset X$，所以有

$$X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_t=X.$$

这意味着集合 $\{t+1,t+2,\cdots,k\}$ 中的任何 n 个不同数之和都不等于 m. 又因 $t<l$，故有

$$nt+\frac{1}{2}n(n+1)=(t+1)+(t+2)+\cdots+(t+n)\leqslant m.$$

由于 $k\geqslant m-1$，故有

$$t+n\leqslant m-(n-1)t-\frac{1}{2}n(n-1)\leqslant k.$$

从而有 $\{t+1,t+2,\cdots,t+n-1,m-(n-1)t-\frac{1}{2}n(n-1)\}\subset\{t+1,t+2,\cdots,k\}$ 且这 n 个不同数之和等于 m，矛盾.

综上可知，当 $m\geqslant\frac{1}{2}n(n+1)$ 时，$|S|$ 的最大值为 $k-\left[\frac{m}{n}-\frac{n-1}{2}\right]$.

2·120 设 $S=\{1,2,\cdots,17\}$ 而 $\{a_1,a_2,\cdots,a_8\}$ 为 S 的一个 8 元子集. 求证

(1)存在 $k\in N$，使得方程 $a_i-a_j=k$ 至少有 3 组不同的解；

(2)对于 S 的 7 元子集$\{a_1,a_2,\cdots,a_7\}$,(1)中的结论不再总是成立.

(加拿大数学奥林匹克,1999 年)

[证] (1)若不然,则存在 S 的一个 8 元子集$\{a_1,a_2,\cdots,a_8\}$,使对任何 $k\in N$,方程 $a_i-a_j=k$ 都至多有两组解,即$|a_i-a_j|$($1\leqslant i<j\leqslant 8$)共 28 个差数中,不存在 3 个值相等的差数.

不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_8$,于是 $a_8-a_1\leqslant 16$,亦即有

$$(a_8-a_7)+(a_7-a_6)+\cdots+(a_2-a_1)\leqslant 16 \quad ①$$

既然①式左端的 7 个差数中没有 3 数相同,故必有

$$(a_8-a_7)+(a_7-a_6)+\cdots+(a_2-a_1)\geqslant 1+1+2+2+3+3+4=16. \quad ②$$

①和②结合起来表明,这 7 个差数中恰有 1,2,3 各两个而另一个是 4.

考察这 7 个差数的排列情形,由于已经有两个 2,两个 3 和 1 个 4,所以必有

(i)两个 1 不能相邻,1 和 2 也不能相邻;

(ii)1 和 3,2 和 2 至多有 1 组相邻.

先看两个 1 与两个 2 这 4 个差数的排列顺序,由对称性知只有下列 4 种不同情形:

(a)1,1,2,2; (b)1,2,1,2; (c)1,2,2,1; (d)2,1,1,2.

余下的 3 个差数 3,3,4 将放入这 4 个数的空隙中.易见,在(b)和(d)两种情形中,依次相邻的 3 对数在 7 个差数的排列中都不能相邻,所以 3 个空隙中必须各放入 3,3,4 中的一个数,从而两个 3 都与 1 相邻,导致有 3 个差值为 4,矛盾,对于(a),两个 1 之间不能只夹 3,所以 4 必须夹在两个 1 之间.于是 1 与 2 之间只能插入 3.这样一来,两个 2 也不能相邻,只能插入另一个 3.这导致 4 个差值为 5,矛盾.对于(c),1 与 2,2 与 1 之间不能都填 3,必有一个填 4 而另两个空隙中填 3,导致 3 个差值为 5,矛盾.

(2)考察 S 的 7 元子集$\{1,2,4,7,11,16,17\}$.它的 21 对元素的差值(大数减小数)中有 1,3,5,6,9,10,15 各两个,2,4,7,12,13,14,16 各 1 个.没有 3 个差数有相同的值,即(1)中的结论不再成立.

2·121 设 M 为集合$\{1,2,\cdots,25\}$的一个子集,它的任何两个不交

的子集中的各数之和都不相等，求 M 中所有数之和的最大值.

（中国国家集训队测验题，1995 年）

［解］ 集合

$$M_0=\{25,24,23,21,18,12\}$$

满足题中的要求，其中的 6 数之和为 123，故所求的最大值不小于 123.

记 $A=\{1,2,\cdots,25\}$. 我们首先证明，A 的任何 7 元子集 S 都不能满足题中要求. 若不然，这时 S 的元数不大于 4 的所有非空子集的个数为

$$C_7^1+C_7^2+C_7^3+C_7^4=98,$$

而这些子集中每个集中所有数之和都是不大于 $22+23+24+25=94$ 的自然数. 由抽屉原理知其中必有两个子集的各数之和相等，矛盾.

其次，我们证明 $\{25,24,\cdots,19\}$ 的任何 5 元子集都不能满足题中要求. 事实上，5 元子集中的 5 个数两两作差，共有 10 个差，每个差都是不大于 6 的自然数. 因而，或者有 3 个差值相等，或者有两个差值相等且差值不小于 4. 两种情形都导致两个差值相等，且组成两个差值的 4 个数互不相同，从而可组成和数相等的两个不交的 2 元子集.

上述论证表明，满足要求的集合 M 是 6 元集合且其中较大的 5 元之和不大于 $25+24+23+21+18=111$. 可见，为使和数大于 123，只能使最小数变大. 但若前 5 数不动，则最小数大于 12 时不满足要求，所以，当最小数变大时，前面 5 数中必有某数变小，而且若只有 1 个数减 1 时，也不能满足要求. 若前 5 个数共减少的值不小于 2 时，为使和数大于 123，最小数应不小于 15.

最后证明，$\{25,24,\cdots,15\}$ 的任何 6 元子集都不满足题中要求. 若不然，6 个数共可组成 15 个差，每个差都是不大于 10 的自然数. 由前面证明知，不能有 3 个差值相等，也不能有值不小于 6 的两个差值相等，故 15 个差值只能是 1,2,3,4,5 各 2 个和 6,7,8,9,10 各 1 个.

这样一来，6 元子集 T 中必有 25 和 15，且 24 和 16 中必有 1 个，不妨设为 24. 于是 $16\notin T$. 又因有两个差值为 5，所以 $20\in T$，除了 $25-24=1$ 之外，还应有 1 个差值为 1 且二者必有公共元，所以 $23\in T$. 因此 $22,21\notin T$. $24-20=4$，且还有一个差值为 4，故 $16\in T$，矛盾，这就完成了全部证明.

所求的最大值为 123.

2·122 设 $S=\{1,2,\cdots,98\}$,求最小自然数 n,使得 S 的任一 n 元子集中都可以选出 10 个数,无论怎样将这 10 个数均分成两组,总有一组中存在一个数与另外的 4 个数都互质,而另一组中总有一个数与另外的 4 个数都不互质.

(第 13 届中国中学生数学冬令营,1998 年)

[解] 首先,S 中共有 49 个偶数,它们组成的 49 元子集不能满足题中要求,故知所求的最小自然数 $n\geqslant 50$.

为证 S 的任一 50 元子集 T 中必有 10 个数满足题中要求,我们证明如下的加强命题:S 的任一 50 元子集 T 中必可选出 10 个数,使其中的一个数与另外的 9 个数都互质而另外的 9 个数两两都不互质.

令

$M_1=\{2k\mid k=1,2,\cdots,49\}$,

$M_2=\{6k-3\mid k=1,2,\cdots,16\}$,

$M_3=\{5,25,35,55,65,85,95,77,91\}$,

$M_4=\{7,49,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47\}$,

$M_5=\{1,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97\}$,

显然,$|M_1|=49$,$|M_2|=16$,$|M_3|=9$,$|M_4|=13$,$|M_5|=11$,$M_i\cap M_j=\varnothing$,$i\neq j$ 且 $M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4\cup M_5=S$.

设存在 $T\subset S$,$|T|=50$ 且使加强命题的结论不成立.

(1)若 $|T\cap M_2|\geqslant 9$,则由反证假设知下列 15 个奇数

$$\{37,41,43,47\}\cup M_5$$

都不在 T 中,故 T 中至少有 16 个偶数.

(2)若 $|T\cap M_2|\leqslant 8$,则 M_2 中的奇数至少有 8 个不在 T 中.从而 T 中至少有 9 个偶数.由反证假设知 $T\cap M_5=\varnothing$,故 T 中至少有 20 个偶数.

(3)设 $|T\cap M_1|\geqslant 16$,因为对于 $M_4\cup M_5$ 中的每个奇数,S 中与之不互素的偶数的个数都不超过 7 个,所以这 24 个奇数都不在 T 中,从而 T 中至少有 25 个偶数.

(4)设 $|T\cap M_1|\geqslant 25$.因为对于 $M_3\cup M_4\cup M_5$ 中的每个奇数,S 中与之不互质的偶数的个数都不超过 15 个,所以这 33 个奇数都不在

T 中.从而 T 中至少有 34 个偶数.

(5)设 $|T\cap M_1|\geqslant 34$.因为对于 M_2 中的每个奇数,S 中与之不互质的偶数的个数都不超过 23 个,从而 S 中每个奇数都是如此.故由反证假设知它们都不能在 T 中.这导致 $|T|\leqslant 49$,矛盾.

综上可知,所求的最小自然数 $n=50$.

2·123 是否存在大于1 的自然数 n,使得能将自然数集 N 划分成 n 个子集,当从任意 $n-1$ 个子集中各任取一个数时,所得的 $n-1$ 个数之和恰好属于另一个子集?

(第 36 届国际数学奥林匹克预选题,1995 年)

[解] 不存在.

若不然,设有 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,使得

$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=N,A_i\cap A_j=\varnothing,1\leqslant i<j\leqslant n$.且满足题中要求,显然有 $n\geqslant 3$.

引理 设 $a,b\in A_1$,且 $a\neq b$,$C\in A_1$ 且 C 可以与 a,b 之一相同,则 $a+c$ 与 $b+c$ 必属于同一个子集.

引理的证明 设 $a+c$ 与 $b+c$ 属于不同的子集.

(1)设 $a+c$ 与 $b+c$ 之一属于 A_1,另一个属于另外的子集,不妨设 $a+c\in A_1,b+c\in A_3$.取 $a_i\in A_i,i=3,4,\cdots,n$,于是按题中要求有 $b+a_3+a_4+\cdots+a_n\in A_2$.因此又有

$$(a+c)+(b+a_3+a_4+\cdots+a_n)+a_4+\cdots+a_n\in A_3. \quad ①$$

另一方面,又有 $a+a_3+a_4+\cdots+a_n\in A_2$.于是

$$(a+a_3+a_4+\cdots+a_n)+(b+c)+a_4+\cdots+a_n\in A_1. \quad ②$$

②与①矛盾.

(2)设 $a+c$ 与 $b+c$ 都不属于 A_1.不妨设 $a+c\in A_2,b+c\in A_3$.这样,按题中要求又有

$$b+(a+c)+a_4+\cdots+a_n\in A_3,$$

$$a+(b+c)+a_4+\cdots+a_n\in A_2,$$

矛盾.

回到原题的证明.任取 $x_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n$,记 $S=x_1+x_2+\cdots+x_n$ 并令 $y_i=S-x_i$,于是 $y_i\in x_i$.不妨设 $S\in A_1$.若 $x_i=y_i$,则 $2x_i=x_i+y_i=S\in A_1$.若 $x_i\neq y_i$,则由引理知 $2x_i=x_i+x_i$ 与 $x_i+y_i=S$ 属

于同一个子集，故也有 $2x_i \in A_1$. 此外，当固定 x_j，$j \neq i$ 而让 $x_i \in A_i$ 在 A_i 中变动时，S 也随之变动. 但由引理知，变动的 S 值始终属于 A_1，由此可知，所有的偶数都在 A_1 中.

下面再证 A_1 中的数都是偶数. 设有 $x_1 \in A_1$ 为奇数. 取 $x_i \in A_i$，$i=3,4,\cdots,n$，于是它们都是奇数. 因为 $x_1+x_3+x_4+\cdots+x_n \in A_2$，故为奇数. 所以 n 为偶数. 又因 $2 \in A_1$，所以 $2+x_3+x_4+\cdots+x_n \in A_2$ 应为奇数，但 $x_3+x_4+\cdots+x_n$ 为偶数，矛盾.

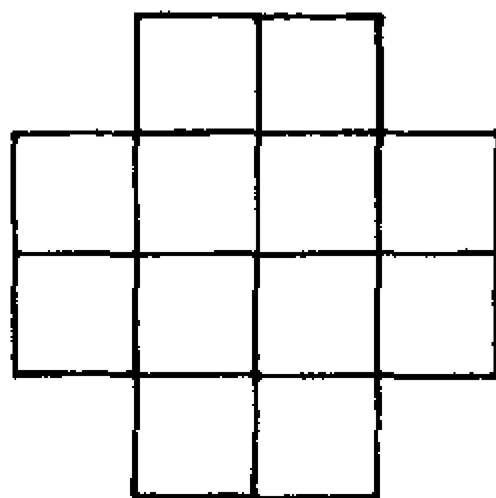
综上可知，满足要求的整数不存在.

第三章 填数问题

3·1 在无穷大方格纸的每个方格中都写着一个实数.求证存在某个方格,其中所写的数不超过在它周围的8个方格中的至少4个方格中所写的数.

(第16届全苏数学奥林匹克,1982年)

[证] 在右图所示的12个方格中的最小的数便满足条件.



3·2 在一张无限大的方格纸的每个方格中都填写一个实数,使得每个数都等于它上下左右四个邻格中所填的数的算术平均值.从这张纸上剪下一个矩形方格数表来,求证表中的最大数一定在表的边格中出现.

(第19届莫斯科数学奥林匹克,1956年)

[证] 设表中最大数为 m 且方格 A 中的数为 m.若 A 为边格,则结论成立;若 A 不是边格,则它的4个邻格中的数都是 m.设 B 是 A 的4个邻格中与边界最近的一个.若 B 为边格,则问题解决;若 B 不是边格,则像上面一样又可在 B 的邻格中找到一个离边界更近的方格 C,其中所填的数为 m.显然,经有限次推证后,总可在边格中找到填有 m 的方格.

3·3 在圆的一条直径的两端点标上数1,把所得的每一个半圆周再等分,并在两个半圆的分点写上其端点的标数之和(第一步).然后再等分所得到的4条弧,并在它们的分点写上其端点的两数之和(第二步).求这样进行 n 步后,圆上所标出的一切数之和.

(第3届全俄数学奥林匹克,1963年)

[解]　将第 k 步标数之后所有数字之和记为 S_k，则 $S_0=2$，$S_1=6$. 在第 $k+1$ 步进行过程中，由于 S_k 中每个数所在的点都恰为两条弧的端点，故每个数都被用了两次，所以有 $S_{k+1}=S_k+2S_k=3S_k$. 由此递推即得

$$S_n=3S_{n-1}=3^nS_0=2\times3^n,$$

即进行 n 步后，圆上所标出的一切数之和为 2×3^n.

3·4　将从 1 到 64 的所有整数填入 8×8 的方格表，求证可以从表中找出两个相邻的数(两数所在的方格有公共边)，使得两数之差不小于 5.

（第 26 届莫斯科数学奥林匹克，1963 年）

[证]　若不然，则任何相邻两数之差均小于 5. 考察 64 所在的方格 A 与 1 所在的方格 B. 如果我们把从一个方格走到相邻的方格称为 1 步，那么从方格 A 走到 B 至多 14 步. 每走一步方格中的数至多减少 4，走 14 步至多减少 56，B 中的数不能为 1，矛盾.

3·5　在 $n\times n$ 的方格表中，任意填入 n^2 个互不相等的实数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 如图，取每行的最大数得 n 个数，其中最小的一个是 x，再取每列的最小数，又得 n 个数，其中最大的一个是 y. 试比较 x^n 与 y^n的大小.

a_{11}	$\cdots$		$\cdots$	a_{1n}
$\vdots$				$\vdots$
$\vdots$				$\vdots$
a_{n1}	$\cdots$		$\cdots$	a_{nn}

（中国上海市数学竞赛，1982 年）

[解]　设 $x=a_{ij}$，$y=a_{pq}$.

则由题意得

$$a_{ij}\geqslant a_{iq}\geqslant a_{pq}.$$

即有

$$x\geqslant y.$$

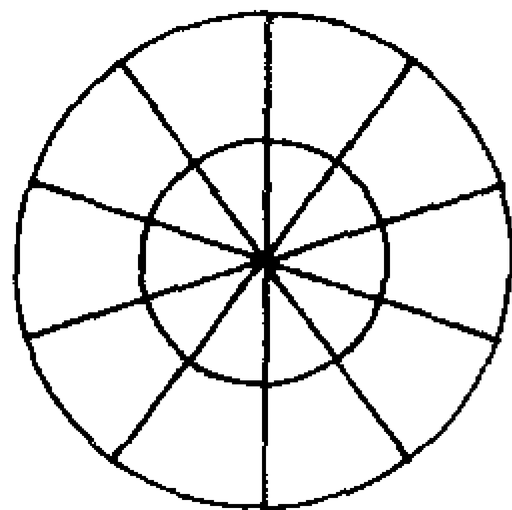
(1) 当 n 是奇数时，$x^n\geqslant y^n$.

(2) 当 n 是偶数时，若 $x\geqslant y\geqslant0$，则 $x^n\geqslant y^n$，若 $0\geqslant x\geqslant y$，则 $x^n\leqslant y^n$，若 $x\geqslant0\geqslant y$，则当 $x\geqslant-y$ 时，$x^n\geqslant y^n$，当 $x<-y$ 时，$x^n<y^n$.

3·6　如果一个圆盘分内外两圆，均等分成 10 个“格子”，且分别将 1,2,3,4,…,10 这 10 个数填入内外圈的十个格子中(每格填一数，不一定按大小顺序)，若内圆可以绕圆心转动，求证在转动中一定有某个时刻，内圈的十个数与外圈的十个数每对乘积之和大于 302.

（中国浙江省初中数学竞赛，1990 年）

[证] 记十种不同位置的100对数中每对数乘积之和为 S,则



$$S=(1+2+\cdots+10)(1+2+\cdots+10)=3025.$$

于是总有某个时刻 t,内圈的十个数与外圈的十个数,每对数乘积之和 S_t 不小于十种位置的100对数每对乘积之和的算术平均值,即

$$S_t\geqslant\frac{S}{10}=\frac{3025}{10}>302.$$

3·7 正十二面体有20个顶点,30条棱.每一个顶点是3条棱的交点,这3条棱的另一端点是正十二面体的另外3个顶点,我们称这3个顶点与前1个顶点是相邻的.在每个顶点处放上一个实数,要求每个顶点所放的实数恰是与该顶点相邻的3个顶点处所放实数的算术平均值.设 M,m 分别是这20个实数中最大的和最小的,问 $M-m$ 取值范围是多少?

(第2届希望杯数学竞赛,1991年)

[解] 设点 P_1 处放上 m.

若 P_2,P_3,P_4 与 P_1 相邻,则 P_2,P_3,P_4 所放的数都不小于 m.若 P_2,P_3,P_4 处所放的数中有一个比 m 大,则 P_1 处就不应放 m.所以 P_2,P_3,P_4 处只能放 m.

再考虑与 P_2,P_3,P_4 相邻的点,同样分析下去,它们也只能放 m.所以正十二面体各顶点都只能放 m.

于是 $M=m,M-m=0$.

3·8 沿着圆周放了 $n(n\geqslant4)$ 个非负数,它们的和为1,现将每两个相邻数相乘,求证所得的 n 个乘积的和不大于 $\frac{1}{4}$.

(第47届莫斯科数学奥林匹克,1984年)

[证] 设 a,b,c,d 是圆周上依次排列的4个数且 $a\geqslant b$,则有 $ab+bc+cd\leqslant a(b+c)+(b+c)d$.可见,当去掉两个数 b,c 而代之以 $b+c$ 时,所论和数增大.于是当 n 为奇数时,可通过上述程序化为偶数的情形.

设 $n=2k$,n 个数为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,于是有

$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1$

$$\leqslant (x_1 + x_3 + \cdots + x_{n-1})(x_2 + x_4 + \cdots + x_n) \leqslant \frac{1}{4}.$$

3·9 在 17×17 的方格纸的每个方格中都任意填入 1,2,…,70 之中的一个数.求证存在中心分别为 A,B,C,D 的 4 个方格,使得 $AB = CD, AD = BC$,且在中心为 A 和 C 的两个方格中所填的两个整数之和等于在以 B 和 D 为中心的两个方格中所填的两个整数之和.

(第 17 届莫斯科数学奥林匹克,1954 年)

[证] 把关于正方形中心对称的每两个方格划为一组,共可得到 144 组方格.每组方格中所填的两数之和为 2,3,…,140 之中的一个数.由抽屉原理知必有两组方格,它们中所填的两数之和相等.把第 1 组方格的中心标上 A 和 C,另一组方格的中心标上 B 和 D 便满足题中的要求.

3·10 有两个同心圆盘,各分成 n 个相等的小格,外盘固定,内盘可以转动,内外两盘小格中分别填有实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$.且满足条件

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 0,$$
$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n < 0.$$

求证可将内盘转到一个适当位置,使两个盘的小格对齐,这时,两个盘 n 个对应小格内实数乘积的和为一正数.

(中国安徽省数学竞赛,1978 年)

[证] 假定无论两个圆盘的小格如何对齐,n 个对应数字乘积的和都不是正数,则

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leqslant 0,$$
$$a_2b_1 + a_3b_2 + \cdots + a_1b_n \leqslant 0,$$
$$a_3b_1 + a_4b_2 + \cdots + a_2b_n \leqslant 0,$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$a_nb_1 + a_1b_2 + \cdots + a_{n-1}b_n \leqslant 0.$$

将上述 n 个不等式相加得

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leqslant 0.$$

而由已知

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 0,$$
$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n < 0,$$

从而

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) > 0.$$

导致矛盾.

因此,必有一个时刻,使两个圆盘小格对齐时,n 对对应小格的实数乘积之和为一正数.

3·11　在8×8的正方形方格表的每个方格中填入1个非负数.已知64个数的和是1956,两条对角线上的16个数之和是112,并且关于每条对角线对称的位置上的数都相同.求证每行数之和都小于518.

(第19届莫斯科数学奥林匹克,1956年)

[证]　若不然,设第 i 行数之和不小于518,于是由对称性知,第 i 列,第 $9-i$ 行和 $9-i$ 列数之和也都不小于518.故这两行两列数的总和不小于 $518 \times 4 - 112 = 1960 > 1956$,矛盾.

		×					×	
i	×	×	×	×	×	×	×	×
		×					×	
		×					×	
		×					×	
		×					×	
$9-i$	×	×	×	×	×	×	×	×
		×					×	
		i					$9-i$	

3·12　设一个由0和1组成的有限数列满足下列条件:

(1) 如果在数列的某一处连续取出5个数,并且在另外任何一处也连续取出5个数,那么这两个有序五数组将不相同(两组可以部分重叠,例如0110101).

(2) 如果把数字0或者1添加到数列的右边,则性质(1)不再成立.求证这个数列的前4项与后4项完全相同.

(第3届全苏数学奥林匹克,1969年)

[证]　设 $abcd$ 为数列的最后4项.在数列中一定有连续5项为 $abcd0$ 和 $abcd1$,否则可以把0或1加到数列右面而使(1)仍然成立,此与性质(2)矛盾.这样一来,有序四数组 $abcd$ 在数列中共出现3次.如果数列前4项不是 $abcd$,则3组 $abcd$ 之前都还有数字,而它们只能是0或者1,这就导致两个有序五数组完全相同,矛盾.由此可知数列前4项必为 $abcd$.

3·13　按如下规则将1至n^2的所有整数填入 $n \times n$ 的正方形方格表:1可随意填入某一方格,2所在的行应与1所在的列序号相同,3所在的行应与2所在的列序号相同,如此下去.问1所在的行中所有数之

和与 n^2 所在的列中所有数之和相差多少？

（第22届莫斯科数学奥林匹克，1959年）

［解］ 设1填在 i 行 j 列的方格中．当第 i 列已有 $n-1$ 个数时，下一个数将把第 i 行方格填满．故为了使填数过程能够进行到最后，n^2 必在第 i 列中．

除了数1所在的第 i 行之外，其余每行都比序号相同的列中所有数之和大 n．$n-1$ 行数之和比相同序号的 $n-1$ 列数之和大 $n(n-1)$．又因 n 行数之和与 n 列数之和相等．故 n^2 所在列中所有数之和比1所在行中所有数之和大 $n(n-1)$．

3·14 在 100×100 的方格棋盘的每个格子中都写上一个整数，使得任意两个相邻（有公共边）的方格中的两数之差（非负的）都不超过20．求证棋盘上至少有3个方格中写有同一个数．

（基辅数学奥林匹克，1974年）

［证］ 设 m 是棋盘格子所写的数中最小的一个数．因为相邻两数之差不超过20，故当从一个方格走到它的一个邻格（称为走一步）时，格中数的值的变化不超过 ±20．从数 m 所在的方格走到离它最远的方格，至多要走198步．所以，棋盘上的任一数 x 都满足关系式

$$m\leqslant x\leqslant m+198\times20=m+3960,$$

即棋盘上的10000个数至多有3961个不同的值．由抽屉原理便知，棋盘上必有3个方格，其中写有同一个数．

3·15 将自然数 $1,2,\cdots,k^2$ 列成正方形数表如图所示，然后从表中任意选定1个数，随后删掉该数所在的行和列．再对剩下的 $(k-1)^2$ 个数的正方形数表作同样处理，如此下去，共作 k 次选数程序．试求被选中的 k 个数之和．

$$\begin{array}{llll}1, & 2, & \cdots, & k,\\ k+1, & k+2, & \cdots, & 2k,\\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots,\\ (k-1)k+1, & (k-1)k+2, & \cdots, & k^2.\end{array}$$

（第18届莫斯科数学奥林匹克，1955年）

［解］ 把所给的数表分成下面的两个数表：

$$\begin{array}{ll}1,2,\cdots,k, & 0,0,\cdots,0,\\ 1,2,\cdots,k, & k,k,\cdots,k,\\ \cdots,\cdots,\cdots,\cdots, & \cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\\ 1,2,\cdots,k, & (k-1)k,(k-1)k,\cdots,(k-1)k.\end{array}$$

容易看出,原数表中每个数等于分成的两个数表中处于同样位置的两数之和.因而所选的 k 个数由于既不同行又不同列,其和恰为

$$S=(1+2+\cdots+k)+(0+k+\cdots+(k-1)k)$$
$$=\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{1}{2}k^2(k-1)=\frac{1}{2}k(k^2+1).$$

3·16 在 $n\times n$ 的正方形方格表的每个方格中都填入 1 到 n 之间的一个自然数,使得在每一行和每一列方格中都出现它们中的每一个数.如果 n 为奇数且表中所填的数关于主对角线对称,则在主对角线上也必然出现从 1 到 n 的每一个整数.

(第 18 届莫斯科数学奥林匹克,1955 年)

[证] 在 $n\times n$ 数表中,从 1 到 n 的每一个自然数都恰有 n 个.因为表中所填的数关于主对角线对称,故对任何 $j,1\leqslant j\leqslant n$,不在主对角线上的数 j 的个数是偶数,所以,在主对角线上的 j 的个数是奇数.因为从 1 到 n 每个自然数在主对角线上的个数都是奇数,所以从 1 到 n 每个自然数在主对角线上都恰有 1 个.

3·17 设 n 为奇数,在 $n\times n$ 的正方形方格表的每个 1×1 的方格中任意地填上 1 或 -1,在每一列的下面写上这一列中所有数的乘积,而在每一行的右面写上这一行中所有数的乘积.求证这 $2n$ 个乘积之和不能为零.

(第 2 届全俄数学奥林匹克,1962 年)

[证 1] 显然,每个乘积都是 1 或 -1.当将数表中的某个 -1 变成 1 而保持其他数不变时,这个 -1 所在行和列的乘积同时随之变号而其他的乘积不变,故乘积之和或减少 4,或不变或增加 4,换句话说,乘积之和是模 4 不变的.

又因当表中所有数都是 1 时,$2n$ 个乘积之和为 $2n$.已知 n 为奇数,故 $2n\equiv 2\pmod 4$.从而任意填有 1 和 -1 的表的 $2n$ 个乘积之和也是模 4 等于 2,当然不等于零.

[证 2] 把第 i 行,第 j 列中所有数之积分别记为 a_i 和 b_j,$i,j=1,2,\cdots,n$.设方格表上共有 k 个方格中写有 -1,于是其余的 n^2-k 个方格中都写有 $+1$.因而有

$$a_1a_2\cdots a_n=(-1)^k,b_1b_2\cdots b_n=(-1)^k,$$
$$a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_n=1.$$

这表明 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 中 -1 的个数为偶数. 因为 n 为奇数,故这 $2n$ 个数中 -1 个数与 $+1$ 个数不相等,其和当然不能等于0.

3·18 已知 $m\times n$ 矩形数表中的每一个数,都等于它所在的行的各数之和与所在列的各数之和的乘积,求证或者数表中所有的数都为零. 或者所有数之和等于1.

(第20届莫斯科数学奥林匹克,1957年)

[证] 分别用 S_k,T_j 来记数表中第 k 行和第 j 列的所有数之和,并以 A 记表中所有数之和,用 a_{kj} 表示第 k 行 j 列相交处的数. 于是有

$$S_1+S_2+\cdots+S_m=A=T_1+T_2+\cdots+T_n.$$

按已知有

$$a_{kj}=S_k\cdot T_j,k=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n. \qquad ①$$

在上式中对 j 从1到 n 求和,得到

$$S_k=S_k(T_1+T_2+\cdots+T_n)=S_k\cdot A,k=1,2,\cdots,m. \qquad ②$$

由此可见,或者 $A=1$,或者所有 S_k 均为零. 若为后者,则由①知表中所有数都为零.

3·19 在一张有4行的方格表的第一行每格中任意写一个自然数,这些数中可以有相同的数. 在第二行中按如下规则填数:从左向右看第一行中的数,当看到 a 时,如果 a 已经在第一行中到此为止的部分中出现了 k 次,则在 a 下面的空格中写上 k. 按同样规则可以由第二行写出第三行,由第三行写出第四行. 求证第二行与第四行相同.

(第15届全苏数学奥林匹克,1981年)

[证] 设在表格的某一列中从上面算起的前3个数是 a,m 和 n. 因为 m 表示第一行中到这一列为止 a 出现的次数,故第二行中在此 m 之前必已依次出现了 $1,2,\cdots,m-1$. 第三行的 n 表示第二行的 m 已出现了 n 次,从而在第二行中 m 之前,$1,2,\cdots,m-1$ 都至少出现了 n 次,而大于 m 的任何数出现的次数都小于 n. 从而 n 的下方的第四行空格中必为 m,即与第二行的数相同.

3·20 在平面上标出了不在一条直线上的若干个点,并在每点写一个实数. 已知在任意一条至少有两个标定点的直线上,所有标定点上所写的实数之和都为零,求证平面上的所有实数之和为零.

(第11届全苏数学奥林匹克,1977年)

［证］ 若不然，则所有实数之和 $S \neq 0$. 任取一个标定点 x，在点 x 写的数为 a_x，且经过点 x 共有 $n_x > 1$ 条含有其他标定点的直线. 由于已知这 n_x 条直线中的每条直线上的所有实数之和都为零，故有

$$S + (n_x - 1)a_x = 0.$$

这意味着 a_x 与 S 的符号相反. 由点 x 的任意性知标定点所写的数全都与 S 反号，此不可能，故必有 $S = 0$.

3·21 已知在 $n \times n$ 个方格的正方形数表中，所有数都是整数且任何相邻(指有公共边)两个方格中的数的差的绝对值都不超过 1. 求证有一个数在表中至少出现(1) $\left[\frac{n}{2}\right]$ 次；(2) n 次.

（第 16 届全苏数学奥林匹克，1982 年）

［证］ 只证(2). 设 m_k, M_k 分别为第 k 列数的最小值和最大值，$k = 1,2,\cdots,n$. 对于这 $2n$ 个数，或者存在整数 x，使 $m_k \leqslant x \leqslant M_k$，$k = 1,2,\cdots,n$；或者存在 p 和 q，使得 $m_p > M_q$. 若为前者，则每列中都有数 x，x 至少在表中出现 n 次. 若为后者，则每行的最大值都不小于 m_p，最小值都不大于 M_q. 所以每行都必有数 m_p，它至少出现 n 次.

3·22 把 n 个互不相同的实数按递增顺序填入 $3 \times n$ 方格表的第一行，然后再把这 n 个数以某种顺序填入第二行方格. 将每列中的两个数相加，所得的和填入该列第三个方格. 已知第三行中的数按严格递增顺序排列，求证第一行数与第二行数相同.

（第 18 届全苏数学奥林匹克，1984 年）

［证］ 设第一行中的数是 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，而第二行数是它们的重排 $a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_n}$，于是第三行数就是 $a_1 + a_{k_1}, a_2 + a_{k_2}, \cdots, a_n + a_{k_n}$. 若结论不成立，不妨设 $a_1 \neq a_{k_1}$. 于是有 $m \geqslant 2$，使 $a_1 = a_{k_m}$. 由严格递增性有 $a_1 + a_{k_1} < a_m + a_{k_m}, a_2 + a_{k_2} < a_m + a_{k_m} < a_m + a_2$，$\cdots, a_{m-1} + a_{k_{m-1}} < a_m + a_{k_m} \leqslant a_m + a_{m-1}$，故有 $a_{k_1} < a_m, a_{k_2} < a_m$，$\cdots, a_{k_{m-1}} < a_m$，此外，$a_1 < a_m$，亦即有 m 个不同的数都小于 a_m，此不可能.

3·23 设 $A = (a_{ij})(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 是以非负整数为元素的方阵，并设对于任何一个 $a_{ij} = 0$，方阵的第 i 行与第 j 列所有元素之和不

小于 n.求证此方阵的所有元素之和不小于$\frac{1}{2}n^2$.

（基辅数学奥林匹克,1964 年）

（第 28 届莫斯科数学奥林匹克,1965 年）

（第 13 届国际数学奥林匹克,1971 年）

［证］ 设 n 行中每行元素之和与 n 列中每列元素之和这 $2n$ 个数中的最小数为 m.

若 $m \geqslant \frac{n}{2}$,则 A 中所有元素之和不小于$\frac{n^2}{2}$.

若 $m < \frac{n}{2}$,不妨设第 1 行元素之和为 m 且前k 个元素异于零而后 $n-k$ 个元素均为零.于是由已知,方阵 A 的后 $n-k$ 列中每列的元素之和都不小于 $n-m$.又因前 k 列中每列元素之和都不小于m,故得知 A 的所有元素之和

$$\begin{aligned} S &\geqslant km + (n-k)(n-m) \\ &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}(n-2m)(n-2k). \end{aligned}$$

又因第 1 行所有元素之和为 $m < \frac{n}{2}$,而其中前 k 个元素均为正整数,故 $k < \frac{n}{2}$.因而有 $S \geqslant \frac{1}{2}n^2$.

3·24 矩形方格表的每个方格中都写有一个正数,求出每行正数的和,然后再求出这些和的乘积 p.试证,如果将每列正数都按非降的顺序重新排列,即把最小的正数写在第 1 行,把最大的正数写在最后一行,那么对于这个新的数表,乘积 p 不会超过它原来的值.

（第 16 届全俄数学奥林匹克,1990 年）

［证］ 显然,当在表中作行的交换时,乘积 p 不发生变化.因此可设矩形数表的第1行的行和最小.下面我们关于行数n用归纳法来证明.

当 $n=1$ 时,命题显然成立.设命题于 $n=k$ 时成立.当 $n=k+1$ 时.首先考察第 1 列.如果第 1 行中的数最小,问题就解决了;如果不是第 1 行而是第 i 行中的数最小,则将它与第 1 行的数交换.这时,第 1 行的和数变小而第 i 行的和数变大.由于两行之和数之和相等而第 1 行的行和最小,故这一交换导致 p 变小.依次对第 2 列,第 3 列,⋯ 直到最后 1 列进行类似的交换,每次 p 都不增.这样一来,第 1 行数中的每个数

都是该列的最小数,且乘积 p 的值不超过原来的值.对于除第1行外的 k 行数表,由归纳假设知可以把每列数都按非降的顺序排列好,且乘积 p' 不超过原来的值.从而我们得到了符合题中要求的数表,且乘积 p 不超过原来的值.这就完成了归纳证明.

3·25　在矩形方格表的每个方格中都填写 $+1$ 或 -1,且表中 $+1$ 和 -1 的个数都不小于2.试证可以找到两行和两列,使得位于它们交点处的4个数之和等于0.

(第43届莫斯科数学奥林匹克,1980年)

[证]　若不然,我们从表中取写有 $+1$ 和 -1 的方格各两个.

(1)可以取得使两个 $+1$ 的方格在一行,两个 -1 的方格在一列.否则,取以这两个 $+1$ 的方格为两角的一个矩形.由于矩形4个角格中的4数之和不为0,故另两个角格中至少有1格填有 $+1$,从而必有两个 $+1$ 在一行.同理可证必有两个 -1 的方格在一列.

(2)可以要求这两个 $+1$ 和两个 -1 的4个方格中有3个在一行或一列.否则,两个 $+1$ 都不在两个 -1 所在的列,两个 -1 都不在两个 $+1$ 所在的行.考察两个 -1 的方格与右图中标有 a,b 的两格.按反证假设,a 和 b 格中至少有一格写有 -1.不妨设 a 格中的数是 -1.于是由反证假设知 c 格也是 -1.

		+1			+1		c			
		d			a		−1			
					b		−1			

(3)设两个 $+1$ 和一个 -1 在一行,两个 -1 在一列(参看上图,c 格中的数为 -1).考察两个 -1 的方格和一个 $+1$ 的方格所决定的两个矩形,由反证假设知 a,d 两格中的数都应为 -1,从而在图中两个 $+1$ 的方格与 a,d 两格所决定的矩形中,4数之和为0,此与反证假设矛盾.

3·26　在 1980×1981 的方格表的每个方格中都写有 $+1,-1$ 和0之一,且表中所有数之和等于0.试证存在两行和两列,使得位于它们交点处的4个数之和为0.

(第43届莫斯科数学奥林匹克,1980年)

[证]　若不然,则任何一个边在网格线上的矩形的4个角格中的4数之和均不为零.

(1)考察数表中0的个数.设表中1981列中0的个数依次为 k_1,

$k_2,\cdots,k_{1981}$.因为不能有两行两列之交的4个方格中同时为0,故有

$$\sum_{i=1}^{1981} C_{k_i}^2 \leqslant C_{1980}^2 = 990 \times 1979. \qquad ①$$

因为 $C_{45}^2 = 990, C_{44}^2 = 946$,故表中0的个数不超过 1980×45 个.

(2)因为表中所有数之和为0,而表中 $+1$ 和 -1 的总数不少于 1980×1936,故 -1 的个数与 $+1$ 的个数都不少于 1980×968.

若有某行中有1015个 -1,则因有 $+1$ 最多的一行至少有968个 $+1$,故必有两个 -1 与两个 $+1$ 同列,此与反证假设矛盾,故知每行中 -1 的个数和 $+1$ 的个数均不超过1014.

设第 i 行有 n_i 个 -1, m_i 个 $+1$, $i = 1,2,\cdots,1980$.因为不能有两行两列之交的4格中的数之和为0,故必有

$$\sum_{i=1}^{1980} n_i m_i \leqslant C_{1981}^2 = 1981 \times 990, \qquad ②$$

其中

$$\sum_{i=1}^{1980} n_i \geqslant 1980 \times 968, \sum_{i=1}^{1980} m_i \geqslant 1980 \times 968,$$

$$n_i, m_i \leqslant 1014, i = 1,2,\cdots,1980.$$

由排序不等式知在②式中可设 $\{n_i\}$ 递增而 $\{m_i\}$ 递减且在容许条件下前面的 m_i 尽可能大,前面的 n_i 尽可能地小.从而有

$$\sum_{i=1}^{1980} n_i m_i \geqslant 1800 \times 1014^2 \qquad ③$$

③与②矛盾,这就完成了反证的证明.

3·27 在 $n \times n(n \geqslant 3)$ 个方格的正方形表格中,按下列规则在各个方格中填上 ± 1:

(1)表格边缘上的所有方格中都填上 -1;

(2)对于任一空格,将它所在行或所在列中两侧离它最近的两个已填数方格中所填的两数之积填入此空格中.

这样做下去,直到表中的空格全部填满为止.求

(i)在表中可能得到 $+1$ 的最多个数;

(ii)在表中可能得到 $+1$ 的最少个数.

(第20届全苏数学奥林匹克,1986年)

[解] (i)先将右图中标有 a 的3格中依次填入 $+1$,然后将标有 b

的方格中依次填入 $+1$，再依次将标有 c 的方格填入 $+1$. 于是中间的 $(n-4)\times(n-4)$ 个方格中均可填入 $+1$. 从而图中共有 $(n-2)^2-1$ 个 $+1$. 当 $n=3$ 时，图中恰有一个 $+1$.

	a	b	b	b	b		
	c					b	
	c					b	
	c					b	
	c					b	
	a	c	c	c	c	a	

另一方面，考察去掉边格的 $(n-2)\times(n-2)$ 的方格表的 4 个角格，若已有 3 个角格中填入了 $+1$，且最后空着的角格所在行与列中所填入的数都是 $+1$，则这一角格只能填 -1，故知表中除边格外至少有一个 -1. 所以，当 $n=3$ 时，方格数表中恰有一个 $+1$；当 $n\geqslant 4$ 时，数表中最多可写有 $(n-2)^2-1$ 个 $+1$.

(ii) 将主对角线上除两个角格之外的空格中都填入 $+1$，于是其他空格中可依次填入 -1. 这时表中共有 $n-2$ 个 $+1$.

另一方面，对于表中的任一空格，为使其中能填入 -1，它所在的行与列中至少有一个方格中填有 1. 因而数表中至少要有 $n-2$ 个 1. 故知数表中最少有 $n-2$ 个 1.

3·28 围棋棋盘上共有 18×18 个小方格，在其中每个方格中都填上 1 个实数，使得在任何 2×2 的正方形的 4 个方格中的 4 数之和都是 10. 求证棋盘的 4 个角格中的 4 数之和也是 10.

（第 2 届友谊杯数学奥林匹克，1988 年）

［证］ 因为第 1 和第 2 两列的 18×2 个方格共可分成 9 个 2×2 的正方形，所以这 36 个数之和等于 90. 同理，第 2，3 两列中的 36 个数之和也等于 90. 因此第 1 列的 18 个数之和与第 3 列的 18 个数之和相等. 同理可知，奇（偶）数号码的所有列的 18 个数之和都相等. 由此可知，第 1 列与第 18 列的共 36 个数之和等于 90.

再考察去掉第 1 行与第 18 行的 16×18 的矩形数表. 与上面一样地可得，第 1 列与第 18 列的共 32 个方格中的 32 个数之和等于 80. 从而知原方格表的 4 个角格中的 4 个数之和等于 10.

3·29 将正方体的各面用 $1,2,\cdots,6$ 编号，使相对面上的两数之和等于 7. 今有一个含有 50×50 个方格的国际象棋棋盘，每个方格的大小恰与正方体的面相同. 现将正方体自棋盘的西南角的方格向东北角的方格滚动过去，每次滚动时，都以正方体的一条棱为轴，将正方体翻入东面或北面的方格中（不许向南或向西翻动）. 在正方体翻动过程中经

过的每一个方格里,都印上与它重合的正方体的面上所编号码的那个数字.求所有印出的数之和的最大值和最小值.

(第36届莫斯科数学奥林匹克,1973年)

[解] 设某次印上数字 a 后正方体向北翻滚,于是编号为 a 的面成为正方体的朝南一面.在随后的滚动过程中,如果没有向北翻滚,则 a 面始终朝南;如果向北翻滚,则印上的数字便是 $7-a$.由此可见,在正方体依次印出的数字中,a 和 $7-a$ 是交替出现的(中间可以隔着别的数字).这样,在全部99个数字中,a 和 $7-a$ 或者出现的次数相同,或者相差1次.

因为正方体的相对两面的数的平均值是3.5.故印在棋盘上的99个数之和的平均值为 $3.5\times 99=346.5$. $\{1,6\}$, $\{2,5\}$, $\{3,4\}$ 每组中的两个数字出现的次数至多相差一次,故知99个数之和至多为351,至少为342.

将正方体放在棋盘上西南角的方格,使1号面朝下,2号面朝东,3号面朝北.然后使正方体向东连续翻滚,一直滚到东南角为止.这时2号面朝下,3号面仍然朝北.再将正方体向北连续翻滚,一直滚到东北角为止.容易验证,所印出的99个数之和为342.当把正方体的3组相对面都对调并重复上述过程时,得到的99个数之和为351.

综上可知,印出的99个数的最小值为342,最大值为351.

3·30 已知两行数,第一行中写有19个不超过88的自然数,在第二行中写有88个不超过19的自然数.我们将一行中的一个或数个相连的数称为一段,试证可以从两行已知数中各选一段,使得这两段数之和相等.

(第22届全苏数学奥林匹克,1988年)

[证] 将两行数分别记为 $a_1,a_2,\cdots,a_{19}$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_{88}$.不妨设

$$a_1+a_2+\cdots+a_{19}\geqslant b_1+b_2+\cdots+b_{88} \quad ①$$

(相反的情形可类似地论证).对于每个 $i=1,2,\cdots,88$,我们把使得

$$S(n,i)=a_1+a_2+\cdots+a_n-(b_1+b_2+\cdots+b_i)\geqslant 0 \quad ②$$

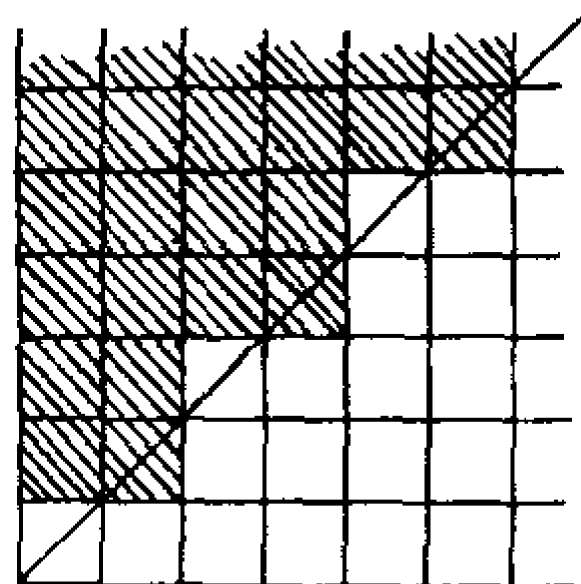
取得最小值的数 n 记为 n_i,由①知 n_i 存在.记 $S_i=S(n_i,i)$.因为 $a_j\leqslant 88$, $j=1,2,\cdots,19$,故有 $0\leqslant S_i\leqslant 87$.如果所有 S_i 互不相等,则其中必有一个是0,由此即得题中要求的两段数.否则,必有 $k<p$,使得 $S_k=S_p$.这意味着

$$a_{n_k+1}+a_{n_k+2}+\cdots+a_{n_p}=b_{k+1}+b_{k+2}+\cdots+b_p.$$

3·31 在 1987×1987 个方格的正方形表格的每个方格中,都写上一个绝对值不超过 1 的实数,使得表格中任一 2×2 的正方形中的 4 数之和都等于零.求证正方形表格中的所有数之和不超过 1987.

(第 21 届全苏数学奥林匹克,1987 年)

[证] 将右图中用斜线标出的格子的集合记为 A. A 中方格关于对角线对称的所有方格的集合记为 B.令 $C=A\cap B$,D 为表格中既不属于 A 也不属于 B 的所有方格的集合.容易看出,$C\cup D$ 恰为对角线穿过的所有方格的集合.



按已知,A 和 B 中所有方格中的数之和分别为零.因为表中所有数之和等于 A 中所有数之和加上 B 中所有数之和减去 C 中所有数之和再加上 D 中所有数之和.因 $C\cup D$ 恰有 1987 个方格,故知表中所有数之和不大于 1987.

3·32 在一张 $n\times n(n\geqslant4)$ 的方格表的每个方格中任意地填入 $+1$ 或 -1.现将表内 n 个两两既不同(横)行又不同(竖)列的方格中的数的乘积称为一个基本项.试证方格数表的所有基本项之和总能被 4 整除.

(中国高中数学联赛,1989 年)

[证 1] 显然,每个基本项的值都是 1 或 -1,共有 $n!$ 个基本项且表中每个数都作为因子恰好出现在 $(n-1)!$ 个基本项中.我们将方格表中第 i 行 j 列方格中的数记为 a_{ij},将所有基本项的和记为 S.

如果表中诸 a_{ij} 不全为 1,不妨设 $a_{11}=-1$.现在将 a_{11} 改变符号而保持其他所有 a_{ij} 不动,于是所有以 a_{11} 作为因子的 $(n-1)!$ 个基本项同时变号而其余的基本项不变.设以 a_{11} 作为因子的 $(n-1)!$ 个基本项中值为 1 的共有 k 项,于是值为 -1 的项数为 $(n-1)!-k$.因此,这 $(n-1)!$ 项的和为

$$T=k-[(n-1)!-k]=2k-(n-1)!.$$

当 a_{11} 变号时,这 $(n-1)!$ 个基本项的和由 T 变为 $-T$.既然其余的基本项不变,故知所有基本项的和 S 变为 $S'=S-2T$.因为 $n\geqslant4$,故 $(n-1)!$ 为偶数,从而 T 为偶数.这意味着当 a_{11} 改变符号时,和 S 是模 4 不变的.

显然,对于表中诸 a_{ij} 不全为 1 的情形,总可经过有限次上述变号的过程而变为全是 1 的情形.这时所有基本项的值均为 1,其和为 $n!$.由于 $n \geqslant 4$,它当然是 4 的倍数,从而知原和数 S 也是 4 的倍数.

[证 2] 显然,数表中的 n^2 个数共可组成 $n!$ 个基本项且表中每个数都在 $(n-1)!$ 个基本项中作为因子出现.所以,若以 P 表示所有基本项的积而 M 表示这 n^2 个数的连乘积,则有

$$P = M^{(n-1)!} = 1.$$

由此可知,值为 -1 的基本项的个数 m 必为偶数.若记值为 1 的基本项的个数为 k,则 $m + k = n!$.这样,所有基本项的和为

$$S = k - m = (k + m) - 2m = n! - 2m.$$

因为 $n \geqslant 4$,所以 $n!$ 为 4 的倍数,从而 S 也是 4 的倍数.

3·33 把边长为 1 的正三角形 ABC 的各边都 n 等分,过每个分点作平行于其他两边的直线,这些条直线将 $\triangle ABC$ 分成许多小正三角形.这些小三角形的顶点都称为结点并在每一结点上放置一个实数.已知

(1) A,B,C 三点上放置的数分别为 a,b,c;

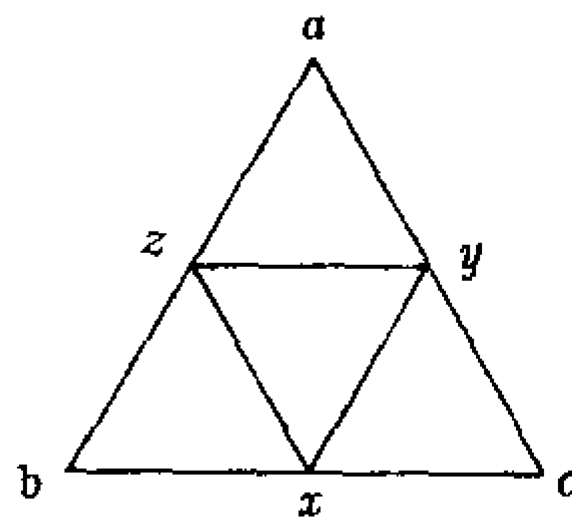
(2) 在每个由有公共边的两个最小三角形所组成的菱形之中,两组相对顶点上放置的数之和相等.

求放置最大数的点与放置最小数的点之间的最短距离 r 和所有结点上的数的总和数 S.

(第 2 届中国中学生数学冬令营,1987 年)

[解] 为了摸清各结点间所放置的数之间的关系,先看 $n = 2$ 的情形.这时,由已知(2) 有

$$b + y = x + z, c + z = x + y, a + x = y + z.$$



由此解得 $x = \frac{1}{2}(b + c), y = \frac{1}{2}(c + a), z = \frac{1}{2}(a + b)$,即每边中点所放的数恰为该边两端点所放数的等差中项.

(i) 若 a,b,c 互不相等,则最大数与最小数都位于 $\triangle ABC$ 的顶点上,故二者距离为 1.

(ii) 若 $a = b = c$,则所有数都相等,故最大数与最小数的最短距离为 0.

(iii) 若 a,b,c 三个数中恰有两个相等,不妨设 $a=b<c$. 这时 $z=a$ 为最小数而惟一的最大数是 c,故最大数与最小数的最短距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 此外,容易算出,总和 $S=2(a+b+c)$.

对于一般的 n,我们注意到上面对 x,y,z 的推导完全可以重复. 因而知任一直线上的相邻 3 个结点上所放置的数必成等差,进而知任一条直线上的所有结点上所放置的数成等差数列. 因此,与 $n=2$ 的情形一样,当 a,b,c 互不相等时,$r=1$;当 $a=b=c$ 时,$r=0$. 但当 a,b,c 三个数中恰有两个相等,不妨设 $a=b<c$,这时边 AB 上的所有结点上所放置的数都是 a,而 AB 的中点当 n 为偶数时是结点,当 n 为奇数时不是结点,故有

$$r=\begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{3}, & n\text{ 为偶数},\\ \frac{1}{2}\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

下面我们来计算总和数 S. 显然,图形中的结点数为 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. 设想我们将正三角形 ABC 绕它的中心旋转 120° 得到 $\triangle A'B'C'$,将它绕中心再旋转 120° 得到 $\triangle A''B''C''$ 并将 3 个三角形的对应结点上所放置的数分别相加. 于是 A,B,C 三点所放的数都是 $a+b+c$. 再由结点上所放的数的等差特性便知,各结点所放的数都是 $a+b+c$. 从而有

$$3S=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)(a+b+c),$$

$$S=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(a+b+c).$$

3·34 已知 1985 个点分布在一个圆周上,每一点都标上 $+1$ 或 -1. 对于一个点,如果从它开始,依顺时针或逆时针方向,沿着圆周前进到任何一点时,所经过的各点标数之和都是正的,则称这点是“好点”. 试证当标有 -1 的点的个数小于 662 时,圆周上至少有一个好点.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

[证] 我们用数学归纳法证明一个一般性的命题:当圆周上分布有 $3n+2$ 个点,其中标有 -1 的点的个数不超过 n 时,圆周上至少存在

一个好点.

当 $n=1$ 时,命题显然成立.

设命题于 $n=k$ 时成立.当 $n=k+1$ 时,在圆周上任取一个标有 -1 的点,并在它的两边各取一个离它最近的标有 $+1$ 的点.把这3点同时去掉,则余下的 $3k+2$ 个点中标有 -1 的点数不超过 k,于是由归纳假设知这时有一个好点 P.好点 P 当然标有 $+1$,因而它不会在去掉的两个标有 $+1$ 的点之间.这样,当把去掉的3个点放回原处时,点 P 仍是好点.因为无论从 P 出发向哪个方向计数,在遇到返回的 -1 之前,总要先遇到返回的 $+1$,这就完成了归纳证明.

3·35 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{100},b_1,b_2,\cdots,b_{100}$ 为互不相同的实数,将它们按如下法则填入 100×100 的方格表中,即在位于第 i 行和第 j 列之交的方格中填数 a_i+b_j.已知任何一列中的所有数之积都等于1,求证任何一行中的所有数之积都等于 -1.

(第25届全苏数学奥林匹克,1991年)

[证] 考察多项式

$$p(x)=(a_1+x)(a_2+x)\cdots(a_{100}+x)-1. \qquad ①$$

由已知条件知 $b_1,b_2,\cdots,b_{100}$ 恰是这个100次多项式的100个根.又因 $p(x)$ 中首项系数为1,故有

$$p(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_{100}). \qquad ②$$

由①和②得到恒等式

$$(a_1+x)(a_2+x)\cdots(a_{100}+x)-1=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_{100}).$$

将 $x=-a_i$ 代入上式即得

$$-1=(-1)^{100}(a_i+b_1)(a_i+b_2)\cdots(a_i+b_{100}),$$

即第 i 行中诸数之积等于 -1.

3·36 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 $2n$ 个互不相同的实数.将它们按如下法则填入 $n\times n$ 的方格表,即在位于第 i 行第 j 列的方格中填数 a_i+b_j.已知各列的所有数之积都相等,求证各行所有数之积也相等.

(第25届全苏数学奥林匹克,1991年)

[证] 考察多项式

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x+a_i)-\prod_{j=1}^{n}(x-b_j).$$

显然,$f(x)$ 的次数至多为 $n-1$ 且由已知有

$$f(b_j)=\prod_{i=1}^{n}(b_j+a_i)=c, j=1,2,\cdots,n,$$

其中 c 为常数.这意味着多项式 $f(x)-c$ 至少有 n 个根,从而 $f(x)\equiv c$.这样一来,便有

$$c=f(-a_i)=(-1)^{n+1}\prod_{j=1}^{n}(a_i+b_j),$$

这表明数表中各行所有数之积都相等.

3·37 在一张 $n\times 6$ 的方格表的每个方格中都填有整数1或0($n\geqslant 2$).已知各行整数均不完全相同,并且对于任何两行数$(a_1,a_2,\cdots,a_6)$和$(b_1,b_2,\cdots,b_6)$.表内必有一行数为$(a_1b_1,a_2b_2,\cdots,a_6b_6)$.求证表中必有一列整数,其中0的个数不少于一半.

(原苏联教委推荐试题,1991年)

[证] 当 $n=2$ 时,命题显然成立.以下设 $n>2$.

(1) 设在方格数表中有某一行中恰有1个0,不妨设这一行数为(0,1,1,1,1,1).于是,只要有某行数为$(1,a_2,\cdots,a_6)$,由已知,必有另一行数为$(0,a_2,\cdots,a_6)$.从而第1列中0的个数不少于一半.

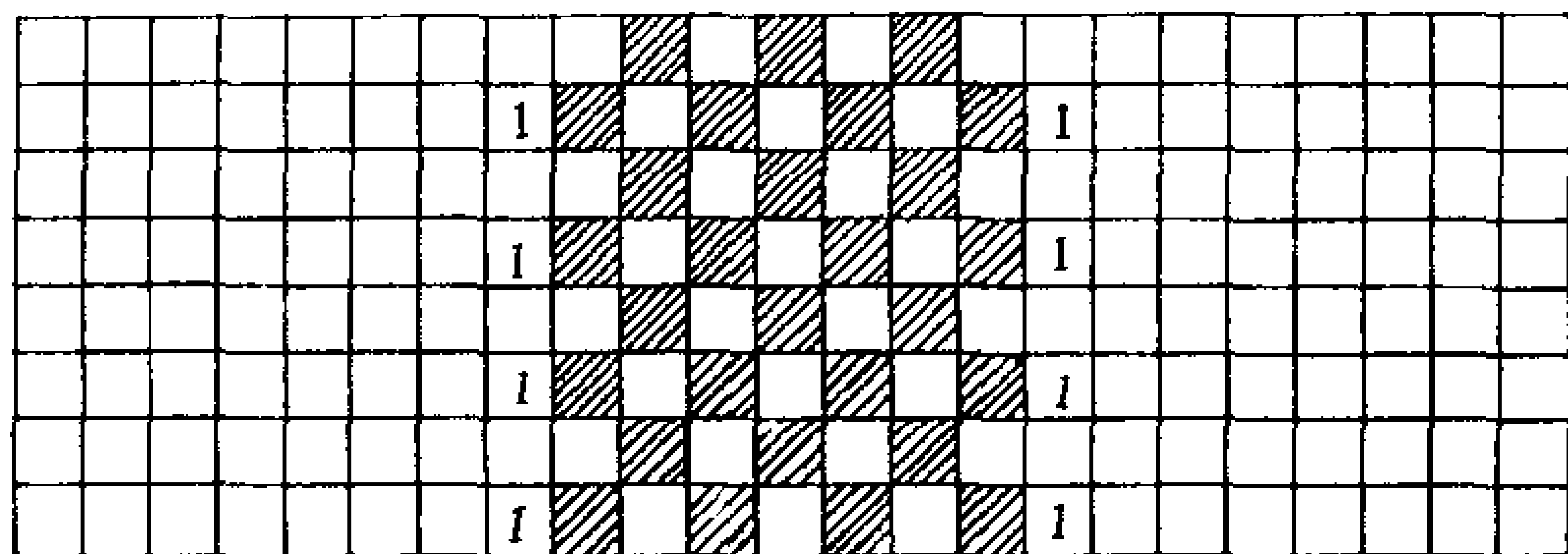
(2) 设在数表的某行中恰有两个0,不妨设这一行数为(0,0,1,1,1,1).以 a_{ij} 表示前两个数为 i,j 的行的数目,则像(1)中一样地可知,$a_{00}\geqslant a_{11}$.此外,不妨设 $a_{01}\geqslant a_{10}$.于是有 $a_{00}+a_{01}\geqslant a_{10}+a_{11}$,即第1列中0的个数不少于1的个数.

(3) 在余下的情形中,数表中除了有1行数可能为(1,1,1,1,1,1)外,其余各行都有不少于3个0.由于 $n>2$,故必存在两行都至少有3个零,且零的位置不全相同.从而它们的乘积就将至少有4个0.这样一来,除去6个数全为1的行(如果有的话)外,其余 $n-1$ 行中0的个数多于1的个数.从而在$(n-1)\times 6$数表中存在一列数,其中0的个数多于一半.显然,这一列数在原数表中看来,0的个数也不少于一半.命题得证.

3·38 在 1983×1984 个方格的国际象棋棋盘的每个白格中都写着数1和 -1 之一,且使与每一个黑格相邻的白格之中所有数的乘积等于1.求证所有白格中的数全都为1.

(第18届全苏数学奥林匹克,1984年)

[证] 将方格数表延拓如下图所示(棋盘旋转90°),其中间是 1984×1983 的方格表,白格中写有1或 -1,然后在左右两侧各添一列,其中白格中均填1,最后两侧各添一个 1984×1983 的方格表,其白格中所填数



关于上面所添两列的中线与原表中的数对称.容易看出,这样延拓之后,表中每个黑格相邻的白格中所有数之积仍为1,且每行中所填的数以 1984×2 为周期.

因为第一行的每个黑格有3个相邻白格,其中所填的3数之积为1,故有

$$a_{2j}=a_{1j-1}\cdot a_{1j+1},\quad 1\leqslant j\leqslant 1984\times 3-1, \qquad ①$$

其中 a_{ij} 表示方格表中第 i 行 j 列的方格中所填的数,由于只考虑白格,故 $i+j$ 为偶数.再对第二行的不是边格的每个黑格利用已知条件又有

$$a_{3j}=a_{1j}a_{2j-1}\cdot a_{2j+1}=a_{1j-2}a_{1j}a_{1j+2}. \qquad ②$$

类似地,由①和②又有

$$a_{4j}=a_{2j}a_{3j-1}a_{3j+1}=a_{1j-3}a_{1j-1}a_{1j+1}a_{1j+3}.$$

依此类推,可得

$$a_{1984j}=a_{1j-1983}a_{1j-1981}\cdots a_{1j-1}a_{1j+1}\cdots a_{1j+1983}. \qquad ③$$

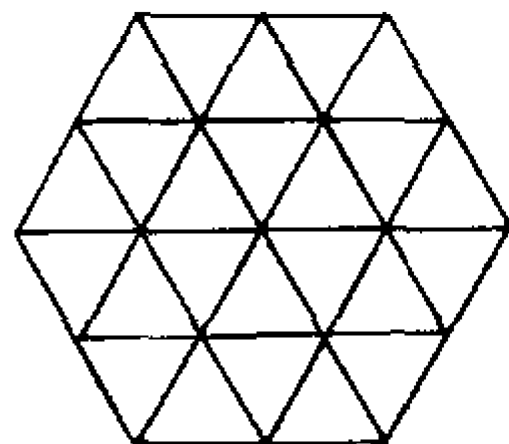
容易看出,③式右端的所有乘数恰为一个周期中所有的数.由对称性知它们之积为1,故得

$$a_{1984j}=1, j=1986,1988,\cdots,3966,$$

即原数表中最下面一行的所有白格中所填的数都是1.

再利用已知条件,即可由下向上依次推得各行中所有白格中所填的数均为1.

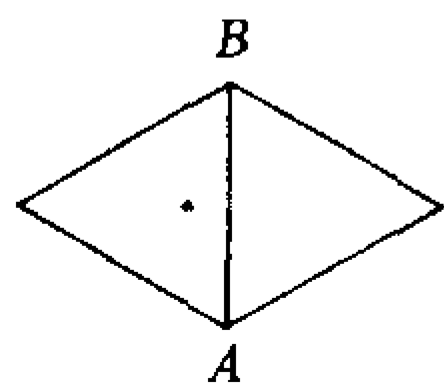
3·39 正六边形被剖分成24个三角形,如下图所示.在其中的19个结点处各写一个互不相同的实数.试证在剖分出的24个三角形中,至少有7个三角形的顶点处的3个数是按逆时针方向以递增顺序排列的.



(第19届全苏数学奥林匹克,1985年)

[证] 设在网格中相邻两个结点 A 和 B 处所写

的数分别为 a 和 b. 如果 $a<b$,则在由 A 指向 B 的方向的左侧三角形中画一黑点(见右图);如果 $a>b$,则在由 B 指向 A 的方向左侧的三角形中画一黑点(如果该侧没有三角形,则不必画). 显然,在 3 个数按逆时针方向递增的三角形中恰有两个黑点,而在另外的三角形中恰有一个黑点.



因为网格图形内部有 30 条小线段,由它们所导致的 30 个黑点当然都在这些小三角形中. 边界上的 12 条小线段中,至少有一条产生的黑点在三角形中. 故 24 个三角形中至少有 31 个黑点,从而至少有 7 个三角形各有两个黑点.

3·40　已知一个 15×15 的方格表的每个方格中都写有一个非零实数,且表中每一个数都等于其所有相邻(指有公共边) 方格中数的乘积,求证表中所有的数都是正数.

(第 54 届莫斯科数学奥林匹克,1991 年)

[证]　显然,只须就表中所写的数都是 $+1$ 和 -1 的情形来证明. 我们将每格中都写有 ±1,且每个数都等于相邻方格中各数乘积的 $m\times n$ 方格数表称为"合适的". 下面来证明,对于 $m=1,3,7,15$,任何合适的 $m\times15$ 的方格数表都是平凡的,即表中所有数都是 $+1$.

首先考察合适的 1×15 的方格数表. 易见,其中开头两格及末尾两格中的各两个数的符号分别相同. 如果前两格都是 -1,则第 3 格为 $+1$,且符号按"$-$, $-$, $+$" 周期地出现. 从而最后两数符号不同,矛盾. 这表明前两格中都是 $+1$,从而 15 个方格中都是 $+1$,即 1×15 的合适数表都是平凡的.

设存在一个非平凡的合适的 15×15 的数表. 如果它关于中间一行对称,则中间一行数本身是一个 1×15 的合适数表,故 15 个数全是 $+1$. 从而中间一行上方的 7×15 数表是合适的非平凡数表. 如果 15×15 的合适的非平凡数表不是关于中间一行对称,则将表中每个数都乘以它关于中间一行对称的数,所得的新数表便是关于中间一行对称的合适的非平凡数表,从而又可得到一个 7×15 的合适的非平凡数表.

同理,由 7×15 数表到 3×15 数表,由 3×15 数表到 1×15 数表且所得的 1×15 数表是合适的非平凡数表,此与前面所得结果矛盾. 这表明所有合适的 15×15 的数表都是平凡的.

3·41　某个信封上的两个邮政编码 M 和 N 均由 0,1,2,3,5,6 这 6 个不同数字组成.现有 4 个邮政编码如下：

A:320651，　B:105263，

C:612305，　D:316250.

已知编码 A,B,C 各恰有两个数字与 M,N 位置相同,D 恰有 3 个数字的位置与 M,N 相同.试求编码 M 和 N.

（中国初中数学联赛,1992 年）

[解]　按已知,A,B,C 各恰有两个数字与 M,N 相同,D 恰有 3 个数字与 M,N 相同,故 M 和 N 分别有 9 个数字与 A,B,C,D 之一位置相同(包括重复).由上表可见,M,N 中任一数字至多与 A,B,C,D 中的两个位置相同,故 M,N 的各 6 个数字中都恰有 3 个数字分别与 A,B,C,D 中的两个位置相同.显然,这 3 个数字只能是第 1 列 3,第 2 列 1,第 4 列 2 和第 5 列 5 中的 3 个.

A	3	2	0	6	5	1
B	1	0	5	2	6	3
C	6	1	2	3	0	5
D	3	1	6	2	5	0
M						
N						

(1) 设所求的编码为 $\boxed{x}\boxed{1}\boxed{y}\boxed{2}\boxed{5}\boxed{z}$.将这个编码放到前面表的空格中,则 x,y,z 应分别与所在列的前 3 个数字之一相同,但又不能与所在列的第 4 个数字相同.x 不能取 3 和 1,只能取 6;y 不能取 6,2,5,只能取 0;$z = 3$.于是得到一个满足要求的编码 610253.

(2) 设所求的编码为 $\boxed{3}\boxed{a}\boxed{b}\boxed{2}\boxed{5}\boxed{c}$.像(1) 中一样分析可知,$a$ 不能为 1,2,只能为 0;b 不能为 0,5,2,6,矛盾.

(3) 设所求的编码为 $\boxed{3}\boxed{1}\boxed{d}\boxed{e}\boxed{5}\boxed{f}$.易见,$f$ 不能为 1,3,5,0,矛盾.

(4) 设所求的编码为 $\boxed{3}\boxed{1}\boxed{k}\boxed{2}\boxed{m}\boxed{n}$.易见,$n$ 不能为 1,3,0,只能为 5;k 不能为 5,2,6,只能为 0.从而 $m = 6$.于是又得到一个满足要求的编码 310265.

综上可知,所求的 M 和 N 分别为 610253 和 310265.

3·42　彩票上有依次排列着的 50 个空格,每个参加者都应在自己的彩票上不重复地填上 1 至 50 这 50 个自然数,填写的顺序由自己决定.主持人亦在一张彩票上填写这 50 个自然数作底.一张彩票所填的 50 个自然数中,只要有一个数与底票填在同一位置的格子中,即可中彩.问一个参加者最少应当填写多少张彩票,才可以保证自己至少有一张中彩?

（第 25 届全苏数学奥林匹克,1991 年）

[解] 将 26 张彩票填数如下：

$1,2,3,\cdots,25,26,27,\cdots,50,$

$2,3,4,\cdots,26,1,\ 27,\cdots,50,$

$3,\ 4,5,\cdots,\ 1,\ 2,27,\cdots,50,$

$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$

$25,26,1,\cdots,23,24,27,\cdots,50,$

$26,\ 1,2,\cdots,24,25,27,\cdots,50,$

即前 26 个自然数在 26 张彩票上轮换而后 24 个数总依次填在后 24 个格子中不变.在作底的彩票上,在数 $1,2,\cdots,26$ 中,总有一个会出现在前 26 个位置上,从而必与上面 26 张彩票之一位置相同,亦即 26 张彩票中必有一张中彩.

下面,我们来证明若只填 25 张彩票,则不能保证一定中彩,即总是存在一种可能的底票,使 25 张彩票无一中彩.

设 25 张彩票已经填好.我们取 1 张空的彩票并首先将"1" 填在适当的位置,使它不与 25 张已填彩票中任何一张中的"1" 的位置相同.然后依次将 $2,3,4,\cdots$ 填进去且使每个数都不与前 25 张彩票中的同一个数有相同的位置,直到无法再填为止.显然,不同的填数法只有有限多种,故有一种填数法 M 使得满足所填数与 25 张彩票上的同一数的位置均不相同,且填进去的自然数的个数最多.可以证明,一定是 50 个自然数都填进了这张彩票中.

若不然,设在填数法 M 中,自然数 $1,2,\cdots,a-1$ 都已填进去,但 a 无法再填进去,$25<a\leqslant 50$.这意味着适合填写 a 的至少 25 个位置都已被占据.设这 25 个格子中所填数分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_{25}$.任取一个空格,则 $x_1,x_2,\cdots,x_{25}$ 和 a 这 26 个数中,至少有一个可以填进去,设为 x_i.于是可将 x_i 填入这一空格,而将 a 填入到 x_i 所占的格子中.这就是说,这一填数法比 M 还多填一个数,此不可能.从而证明了填数法 M 一定是把 50 个数都填进了彩票,且当以这张彩票为底票时,前面的 25 张彩票无一中彩.

3·43 对 $i=1,2,\cdots,1991$,在圆周上任取 n_i 个点,标上数 i,每点只标一个数.要求作一批弦使得：

(1) 任意两弦无公共点；

(2) 每条弦的两个端点所标的数不同.

若对所有可能的标数方法都能按上述要求连结所有标数的点作弦，问自然数 $n_1, n_2, \cdots, n_{1991}$ 应满足的充分必要条件是什么？

（中国国家集训队选拔试题，1991 年）

［解］ 如果按题中要求可以连结所有标数的点作弦，由于任意两个标数的点恰对应一条弦，所以 $n_1 + n_2 + \cdots + n_{1991}$ 必为偶数. 又对任意 $i \in \{1,2,\cdots,1991\}$，在标数为 i 的 n_i 个点中，每一点所引出的弦的另一个端点所标的数都不是 i，从而有 $n_i \leqslant n_1 + \cdots + n_{i-1} + n_{i+1} + \cdots + n_{1991}$. 于是得到必要条件

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + \cdots + n_{1991} = 2m, \quad m \in N, \\ n_i \leqslant m, i = 1,2,\cdots,1991. \end{cases} \qquad ①$$

以下证明 ① 也是充分条件，我们用归纳法来证明它的加强命题：如果非负整数 $n_1, n_2, \cdots, n_{1991}$ 满足 ① 式，则可按题中要求连结所有标数的点作弦.

当 $m = 1$ 时，则存在 $1 \leqslant i < j \leqslant 1991$，使得 $n_i = n_j = 1$，且当 $k \neq i, j$ 时有 $n_k = 0$. 这时圆上只取两个点且两点标有不同的数，只要将这两点间连一条弦就满足题中要求，命题成立.

设 $m = k$ 时命题成立. 当 $m = k + 1$ 时，不妨设 $n_1 = \max\{n_i \mid i = 1,2,\cdots,1991\}$，由条件 ① 有

$$0 < n_1 \leqslant k + 1 < 2(k + 1),$$

所以存在标数为 1 的点 A 和标数不是 1 的点 B，使得 A, B 两点相邻，即以 A, B 为端点的两条圆弧之一的内部没有标数的点. 连结 AB 作弦，显然，连结其余任何两个标数的点作弦，都与弦 AB 没有公共点. 不妨设点 B 所标的数为 2. 令

$n_i' = n_i - 1, i = 1,2, n_j' = n_j, j = 3,4,\cdots,1991$，显然，$n_1', n_2', \cdots, n'_{1991}$ 都是非负整数且 $n_1' + n_2' + \cdots + n'_{1991} = 2k$. 可以证明，对于任何 $i \in \{1,2,\cdots,1991\}$，都有 $n_i' \leqslant k$. 若不然，存在 $i_0 \in \{1,2,\cdots,1991\}$，使得 $n_{i_0}' \geqslant k + 1$. 由于 $n_1' = n_1 - 1 \leqslant k, n_2' = n_2 - 1 \leqslant k$，故 $i_0 \geqslant 3$，于是 $n_{i_0}' = n_{i_0} \geqslant k + 1$. 由 ① 知 $n_{i_0} = k + 1$. 又因 $n_1 \geqslant n_{i_0}$，所以 $n_1 = k + 1$. 由于 $n_2 > 0$，故得 $n_1 + n_2 + \cdots + n_{1991} \geqslant 2(k + 1) + 1$，矛盾. 这就证明了 $n_1', n_2', \cdots, n'_{1991}$ 满足 $m = k$ 的 ① 式. 由归纳假设知除去 A, B 两点，其余的点可按题中要求连结所有标数的点作弦且它们均与弦 AB

无公共点,这就证明了命题对 $m = k + 1$ 成立.

3·44　以任意方式将圆周上的 $4k$ 个点标上数 $1,2,\cdots,4k$,求证

(1) 可以用 $2k$ 条两两不交的弦连结这 $4k$ 个点,使得每条弦的两端的标数之差不超过 $3k-1$;

(2) 对于任意的自然数 k,(1) 中的数 $3k-1$ 不能再减少.

（中国国家集训队选拔试题,1986 年）

[证] (1) 将 $1,2,\cdots,4k$ 这 $4k$ 个数分成两组:

$A = \{1,2,\cdots,k,3k+1,3k+2,\cdots,4k\}$,

$B = \{k+1,k+2,\cdots,3k\}$,

则 A 中任一数与 B 中任一数之差的绝对值不大于 $3k-1$. 若我们把标有 A,B 中数的所有点的集合仍然分别记为 A 和 B,则只须证明可以用 $2k$ 条两两不交的弦来连结这 $4k$ 个点,使每条弦的两个端点都是一在 A 中,一在 B 中. 为此,只须证明如下的引理.

引理　已知圆周上有 $2n$ 个点,其中有 n 个红点,n 个蓝点,则可用 n 条两两不交的弦连结这 $2n$ 个点,使每条弦的两个端点都不同色.

我们用数学归纳法来证明这一引理. 当 $n = 1$ 时,引理显然成立. 设当 $n = k$ 时引理成立. 当 $n = k+1$ 时,圆周上必有两个相邻的异色点,设为点 P 和 Q. 连结 PQ 得到一条弦. 除去点 P 和 Q 之后,圆周上还有 $2k$ 个点,其中恰有 k 个红点和 k 个蓝点. 由归纳假设知可用 k 条两两不交的弦连结它们,使每条弦的两个端点都异色. 由于 P 和 Q 是相邻的两点,故弦 PQ 与后面的 k 条弦均不相交. 这就证明了当 $n = k+1$ 时引理也成立,从而完成了归纳证明.

(2) 对圆周上的 $4k$ 个点依逆时针顺序编号为 $1,2,\cdots,4k$. 将前 $2k$ 个点标上 A 组中的数,次序如下:

$$1,3k+1,2,3k+2,\cdots,k-1,4k-1,k,4k.$$

将后 $2k$ 个点标上 B 组中的数,次序如下:

$$k+1,2k+1,k+2,2k+2,\cdots,2k-1,3k-1,2k,3k.$$

由标数法可见,若 A 组中的某两点间连有一条弦,则因所连的 $2k$ 条弦互不相交,故必有 A 组中相邻两点间连有一条弦. 显然,这条弦两端点标数之差不小于 $3k-1$. 若 A 中任何两点间均无弦相连,则 A 中的点只能"平行地"与 B 中的点分别相连(否则弦将相交),所以必有 1 与 $3k$ 相连,从而

两数之差为 $3k-1$. 这就证明了(1) 中的数 $3k-1$ 不能再减少.

3·45　把 1000 个数排成一行. 然后在这行数的下面按以下规则写出第 2 行:在第 1 行的每个数 a 的下面写一个表示 a 在第 1 行中出现次数的自然数. 按照同样规则,在第 2 行下面写出第 3 行,在第 3 行下面写出第 4 行,等等.

(1) 求证某一行与它下面的一行相同.

(2) 求证第 11 行与第 12 行相同.

(3) 举例说明由第 1 行出发得到的第 10 行与第 11 行可以不同.

（第 10 届全苏数学奥林匹克,1976 年）

[证]　我们把这一行接一行写出的数视为一个有足够多行,1000 列的一个矩形数表. 由于从第2行起,每个数 a 都表示上一行中相应数的个数,故有 $a \leqslant 1000$. 由写数规则知,如果一行中有 m 个数相同,那么下一行中与这些数同列的数仍然相同. 这就是说,表中每列都从第 2 个数开始是递增的. 如果任何相邻两行数都不相同,那么,行数之和是严格递增的正整数数列. 当写到第 1000^2 行时,其数字之和当然大于 1000^2,矛盾. 故知必有相邻两行相同.

为证(2),只须注意:

(i) 如果第 $m(m \geqslant 2)$ 行中的数 a 严格小于它下面的数 b,则 $b \geqslant 2a$,这是因为第 m 行的 b 个 a 是由第 $m-1$ 行中的每组有 a 个数的若干组合并而来的.

(ii) 如果第 $m(m \geqslant 3)$ 行中的数 a 严格小于它下面的数 b,则第 m 行中总有某个数 a 严格大于它上面的数 c.

由(i) 和(ii) 可知,如果第 m 行与第 $m+1$ 行不同,则必有 $2^{m-1} \leqslant 1000$. 由此得 $m \leqslant 10$. 这就证明了第 11 行必与第 12 行相同.

为说明第 10 行与第 11 行可以不同,可考察下面的例子:

$$0,1,2,2,4,4,4,4,\underbrace{8,8,\cdots,8}_{8个},\cdots,\underbrace{256,\cdots,256}_{256个},\underbrace{488,\cdots,488}_{488个}.$$

容易验证,从它出发得到的第 10 行和第 11 行分别为:

$$256,256,\cdots,256,488,488,\cdots,488.$$

$$\underbrace{512,512,\cdots,512}_{512个},\underbrace{488,488,\cdots,488}_{488个}.$$

3·46　在圆周上写上 $n \geqslant 3$ 个自然数,使得与其中任一个数相邻的两数之和与该数的比也是自然数. 求证所有这样的比值之和不小于 $2n$

但小于 $3n$.

(第 18 届全苏数学奥林匹克,1984 年)

[证] 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是圆周上的 n 个数,于是比值的和为 $S_n=\frac{a_n+a_2}{a_1}+\frac{a_1+a_3}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}+a_1}{a_n}$. 因而由均值不等式即得

$$S_n=\left(\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}\right)+\left(\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\right)\geqslant 2n.$$

下面用数学归纳法证明 $S_n<3n$. 当 $n=3$ 时,不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$. 若 $a_2=a_3$,则 $a_1=a_2=a_3$,这时 $S_3=6<9$. 当 $a_2<a_3$ 时,因为 $\frac{a_1+a_2}{a_3}$ 为自然数,故有 $a_1+a_2=a_3$. 从而有

$$S_n=\frac{a_1+2a_2}{a_1}+\frac{2a_1+a_2}{a_2}+1=2\left(\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}\right)+3. \qquad ①$$

若 $a_1=a_2$,则 $S_n=7<9$. 若 $a_1<a_2$,因为 $\frac{2a_1}{a_2}$ 为自然数,故 $2a_1=a_2$,因而由 ① 有 $S_n=8<9$. 这就证明了当 $n=3$ 时结论成立.

设结论于 $n=k$ 时成立. 当 $n=k+1$ 时,不妨设 a_{k+1} 最大. 如果与 a_{k+1} 相邻的两个数中有一个与它相等,则可推知圆周上所有数都相等. 这时 $S_{k+1}=2(k+1)<3(k+1)$. 当 a_k 和 a_1 都小于 a_{k+1} 时,因为 $\frac{a_k+a_1}{a_{k+1}}$ 为自然数,故有 $a_{k+1}=a_k+a_1$. 我们改写

$$\begin{aligned}S_{k+1}&=\left(\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{a_k}{a_{k-1}}+\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)+\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}+\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)+\left(\frac{a_1}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_1}\right)\\&=S_k+\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}+\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)+\left(\frac{a_1}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_1}\right)-\left(\frac{a_1}{a_k}+\frac{a_k}{a_1}\right). \qquad ②\end{aligned}$$

容易算出,② 式右端后三项之和为 3. 因而,为完成归纳证明,只须再验证从圆周上去掉 a_{k+1} 后,余下的 k 个数仍满足题中的条件,而为此又只须验证 $\frac{a_{k-1}+a_1}{a_k}$ 和 $\frac{a_k+a_2}{a_1}$ 都是自然数.

因为

$$\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_{k-1}+a_k+a_1}{a_k}=\frac{a_{k-1}+a_1}{a_k}+1,$$

而上式左端为自然数,故右端第一项也为自然数.同理可证$\frac{a_k+a_2}{a_1}$也是自然数.

最后,由②式利用归纳假设即知结论于$n=k+1$时也成立.

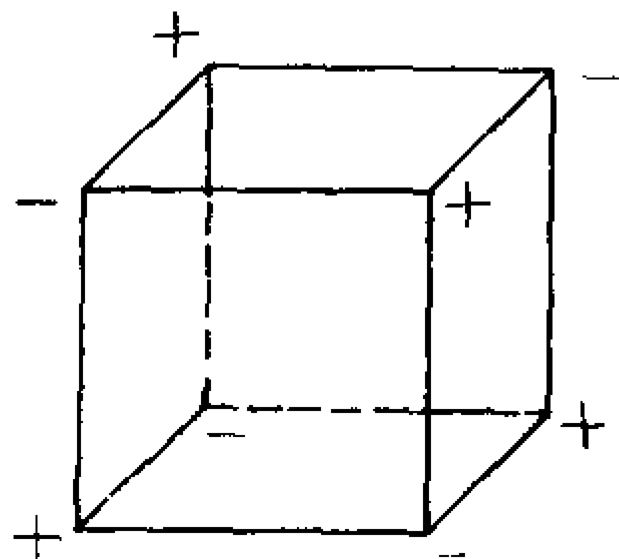
3·47　已知n^3个小正方体砌成一个$n\times n\times n(n\geqslant 3)$的正方体.试证可以在这$n^3$个小正方体中写上互不相同的整数,使得在平行于正方体一条棱的任何一串n个小正方体中的整数之和等于零.

(第20届全苏数学奥林匹克,1986年)

[证]　我们将使用"扰动构造法",即首先在所有小正方体中都写上0,然后在保证每串正方体中的数之和为零的前提下,每次变动少量正方体中之数,使之不相等并最后达到所有数互不相等.

为此,我们将交替使用下列两种变换:

(1)"加a变换":将右图中标有"+"号的四个顶点处的小正方体中的数都加数a,标有"-"号的四个顶点处的小正方体中之数都减数a.容易看出,在这种变换之下,任何一串小正方体中的数之和为零这一性质保持不变,但却可以使处在大正方体的两个相邻顶点或一个在顶点而另一个不在顶点的相等两个数变为不等.



(2)"换位变换":将平行于正方体某一面的两层小正方体互换位置,这里的层指$n\times n\times 1$的长方体.显然,这种变换也保持任何一串小正方体中的数之和为零的性质不变.但我们总可以用这种变换使得处在顶点处的小正方体离开顶点或者将不在顶点处的小正方体变到顶点处.

不难看出,我们总可适当安排这两种变换的次序,不断将正方体中的相等数对变为不相等.而且只要将a取得足够大,还可确保已经不等的数不会变成相等.由此可见,题中要求的填数法是可以实现的.

3·48　设10×10的方格表A中的每个方格中都写有一个整数.将第i行数之和记为s_i,第j列数之和记为t_j,$i,j=1,2,\cdots,10$.然后按如下方式填写一张10×10的新方格表B:在第i行j列的方格中填入s_i与t_j之较小者.已知可将表B中的方格由1至100编号,使得第k号方格中的数不大于k,求表A中所有数之和的最大值.

(第31届莫斯科数学奥林匹克,1968年)

[解] 不妨设 $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant s_{10}, t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_{10}, s_{10} \leqslant t_{10}$，并记表 B 中第 i 行 j 列的元素为 b_{ij}，于是按已知有

$$b_{i10} = \min\{s_i, t_{10}\} = s_i, i = 1,2,\cdots,10.$$

从而表 A 中所有数之和 $s = \sum_{i=1}^{10} s_i = \sum_{i=1}^{10} b_{i10}$. 又因 $b_{110}, b_{210}, \cdots, b_{1010}$ 是表 B 中的10个数，它们之和不超过 B 中最大的10个数之和，故有 $\sum_{i=1}^{10} b_{i10} \leqslant 955$，即表 A 中所有数之和不超过955.

另一方面，当表 A 如右图所示时，其中所有数之和为955，且由它所导出的表 B 与 A 相同，当然满足题中的要求.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	91
0	0	0	0	0	0	0	0	0	92
0	0	0	0	0	0	0	0	0	93
0	0	0	0	0	0	0	0	0	94
0	0	0	0	0	0	0	0	0	95
0	0	0	0	0	0	0	0	0	96
0	0	0	0	0	0	0	0	0	97
0	0	0	0	0	0	0	0	0	98
0	0	0	0	0	0	0	0	0	99
0	0	0	0	0	0	0	0	0	100

综上可知，表 A 中所有数之和的最大值为955.

3·49 在 $n \times n$ 个方格的棋盘上填上数 $1,2,\cdots,n^2$，每个方格中填1个数. 求证一定有两个相邻方格(即有公共边的两个方格)，其中的两数之差至少为 n.

(第29届国际数学奥林匹克预选题，1988年)

[证] 若不然，则任何两个相邻方格中的数至多相差 $n-1$. 对于 $k = 1,2,\cdots,n^2-n$，令 A_k 是填有数 $1,2,\cdots,k$ 的 k 个方格的集合，B_k 是填有数 $k+n, k+n+1,\cdots,n^2$ 的 $n^2-n-k+1$ 个方格的集合，C_k 是其余方格的集合且有 $|C_k| = n-1$. 由反证假设知，A_k 中的方格与 B_k 中的方格不相邻. 因为 $|A_k \cup B_k| = n^2 - n + 1$，故在 $n \times n$ 方格表中，必有一行与一列方格，其中没有 C_k 的方格. 进而知这一行一列或者全是 A_k 中的方格，或者全是 B_k 中的方格. 因为 A_1 和 B_{n^2-n} 都只有1个元素，所以，不含 C_1 中方格的这一行一列方格必全属于 B_1，不含 C_{n^2-n} 中方格的这一行一列方格则全属于 A_{n^2-n}. 这样一来，必存在指标 $m, 1 \leqslant k \leqslant n^2-n-1$，使得不含 C_j 中方格的一行一列方格全属于 $B_j, j = 1,2,\cdots,k$，而不含 C_{k+1} 中方格的一行一列方格则全属于 A_{k+1}. 但这两组各一行一列方格至少有2个公共方格，从而有 $B_k \cap A_{k+1} \neq \varnothing$，此与二者的定义矛盾.

3·50 在圆周上有和等于零的 n 个实数，且其中有一个数等于1.

(1) 求证存在两个相邻的数，它们的差不小于$\frac{4}{n}$.

(2) 求证存在一个数，它的两个邻数的算术平均值与它的差不小于$\frac{8}{n^2}$.

(3) 试求一个比 8 大的数，使当用它代替(2) 中的 8 时，结论仍然成立.

(4) 当 $n = 30$ 时，求证在圆周上有一个数，它的两个邻数的算术平均值与它的差不小于$\frac{2}{113}$. 举出圆周上的一组 30 个数，使其中任何一数与它的两个邻数的算术平均值的差不大于$\frac{2}{113}$.

(第 10 届全苏数学奥林匹克，1976 年)

[解] 令 $m = \left[\frac{n}{2}\right]$，于是 $n = 2m$ 或者 $n = 2m + 1$. 把圆周上的数按以下方式编号：$x_0 = 1$ 为初始数；$x_1, x_2, \cdots, x_m$ 为从 x_0 开始且按顺时针方向依次排列着的数；$x_{-1}, x_{-2}, \cdots, x_{-m+1}$(如果 n 为奇数，则还有 x_{-m}) 为从 x_0 开始沿逆时针方向排列着的数.

(1) 如果任何两个相邻的数的差都不大于 ε，则有

$$x_1 \geqslant 1 - \varepsilon, x_2 \geqslant 1 - 2\varepsilon, \cdots, x_{m-1} \geqslant 1 - (m-1)\varepsilon, x_m \geqslant 1 - m\varepsilon,$$

$$x_{-1} \geqslant 1 - \varepsilon, x_{-2} \geqslant 1 - 2\varepsilon, \cdots, x_{-m+1} \geqslant 1 - (m-1)\varepsilon, (x_{-m} \geqslant 1 - m\varepsilon).$$

将这些不等式及 $x_0 = 1$ 相加，且注意到 n 个数之和等于零，便得 $n - m^2\varepsilon \leqslant 0$. 由此解得 $\varepsilon \geqslant \frac{n}{m^2} \geqslant \frac{4}{n}\left(因为\ m^2 \leqslant \frac{n^2}{4}\right)$.

(2) 设圆周上相邻两数之差的绝对值的最大值为 ε. 由(1) 知 $\varepsilon \geqslant \frac{4}{n}$. 设 $x_{k_0} - x_{k_0-1} = \varepsilon$(若 $x_{k_0} - x_{k_0-1} = -\varepsilon$，则引入 y_k 时加负号). 令

$$y_k = \frac{1}{\varepsilon}(x_k - x_{k-1}), k = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 $x_0 = x_n$. 容易验证，$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 之和为零且 $y_{k_0} = 1$，亦即$\{y_k\}$满足(1) 中的条件，故由(1) 知，存在一个 k，$1 \leqslant k \leqslant n$，使得

$$\left|\frac{1}{2}(x_{k+1} + x_{k-1}) - x_k\right| = \left|\frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k) - \frac{1}{2}(x_k - x_{k-1})\right|$$

$$= |y_{k+1} - y_k| \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \frac{8}{n^2}.$$

(3) 设 δ 是圆周上的数与它的两个邻数的算术平均值的差的绝对值的最大值,让我们来寻求对 δ 的较为准确的估计,并为构造最优数组创造条件.

不妨设数组 $\{x_k\}$ 对称:$x_k = x_{-k}$,否则只须用 $\frac{1}{2}(x_k + x_{-k})$ 代替 x_k 即可.在估计数 x_k 之前,先从 x_0 开始估计 $x_{k-1} - x_k$,然后再从圆周上与 x_0 相对的点开始估计.因为 $x_1 = x_{-1}$,所以有

$$x_0 - x_1 \leqslant \frac{1}{2}\left|-x_{-1} + 2x_0 - x_1\right| \leqslant \delta,$$

$$x_1 - x_2 \leqslant (x_0 - x_1) + \left|-x_0 + 2x_1 - x_2\right| \leqslant 3\delta, \qquad ①$$

$$x_2 - x_3 \leqslant (x_1 - x_2) + \left|-x_1 + 2x_2 - x_3\right| \leqslant 5\delta,$$

$$\vdots$$

$$x_{k-1} - x_k \leqslant (2k-1)\delta, \quad \cdots.$$

当 $n = 2m$ 时,既然有一个与 x_0 相对的 x_m,故类似于 ① 可得

$$x_{m-1} - x_m \leqslant \delta, x_{m-2} - x_{m-1} \leqslant 3\delta, \cdots, x_{m-j} - x_{m-j+1} \leqslant (2j-1)\delta. \qquad ②$$

当 $n = 2m + 1$ 时,x_m 与 x_{-m} 相邻,于是有

$$x_{m-1} - x_m \leqslant 2\delta, x_{m-2} - x_{m-1} \leqslant 4\delta, \cdots, x_{m-j} - x_{m-j+1} \leqslant 2j\delta. \qquad ③$$

注意,对于 $k < \frac{m}{2}$,对 $x_{k-1} - x_k$ 的较好估计是 ①,而对于 $k > \frac{m}{2}$,较好的估计是 ② 或 ③.为了对 n 作出 δ 的较为精确的估计,我们把 n 按它除以 4 所得余数的不同分为 4 种情形分别加以讨论.例如当 $n = 4l + 2$ 时,由 ① 和 ② 可得

$$x_k = x_{-k} \geqslant 1 - s_k\delta, k = 1, 2, \cdots, 2l + 1, \qquad ④$$

其中的 s_k 为如下数列中前 k 项之和:

$$1, 3, \cdots, 2l - 1, 2l + 1, 2l - 1, \cdots, 3, 1. \qquad ⑤$$

因为一切 x_k 之和为零,故由 ④ 求和可得

$$0 = x_0 + 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2l}) + x_{2l+1} \geqslant n - s\delta, \qquad ⑥$$

其中

$$s = 2(s_1 + s_2 + \cdots + s_{2l}) + s_{2l+1}. \qquad ⑦$$

注意到数列 ⑤ 对称,便知 $s_j + s_{2l+1-j} = s_{2l+1}$,从而由 ⑦ 可得

$$s = (2l+1)s_{2l+1} = \frac{n}{2}[(l+1)^2 + l^2] = \frac{n}{16}(n^2+4). \qquad ⑧$$

将⑧代入⑥，便得 $\delta \geqslant \frac{16}{n^2+4}$. 类似地，对于 $n = 4l, 4l+1, 4l+3$ 的情形，可分别得到估计式

$$\delta \geqslant \frac{16}{n^2}, \delta \geqslant \frac{16}{n^2+1}, \delta \geqslant \frac{16}{n^2+2}.$$

容易看出，对所有 $n \geqslant 3$，都有 $\delta \geqslant \frac{13}{n^2}$. 从而可用 13 代替(2) 中的 8.

(4) 当 $n = 30$ 时，由上述论证即得 $\delta \geqslant \frac{16}{30^2+4} = \frac{2}{113}$ 而且为使等号成立，应取数组为

$$x_k = \begin{cases} 1 - k^2\delta, & k = 0,1,\cdots,7, \\ 1 - (113 - (15-k)^2)\delta = -1 + (15-k)^2\delta, & k = 8,9,\cdots,15, \end{cases}$$

其中 $\delta = \frac{2}{113}$.

3·51 梅尔林有两张 100×100 的方格表，一张是空白表格，挂在山洞入口处的峭壁上，另一张的每个方格中都填有一个数，挂在山洞里面的墙上. 你可以在第 1 张表格中的任何地方指定一个任意大小的正方形(可以是 $1\times1, 2\times2, \cdots, 100\times100$ 中的任何一个) 的子表，然后付一个先令到梅尔林处打听第 2 张表中填在相应的子表中的所有数之和. 试问为了得到第 2 张表中对角线上所有数之和，最少需要付出多少先令？

(第 33 届莫斯科数学奥林匹克，1970 年)

[**解**] 显然，沿着对角线问 100 个 1×1 的正方形，即可得知对角线上所有数之和，故知所求的最小值不超过 100.

x_1				0	0
$-x_1$	x_2			0	0
	$-x_2$	x_3		0	0
		⋱	⋱		
0	0	0	⋱	x_{99}	
0	0	0		$-x_{99}$	x_{100}

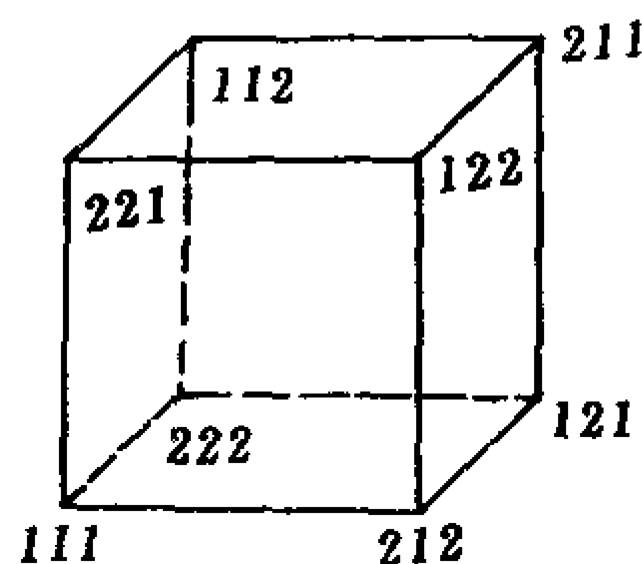
另一方面，如果梅尔林的第 2 张方格表填数如下图，则无论对哪个正方形提问，每次至多了解到对角线上 1 个数的值. 因此问了 99 个问题之后，仍然无法得出和数为多少. 因此为了得到第 2 张表中对角线上的所有数之和，最少要付 100 先令.

3·52 能否在正方体的每个顶点标上一个由数字1 和 2 组成的各不相同的三位数，使得任何两个相邻顶点的标数至少有两位数字不同？

(第 10 届全苏数学奥林匹克，1976 年)

组合卷

[解] 右图所标的数字便满足题中要求.



3·53 能否将从1到30的所有自然数填写在五行六列的表格中,使得

(1) 每列的各数之和相等?

(2) 每行的各数之和相等?

(第6届全俄数学奥林匹克,1990年)

[解] (1) 从1到30的所有自然数之和为

$$1+2+\cdots+30=465.$$

而465不能被6整除,所以把这30个数填在五行六列的表格中,不能使每列之和相等.

(2) 可以将1到30的自然数分成15对:

(1,30),(2,29),…,(15,16)

每对两数之和为31,这样就可以把它们填入表内,使每行有3对和为31的数,其每行的和等于$3\times31=93$.因此能做到各行之和相等.

1	30	2	29	3	28
4	27	5	26	6	25
7	24	8	23	9	22
10	21	11	20	12	19
13	18	14	17	15	16

3·54 如图所示,在国际象棋棋盘上写上数字1,9,9,1.能否在棋盘余下的格中填上数,使得每行及每列都成等比数列.

(第17届全俄数学奥林匹克,1991年)

						9	
							1
1							
	9						

[解] 假设满足要求的填数方式存在,所填的数中用$a_k,b_j,c_i(1\leqslant k\leqslant5,1\leqslant j\leqslant6,1\leqslant i\leqslant5)$表示,如图.

由题设,因为$9,b_1,a_1$及$1,b_1,c_1$成等比数列,则

$$b_1^2=9\cdot a_1=1\cdot c_1.$$

						9	
					a_5	b_6	1
				a_4	b_5	c_5	
			a_3	b_4	c_4		
		a_2	b_3	c_3			
	a_1	b_2	c_2				
1	b_1	c_1					
	9						

同理有

$$b_2^2=c_1a_2=a_1c_2,$$
$$b_3^2=c_2a_3=a_2c_3,$$
$$b_4^2=c_3a_4=a_3c_4,$$
$$b_5^2=c_4a_5=a_4c_5,$$
$$b_6^2=c_5\cdot9=a_5\cdot1.$$

将以上6式相乘得

$$9 \cdot c_1c_2c_3c_4c_5 \cdot a_1a_2a_3a_4a_5 \cdot 9$$
$$= 1 \cdot a_1a_2a_3a_4a_5 \cdot c_1c_2c_3c_4c_5 \cdot 1.$$

于是有 $81 = 1$.

这是不可能的.

所以所要求的填数方式是不存在的.

3·55 能否在无穷大方格纸的每个方格中都放一个“+”或“0”，使得在任何一条水平线，竖直线及对角线上都不出现相邻的 3 个相同的符号？

（第 52 届莫斯科数学奥林匹克，1989 年）

[解] 可以做到．例如可按下图所示周期地放置符号．

+	+	0	0	+	+	0	0
0	0	+	+	0	0	+	+
+	+	0	0	+	+	0	0
0	0	+	+	0	0	+	+
+	+	0	0	+	+	0	0
0	0	+	+	0	0	+	+
+	+	0	0	+	+	0	0
0	0	+	+	0	0	+	+

3·56 能否在一个正 45 边形的每个顶点处都写上 0，1，2，…，9 这 10 个数字之一，使得对于这 10 个数字中的任何两个不同的数字，都存在正 45 边形的一条边，这条边的两个端点处恰好写着这两个数字？

（第 3 届全俄数学奥林匹克，1963 年）

[解] 设题中要求的放数法可以实现．这时，一个数字 a 与其他 9 个数字中的每一个构成一对，共有 9 对数字，必须占有 9 条边．为此，至少有 5 个顶点放有数字 a．因而 10 个不同数字至少要占有 50 个顶点，此不可能．故知所要求的放数法是不存在的．

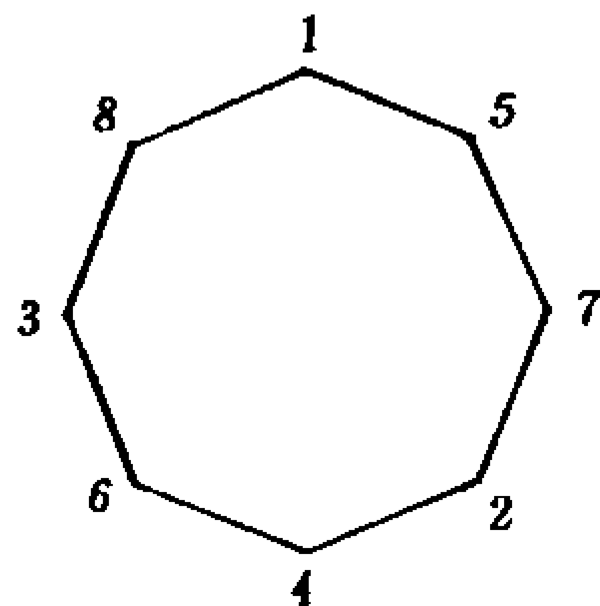
3·57 能否把 8 个数 1，2，…，8 这样地排列在一个正八边形的各顶点上，使得对于任意位于三个相继顶点上的各数之和

(1) 大于 11？

(2) 大于 13？

（第 14 届全俄数学奥林匹克，1988 年）

[解] (1) 能够做到．



如图，把八个数按逆时针排列为 1，8，3，6，4，2，7，5 即是一种排法．

(2) 不能做到．

假设存在这样的 1，2，…，8 的排列，使得八边形的八个顶点中任意三个相继顶点之和大于 13.

设这八个顶点对应的数依次为

$$a_1, a_2, \cdots, a_8.$$

则有

$$a_1 + a_2 + a_3 \geqslant 14, \quad a_2 + a_3 + a_4 \geqslant 14,$$
$$a_3 + a_4 + a_5 \geqslant 14, \quad a_4 + a_5 + a_6 \geqslant 14,$$
$$a_5 + a_6 + a_7 \geqslant 14, \quad a_6 + a_7 + a_8 \geqslant 14,$$
$$a_7 + a_8 + a_1 \geqslant 14, \quad a_8 + a_1 + a_2 \geqslant 14.$$

将这八个式子相加得

$$3(a_1 + a_2 + \cdots + a_8) \geqslant 112.$$

然而 $a_1 + a_2 + \cdots + a_8 = 1 + 2 + \cdots + 8 = 36,$

$$3 \times 36 = 108 < 112.$$

从而出现矛盾.

3·58 在一些全等正三角形的顶点上,按任意次序分别写上数字1,2,3.把这些三角形叠在一起,使它们的顶点重合.能否使得在每个顶点上的各数之和都等于(1)1977?(2)1976?

(基辅数学奥林匹克,1977年)

[**解**] 因为每个三角形的3个顶点上的数之和为6,故无论多少个三角形叠起来,其3个顶点所写的所有整数之和都是6的倍数.因为3×1977不是6的倍数,故不可能使叠合后的三角形的每个顶点上的整数之和都是1977.

注意,只要把两个正三角形叠合起来,使写有1的顶点与另一个三角形写有3的顶点重合,写有3的顶点与另一个三角形写有1的顶点重合,两个三角形中写有2的顶点也重合,便可使每个顶点的两数之和都为4.因为1976 = 4×494,故只要把494个已像上面那样重叠好的三角形对再重叠在一起,便可使重叠后的三角形的每个顶点的各数之和都等于1976.

3·59 在正方体的每个顶点都放上一个+1或-1,在每个侧面的中心都放上该面4个顶点上所放的数的乘积.问所放的14个数的和能否为0或7?

(莫斯科集训队训练题,1986年)

[**解**] 如果在正方体的8个顶点所放的8个数中有-1,我们就把

其中的1个-1改写为$+1$.这时,以这个顶点为顶点的3个侧面的中心所放的数也同时变号,即总共4个数同时变号.这4个数之和可能为$-4,-2,0,2$,变号之后将分别变为$4,2,0,-2$.由此可见,14个数之和是模4不变的.

当8个顶点所放的数都是$+1$时,14个数都是$+1$,其和为14.既然它模4不变,故永远不能变成0或7.

3·60 在8×8的方格表中的每个方格中都写有1个非零整数,它们的和等于0.然后用竖直线和水平线将每个小方格分成4个小区域.试问能否在这些小区域中填入整数,使得如下条件成立:

(1) 棋盘边缘上的小区域中的数都是0;

(2) 每个方格中的4个小区域中的4数之和等于该方格中原来的数;

(3) 与棋盘上的每个结点(4个方格的公共顶点)相毗邻的4个区域中所填数之和都等于0?

(第32届莫斯科数学奥林匹克,1969年)

[解] 将8×8方格表视为国际象棋棋盘,将其中白格填入1,黑格填入-1,则所有数之和为零.将方格表左上角的2×2的4个方格划分成16个小区域,填数如右图所示.然后横向竖向都以2个方格为周期延拓到整个方格表,则所得的数表便满足题中要求.

0	0	0	0
0	1	-1	0
0	-1	1	0
0	0	0	0

3·61 能不能用符号"×"和"○"填满大小为

(1)3×3.

(2)198×8.

的表格中的所有格子,使得每个"×"旁恰好排一个"○",每个"○"旁恰好排一个"×".

(第14届全俄数学奥林匹克,1988年)

[解] (1)3×3时不能.

假设能,设中央的格内填上"×".则A,B,C,D四个格内有且只有一个填"○".不失一般性,设A填"○",从而B,C,D填"×".

E	D	
C	×	A
	B	

此时E不能填"×",因为若E填"×",则在E旁的C,D也是"×",与题设每个"×"旁恰好排一个"○"矛盾.

E也不能填"○",因为每个"○"旁应恰好排一个"×",此时E的旁

边有 C,D 两个"×".

从而出现矛盾,即 3×3 表不可能.

(2)198×8 可能.

对一个 4×8 的方格表可以采用如图的填法.

×	○	○	×
×	○	○	×
×	○	○	×
×	○	○	×
×	○	○	×
×	○	○	×
×	○	○	×
×	○	○	×

然后把49个这样的 4×8 方格表并排在一起构成了一个 196×8 的方格表,显然合乎要求,下面只需把第 197 列都填"×",第 198 列都填"○" 即可.

3·62 在一张规格为 $5\times n$ 的方格纸上铺满了 1×2 的矩形卡片,每张卡片的两个方格中都写着一个 $+1$ 和一个 -1. 已知拼成的数表中每行每列数之积都是正数. 求能排成这样数表的所有自然数 n.

(第 26 届莫斯科数学奥林匹克,1963 年)

[解] 首先,当 n 为奇数时,纸上的方格总数为奇数,当然无法用 1×2 的卡片铺满.

其次,当 $n=4$ 时,可像右图那样铺满卡片,显然满足题中要求. 由此可知,当 $4\mid n$时,均可铺成满足要求的数表.

-1	1	-1	1
1	1	-1	-1
-1	1	1	-1
-1	1	1	-1
-1	1	1	-1

当 n 为偶数但不是 4 的倍数时,$\frac{n}{2}$ 为奇数. 从而卡片的块数为奇数,亦即拼成的数表中 -1 的个数为奇数. 因数表共有偶数列(n 列),故其中至少有 1 列中含有奇数个 -1,这一列数之积当然是 -1,不合要求.

综上可知,当且仅当 $4\mid n$时,可用卡片拼成满足要求的 $5\times n$ 的数表.

3·63 在正1983 边形的顶点上分别放置着数 $1,2,\cdots,1983$,它的每一条对称轴都将不在其上的数分成两个集合. 如果其中一个集合中的每一个数都大于与它处于对称位置的另一集合中的数,则称这种放置对于相应的对称轴是"好的". 问是否存在一种放置,使它对于每条对称轴都是好的.

(第 46 届莫斯科数学奥林匹克,1983 年)

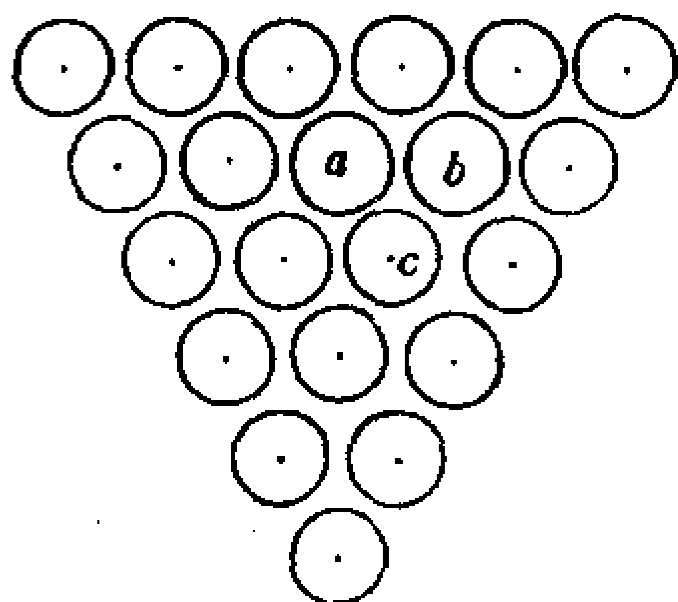
[解] 存在. 过一个顶点引多边形的一条对称轴,并旋转多边形使这条对称轴是竖直的,它所过的顶点在圆的正上边. 在这个顶点放置

整数 1983. 对称轴将圆分为左右两半，将左半圆上的顶点按逆时针方向所放的数依次记为 $a_1, a_2, \cdots, a_{991}$，而与 a_i 对称的顶点所放的数记为 $b_i, i = 1,2,\cdots,991$. 令 $a_i > b_i, i = 1,2,\cdots,991$. 再过顶点 b_{991} 引一条对称轴，则它穿过顶点 a_1 与 1983 之间且垂直平分两点之间的连线. 为使放置法关于这条对称轴也是好的且因 $1983 > a_1$，故必有 $b_i > a_{i+1}$，$i = 1,2,\cdots,990$. 将这些不等式与前面的不等式连成一串，便得

$$1983 > a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > \cdots > a_{990} > b_{990} > a_{991} > b_{991}.$$

这样一来，整数 1,2,…,1983 的放置法就惟一确定了. 容易验证，这种放置法对于任何对称轴来说都是好的.

3·64　能否将 1 至 21 这 21 个自然数分别填入右图的各个圆圈内，使得除第 1 行外，每个圆圈内的数都等于其肩膀上的两个圆圈内之数的差的绝对值(即图中的 $c = |a - b|$).



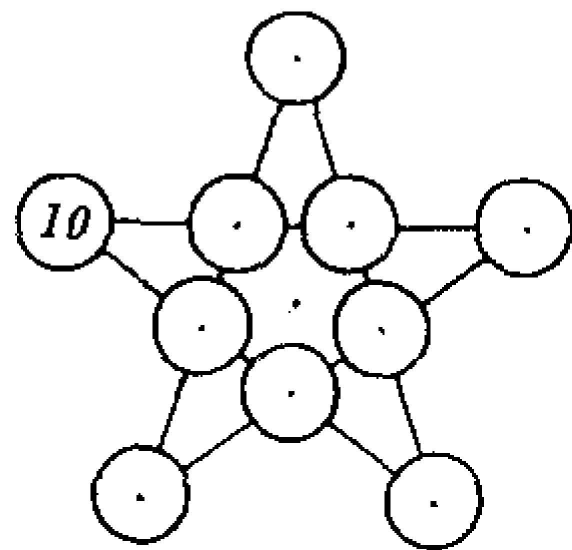
(原苏联教委推荐试题，1990 年)

[解]　不能实现. 若不然，则表中的 21 个数分别为 1,2,…,21，其和为奇数.

另一方面，因为二数之差的绝对值与该二数之和的奇偶性相同，故在奇偶性看来，可以将二数之差的绝对值改为该二数之和. 这样一来，当第 1 行 6 个数为 a,b,c,d,e,f 时，第 2 行的 5 个数之和的奇偶性与 $a + f$ 的奇偶性相同；第 3 行的 4 个数之和的奇偶性与 $a + b + e + f$ 的奇偶性相同；第 4 行的 3 个数之和与 $a + c + d + f$ 的奇偶性相同；最下面两行的 3 个数之和为偶数. 因而表中所有数之和的奇偶性与 $4(a + f) + 2(b + c + d + e)$ 的奇偶性相同，即为偶数，矛盾.

3·65　能否将自然数 1,2,…,10 填入如图所示的成五角星形的 10 个圆圈内，使得每条直线上的 4 个整数之和相等?

(中国国家集训队训练题，1986 年)



[解]　不能实现. 若不然，设有一种填数法满足题中要求，则其中 10 与 1 必共线. 否则，从 10 发出的两条直线上的 8 个整数之和(10 算两次)不小于 $10 \times 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 47$. 另一方面，又因在计算 5 条直线上的整数之和时，表中每个整

数都恰被计算两次,故知每条直线上的 4 数之和均为 $55\times2\div5=22$,矛盾.

与 10 不共线的数共有 3 个,其和为 $55-22\times2+10=21$,这 3 个数称之为 A 组.此外,过 1 而不过 10 的直线上除 1 外,另 3 数之和也是 21,我们把这 3 个数称为 B 组.

注意,A 组 3 个数与 B 组 3 个数的位置恰有两个相重.由于两组数之和都是 21,故两组的第 3 个数相等但位置却不同,矛盾.

3·66　能否在 n 行 n 列的方格表的空格上分别填上 1,2,3 三个数,使得每行,每列及每条对角线上 n 个数之和各不相同.

(第 12 届全俄数学奥林匹克,1986 年)

[解]　不能实现.若不然,设有一个满足题中要求的数表.易见,n 行,n 列和两条对角线上的 n 个数之和共有 $2n+2$ 个和数,其中每个和数都既不小于 n 也不大于 $3n$.这表明 $2n+2$ 个和数至多有 $2n+1$ 个不同的值.从而由抽屉原理知其中必有两个和数相同,矛盾.

3·67　能否在 17×17 的方格表的每个方格中都填入一个实数,这些实数不全为 0,且使得每个方格中的数都等于其所有邻格中的各数之和(有公共边的两个方格称为相邻的)?

(第 19 届全俄数学奥林匹克,1993 年)

1	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1

[解]　可以实现.

右图所示的填数法即满足题中要求.

3·68　在 6×7 的矩形方格表的第 4 列的 6 个方格中依次填入整数 1,2,3,4,5,7.能否在其余的每个方格中都填入一个数字,使得由各行数字所构成的 6 个七位数成等差数列,并且由各列数字所构成的 7 个六位数也构成等差数列?

(圣彼得堡数学选拔考试,1993 年)

[解]　无法实现.

若不然,设可以填数满足题中要求.由于由各行数字所构成的6个七位数成等差数列,所以它们的和是3的倍数,从而表中所有数字之和也是3的倍数.

另一方面,由于由每列数字所构成的7个6位数也成等差数列,所以前3列与后3列的所有数字之和都是3的倍数.这样一来,第4列数字之和也应是3的倍数,此与已知矛盾.

3·69　(1)能否把0,1,2,…,9这10个数分放在一个圆周上,使得任何相邻两数之差都等于3,4或5?

(2)能否把1,2,…,13分放到一个圆周上,使得任何相邻两数之差都等于3,4或5?

(第1届全苏数学奥林匹克,1967年)

[解]　(1)答案:不能.注意,0,1,2,8,9中的任意两个数字不可能相邻,因此,它们应该每隔一个位置地放在圆周上.这时,另外5个数中的每个都要与上述5数中的两个数相邻.但7无论与上述5数中的哪两个相邻,至少有一对是不合要求的.

(2)答案:不能.推理类似于(1).数1,2,3,11,12,13中的任何两数不能相邻,因而它们只能占据圆周上6个互不相邻的位置,从而另外7个空位置恰有两个相邻,其他的都互不相邻而且与这两个也不相邻.因为4只能与上述6个数中的1相邻而10只能与13相邻.故4与10只好填在相邻两个空位中,但4又不能与10相邻,矛盾.

3·70　能否在一张无穷大的方格纸的每个方格中写一个整数,使在每一个有4×6个方格且以网格线为边的矩形中所有数之和等于(1)10,(2)1?

(第17届全苏数学奥林匹克,1983年)

1	-1			1			-1	1				1	-1
		0	0				0	0			0		
		1	-1			1			-1	1			
	0			0	0				0	0			0
1				1	-1			1			-1	1	
0			0			0	0				0	0	
	-1	1				1	-1			1			-1
	0	0			0			0	0				0
1			-1	1				1	-1			1	
			0	0			0			0	0		

[解]　右图所示的填数原则是:选取两组不同方向的斜线,第一组是每平移4格选一条线,在线上相间地填入1和0;第二组是每平移6格选一条线,在线上相间地填入-1和0.容易

验证,在每个 4×6 的矩形中,都有3个1,2个 -1 和5个0,其和为1.其中未填数的方格中都表示填0.

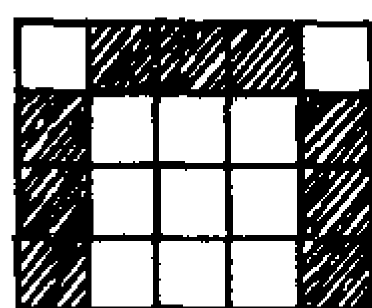
若将表中已填的数全都改为1,而空格仍表示填0,则每个 4×6 矩形中的24个数之和为10.

当然,和为10的情形还有更简单地填数法.见下图.

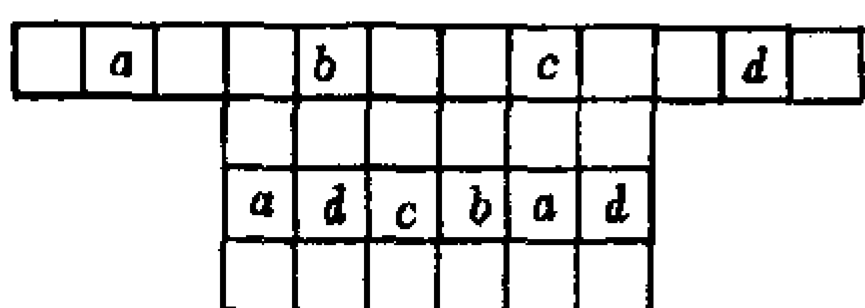
	2						2						2
3						3						3	
					2						2		
				3						3			
			2						2				
		3						3					
	2						2						2
3						3						3	

3·71　能否在 100×100 个格子的方格纸的每个格子中都填入0,1,2三数之一,使在任何 3×4 个格子的矩形里都有3个0,4个1和5个2?　　(第6届全苏数学奥林匹克,1972年)

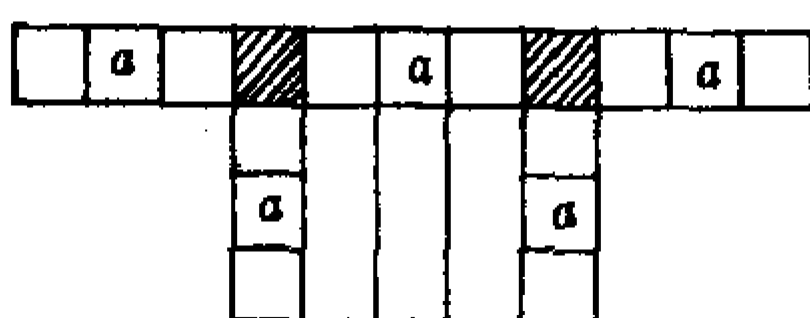
[解]　假设已经在 100×100 的方格纸上填好了数,使在每个 3×4 个方格的矩形中都有3个0,4个1和5个2.我们先引入一条术语:如果在两个图形中有相同个数的0,1和2,则称二者的填法相同.可以看出,图(a)中用斜线标出的三个矩形填法相同.由此又可推知,1×12 的矩形与 3×4 的矩形填法相同(见图(b)),即其中也有3个0,4个1和5个2.



(a)



(b)



(c)

另一方面,既然 3×4 矩形中有5个2,故由抽屉原理知其中必有一列的3个方格中有两个2,不妨设图(c)中标有字母 a 的竖直3格是这样.这样一来,由于图(c)中的 1×11 横条中有3段 1×3 的横条填法与 a 相同,故其中至少有6个2,矛盾.从而知满足要求的填数法是不能实现的.

3·72　能否在 10×10 方格表的每个方格中填入一个非零数字,使得由各行数字所构成的十位数都大于由主对角线上的数字所构成的十位数,且此十位数又大于由每列数字所构成的十位数?

(圣彼得堡数学选拔考试,1993年)

[解] 无法实现.

若不然,设已在方格表中填好数字并满足题中要求.由题设知,任何一行的10个数字所构成的十位数都大于任何一列的10个数字所构成的十位数.将表中左上角的3个方格中的数分别记为 a,b,c(见右图).因为第1行的数大于第2列的数,所以 $a\geqslant b$;因为第1行的数大于第1列的数,所以 $b\geqslant c$;因为第2行的数大于第1列的数,所以 $c\geqslant a$.于是有 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant a$,从而有 $a=b=c$.同理可证第1行的10个数字与第1列的10个数字全都相同,此与第1行的数大于第1列的数的要求矛盾.

a	b		
c			

3·73 (1) 试证总能把数 $1,2,\cdots,32$ 排成一行,使得其中任何两数之和的一半都不等于在这两个数之间的任何数.

(2) 能否把数 $1,2,\cdots,100$ 排成一行,使得其中任何两数之和的一半都不等于在这两个数之间的任何数?

(第8届全苏数学奥林匹克,1974年)

[解 1] (1) 按如下规则来把32个数写成一行:在左半行写偶数,右半行写奇数.这时,从左,右半行中各取一数的两数之和的一半不是整数,当然不等于两数间的任何一数.然后再把每个半行均分成两部分$\left(\text{两个}\dfrac{1}{4}\text{行}\right)$,并把形如 $4k,4k+2,4k+1,4k+3$ 的数分别安排在这4部分之中.易见,左半行的两部分中各取一数的两数之和的一半是奇数,当然不在左半行中;右半行的两部分中各取一数的两数之和的一半是偶数,当然也不在右半行中.继续把每一部分再分成两部分,而此时的"偶数","奇数"由每个数除以8所得的余数来决定.最后,我们得到排法如下:

$$32,16,8,24,4,20,12,28,2,18,10,26,6,22,14,30,$$
$$1,17,9,25,5,21,13,29,3,19,11,27,7,23,15,31.$$

(2) 由(1)中的构造法可知,当然能够把 $1,2,\cdots,100$ 排成一行,使之满足题中的要求.例如,我们可以按上述原则将 $1,2,\cdots,128$ 排成一行并使之满足题中的要求.然后再把这行数中大于100的数全部划掉即得满足要求的排法.

[解 2] 我们用数学归纳法来解决这个问题.

当只有两个数1,2时,显然,只要使2排在左面,1排在右面便满足要求.设对于前 2^k 个自然数的情形已经排好为 $a_1,a_2,\cdots,a_{2^k}$,则当有前 2^{k+1} 个自然数时,我们令

$$2a_1,2a_2,\cdots,2a_{2^k},2a_1-1,2a_2-1,\cdots,2a_{2^k}-1,$$

则容易验证这行数满足题中的要求.这就证明了题中结论对任意 $n\in N$,前 2^n 个自然数都可以排成一行,使之满足题中的要求.

特别地,当 $n=5$ 时,前32个自然数可排列如下:

32,16,24,8,28,12,20,4,30,14,22,6,26,10,18,2,

31,15,23,7,27,11,19,3,29,13,21,5,25,9,17,1.

由上面归纳论证知可将前128个自然数排成一行,使之满足题中要求.然后将其中大于100的数全部划掉,便得前100个自然数的满足要求的排法.

3·74 对于怎样的 $n\in N$,能在 $n\times n$ 的方格表的每个方格中都填入 $-1,0,1$ 之一,使得每行与每列数之和共 $2n$ 个和数互不相同?

(第29届国际数学奥林匹克候选题,1988年)

[解] n 为偶数时,存在满足题中要求的数表;n 为奇数时,不存在满足要求的数表.

-1	0
-1	1

对于 n 为偶数的情形,我们用归纳法来构造.当 $n=2$ 时,右图所示的数表就满足要求,其4个和数分别为 $-2,-1,0,1$.下面我们用数学归纳法来证明加强命题:对每个偶数 n,都可在 $n\times n$ 的方格表的每个方格中填入 $-1,0,1$ 之一,使得 n 行和 n 列数分别求和所得的 $2n$ 个和数分别为 $-n,-n+1,\cdots,0,1,\cdots,n-1$.

设命题于 $n=2k$ 时成立.往证当 $n=2(k+1)$ 时命题成立.按归纳假设,下图中空白的 $2k\times 2k$ 的方格表可以填好数,使所得的 $4k$ 个和数分别为 $-2k,-2k+1,\cdots,0,1,\cdots,2k-1$.现将 $(2k+2)\times(2k+2)$ 方格表中的其他方格中填数如图所示,则原有的 $4k$ 个和数每个都不动而新增加的4个和数分别为 $-(2k+2),-(2k+1),2k,2k+1$.合在一起恰好证明命题于 $n=2(k+1)$ 时成立.这就证明了对所有偶数 n,题中所要求的数表都存在.

$2k\times 2k$				-1	1
				-1	1
				⋮	⋮
				-1	1
-1	-1	...	-1	-1	0
1	1	...	1	-1	1

设 n 为奇数且存在满足要求的数表.将第 i 行数的和记为 r_i,第 j

列数的和记为s_j.由于$r_1,\cdots,r_n,s_1,\cdots,s_n$互不相同,故有

$$\sum_{i=1}^{n}|r_i|+\sum_{j=1}^{n}|s_j|\geqslant\sum_{k=-n}^{n}|k|-n=n^2. \qquad ①$$

因为n行和n列的$2n$个和数是集合

$$\{-n,-n+1,\cdots,0,1,\cdots,n\}$$

的$2n$个元素,所以$2n$个和数中至少有n个非负,也至少有n个非正.将数表中的行与行,列与列适当对调,总可使得前k行与前$n-k$列的和都是非负的,而其余的行和列和都是非正的.于是有

$$\sum_{i=1}^{n}|r_i|+\sum_{j=1}^{n}|s_j|=(r_1+\cdots+r_k)-(r_{k+1}+\cdots+r_n)$$
$$+(s_1+\cdots+s_{n-k})-(s_{n-k+1}+\cdots+s_n). \qquad ②$$

将数表中第i行j列的数记为a_{ij},于是由②又有

$$\sum_{i=1}^{n}|r_i|+\sum_{j=1}^{n}|s_j|=2\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\1\leqslant j\leqslant n-k}}a_{ij}-2\sum_{\substack{k+1\leqslant i\leqslant n\\n-k+1\leqslant j\leqslant n}}a_{ij}$$
$$\leqslant 2k(n-k)+2(n-k)k$$
$$=4k(n-k). \qquad ③$$

由①和③得到

$$n^2\leqslant 4k(n-k),$$
$$(n-2k)^2\leqslant 0.$$

由于n为奇数,上式左端不能为0,矛盾.这表明n为奇数时,满足要求的数表不存在.

3·75　试在一个4×4的方格表中填写16个不全为零的数,使得每一行,每一列和每一条对角线(包括斜穿过1个,2个或3个方格的小对角线,共有14条)上的数之和都等于零.

(第31届莫斯科数学奥林匹克,1968年)

[解]　对任何$a\neq 0$,像右图中那样填数都满足题中要求.

0	a	-a	0
-a	0	0	a
a	0	0	-a
0	-a	a	0

3·76　将一个圆周n等分,在各个分点分别写上数$x_1,x_2,\cdots,x_n$,它们都或为$+1$或为-1.若将圆周转动角度$k\dfrac{360^\circ}{n}$,则每个分点都转到另一个分点的原来位置上,将每两个这样的分点上所写的数相乘,再将所得的n个乘积求和.已知当$k=1,2,\cdots,n-1$时,

该和都为零,求证 n 是一个完全平方数.

(第 34 届莫斯科数学奥林匹克,1971 年)

[证]　由已知有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+k} = 0, k = 1,2,\cdots,n-1.$$

其中当 $j > n$ 时,$x_j = x_{j-n}$.又因 $n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$,故有

$$n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+k} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\Big(\sum_{i<j} x_i x_j\Big)$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2.$$

3·77　试证在有 $m \times n$ 个方格的矩形表格中,可在所有方格中填上互不相同的完全平方数,使得每行数的和与每列数的和也都是完全平方数.

(第 20 届全苏数学奥林匹克,1986 年)

[证]　先取 $a_1 = 1$,然后取偶数 $a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}$,使得 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{n-1}$.记 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 = 2k + 1$,并取 $a_n = k$,于是 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + a_n^2 = (k+1)^2$.

取奇数 $b_1 > 2a_n$,再取偶数 $b_2, b_3, \cdots, b_{m-1}$,使得 $b_{i+1} > b_i a_n$,$i = 1,2,\cdots,m-2$.记 $b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{m-1}^2 = 2h + 1$,并取 $b_m = h$,于是 $b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{m-1}^2 + b_m^2 = (h+1)^2$.

在第 i 行 j 列处的方格中填数 $b_i^2 a_j^2$,便满足题中的要求.

3·78　试证可以在正 n 边形的 n 个顶点上分别放置非零实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,使得对任何以该正 n 边形的部分顶点为顶点的正 k 边形来说,其 k 个顶点上所放置的数之和都等于零.

(第 34 届莫斯科数学奥林匹克,1971 年)

[证]　经过正 n 边形的中心 O 引一条直线,使其不平行于正 n 边形的任何一条边,也不过它的任一顶点.将这条直线视为 y 轴,点 O 为原点并过 O 作出 x 轴.于是正 n 边形的每个顶点在这个坐标系中的横坐标都不为 0.在多边形的每个顶点写上它的横坐标 x_i,便满足题中的要求.事实上,对于任一正 k 边形,x_i 是由原点指向该顶点的向量的横坐标.因为 k 个向量之和是 0,故这 k 个横坐标之和也是 0.

3·79　设 $k>1$ 为自然数，试证不能在 $k\times k$ 的方格表中填入数 $1,2,\cdots,k^2$，使得每行和每列数之和都是 2 的方幂.

（圣彼得堡数学奥林匹克，1989 年）

［证］ 若不然，设将 $1,2,\cdots,k^2$ 填入表格后最小的行和是 2^a，则有

$$2^a\geqslant 1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1).$$

因为表中所有数之和为

$$1+2+\cdots+k^2=\frac{1}{2}k^2(k^2+1),$$

故应有 $2^a\left|\frac{1}{2}k^2(k^2+1)\right.$.

当 k 为奇数时，$\frac{1}{2}k^2(k^2+1)$ 亦为奇数，当然不能被 2^a 整除；当 k 为偶数时，k^2+1 为奇数，于是应有 $2^a\left|\frac{1}{2}k^2\right.$. 但这时又有

$$\frac{1}{2}k^2<\frac{1}{2}k(k+1)\leqslant 2^a,$$

矛盾.

3·80　给定 $m+n$ 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 且满足 $a_1+a_2+\cdots+a_m=b_1+b_2+\cdots+b_n$. 试证可以在 m 行 n 列的方格表中至多填入 $m+n-1$ 个正数而其他方格中均填写 0，使得第 i 行的所有数之和等于 a_i，而第 k 列的所有数之和等于 b_k.

（第 2 届全俄数学奥林匹克，1962 年）

［证 1］ 对于 $m+n$ 应用数学归纳法来证明. 当 $m+n=2$，即对 1×1 的表格，结论显然成立. 设当 $m+n\leqslant k$ 时，命题结论成立，则当 $m+n=k+1$ 时，不妨设 $a_1=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots,b_n\}$. 我们把它填入表中左上角的方格并划掉第一行，于是剩下一个 $(m-1)\times n$ 的方格表. 对此方格表及 $a_2,\cdots,a_m,b_1-a_1,b_2,\cdots,b_n$ 来解同样的题目，应用归纳假设即知命题结论成立（若 $b_1-a_1=0$，则只要再去掉第一列方格就可以了）.

［证 2］ 令 $d=a_1+a_2+\cdots+a_m=b_1+b_2+\cdots+b_n$ 并取一条长度为 d 的线段 AB. 在 AB 内取 $m-1$ 个点并染成红色，使它们将 AB 分成的 m 段的长度依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_m$. 再在 AB 内取 $n-1$ 个点并染成蓝色，使它们将 AB 分成的 n 段的长度依次为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$. 将红蓝分

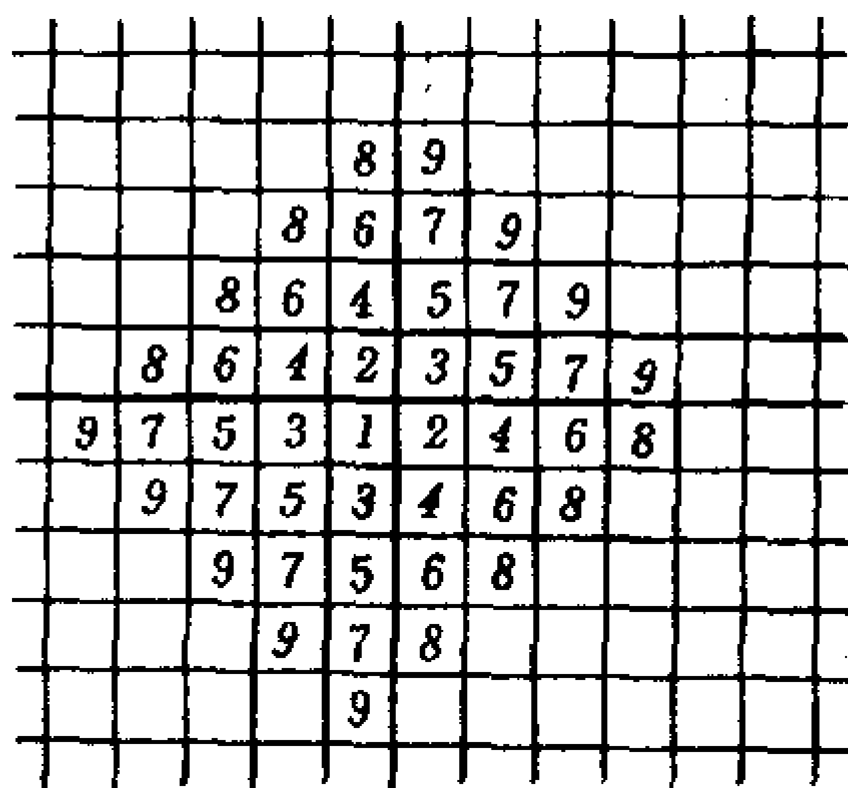
点放在一起，它们至多有 $m+n-2$ 个不同的点，将线段 AB 分成至多 $m+n-1$ 条小线段．对于这些小线段中的每一条，如果它是第 i 条红端点线段与第 j 条蓝端点线段相交而成，则把表示它的长度的正数填入表中第 i 行 j 列的方格中．容易看出，这种填数法满足题中要求．

3·81　在各个方向均为无限的方格纸的每个正方形小格中都写上一个自然数，使得数 n 恰出现 n 次．问该怎样写，才能使得相邻（指有一条公共边）两小格中的数的差的最大值达到最小？

（基辅数学奥林匹克，1979 年）

［解］　因为写有 1 的方格共有 4 个邻格，而整个表中只有两个方格写有 2，故在 1 的邻格中一定有至少为 3 的数，故所求的最大值的最小值至少为 2．

右图中，粗实线画出的十字线将方格表分成 4 个直角形部分．在左下和右上两部分中依次填写奇数，在左上和右下两部分中依次填写偶数，则填数法满足题中要求且相邻两格中的两数之差的最大值为 2．



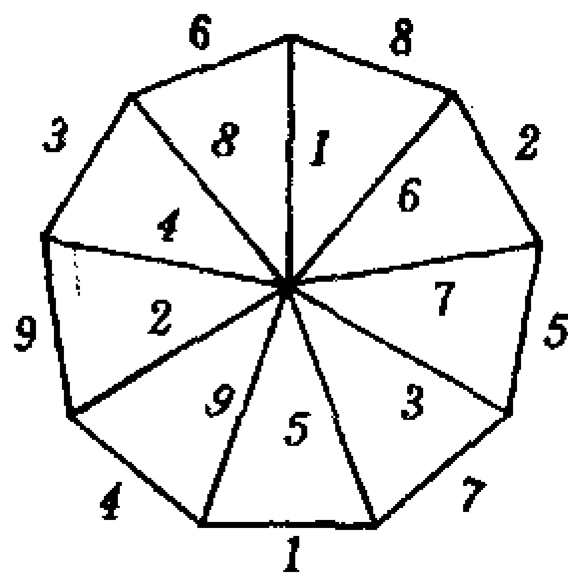
综上可知，所求的最小值为 2．图中所示的填数法即可实现最小值为 2．

3·82　设点 O 是凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内部一点，连结 $OA_1, OA_2, \cdots, OA_n$．将从 1 到 n 的自然数以某种顺序分别标在 n 边形的 n 条边上，对线段 $OA_1, OA_2, \cdots, OA_n$ 也照此办理．

(1) 试对 $n=9$ 给出一种标数法，使得在每个三角形 $\triangle A_iOA_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots,9, A_{10}=A_1)$ 的 3 条边上所标整数之和都相等．

(2) 求证对 $n=10$ 不存在满足(1)中要求的标数法．

（第 18 届莫斯科数学奥林匹克，1955 年）



［解］　右图中的标数法便满足题中要求，其中每个三角形的 3 边标数之和都是 15．

当 $n=10$ 时，10 个三角形的 30 条边的标数总和为

$$S = 3(1+2+\cdots+10) = 3\times\frac{1}{2}\times 10\times 11$$
$$= 165.$$

每个三角形3边标数之和为16.5,它不是整数,故不可能实现.

3·83 用数0和1组成的有限数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足如下条件:对于由0到 $n-1$ 的每个整数 k,$a_1a_{k+1}+a_2a_{k+2}+\cdots+a_{n-k}a_n$ 都是奇数.

(1) 对于 $n=25$,试写出这样的数列.

(2) 试证对于某个 $n>1000$,存在这样的数列.

(第13届全苏数学奥林匹克,1979年)

[解] 记 $A_n=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 及 $p_k(A_n)=a_1a_{k+1}+a_2a_{k+2}+\cdots+a_{n-k}a_n$.在数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的下面写上后错 k 位的同一数列并将上下两数相乘再相加,即得 p_k.显然,$A_4=\{1,1,0,1\}$ 就是 $n=4$ 时满足条件的数列.

下面用数列 A_m,A_n 来构造新数列 $A_l=A_n0A_m$,其中 $l=(2m-1)n-(m-1)=2mn-m-n+1$.具体办法是用在 A_m 后面接上 $m-1$ 个0这样的数列去代替 A_n 中的每一个1,而用 $2m-1$ 个0的数列去代替 A_n 中的每一个零,并把所得数列的最后 $m-1$ 个零去掉.

在用上述方法计算 $p_k(A_l)$ 时,当上下两行错开 k 位时,上一行中的一个 A_m 块仅与下一行中的一个 A_m 块相遇.故当 $k=(2m-1)q+r$ 或者 $k=(2m-1)q-r$,$0\leqslant r\leqslant m-1$,$0\leqslant q\leqslant n-1$ 时,$p_k(A_l)=p_q(A_n)\cdot P_r(A_m)$.由此可知数列 $A_l=A_n0A_m$ 也满足题中的要求.

特别当 $m=n=4$ 时,$A_{25}=A_40A_4$.于是有

$$A_{25}=\{1,1,0,1,0,0,0,1,1,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,1\}.$$

此外,$A_{25}0A_{25}$ 的项数为 $2\times 25^2-50+1=1201$,这就是(2)中所求的数列.

3·84 MO 牌足球由若干块多边形皮块用3种不同颜色的丝线缝制而成,它有以下特点:

(1) 任一多边形皮块的一条边恰与另一多边形皮块的同样长的一条边用一种颜色的丝线缝合;

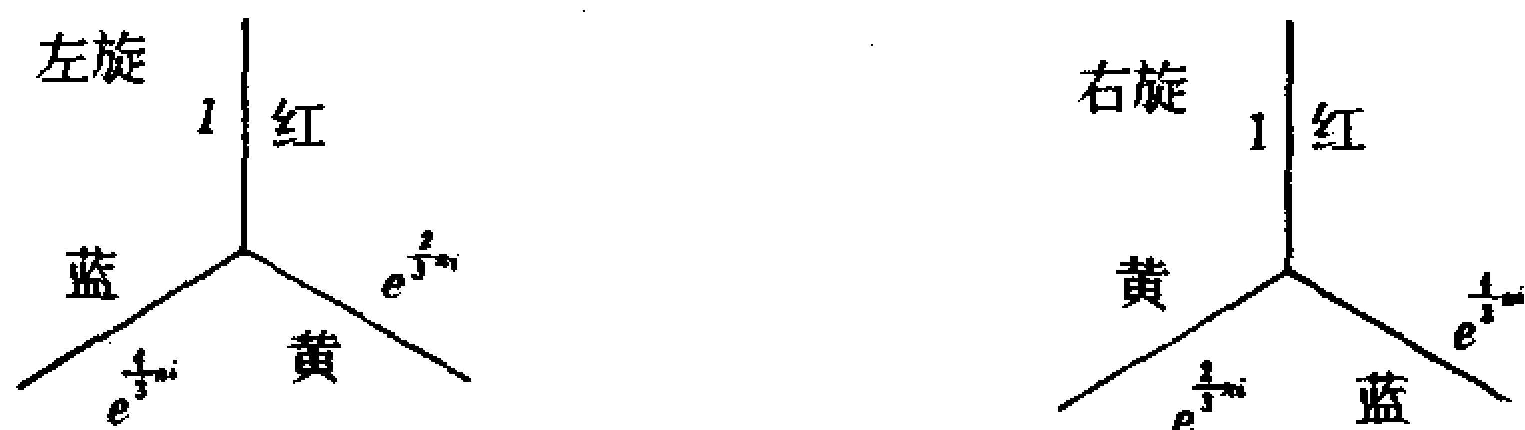
(2) 足球上每一结点,恰好是3个多边形的公共顶点,每一结点的3条缝线的颜色都互不相同.

试证可以在 MO 牌足球的每一结点上放置一个不等于1的复数,

使得每一多边形的所有顶点上放置的复数的乘积都等于1.

（第6届中国中学生数学冬令营，1991年）

［证1］　设3种颜色是红，黄，蓝并令红，黄，蓝色缝线分别对应于复数$1, e^{\frac{2}{3}\pi i}, e^{\frac{4}{3}\pi i}$. 于是足球上的每一多边形皮块的边都放置了一个复数. 考察足球上的任一结点. 显然，按红，黄，蓝的顺序，它只能是左旋与右旋两种情形之一：



注意到

$$\frac{e^{\frac{2}{3}\pi i}}{1} = \frac{e^{\frac{4}{3}\pi i}}{e^{\frac{2}{3}\pi i}} = \frac{1}{e^{\frac{4}{3}\pi i}} = e^{\frac{2}{3}\pi i}, \quad \frac{e^{\frac{4}{3}\pi i}}{1} = \frac{e^{\frac{2}{3}\pi i}}{e^{\frac{4}{3}\pi i}} = \frac{1}{e^{\frac{2}{3}\pi i}} = e^{\frac{4}{3}\pi i},$$

我们在左旋结点放置复数$e^{\frac{2}{3}\pi i}$，在右旋结点放置复数$e^{\frac{4}{3}\pi i}$，便满足题中要求.

事实上，对于任一多边形皮块$A_1A_2\cdots A_n$，其顶点是右旋排列的，设它的顶点放置的数为α_i，边对应的数为β_i，$i = 1,2,\cdots,n$，便有

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \cdots \cdot \alpha_n = \frac{\beta_1}{\beta_n} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \cdots \cdot \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} = 1.$$

［证2］　将红，黄，蓝3色缝线分别对应于0,1,2，并将结点像证1中那样分为左旋和右旋两种. 对于任一多边形皮块$A_1A_2\cdots A_n$，设它有k个左旋结点和m个右旋结点. 当逆时针观察时，从一边越过右(左)旋结点到下一条边时，对应的数增加了2(1)(mod 3). 当走遍一周时，就得到

$$k + 2m \equiv 0 \pmod 3.$$

现将左旋和右旋结点分别放置复数$e^{\frac{2}{3}\pi i}$和$e^{\frac{4}{3}\pi i}$，并记顶点A_i放置的复数为α_i时，便有

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \cdots \cdot \alpha_n = e^{k \cdot \frac{2}{3}\pi i} \cdot e^{m \cdot \frac{4}{3}\pi i} = e^{\frac{2}{3}\pi i(k+2m)} = 1.$$

3·85　在不透明的正方体的每个面上都写上1个自然数. 如果正

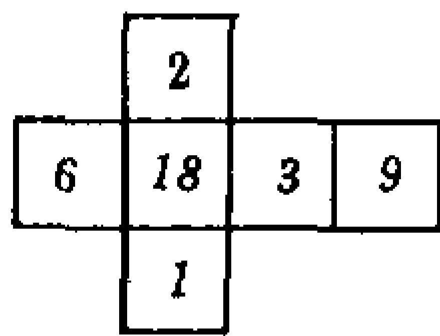
方体的某些面可以同时看到，则记下写在这些面上的自然数之和.

(1) 求证可以在立方体的各个面上写上自然数，使上述的各个和数互不相同；

(2) 当所有这些和数都互不相同时，求这些和数中最大和数的最小值.

（第 32 届乌克兰数学奥林匹克，1992 年）

[解] 显然，可以同时只看到 1 个面，可以看到具有 1 条公共棱的两个面或同时看到具有 1 个公共顶点的 3 个面. 因此共可得到 26 个和数. 当在各面所写的数如右图所示时，容易验证，所得的 26 个和数各不相同，且其中最大的和数为 26. 因为所有这些和数都是自然数，故知最大的和数必不小于 26. 故知最大和数的最小值为 26.



3·86 在一张无限大的方格纸的每个小方格中都填有一个实数. 给定两个各由有限多个小方格构成的图形 G_1 和 G_2. 这两个图形都可以沿着网格线移动整数个方格. 已知对于图形 G_1 的任何位置，被它所盖住的所有小格中的实数之和都是正的. 求证存在 G_2 的一个位置，使得被它所盖住的所有小格中的实数之和也是正的.

（第 20 届全俄数学奥林匹克，1994 年）

[证] 设图形 G_1 和 G_2 分别有 m 和 n 个方格并将 G_1 的方格编号为 $1,2,\cdots,m$，将 G_2 的方格编号为 $1,2,\cdots,n$.

将图形 G_1 放在方格纸上，设它盖住的 m 个方格中的实数依次为 $a_1^1,a_2^1,\cdots,a_m^1$. 将图形 G_2 也放在方格纸上并移动 G_2 使 G_2 上的 1 号方格与 G_1 的 1 号方格重合. 然后平移 G_1，使 G_1 的 1 号方格与 G_2 的 2 号方格重合，并记这时 G_1 所盖住的 m 个方格中的实数依次为 $a_1^2,a_2^2,\cdots,a_m^2$. 继续移动 G_1，依次使 G_1 的 1 号方格重合于 G_2 的第 $3,4,\cdots,n$ 号方格，并记依次盖住的 m 个方格中的实数为

$$a_1^i,a_2^i,\cdots,a_m^i,\ i=3,4,\cdots,n.$$

按已知有

$$a_1^i+a_2^i+\cdots+a_m^i>0,\ i=1,2,\cdots,n. \qquad ①$$

将 ① 式对 i 求和，得到

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_j^i>0.$$

交换求和次序,可得

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_j^i > 0. \qquad ②$$

由前述的图形 G_1 的移动过程可知,G_1 中的每个方格在移动过程中的 n 个位置都恰好构成图形 G_2 的一个位置.所以②式恰表明图形 G_2 的 m 个位置所盖住的实数之和的和数为正,从而 m 个和数中至少有 1 个为正数.这就完成了证明.

3·87　能否在 9×9 方格表的 81 个方格中分别填入自然数 1,2,…,81,每格中填 1 个数,使得表中每个 3×3 正方形中所填的 9 个数之和都相等?

(第 21 届全俄数学奥林匹克,1995 年)

[解]　从 3 阶幻方出发进行行的轮换,可得左上数表,其中每个 3×3 正方形中所填的 9 个数之和都是 45.

将左上数表绕正方形中心逆时针旋转 90°,得到右上数表,显然,其中每个 3×3 正方形中所填的 9 个数之和也都是 45.

8	1	6	4	9	2	3	5	7
3	5	7	8	1	6	4	9	2
4	9	2	3	5	7	8	1	6
8	1	6	4	9	2	3	5	7
3	5	7	8	1	6	4	9	2
4	9	2	3	5	7	8	1	6
8	1	6	4	9	2	3	5	7
3	5	7	8	1	6	4	9	2
4	9	2	3	5	7	8	1	6

7	2	6	7	2	6	7	2	6
5	9	1	5	9	1	5	9	1
3	4	8	3	4	8	3	4	8
2	6	7	2	6	7	2	6	7
9	1	5	9	1	5	9	1	5
4	8	3	4	8	3	4	8	3
6	7	2	6	7	2	6	7	2
1	5	9	1	5	9	1	5	9
8	3	4	8	3	4	8	3	4

注意,在上一数表中填有相同数的每 9 个方格中,下一数表中恰好填有互不相同的 9 个自然数.反之亦然.这样一来,当我们令 9×9 正方形中的每个方格都对应于它在两个数表中所填的两个数组成的有序数对时,就在 9×9 正方形的 81 个方格与集合

70	2	51	34	74	15	25	38	60
23	45	55	68	9	46	32	81	10
30	76	17	21	40	62	66	4	53
65	6	52	29	78	16	20	42	61
27	37	59	72	1	50	36	73	14
31	80	12	22	44	57	67	8	48
69	7	47	33	79	11	24	43	56
19	41	63	64	5	54	28	77	18
35	75	13	26	39	58	71	3	49

$$\{(a,b)\mid a,b=1,2,\cdots,9\}$$

之间建立了一个双射.

现在填一个新的 9×9 数表,原则是在对应于(a,b)的方格中填数 $9a+b-9$.这时,每个 3×3 正方形中的 9 个数之和都是 $45\times10-9\times9=369$.

3·88　在2000×2000 方格表的每个小方格中都写有 $+1$ 或 -1,且表中所有数之和非负,求证可从表中选出 1000 行与 1000 列,使得填在它们互相相交之处的方格中的所有数之和不小于 1000.

（第 21 届全俄数学奥林匹克,1995 年）

[**证**]由于表中所有数之和非负,故必有一行数之和非负,从而这行数中至少有 1000 个 $+1$.不妨设这一行的前 1000 个数都是 $+1$.

现将数表中由前 1000 列和后 1000 列所分别构成的两个 2000×1000 的数表记为 A 和 B.再以 A_1 表示数表 A 中行和较大的 1000 行所成的数表,而将 A 中行和较小的 1000 行所成的数表记为 A_2.如果 A_1 中所有数之和不小于 1000,则结论已经成立.设 A_1 中所有数之和小于 1000.由于 A_1 中行和最大的一行的和数为 1000,所以 A_1 中行和最小的一行的和数为负.从而 A_2 中每行数之和都是负的.由于 1000 个 ±1 之和必为偶数,所以 A_2 中每行数之和都不大于 -2.这样一来,数表 A 中所有数之和

$$S_A<1000+(-2)\times1000=-1000.$$

由于整个数表中所有数之和非负,所以数表 B 中所有数之和大于 1000.再将数表 B 中行和较大的 1000 行和行和较小的 1000 行所分别构成的数表记为 B_1 和 B_2.

(1)若 B_2 中每行数之和均非正,则 B_2 中所有数之和非正.从而 B_1 中所有数之和不小于 B 中所有数之和,当然大于 1000.这表明 B_1 满足题中要求.

(2)若 B_2 中行和最大的一行数之和为正,则 B_1 中每行数之和都是正数,当然总和不小于 1000.这也表明 B_1 满足题中要求.

3·89　在100×25 的长方形方格表的每一格中都填入一个非负实数,第 i 行 j 列中填入的数为 $x_{ij}$$(i=1,2,\cdots,100;j=1,2,\cdots,25)$(如表 1).然后将表 1 每列中的数按由大到小的次序从上到下重新排列为

x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{125}
x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{225}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_{1001}	x_{1002}	$\cdots$	x_{10025}

表 1

x'_{11}	x'_{12}	$\cdots$	x'_{125}
x'_{21}	x'_{22}	$\cdots$	x'_{225}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x'_{1001}	x'_{1002}	$\cdots$	x'_{10025}

表 2

$$x'_{1j} \geqslant x_{2j} \geqslant \cdots \geqslant x'_{100j}, j=1,2,\cdots,25,$$

(见表 2).求最小的自然数 k,使得只要表 1 中填入的数满足

$$\sum_{j=1}^{25} x_{ij} \leqslant 1, i=1,2,\cdots,100,$$

则当 $i \geqslant k$ 时,在表 2 中就能保证

$$\sum_{j=1}^{25} x'_{ij} \leqslant 1$$

成立.

(中国高中数学联赛,1997 年)

[解] k 的最小值为 97.

取

$$x_{ij}=\begin{cases}0, & 当 4(j-1)+1 \leqslant i \leqslant 4j, \\ \dfrac{1}{24}, & 其他处,\end{cases} \quad j=1,2,\cdots,25.$$

于是有 $\sum_{j=1}^{25} x_{ij}=0+\frac{1}{24}\times 24=1, i=1,2,\cdots,100$.这表明这组$\{x_{ij}\}$满足题中要求.重排后有

$$x'_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{24}, & 当 1 \leqslant i \leqslant 96, \\ 0, & 当 97 \leqslant i \leqslant 100,\end{cases} \quad j=1,2,\cdots,25.$$

这时有 $\sum_{j=1}^{25} x'_{ij}=25\times\frac{1}{24}=\frac{25}{24}>1, i=1,2,\cdots,96$.可见,所求的 k 的最小值$\geqslant 97$.

另一方面,表 2 的后 3 行中共有 75 个数,它们来自表 1 中的 100 行.由抽屉原理知必有表 1 中的某行数,它的 25 个数全在表 2 的前 97 行中.从而表 2 中的第 97 行数全都不大于这一行中相应的数,故表 2

中的第 97 行数之和不大于 1. 这表明后 4 行中每行数之和都不大于 1. 即 $k=97$ 满足要求.

综上可知,所求的 k 的最小值为 97.

3·90　一个 $n\times n$ 的矩阵(正方形数表),如果它的元素全都取自集合 $S=\{1,2,\cdots,2n-1\}$,且对于每个 $i=1,2,\cdots,n$,它的第 i 行与第 i 列中的所有元素合起来恰好是 S 中的所有元素,则称它为"银矩阵". 求证

(i)不存在 $n=1997$ 阶的银矩阵;

(ii)有无限多个 $n\in N$,使得存在 n 阶银矩阵.

(第 38 届国际数学奥林匹克,1997 年)

[证]　(i)设 $n>1$ 且存在 n 阶银矩阵 A,由于 S 中的 $2n-1$ 个数都要在 A 中出现,而 A 的主对角线上只有 n 个元素,故必存在 $m\in S$ 不在 A 的主对角线上出现.

对于 $i=1,2,\cdots,n$,记矩阵 A 的第 i 行和第 i 列中的所有元素连同位置合起来所构成的集合为 A_i,称为第 i 个十字架. 于是由 A 为银矩阵可知,m 在每个 A_i 中恰出现一次,且不在主对角线上. 设 m 位于矩阵 A 的第 i 行 j 列($i\neq j$),则 $m\in A_i$,$m\in A_j$. 于是可把十字架 A_i 与 A_j 配成一对. 这样一来,矩阵的 n 个十字架可以按包含同一个 m 而两两配对,所以 n 必为偶数. 由于 1997 为奇数,故不存在 1997 阶的银矩阵.

(ii)对于 $n=2$,易见

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}$$

为一个银矩阵. 对于 $n=4$,矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&5&6\\3&1&7&5\\4&6&1&2\\7&4&3&1\end{pmatrix}$$

为一个银矩阵.

一般地,如果存在 n 阶银矩阵 A,它的主对角线上的元素全是 1,则可以按照如下方式构造 $2n$ 阶银矩阵 D:

$$D=\begin{pmatrix}A&B\\C&A\end{pmatrix},$$

其中 B 是一个 n 阶矩阵,它是通过把 A 的每个元素都加上 $2n$ 得到的,而 C 则是把 B 的主对角线上的元素都换成 $2n$ 而其他元素不动而得到的.

事实上,当 $i\leqslant n$ 时,矩阵 D 的第 i 行和第 i 列的所有元素是由 A 的第 i 个十字架以及 B 的第 i 行和 C 的第 i 列元素组成的.这时,A 的第 i 个十字架的元素为 $\{1,2,\cdots,2n-1\}$ 而 B 的第 i 行与 C 的第 i 列的元素则是 $\{2n,2n+1,\cdots,4n-1\}$.同理可证当 $i>n$ 时也是如此.可见,矩阵 D 确为银矩阵.这表明对所有 $n=2^k(k=1,2,\cdots)$都存在着 n 阶银矩阵.

3·91 求证存在无穷多个自然数 n,使得可将 $1,2,\cdots,3n$ 这 $3n$ 个自然数列成 $3\times n$ 的数表

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{matrix}$$

满足下列两个条件

(i)$a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2=\cdots=a_n+b_n+c_n$ 且为 6 的倍数;

(ii)$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$ 且为 6 的倍数.

(第 12 届中国中学生数学冬令营,1997 年)

[证 1] 将满足题中要求的所有自然数 n 所成的集合记为 S,于是只须证明 S 为无穷集合.设 $n\in S$,于是由(i)和(ii)知,存在 $S,t\in N$,使得

$$\frac{1}{2}3n(3n+1)=6Sn,\quad \frac{1}{2}3n(3n+1)=18t,$$
$$3n+1=4S,\qquad n(3n+1)=12t,$$
$$n\equiv 1(\mathrm{mod}\ \ 4),\qquad n\equiv 0(\mathrm{mod}\ \ 3).$$

由此可得

$$n=12k+9,k=0,1,2,\cdots.$$

先看 $n=9$ 的情形.这时令

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&6&3\\3&0&6\\6&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&8&6\\5&3&7\\9&4&2\end{pmatrix}=A_3.$$

易见,A_3的行和与列和都是 15 并且 9 个元素恰为 $1,2,\cdots,9$. 记 $\alpha(3)=(1,8,6)$, $\beta(3)=(5,3,7)$, $\gamma(3)=(9,4,2)$并令

$$A_9=\begin{pmatrix}\alpha(3)&\beta(3)+18&\gamma(3)+9\\\beta(3)+9&\gamma(3)&\alpha(3)+18\\\gamma(3)+18&\alpha(3)+9&\beta(3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&8&6&23&21&25&18&13&11\\14&12&16&9&4&2&19&26&24\\27&22&20&10&17&15&5&3&7\end{pmatrix}.$$

于是 A_9 的 27 个元素恰为 $1,2,\cdots,27$ 且各列之和均为 $15+9+18=42$,各行之和均为 $3\times(15+9+18)=126$. 由此可知,$9\in S$.

设 $m\in S$,往证 $9m\in S$. 因为 $m\in S$,故可将 $1,2,\cdots,3m$ 写成 $3\times m$ 的数表 A_m,使得每列之和均为 $6u$,每行之和均为 $6v$,其中 u、$v\in N$. 现将 A_m 的 3 行分别记为 $\alpha(m)$, $\beta(m)$, $\gamma(m)$,并构造 A_{3m}如下:

$$A_{3m}\begin{pmatrix}\alpha(m)&\beta(m)+6m&\gamma(m)+3m\\\beta(m)+3m&\gamma(m)&\alpha(m)+6m\\\gamma(m)+6m&\alpha(m)+3m&\beta(m)\end{pmatrix},$$

其中 $\beta(m)+3m$ 表示将 $\beta(m)$中的每个元素都加上 $3m$,其他记号类似. 易见,A_{3m}中的 $9m$ 个元素恰为 $1,2,\cdots,9m$ 且每列之和都是 $6u+9m$,每行之和都是 $18v+9m^2$.

将 A_{3m}的 3 行分别记为 $\alpha(3m)$, $\beta(3m)$, $\gamma(3m)$,并构造 $3\times 9m$ 的数表A_{9m}如下:

$$A_{9m}=\begin{pmatrix}\alpha(3m)&\beta(3m)+18m&\gamma(3m)+9m\\\beta(3m)+9m&\gamma(3m)&\alpha(3m)+18m\\\gamma(3m)+18m&\alpha(3m)+9m&\beta(3m)\end{pmatrix}.$$

于是 A_{9m} 的 $27m$ 个元素恰为 $1,2,\cdots,27m$ 且每列之和都是 $6u+36m$,每行之和都是 $3(18v+9m^2)+3m(18m+9m)=54v+108m^2$,二者都是 6 的倍数. 故得 $9m\in S$. 由数学归纳法知

$$\{9^k\mid k\in N\}\subset S.$$

由此即知,S 为无穷集合.

[证 2] 往证

$\{12k+9 \mid k\equiv 2 \pmod 9\}\subset S.$ ㊀

设 $k\equiv 2 \pmod 9$,记 $m=4k+3$.首先将 $1,2,\cdots,3m$ 写成如下的 $3\times m$ 数表 A_m:

$$A_m=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 & \cdots & 12k-2 & 12k+1 & 12k+4 & 12k+7 \\ 6k+5 & 12k+8 & 6k+2 & 12k+5 & \cdots & 6k+11 & 5 & 6k+8 & 2 \\ 12k+9 & 6k+3 & 12k+6 & 6k & \cdots & 6 & 6k+9 & 3 & 6k+6 \end{pmatrix}.$$

其中第1行数是以3为公差的等差数列;第2行的奇数号数与偶数号数分别为以 -3 为公差的等差数列;第3行的奇数号数与偶数号数也分别为以 -3 为公差的等差数列.易见,A_m 的每列之和都等于 $18k+15$,第2行数之和为 $(4k+3)(6k+5)=\frac{1}{2}m(3m+1)$;第1,3两行数之和分别为 $(4k+3)(6k+4)$ 和 $(4k+3)(6k+6)$.

下面调整 A_m,使得调整只在同列中进行且调整之后3个行和相等.

因为 $k\equiv 2 \pmod 9$,所以 $l=\frac{1}{9}(2k+5)$ 为正整数.由于 A_m 的第1行数是首项为1,公差为3的等差数列,所以其第 $2l$ 项为

$$a_{2l}=1+3(2l-1)=6l-2=\frac{4}{3}(k+1).$$

又因 A_m 的第3行的偶数号项 $C_2,C_4,\cdots,C_{m-1}$ 构成一个首项 $C_2=6k+3$,公差为 -3 的等差数列,所以有

$$C_{2l}=6k+3-3(l-1)=6k+6-\frac{1}{3}(2k+5)=\frac{1}{3}(16k+13).$$

$$C_{2l}-a_{2l}=\frac{1}{3}(12k+9)=4k+3.$$

由此可知,只要在 A_m 中对换 a_{2l} 与 C_{2l} 的位置,即可使 A_m 的3个行和全都相等,其值为 $(4k+3)(6k+5)=\frac{1}{2}m(3m+1)$.在这个调整之下,$A_m$ 的列和保持不动,仍然都是 $18k+15$.

将变化之后的 $3\times m$ 数表记为 B_m,并将它的3行数分别记为 $\alpha(m),\beta(m),\gamma(m)$.然后,构造 $3\times 3m=3\times(12k+9)$ 的数表 A_{3m} 如下:

$$A_{3m}=\begin{pmatrix} \alpha(m) & \beta(m)+6m & \gamma(m)+3m \\ \beta(m)+3m & \gamma(m) & \alpha(m)+6m \\ \gamma(m)+6m & \alpha(m)+3m & \beta(m) \end{pmatrix},$$

于是 A_{3m} 的所有元素恰为 $1,2,\cdots,3\times(12k+9)$，其各列之和均为 $18k+15+9m=54k+42$，各行之和均为 $\frac{3}{2}m(3m+1)+6m^2+3m^2=\frac{3}{2}m(9m+1)=6(4k+3)(9k+7)$. 显然，列和与行和都是 6 的倍数，这就完成了㊉式的证明.

3·92　在正方体的每个顶点上各标上一个互不相同的自然数，在它的每条棱上都标上它的两个端点所标的两个自然数的最大公约数. 问能否适当标数，使得顶点上所标的各数之和等于棱上所标的各数之和？证明你的结论.

（第 22 届全俄数学奥林匹克，1996 年）

[解]　无法实现.

若不然，设 8 个顶点上的数已经标好，a 和 b 是其中一条棱的两个端点所标的自然数且 $a>b$. 于是有 $(a,b)\leqslant b$，$(a,b)\leqslant\frac{a}{2}$，由此可得

$$(a,b)\leqslant\frac{a+b}{3}. \qquad ㊉$$

正方体的 12 条棱组成 12 个形如㊉式的不等式. 不难看出，当且仅当 12 个形如㊉式的不等式都变为等式时，所标的数满足题中的要求. ㊉式化为等式时，必有 $a=2b$，即大数是小数的 2 倍.

考察从标有数 a 的顶点发出的 3 条棱的另 3 个顶点，设它们标的自然数分别为 b,c,d. 于是由前段分析知 b,c,d 都只能取 $\frac{a}{2}$ 与 $2a$ 这两个不同值之一. 由抽屉原理知 b,c,d 这 3 个数中必有两个相等. 矛盾.

第四章　图论与交通

4·1　在正方体上标出所有顶点和各面中点，并引出所有面上的对角线. 试问能否沿着这些对角线上的线段走遍所有标出的点，并且经过每个点恰好一次？

（第 37 届莫斯科数学奥林匹克，1974 年）

[解]　易见，当沿着对角线上的线段走时，总是交替走过顶点和面的中点，所以走过的顶点数和中点数顶多差 1 个. 但是正方体有 8 个顶点而只有 6 个面，故知不能走过所有标出的点且经过每点恰好一次.

4·2　n 个点间连有 m 条互不相交的线段，使得从任何一点出发，都可以沿着线段到达其他任何点且不存在由两条不同路径连结的两个点. 求证 $m = n - 1$.

（第 1 届全俄数学奥林匹克，1961 年）

[证 1]　我们把 n 个点中的一个点称为"根"，并令其余 $n - 1$ 点中的每点都对应于从"根"通往该点的路径的最后一条线段，则这个对应是除"根"之外的 $n - 1$ 点到 m 条线段的一个双射.

实际上，因为从根到其余每点都只有一条路径，故这个对应是单值的，即它为一个映射. 如果有两个点 A 和 B 对应于同一条线段，则这条线段只能是 AB，从而导致从"根"通往 A 和 B 各有两条不同路径，此与已知矛盾，故知这一映射是单射. 如果有线段 CD，使其端点 C 和 D 都不对应于它，则 C 和 D 都不是"根"，否则另一端点一定对应于 CD. 既然 C 和 D 都不是根，于是从"根"到 C 的路径再接上 CD 变为到 D 的又一条路径，从而从"根"到 D 有两条不同路径，矛盾. 这说明映射还是满射，从而是双射. 由此即得 $m = n - 1$.

[证 2]　关于点数 n 用数学归纳法来证明.

当 $n=2$ 时,显然 $m=1$,即本题结论成立.设命题于 $n=k$ 时成立.当 $n=k+1$ 时,设图中连有 m 条线段.若 $m\geqslant k+1$,则图中必然有圈.从而导致圈上的任何两点间都至少有两条不同的路径相连结,此与已知矛盾.故知 $m\leqslant k$.

按已知,图中每点都至少引出一条线段,即每点度数都不小于 1(参看附录).另一方面,因 $m\leqslant k$,$2m\leqslant 2k<2(k+1)$,所以由抽屉原理知必有一点 A 的度数不大于 1.可见,$d(A)=1$.

从图中去掉点 A 及由它引出的惟一一条线段,则余下的 k 点间连有 $m-1$ 条线段且仍然满足题中的条件.由归纳假设知 $m-1=k-1$,即 $m=k=(k+1)-1$.这就完成了归纳证明.

4·3　设有一个有偶数条棱的多面体,试证可以在它的棱上标上箭头,使对这个多面体的每个顶点,指向它的箭头都有偶数个.

(第 23 届全苏数学奥林匹克,1989 年)

[证]　使用"扰动构造法".首先将多面体的每条棱都任意地标上箭头.因为共有偶数个箭头,故奇数顶点(即有奇数个箭头指向它的顶点)的个数为偶数.沿多面体的棱取一条连结两个奇数顶点的折线并改变折线的每条线段上的箭头的方向,则折线端点的两个奇数顶点变成偶数顶点,而折线中间顶点的奇偶性不变.可见,这次操作使奇数顶点的个数减少 2.显然,经有限次操作后,即可使所有顶点都变成偶数顶点.

4·4　在平面上给定 n 个点,它们之间连有 $mn\left(m\leqslant\frac{n-1}{2}\right)$条线段,求证:存在互不相同的点列 $V_0,V_1,\cdots,V_m$ 使得对于 $1\leqslant i\leqslant m$,点 V_{i-1} 与 V_i 之间都有给定线段连结.

(捷克和斯洛伐克数学奥林匹克,1989 年)

[证]　我们固定 m,对 n 使用数学归纳法.

(1) 当 $n=2m+1$ 时,此时

$$mn=\frac{n(n-1)}{2}=C_n^2.$$

mn 条线段恰好是 n 点中任何两点间都有一条线段,从而结论显然成立.

(2) 假设 $n=k\geqslant 2m+1$ 时,结论成立,我们证明当 $n=k+1$ 时,

结论也成立.

若 n 点中存在一点 A,由它引出的线段数不超过 m 条. 由于此时共连结

$$mn = m(k+1) = km + m$$

条线段,所以除 A 点外余下的 k 个点中间至少连有 mk 条线段. 于是由归纳假设,结论成立.

若 n 点中没有一点引出的线段数不超过 m,即 n 点中的每一点引出的线段数都不少于 $m+1$,这时可构造所需要的点列如下:任取一已知点 V_0,然后任取一个与 V_0 有连线的点作为 V_1. 因为 $m \geqslant 1$,所以除了 V_0 之外,还有与 V_1 连线的点,取其中的一点为 V_2,设这样取下去,直到 V_p 为止.

若 $p < m$,则 V_p 除与前 p 个点有至多 p 条连线之外,还有线与其他点相连,于是又可选出 V_{p+1} 点满足要求,出现矛盾.

所以 $p \geqslant m$,这样就得到了所需要的点列. 从而当 $n = k+1$ 时,结论成立. 即对 $n \geqslant 2m+1$,结论均成立.

4·5 在平面给出一个由 1991 个点组成的集合 E,E 中的每点都至少与 E 中另外 1593 个点间有线段相连结,求证 E 中必存在 6 点,它们两两之间都有线相连.

又问是否存在 1991 个点,它们中的每点都至少与另外 1592 个点间有线段相连,但任何 6 点中至少有两个不相连的点?

(第 32 届国际数学奥林匹克预选题,1991 年)

[证] 首先,在 E 中取两个有线相连的点 A_1 和 A_2. 因为 E 中不与 A_1,A_2 相连的点至多各有 $1990 - 1593 = 397$ 个,所以在 $E - \{A_1, A_2\}$ 中与 A_1,A_2 两点均有线相连的点至少有 $1989 - 397 \times 2 = 1195$ 个. 在其中任取一点 A_3. 同理可知,在 $E - \{A_1, A_2, A_3\}$ 中,与 A_1, A_2, A_3 均有线相连的点至少有 $1194 - 397 = 797$ 个. 从中任取一点 A_4. 又因在 $E - \{A_1, A_2, A3, A_4\}$ 中,与 A_1, A_2, A_3, A_4 均有线相连的点至少有 $796 - 397 = 399$ 个,故可从中选取一点 A_5. 并且在除点 A_5 之外的 398 个与 A_1, A_2, A_3, A_4 均有线相连的点中,至少有一点 A_6 与 A_5 间有线相连. 显然,$\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ 这 6 点便满足题中要求.

此外,将 1991 个给定点分成 5 组,5 组中的点数分别为 398,398,398,398,399. 同组的任何两点间不连线,异组的任何两点间都连 1 条

线.于是每点至少连出 $398 \times 4 = 1592$ 条线.可见,这种连线法满足题中第2问的条件.但是,对于任何6个给定点,由抽屉原理知其中必有两点属于同一组,于是这两点间没有连线.这表明题中第2问中要求的点集是存在的.

4·6 在凸多边形中作出若干条对角线,使得其中任何两条都不在形内相交(从同一顶点可以连出不止一条对角线).求证多边形至少有两个顶点没有连出任何一条对角线.

(第25届莫斯科数学奥林匹克,1962年)

[证] 我们来证明一个加强命题:在本题条件下,在对角线将原多边形所分成的多边形中,总有两个多边形,每个多边形的边中,恰有一条边是对角线.显然,如果这个命题成立,因为这两个多边形中已无连出的对角线,故凡与这条对角线边不相邻的顶点都是原多边形的顶点且不引出任何对角线,从而原命题成立.

现在就用归纳法来证明这一加强命题.设对角线条数为 n.当 $n = 1$ 时,命题显然成立.设命题于 $n = k$ 时成立.当 $n = k + 1$ 时,我们设想第 $k + 1$ 条对角线是后加进去的.按归纳假设,当有 k 条对角线时,有两个多边形 M_1 和 M_2,二者的边中都只有一条是对角线.当引出第 $k + 1$ 条对角线时,由于任何两条对角线在形内不交,故它至多为 M_1, M_2 之一的一条对角线.如果它既不在 M_1 也不在 M_2 中,结论显然成立.否则,设它为 M_1 的一条对角线,于是它把 M_1 分成两个多边形.易见,二者之一只有一条边是对角线,就是这条新对角线,这就完成了归纳证明.

4·7 设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 为平面上的 n 个点,其中任何3点都不共线,在它们之间连结 m 条线段,使得任何4点中均有3点构成一个三角形,即其每两点之间都有连线,求 m 的最小值.

(第28届国际数学奥林匹克候选题,1987年)

[解] 当把 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ 这 $n - 1$ 点中的任何两点间都连1条线时,共连 C_{n-1}^2 条线且这种连线法显然满足题中要求,故知所求的最小值不大于 C_{n-1}^2.

另一方面,设点 P_1, P_2 之间无线段相连,于是其余 $n - 2$ 点中的任何两点间都有线相连.否则,必有 $3 \leqslant i < j \leqslant n$,使点 P_i 与 P_j 之间无线相连,于是4点 $\{P_1, P_2, P_i, P_j\}$ 不满足题中要求,矛盾.此外,对任意 $3 \leqslant i \leqslant n$,点 P_i 至少与 P_1, P_2 之一点间有线相连.否则又将导致4点

不满足题中要求.这样,满足题中要求的一组连线的条数不少于

$$C_{n-2}^2 + n - 2 = C_{n-1}^2.$$

综上可知,m 的最小值为 C_{n-1}^2.

4·8 在图上任取 $n(n>2)$ 个点,并在每两点之间连一条线段.能否一笔画出所有这些线段,使得第1条线段的终点为第2条线段的起点,第2条线段的终点为第3条线段的起点,依此下去,直到最后一条线段的终点与第1条线段的起点相重合?

(波兰数学奥林匹克,1965年)

[解] 我们将 n 个给定点的集合记为 S_n,并把顶点都在 S_n 中且满足题中要求的折线记为 L_n.

设对于某个 $n \geqslant 3$,满足要求的折线 L_n 存在.于是当我们一笔画出这条折线时,沿折线方向走向某顶点与离开此顶点的次数同样多,故对每个顶点引出的线段条数必为偶数,即 $n-1$ 为偶数,n 为奇数.由此可知,当 n 为偶数时,L_n 不存在.

下面用数学归纳法来证明,当 n 为奇数时,L_n 存在.这时,记 $n = 2m+1$.当 $m=1$ 时,$n=3$.以3个给定点为顶点的三角形即为所求.设命题于 $m=k-1$ 时成立.当 $m=k$ 时,$n=2k+1$.设这 $2k+1$ 个给定点依次为 $A_1, A_2, \cdots, A_{2k-1}, A_{2k}, A_{2k+1}$.先看前 $2k-1$ 个点的集合 S_{2k-1}.由归纳假设知这时 L_{2k-1} 存在,不妨设这条折线的起点和终点都是 A_1.对于集合 S_{2k+1} 及其每两点间的连线来说,上面的折线 L_{2k-1} 中未出现的线段如下:

$$A_{2k}A_j, \quad j = 1,2,\cdots,2k-1,$$
$$A_{2k+1}A_j, j = 1,2,\cdots,2k.$$

我们将它们首尾相接排列如下:

$$A_1A_{2k}A_2A_{2k+1}A_3A_{2k}A_4A_{2k+1}A_5\cdots\cdots A_{2k-1}A_{2k}A_{2k+1}A_1,$$

并记这条封闭折线为 K.易见,将 L_{2k-1} 与 K 接起来即得满足要求的折线 L_{2k+1},这就完成了归纳证明.

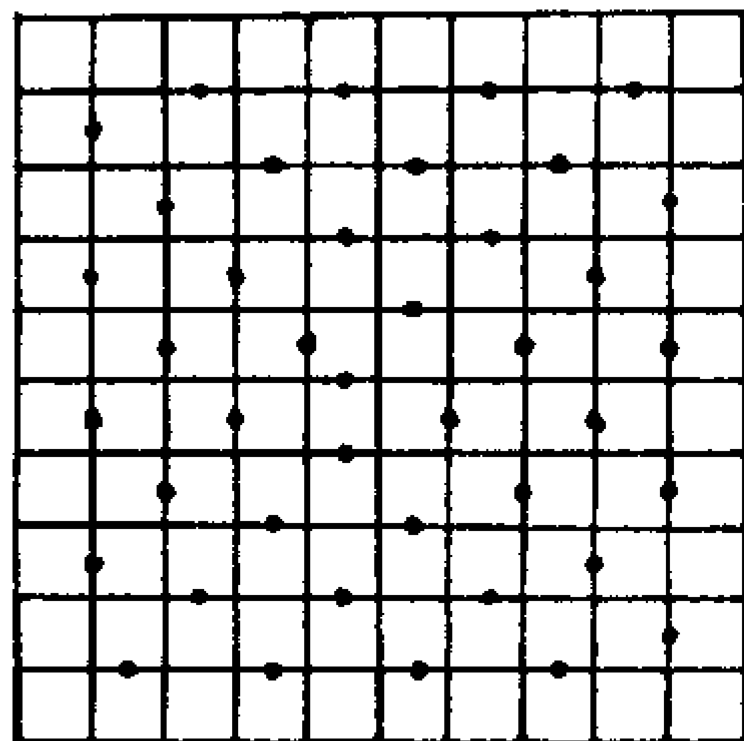
综上可知,当且仅当 n 为不小于3的奇数时,题中的要求是可以实现的.

4·9 在 10×10 的方格纸上有11条水平网格线和11条竖直网格线,连结同一直线上的相邻两个结点的线段称为"链节".问最少需要擦

去多少条链节，才能使得每个结点处都至多剩有 3 条链节？

（第 27 届莫斯科数学奥林匹克，1964 年）

[解] 将右图中带点的链节去掉便满足题中要求，而图中带点的链节共有 41 条，故知所求的最小值不超过 41.



另一方面，方格纸的内部共有 81 个结点，每个都有 4 条链节，所以每点都至少要擦掉1 条链节方能满足要求. 每条链节连着两个结点，故至少要擦去 41 条链节.

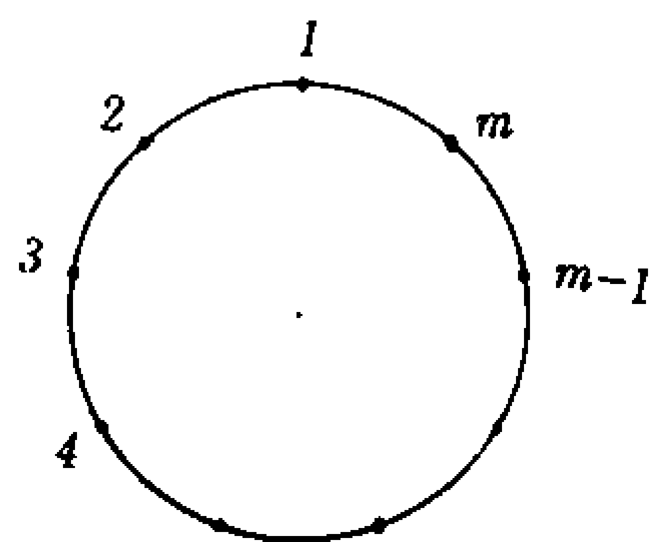
综上可知，最少要擦去 41 条链节.

4·10 已知平面上有 m 个点，将其中某些点间连上线段，使得每个点都与 l 个点连有线段，问 l 可以取怎样的值？

（第 23 届莫斯科数学奥林匹克，1960 年）

[解] 每点至多连出 $m-1$ 条线段且当每点连出 l 条线段时，整个图中恰有 $\frac{1}{2}ml$ 条线段，故 ml 必为偶数. 可见，每点都连出 l 条线段的必要条件是 $l<m$ 且 ml 为偶数. 下面我们来证明这也是充分条件.

将 m 个点从 1 到 m 编号，并依次排列在一个圆上使之将圆周 m 等分. 当 l 为偶数时，对于任一给定点，都将它与沿圆弧与它距离不超过 $\frac{l}{2}$ 的每点之间连一条线段，则每点恰好连 l 条线，满足题中要求. 若 l 为奇数，则 m 为偶数. 这时，$l-1$ 为偶数，于是像上面一样地可使每点都连出 $l-1$ 条线段. 因 m 为偶数，故圆上的 m 个点可分成 $\frac{m}{2}$ 组，每组的两点都是对径点. 因而只要把每组两点间连一条线就行了.



4·11 在空间中给出了 8 个点，其中任何 4 点不共面，它们之间连有 17 条线段，每条线段的两个端点都是它们中的点. 求证

(1) 这些线段至少构成 1 个三角形；

(2) 这些线段所构成的三角形的个数不少于 4 个.

（第 46 届莫斯科数学奥林匹克，1983 年）

[证] (1) 若不然，设 8 点中引出线段条数最多的一点是 A，它共

引出 k 条线段 $AB_i, i=1,2,\cdots,k$，于是 $\{B_1,B_2,\cdots,B_k\}$ 之间没有连线. 其余的 $7-k$ 点中每点至多引出 k 条线段，故 8 点间的线段总数不超过

$$k+(7-k)k=(8-k)k\leqslant 16,$$

此与已知矛盾，故知这些线段至少构成 1 个三角形.

(2) 设 $\triangle ABC$ 是这些线段所构成的一个三角形，由点 A,B,C 向其余 5 点所引的线段条数分别为 n_A, n_B, n_C. 于是与 $\triangle ABC$ 有一条公共边的三角形的个数至少为 $n_A+n_B+n_C-5$.

如果 $n_A+n_B+n_C\geqslant 8$，则连同 $\triangle ABC$ 一起至少有 4 个三角形.

如果 $n_A+n_B+n_C=7$，则连同 $\triangle ABC$ 一起至少有 3 个三角形. 但当把 A,B,C 3 点去掉后，其余 5 点间有 7 条线段. 7 条线段有 14 个端点，故由抽屉原理知其中必有 1 点至多引出两条线段. 再把这点去掉，余下 4 点间至少有 5 条线段，当然至少构成两个三角形. 故这时至少有 5 个不同的三角形.

如果 $n_A+n_B+n_C\leqslant 6$，则当把 A,B,C 3 点去掉后，其余 5 点间至少有 8 条连线. 在 5 个点，每两点之间都连 1 条线的图形中，共有 10 条线段和由它们构成的 10 个三角形，每条线段恰为 3 个三角形的公共边. 因此，从 10 条线段中去掉两条，即当 5 点间有 8 条连线时，至少有 4 个三角形.

综上可知，8 点间连有 17 条线段时，这些线段至少构成 4 个三角形.

4·12 考虑空间 $2n$ 个点的集合 $(n>1)$，设它们之间至少用 n^2+1 条线段相连，证明至少形成一个三角形. 并证明，对于每个 n，若 $2n$ 个点用 n^2 条线段相连，则可能有不形成任何三角形的情形发生.

（第 16 届美国普特南数学竞赛，1956 年）

[证] (1) 用记号 T_n 表示命题

T_n：若 $2n$ 个点由至少 n^2+1 条线段连结，则形成一个三角形.

我们用数学归纳法来证明 T_n.

设 A,B,C,D 四点至少由 $2^2+1=5$ 条线段连结，因为 4 点中每两点相连恰连出 $C_4^2=6$ 条线段，因此至多还有两点没有连线，设为 AB，于是 BCD 便形成一个三角形. 所以 T_2 为真.

假设 T_k 为真，即对 $2k$ 个点，连接 k^2+1 条线段，必有一个三角形.

给定 $2(k+1)$ 个点,它们至少有 $(k+1)^2+1$ 条线段相连.

令 A 与 B 是连有线段的两点,又令 δ 是其余 $2k$ 个点的集合.

设 δ 的 p 个点与 A 连结,而 δ 的 q 个点与 B 连结,若 $p+q>2k$,则 δ 中的某个点 C 既与 A 连结,又与 B 连结,此时 ABC 就是一个三角形.

若 $p+q\leqslant 2k$,则至多有 $2k+1$ 条线段以 A 与 B 为端点,并且至少在 δ 中有

$$(k+1)^2+1-(2k+1)=k^2+1$$

条线段连结,由归纳假设,δ 中的某三点构成一个三角形.

于是 T_{k+1} 为真.

由以上,对 $n>1$ 的自然数,T_n 为真.

(2) 把 $2n$ 个点分成两个集合 S 和 T,使它们各含有 n 个元素,若 S 中的每一点与 T 中的每一点连结,则恰好连出 n^2 条线段,此时不能形成一个三角形.

4·13 在平面上给定一个由 $n(n>3)$ 个点组成的点集 S,其中任何 3 点不共线.又设自然数 $k<n$.求证

(1) 如果 $k\leqslant\frac{n}{2}$,那么 S 中每点都可用线段与 S 中的另外至少 k 个点相连,使得这些线段中的任何 3 条都不构成三角形.

(2) 如果 $k>\frac{n}{2}$,并且 S 中的每点都用线段与 S 中的另外至少 k 个点相连,则这些线段中一定可以找出 3 条,它们构成一个三角形.

(波兰数学奥林匹克,1968 年)

[证] 将集合 S 分成两个子集 U 和 V,当 n 为偶数,$n=2m$ 时,使 $|U|=|V|=m$;当 $n=2m+1$ 时,使 $|U|=m$,$|V|=m+1$.然后在不同组的任何两点之间连一条线段.易见,这种连线法满足(1)中的条件.但显然其中任何 3 条线段都不构成三角形.

再证(2).任取 1 条已知线段 AB.从点 A 和 B 都至少引出 k 条线段,除掉 AB 之外,两点至少共向其余 $n-2$ 个点引出 $2k-2$ 条线段.因为 $k>\frac{n}{2}$,所以 $2k-2>n-2$,故知这 $2k-2$ 条线段中必有两条是引向同一点 C,即 $\triangle ABC$ 的三边都是已知线段.

4·14 设空间中有 $2n(n\geqslant 2)$ 个点,其中任何 4 点都不共面,它们

之间连有 n^2+1 条线段,求证这些线段必能构成两个有公共边的三角形.

(中国国家集训队选拔试题,1987 年)

[证] 当 $n=2$ 时,$n^2+1=5$,即 4 点间连有 5 条线段,当然构成两个有公共边的三角形.可见,命题于 $n=2$ 时成立.

设命题当 $n=k$ 时成立.当 $n=k+1$ 时,设 AB 是任一条线段,并把由 A,B 向其余点所引出的线段条数分别记为 a 和 b.

(1) 设有线段 AB,使得 $a+b\geqslant 2k+2$.于是在除了 A,B 之外的 $2k$ 点中,至少存在两点 C 和 D,使线段 AC,BC,AD,BD 都存在.这时,$\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 即为一对有公共边的三角形.

(2) 设有线段 AB,使得 $a+b\leqslant 2k$.于是去掉 A 和 B 时,其余的 $2k$ 点间至少连有 k^2+1 条线段.由归纳假设即知必存在两个有公共边的三角形.

(3) 若对已给线段中的任一条线段 AB,都有 $a+b=2k+1$,则对固定的线段 AB,存在一点 C,使 $\triangle ABC$ 存在.记由 A,B,C 向其余 $2k-1$ 个点引出的线段条数分别为 a',b',c',则

$$a'+b'=b'+c'=c'+a'=2k-1.$$

从而有

$$2(a'+b'+c')=6k-3,$$

其中左端为偶数而右端为奇数,矛盾.这意味着(1),(2) 两种情形至少有一种成立,从而知命题于 $n=k+1$ 时成立,这就完成了归纳证明.

4·15 设在空间中给定 $2n(n\geqslant 2)$ 个点,其中任何 4 点都不共面,它们之间连有 n^2+1 条线段,则这些线段至少构成 n 个不同的三角形.

(中国国家集训队训练题,1989 年)

[证] 当 $n=2$ 时,$n^2+1=5$,4 点间连有 5 条线段,恰构成两个三角形,即命题成立.

设命题于 $n=k$ 时成立,当 $n=k+1$ 时,我们先来证明这时至少存在 1 个三角形.

设 AB 是一条已知线段并记由 A,B 向其余 $2k$ 个点所引出的线段条数分别为 a 和 b.

(1) 若 $a+b\geqslant 2k+1$,则存在点 C 异于 A 和 B,使线段 AC,BC 都存在,从而存在 $\triangle ABC$.

(2) 若 $a+b\leqslant 2k$，则当把 A,B 两点除去后，余下的 $2k$ 个点间至少连有 k^2+1 条线段，于是由归纳假设知至少存在一个三角形.

设 $\triangle ABC$ 是这些线段所构成的三角形之一，由 A,B,C3 点向其余 $2k-1$ 点引出的线段数分别为 α,β,γ.

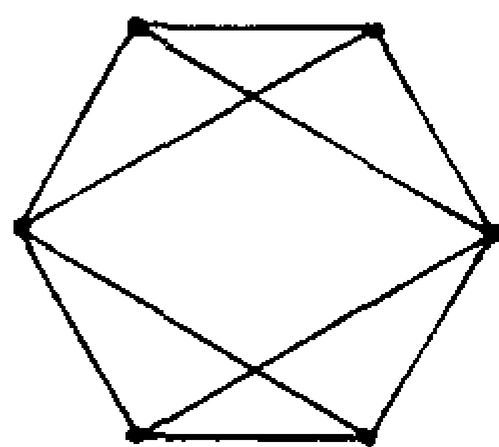
(3) 若 $\alpha+\beta+\gamma\geqslant 3k-1$，则恰以 AB,BC,CA 三者之一为一边的三角形至少有 k 个，再加上原来的 $\triangle ABC$ 即至少有 $k+1$ 个三角形.

(4) 若 $\alpha+\beta+\gamma\leqslant 3k-2$，则 $\alpha+\beta,\beta+\gamma,\gamma+\alpha$ 3 个数中至少有 1 个不大于 $2k-2$. 不妨设 $\alpha+\beta\leqslant 2k-2$. 于是当把 A,B 两点除去后，余下的 $2k$ 点间至少还连有 k^2+1 条线段. 于是由归纳假设知它们至少构成 k 个三角形. 再加上 $\triangle ABC$ 即至少有 $k+1$ 个三角形，命题于 $n=k+1$ 时成立，这就完成了归纳证明.

4·16 设在空间中给定 6 点，其中任何 4 点都不共面. 求最小正整数 n，使当在给定 6 点间连结 10 条线段时，总可找出不同的 n 对三角形，使得每对中的两个三角形都有一条公共边.

(中国国家集训队训练题，1991 年)

[解 1] 在右图中有 6 个顶点和 10 条线，其中恰有两对三角形，每对的两个三角形恰有一条公共边. 由此可见，所求的最小正整数 $n\leqslant 2$.



下面我们来证明在 6 点间连有 10 条线时，总存在两对三角形，每对的两个三角形都有一条公共边. 设 A_1 是引出线段条数最多的一点. 因 6 点共引出 20 条线段，故由抽屉原理知点 A_1 引出的线段条数 $m\geqslant 4$.

(1) 若 $m=5$，则其他 5 点间还有 5 条线段. 5 条线段分别与点 A_1 构成一个三角形，共有 5 个三角形. 5 条线有 10 个端点，它们都是 $\{A_2,A_3,A_4,A_5,A_6\}$ 中的点，至少重复 5 次. 因而至少有 5 对有公共边的三角形.

(2) 若 $m=4$，不妨设 A_1A_6 不存在. 设 4 点 A_2,A_3,A_4,A_5 之间共有 k 条线段，则 $k\geqslant 2$.

若 $k=2$，则 $A_6A_2,A_6A_3,A_6A_4,A_6A_5$ 都存在. 从而至少有两对各有一条公共边的三角形.

若 $l\geqslant 3$，4 点间的 3 条线至少有两个公共端点(可以重合)，从而至少有两对各有一条公共边的三角形.

综上可知,在6点间连有10条线段时,总有两对各有一条公共边的三角形.所以,所求的最小正整数 $n=2$.

[解2] 由解1开头的例子知,只须再证当6点间连有10条线段时,总存在两对三角形,每对的两个三角形都有一条公共边.

设点 A_1 是引出线段数最多的一点,则它至少引出4条线.设这4条线段的另4个端点为 $\{A_2,A_3,A_4,A_5\}$,则这4点间至少有1条线段,从而图中必有一个三角形.记这个三角形为 $\triangle ABC$,并设它的3个顶点向另外3点所引的线段条数分别为 a,b,c.因为另3点 $\{D,E,F\}$ 之间至多3条连线,所以 $a+b+c\geqslant 4$.

(1) 若 $a+b+c\geqslant 5$,则这些线段的另外的端点至少有两对重合,从而至少形成两对各有一条公共边的三角形.

(2) 若 $a+b+c=4$,则这4条线段的另4个端点至少有一对重合.从而构成一个与 $\triangle ABC$ 有公共边的三角形.但这时 $\triangle DEF$ 存在,同理知存在一个三角形与 $\triangle DEF$ 有一条公共边.这就证明了当6点间连有10条线段时,总有两对三角形,每对的两个三角形都有一条公共边.所以,所求的最小正整数 $n=2$.

4·17 设 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 是平面上的6点,其中任何3点都不共线.

(1) 如果这些点之间任意连结13条线段,求证其中必存在4点.它们两两之间都有线段相连结;

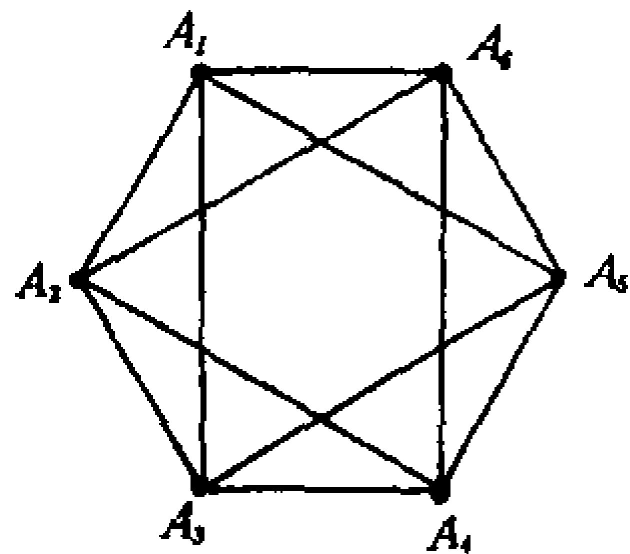
(2) 如果这些点之间只连有12条线段,请你画出一个图来,使(1)中的结论不成立.

(中国初中数学联赛,1989年)

[证] 如果6点中的每两点之间都连结一条线段,则共有15条线段.现有13条线段,即缺少两条连线.这两条线的连法有下列两种情形:

(i) 缺少的两条线段有公共端点,不妨设为 A_1A_2 和 A_1A_3;

(ii) 缺少的两条线段无公共端点,不妨设为 A_1A_2 和 A_3A_4.



无论哪种情形,$\{A_2,A_4,A_5,A_6\}$ 4点中的两两之间都有连线.

其次，右图所示的6点间连有12条线段．点对$\{A_1,A_4\}$，$\{A_2,A_5\}$，$\{A_3,A_6\}$之间没有连线．因为从6点中任取4点时，上述3对顶点中至少有1对包含在4点中，而这两点间没有连线，即(1)中的结论不再成立．

4·18　已知凸多边形被它的不相交的对角线剖分成若干个三角形，使得多边形的每个顶点都是奇数个三角形的顶点，求证多边形的边数能被3整除．

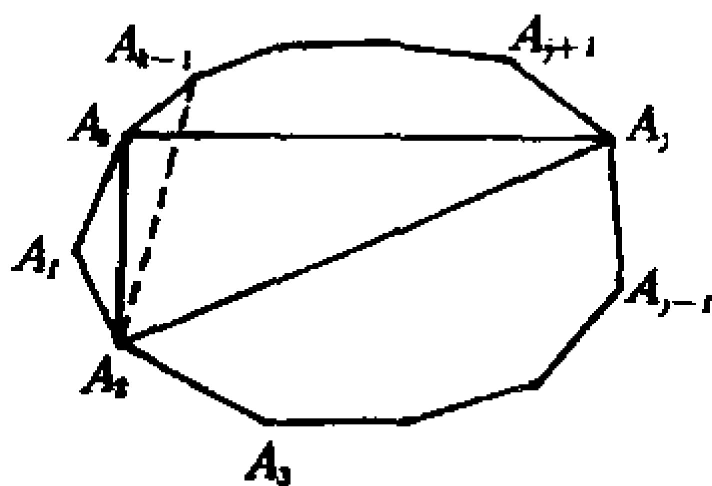
(匈牙利数学奥林匹克，1967年)

(波兰数学奥林匹克，1974年)

［证1］　我们对边数n用数学归纳法来证明．当$n=3$时，命题显然成立．而当$n=4,5$时，命题的条件不可能被满足．可见，命题于$3\leqslant n\leqslant 5$时成立．

设命题于$3\leqslant n<k(k\geqslant 6)$时命题成立．当$n=k$时，设凸$k$边形为$A_1A_2\cdots A_k$．不难看出，在将凸$k$边形分成的诸三角形中，必有一个三角形的3个顶点是凸k边形的连续3个顶点，不妨设为$\triangle A_kA_1A_2$．

既然凸k边形的每个顶点都是奇数个三角形的顶点，所以每个顶点所引出的对角线条数都是偶数．因此，从顶点A_2发出的对角线除A_2A_k外，还有其他对角线，记其中与A_2A_k夹角最小的一条为A_2A_j．由于$\angle A_kA_2A_j$中没有从A_2发出的对角线，而所有对角线又把k边形分成三角形，故或者A_j为A_{k-1}，或者对角线A_kA_j存在．若为前者，则A_k为两个三角形的顶点，此与已知矛盾，故只能为后者．



考察多边形$A_2A_3\cdots A_j$和$A_jA_{j+1}\cdots A_k$．在多边形$A_2A_3\cdots A_j$中，从顶点$A_2,A_3,\cdots,A_{j-1}$发出的对角线条数都是偶数，而多边形中所有顶点所发出的对角线条数之和为偶数(每条对角线计数两次)，所以顶点A_j所发出的对角线条数也为偶数．于是凸$(j-1)$边形$A_2A_3\cdots A_j$满足题中的条件．同理可证，凸$(k-j+1)$边形$A_jA_{j+1}\cdots A_k$也满足题中的条件．于是由归纳假设便得$3\mid(j-1)$，$3\mid(k-j+1)$．从而有$3\mid k$，这就完成了归纳证明．

［证2］　为证本题，我们先给出如下的引理．

引理　如果凸多边形被一些条直线分成若干部分，则可以用两种

颜色为每一部分都涂上一种颜色，使得任何有公共边相邻的两部分都涂有不同颜色.

用数学归纳法很容易证明这个引理，这里从略.

由上述引理知，可将凸多边形被剖分成的每个三角形都涂上黑白两色之一，使得任何两个相邻的三角形都涂有不同的颜色.因为每个顶点都是奇数个三角形的顶点，所以按自然顺序来看，第1个三角形与最后一个三角形涂有相同的颜色.由此可知，凡有一条边与凸多边形的边重合的三角形都涂有相同的颜色，不妨设为黑色.

注意，凸多边形的每条对角线都既是黑三角形的一条边，又是白三角形的一条边.因为所有黑三角形的边数是3的倍数，所有白三角形的边数也是3的倍数，从而多边形的边数作为黑三角形边数与白三角形边数之差，也是3的倍数.

4·19 凸 n 边形及 $n-3$ 条在形内互不相交的对角线组成的图形称为一个剖分图.求证当且仅当 $3\mid n$ 时，存在一个剖分图是可以一笔画的图(即可以从一个顶点出发，经过图中各线段恰好一次，并在最后回到出发点).

(第5届中国中学生数学冬令营，1990年)

[证] 因为 $n-3$ 条在形内互不相交的对角线将凸 n 边形分成 $n-2$ 个内部互不相交的小区域而每个小区域的内角和都不小于 π 及凸 n 边形的内角和为 $(n-2)\pi$，故每个小多边形区域的内角和都是 π，即剖分图中的每个小多边形都是三角形.

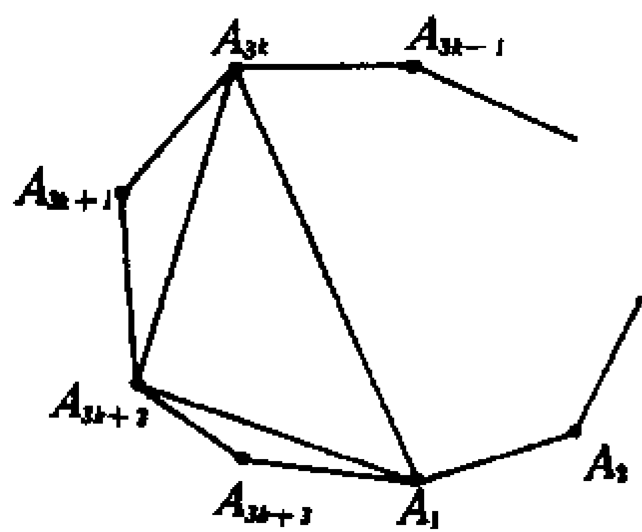
先证必要性.首先指出，用数学归纳法容易证明，可以将剖分图中的每个三角形区域都涂上黑白两色之一，使得有公共边相邻的任何两个三角形都涂有不同的颜色.

设我们已按上述要求将剖分图涂好了黑白两色.因为剖分图中的所有线段可以一笔画出，所以从每个顶点所引出的线段数都是偶数，从而每个顶点都是奇数个三角形区域的公共顶点.因此，以原多边形的边为外边界的三角形区域涂有相同的颜色.不妨设它们都涂有黑色.另一方面，剖分多边形所用的每条对角线都是两种不同颜色的区域的公共边，所以，若记黑三角形个数为 m_1，白三角形个数为 m_2，便有

$$n=3m_1-3m_2.$$

可见 $3\mid n$.

再证充分性. 记 $n = 3m$. 当 $m = 1$ 时, 凸 n 边形为三角形, 当然可以一笔画出, 结论成立. 设当 $m = k$ 时结论成立. 当 $m = k + 1$ 时, 设凸 $3(k+1)$ 边形是 $A_1A_2\cdots A_{3k+3}$. 连结 A_1A_{3k}, A_1A_{3k+2}, $A_{3k}A_{3k+2}$, 并考察凸 $3k$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{3k}$. 由归纳假设知这个凸 $3k$ 边形存在一个可以一笔画出的剖分图. 作出此剖分图再加上其余部分图形, 就得到凸 $3(k+1)$ 边形的一个剖分图. 容易看出, 每个顶点都引出偶数条线, 因而它是可以一笔画出的图. 实际上, 只要按下面的画法即可画出:



$$A_1 \to A_{3k+2} \to A_{3k+3} \to A_1 \to A_{3k} \to A_{3k+1}$$
$$\to A_{3k+2} \to A_{3k} \to \text{按凸 } 3k \text{ 边形的画法.}$$

4·20　在空间中给定 9 点, 其中任何 4 点都不共面. 在 9 点间连结若干条线段, 使图中不存在四面体. 问图中最多有多少个三角形?

（中国国家集训队测验题, 1994 年）

[解]　将 9 点均分成 3 组: $\{A_1, A_2, A_3\}$, $\{A_4, A_5, A_6\}$, $\{A_7, A_8, A_9\}$, 并在属于不同组的每两点之间都连一条线, 则这些连线不构成四面体但共构成 27 个三角形. 可见, 所求的三角形数目的最大值不小于 27.

以下证明若图中有 28 个三角形, 则必有四面体. 为证此, 我们先证如下的引理.

引理　在空间中给定 n 个点, 其中任何 4 点都不共面. 如果在连结了若干条线段后图中不存在三角形, 则连线条数至多为 $\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

引理的证明　我们用数学归纳法来证明, 当 n 个点间连有 $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$ 条线时, 这些连线至少构成 1 个三角形. 当 $n = 3, 4$ 时, 命题显然成立. 设命题于 $n = 2k-1$ 时成立, 当 $n = 2k$ 时, $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1 = k^2+1$, 即 $2k$ 点间连有 k^2+1 条线段, 它们共有 $2k^2+2$ 个端点. 因为

$$\frac{2k^2+2}{2k} = k + \frac{1}{k},$$

故知必有一点 A 至多引出 k 条线段. 去掉点 A, 余下的 $2k-1$ 点间至少还有

$$k(k-1)+1=\left[\frac{(2k-1)^2}{4}\right]+1$$

条线段.由归纳假设知它们至少构成1个三角形,即 $n=2k$ 时命题成立.当 $n=2k+1$ 时,$\left[\frac{(2k+1)^2}{4}\right]+1=k(k+1)+1$,即 $2k+1$ 点间有 $k(k+1)+1$ 条线.这些线段共有 $2k(k+1)+2$ 个端点.因为

$$\frac{2k(k+1)+2}{2k+1}=k+\frac{k+2}{2k+1},$$

故知必有一点 A 至多引出 k 条线.去掉点 A,其余的 $2k$ 点间至少有 k^2+1 条连线.于是它们至少构成1个三角形,即命题对 $n=2k+1$ 成立.从而由归纳法知命题对所有 $n\geqslant 3$ 成立.

回到原题的证明.如果没有四面体,设点 A_1 是引出线段条数最多的一点.由于28个三角形共有84个顶点,故由抽屉原理知必存在一点 A_2 是至少10个三角形的公共顶点.若点 A_2 至多引出6条线,则这些线的至多另6个端点间至少有10条线,从而由引理知其中必有三角形,加上点 A_2 即为四面体,矛盾.故知点 A_2 至少引出7条线,点 A_1 就更是如此.

(1) 若点 A_1 引出8条线段,则由于没有四面体,余下8点构成的子图中不能有三角形.于是由引理知8点间至多有16条连线,从而图中至多有16个三角形,矛盾.

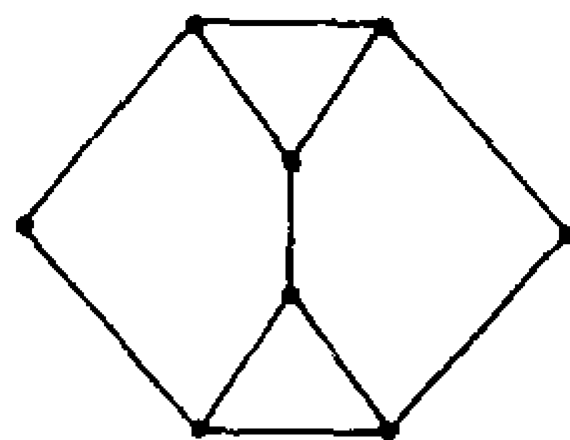
(2) 若点 A_1 引出7条线段,则7条线段的另7个端点的子图中不能有三角形.从而由引理知其中至多有12条连线.于是图中至多有24个三角形,矛盾.

综上可知,图中最多有27个三角形.

4·21 在有8个顶点的简单图中,没有四边形的图的边数的最大值是多少?(简单图是指任一点与自己没有边相连,而且任何两个顶点之间至多有1条边相连的图.)

(第7届中国中学生数学冬令营,1992年)

[解1] 在右图所示的图中有8个顶点和11条边,其中没有四边形.由此可知,所求的边数的最大值不小于11.



下面我们来证明,如果图中有12条边,则其中必有四边形.

首先指出两个明显的事实：

(i) 设 $A \neq B$ 是两个顶点. 如果点 A 与点 $C_1, \cdots, C_k$ 均有边相连，B 至少与 $\{C_1, \cdots, C_k\}$ 中的两点分别有边相连，则图中必有四边形.

(ii) 如果 4 点之间连有 5 条边，则图中必有四边形.

设有 8 个顶点，12 条边的图中没有四边形，其中点 A 是引出线段最多的顶点之一.

(1) 设 A 共引出 $s \geqslant 5$ 条边，与 A 有边相连的顶点的集合为 S，除点 A 及 S 中的点之外的所有顶点的集合记为 T. 于是由 (i) 和 (ii) 知，S 中的点间连线数不超过 $\left[\frac{s}{2}\right]$，T 中的点间连线数至多为 $C^2_{|T|}$，S 与 T 之间连线数至多为 $|T|$. 因而，图中连线总数至多为

$$s + \left[\frac{s}{2}\right] + |T| + C^2_{|T|} = 7 + \left[\frac{s}{2}\right] + C^2_{|T|}.$$

当 $s \geqslant 5$ 时，边数小于 12，矛盾.

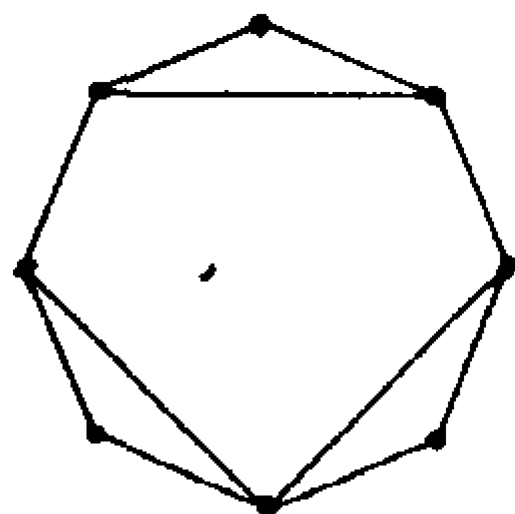
(2) 点 A 恰引出 4 条边：$AA_j (j = 1,2,3,4)$. 设另外 3 点是 B_1, B_2, B_3. 于是 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 之间至多两条线段，$\{B_1, B_2, B_3\}$ 之间至多 3 条边，这两个点集之间至多 3 条线段. 因为图中共有 12 条边，故知 3 类边数恰分别为 2,3,3. 不妨设第 3 组的 3 条线为 $A_jB_j (j = 1,2,3)$. 因为第 1 组有两条边且二者没有公共端点，故 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 之间有一条边，不妨设为 A_1A_2，于是 $A_1A_2B_2B_1$ 为四边形，矛盾.

(3) 点 A 恰引出 3 条线，从而每点都引出 3 条线. 设点 A 和 B 之间没有连线，两点各引出的 3 条线分别为 $AA_j, BB_j (j = 1,2,3)$. 于是由 (i) 知 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 与 $\{B_1, B_2, B_3\}$ 至多有 1 个公共点.

如果二者没有公共点，则它们的各 3 点间都至多有一条边，两个三点集之间至多有 3 条连线. 从而图中连线总数至多为 11，矛盾.

如果两个三点集之间恰有 1 个公共点，则考察第 8 点 C. 由抽屉原理知，它引出的 3 条线中必有两条引向同一个三点集，这导致四边形，矛盾.

综上，我们证明了在有 8 个顶点和 12 条边的图中必有四边形. 从而，所求的边数的最大值为 11.



[解 2] 右图所示的图中有 8 个顶点和 11 条边，但其中没有四边形，故知所求的边数的最大值不

小于 11.

为证在有 8 个顶点和 12 条边的图中必有四边形,我们先来证明如下的引理:

引理　如果在有 5 个顶点,6 条边的图中没有四边形,则该图必为恰有 1 个公共顶点的两个三角形.

[**证**]　因为 5 点度数之和为 12,故必有顶点的度数不大于 2.如果有顶点 A 的度数不大于 1,则除 A 之外的 4 点间有 5 条边,由(ii)知必有四边形,矛盾.所以每点度数都不小于 2.

如果图中存在顶点 A 的度数为 3,设由它引出的 3 条边为 AB,AC,AD.这时,第 5 点 E 至少向$\{B,C,D\}$引出两条边,从而必有四边形,矛盾.

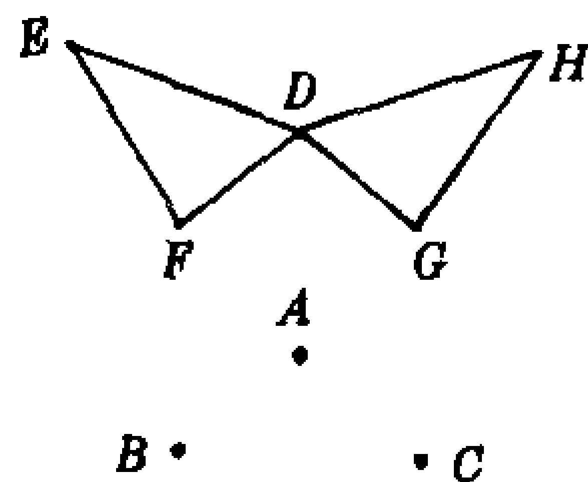
综上可知,图中 5 个顶点的度数只能分别为 4,2,2,2,2,即图形是恰有一个公共顶点的两个三角形.引理证完.

设在有 8 个顶点和 12 条边的图中没有四边形.这时,8 个顶点度数之和为 24,故必有一点的度数不超过 3.

(1) 若有一点 A 的度数不超过 2,则去掉 A 后,其余 7 点间至少还有 10 条线.7 点度数之和为 20,其中必有一点 B 的度数不大于 2.于是除 B 之外的 6 点间至少有 8 条线.6 点间有 8 条线,度数之和为 16,其中必有一点 C 的度数不大于 2.于是除 C 之外的 5 点间至少有 6 条线.这样,我们证明了必有 5 个顶点的子图,其中至少有 6 条边.

(2) 若每点度数都不小于 3,则每点度数都是 3.设点 A 引出的 3 条边为 AB,AC,AD.由 B,C,D 各引出另外两条线,设其另外的端点分别为$\{E,F\}$,$\{G,H\}$,$\{I,J\}$.这 3 个点对中若有两个有公共点,则必有四边形,故三者互不相交.但因只有 8 个顶点,故知$\{B,C,D\}$间必有连线.不妨设边 BC 存在,于是 $\triangle ABC$ 存在,当把这 3 点去掉时,余下 5 点间还有 6 条连线.

由(1)和(2)知,总存在有 5 个顶点的子图,其中至少有 6 条边.如果其中有 7 条边,则当把度数最小的顶点去掉后,余下 4 点间至少有 5 条边,从而有四边形,矛盾.所以这个 5 点子图恰有 6 条边.由引理知它是恰有 1 个公共顶点的两个三角形(见右图).



若 A,B,C 中有一点向后 5 点引两条线,则必有四边形,此与假设矛盾,故每点至多引 1 条线.若由 A,B,C 各向后 5 点引 1 条线的共 3 条线中的两条有公共端点,则又得到四边形.所以,这 3 条线段两两没有公共端点.由抽屉原理知,三者在后 5 点中的 3 个端点中总有两个是同一三角形的顶点,从而又导致四边形,矛盾.

综上可知,所求的边数的最大值为 11.

4·22 设 G 是一个有 k 条边的连通图.求证可以将 G 的边标号为 $1,2,\cdots,k$,使得在每一个属于两条或更多条边的顶点,过该顶点的各条边的标号数的最大公因子是 1.

(第 32 届国际数学奥林匹克,1991 年)

[证] 由 G 的连通性可知 G 中的每一个顶点至少属于一条边.任取一个顶点 v_0,从 v_0 出发沿着 G 中的边行走,每条边至多通过一次,但某些顶点可能要越过多次.设走过 t_1 条边后不可能再继续前进,并把依次通过的顶点记为 $v_0,v_1,v_2,\cdots,v_{t_1}-1,v_{t_1}$,这里,当 $i\neq j$ 时,v_i 和 v_j 可能对应于同一顶点.将已通过的边依次编号为 $1,2,\cdots,t_1$.显然,$1\leqslant t_1\leqslant k$ 且除顶点 v_0 之外,对 G 中的任一顶点,如果从它发出的边中至少有两边已被标号,则这些标号数中必有两个是相继自然数.

如果 $t_1=k$,则所有边已被标号完毕.以下设 $t_1<k$.这时,由图 G 的连通性知存在 $Vi_o\in\{v_0,v_1,\cdots,v_{t_1-1}\}$,使得从 v_{i_0} 发出的边中至少有一条尚未标号.于是可从 v_{i_0} 出发,沿尚未标号的边前进,按上述规则依次从 t_1+1,t_1+2 标号,直到不能继续前进为止.设这次又标了 t_2 条边,则有 $1\leqslant t_2\leqslant k-t_1$.由于总共有 k 条边,故知用这种方法可将 G 的所有边标上号码 $1,2,\cdots,k$.

任取 G 的一个顶点 v,设从 v 发出的边至少两条.如果 $v=v_0$,由于从 v 发出的边中有一条标号为 1,故知从该点发出的所有边的标号数的最大公因子为 1;如果 $v\neq v_0$,则由以上标号数的方法知,从 v 发出的边中必有两边的标号数是两个相继自然数,从而过该点的各条边的标号数的最大公因子也是 1.

4·23 设 G 是连通图.若对每个顶点 V,都对应一个非负整数 $f(V)$,并满足

(1) 若顶点 V 和 W 是邻接的,则

$$|f(V)-f(W)|\leqslant 1,$$

(2) 假如 $f(V)>0$,则 V 至少邻接于一个顶点 W,使得

$$f(W)<f(V),$$

(3) 恰好存在一个顶点 U,使得

$$f(U)=0.$$

求证 $f(V)$ 是连接 U 到 V 的链中棱的最小数.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1992 年)

[证] 设 S_k 表示所有顶点 V 的集合,这些 V 使得连接 U 和 V 的最短链有 k 条边.

因为图是连通的,所以每个顶点都属于某个 S_k.

假如 $f(V)=k$,则断言 V 属于 S_k.

显然 $S_0=\{U\}$,而且由条件(3),U 恰好是满足 $f(U)=0$ 的惟一顶点,于是对 $k=0$ 结论成立.

假定结论对 k 成立.

考虑使 $f(V)=k+1$ 成立的顶点 V. 由条件(1),(2),它是与一个具有 $f(W)=k$ 的顶点 W 相邻接. 所以,W 属于 S_k,因而,这是具有 k 条边的连接 U 与 W 的一个链再加上边 (W,V),因此得到有 $k+1$ 条边的连接 U 和 V 的链. 若 $(U,W_1,W_2,\cdots,W_j,V)$ 是连接 U 和 V 的最短链,则有 $j+1$ 条边. 于是由条件(1),有

$$\begin{aligned}k+1&=f(V)\\&=f(V)-f(W_j)+f(W_j)-f(W_{j-1})+\cdots+f(W_1)\\&\qquad-f(V)\\&\leqslant 1+1+\cdots+1=j+1.\end{aligned}$$

由此推出 $j=k$.

因而,V 属于 S_{k+1},所以结论对 $k+1$ 成立. 于是命题得证.

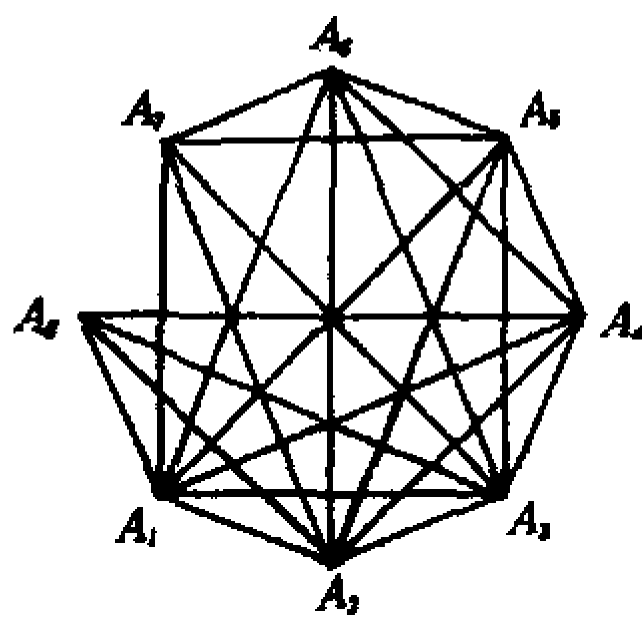
4·24 已知某图中有 $n(n\geqslant 8)$ 个顶点,问这 n 个顶点的度数能否分别为 $4,5,\cdots,n-4,n-3,n-2,n-2,n-2,n-1,n-1,n-1$?

(奥地利 — 波兰数学奥林匹克,1985 年)

[解] 先看 $n=8$ 的情形. 在下图中,A_1,A_2,A_3 3 点均为 7 度,A_4,A_5,A_6 为 6 度,A_7 为 5 度,A_8 为 4 度,满足题中的要求.

添加 1 点 A_9,将 A_9 与 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 各连 1 条线,则 A_9 为 6 度,A_1,A_2,A_3 为 8 度,A_4,A_5,A_6 为 7 度,A_7 和 A_8 仍分别为 5 和 4 度,恰

好满足题中要求．这就是说，当 $n=8,9$ 时，存在满足要求的图．



不难看出，上述由 8 点过渡到 9 点的过程由 9 点到 10 点时却无法实现．实际上，当 $n=10$ 时，若有图满足要求，则其中边数为

$$\frac{1}{2}(3\times 9+3\times 8+7+6+5+4)=36\frac{1}{2},$$

此不可能．故知 $n=10$ 时不存在满足要求的图．同理，$n=11$ 时也不存在．但这一方法于 $n=12$ 时不再适用．因而，我们另寻求一个统一的反证法．

设 $n\geqslant 10$，将 n 个顶点分成 3 个子集：

$$M_1=\{A_1,A_2,A_3\},M_2=\{A_4,A_5,A_6\},$$
$$M_3=\{A_7,A_8,\cdots,A_n\},$$

其中 M_1 中 3 点均为 $n-1$ 度，M_2 中 3 点均为 $n-2$ 度，M_3 中顶点的度数依次为 $n-3,n-4,\cdots,4$．显然，M_1 中每点都与所有其余点相连；M_2 中每点都至少与 M_3 中的 $n-7$ 个顶点相连，即 M_2 中每点至多与 M_3 中 1 点间无线相连．由于 A_n,A_{n-1} 分别为 4 度和 5 度，故知 A_n 至少与 M_2 的 3 点中的两点间无线，A_{n-1} 至少与 M_2 中的 1 点无线．由此可知，M_2 中 3 点与 M_3 中除 A_n,A_{n-1} 外的其余点间都有连线．这样，A_{n-2} 已有 6 条线，不能再与其他点相连．然而，A_7 为 $n-3$ 度，它至少与 A_n，A_{n-1},A_{n-2} 这 3 点中的 1 点相连，矛盾．这就证明了当 $n\geqslant 10$ 时，满足题中要求的图是不存在的．

4·25　在集合 S 的元素之间引进关系“$\rightarrow$”，使得

(1) 对任意的 $a,b\in S$，要么 $a\rightarrow b$，要么 $b\rightarrow a$，二者恰居其一；

(2) 对任意的 $a,b,c\in S$，若 $a\rightarrow b,b\rightarrow c$，则有 $c\rightarrow a$．

问集合 S 中最多含有多少个元素？

（英国数学奥林匹克，1972 年）

［解］　显然，当 $S=\{a,b,c\}$ 且它们之间的关系为 $a\rightarrow b,b\rightarrow c$，$c\rightarrow a$ 时，满足题中的要求．可见，所求的元素数的最大值不小于 3．

如果 S 中含有 4 个元素 a,b,c,d，则由抽屉原理知，a 与 b,c,d 间的箭头关系总有两个相同，即或者有两个箭头同时指向 a，或者有两个箭头同时离开 a．不妨设 $b\rightarrow a,c\rightarrow a$．由对称性知可设 $b\rightarrow c$．于是有

$b \to c, c \to a$.按已知(2)应有 $a \to b$,矛盾.

综上可知,S 中最多含有 3 个元素.

4·26 设一种完全定向图由 n 个已知点确定.即对于点集 $\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$ 中任意两点 P_i, P_j,都有确定的方向 $P_i \to P_j$(或 $P_j \to P_i$).求证已知的点集存在一种排列

$$[P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_n}] = [a_1, a_2, \cdots, a_n],$$

能成立连锁定向关系:

$$a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_n.$$

(第 19 届美国普特南数学竞赛,1958 年)

[证] 对 n 施用数学归纳法.

(1)$n = 2$ 时,命题显然成立;

(2)假设 $n \leqslant k$ 时,命题成立.我们讨论 $k+1$ 个点.

从 $k+1$ 个点决定的完全定向图中任取一点 b,并将其余的 k 个点关于点 b 分成下列两个子集:

$$A = \{x \mid x \to b\},$$

$$C = \{x \mid b \to x\}.$$

由题意知,A 和 C 是两个局部定向图.

若 A 含有 p 个点,C 含有 q 个点,则

$$p + q = k.$$

由归纳假设可知,A 中的点存在连锁定向排列,C 中的点也存在连锁定向排列,即

$$a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_p,$$

$$c_1 \to c_2 \to \cdots \to c_q.$$

再根据 A 和 C 的定义有

$$a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_p \to b \to c_1 \to c_2 \to \cdots \to c_q.$$

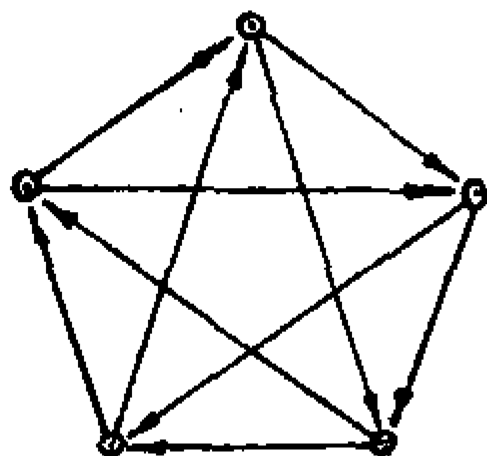
因而命题对 $k+1$ 亦成立.

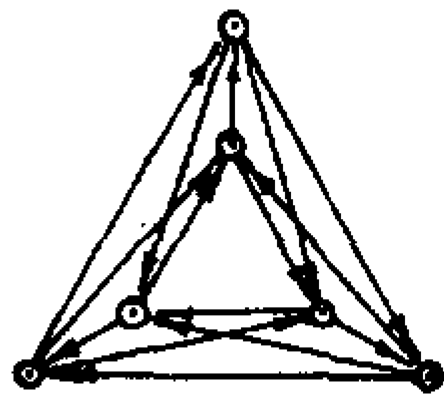
于是由数学归纳法证明了本题的结论.

4·27 给定 n 个点,$n > 4$.试证可以用箭头将这些点连结起来,使得从任何一点到达另外任何一点时,只须走过一个箭头或者两个箭头(每对点间只用一个箭头连结,沿箭头走时只能向箭头所指的方向前进).

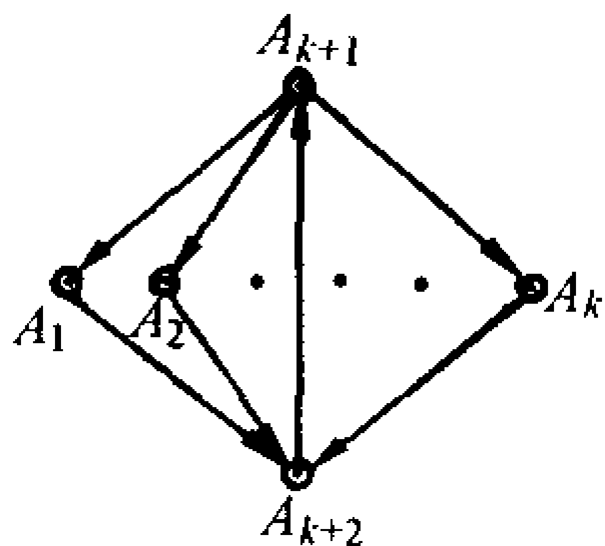
(第 7 届全苏数学奥林匹克,1973 年)

［证］ 用数学归纳法来证明，对于 $n=5,6$，满足要求的点组和箭头如下图所示.





设当 $n=k$ 时命题结论成立，于是当 $n=k+2$ 时，由归纳假设知，$A_1,A_2,\cdots,A_k$ 之间可以连上箭头使之满足题中的要求.然后从 A_{k+1} 分别画出 k 个箭头并依次指向 $A_1,A_2,\cdots,A_k$.接着从 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 各画出一个箭头指向 A_{k+2}.最后从 A_{k+2} 画一个箭头指向 A_{k+1}.容易看出，这个连有箭头的图（见上图）便满足要求.从而完成了归纳证明.



4·28 在凸多面体的每一条棱上标上一个箭头，使得对多面体每一顶点分别至少有一个箭头指向它，有一个箭头离开它.试证存在多面体的两个面，使在它们的边上沿着箭头所指的方向可以环绕周界走一圈.

（基辅数学奥林匹克，1975 年）

（原联邦德数学奥林匹克，1987 年）

［证 1］ 设 a 与 b 是这个多面体的两条相邻棱.如果存在一个侧面以 a,b 为边，则称 $\{a,b\}$ 是一个“钩”.

若一个钩 $\{a,b\}$ 的两条棱上所规定的方向是首尾相接的，则称钩 $\{a,b\}$ 是可通过的.

显然，一个钩不能属于不同的平面，因而不能属于这个多面体的不同侧面.

设这个多面体的棱数为 k，钩数为 h.

由于每个钩有两条棱，而每条棱属于四个钩，所以钩数是棱数的二倍，因此有

$$h=2k. \quad ①$$

由已知，对于这个多面体的一个顶点，至少可以找到一条棱向它驶

来，且至少可以找到一条棱由它驶出. 由于一个顶点至少是三条棱的公共点，因此那些作为通过这个顶点的"道路" 的钩中至少有两个是可通行的.

设这个多面体的顶点数为 e，则至少有 $2e$ 个可通过的钩.

记 h_+ 为可通过的钩的总数，h_- 为不可通过的钩的总数，则有

$$h_+ \geqslant 2e. \qquad ②$$

如果一个侧面不能按规定方向环绕它的边界，则这个侧面的边界上的棱的方向至少有两次改变，从而属于这个侧面的钩中至少有两个是不可通行的.

设 f 是这个多面体的侧面数，f_+ 是可环绕的侧面数，f_- 是不可环绕的侧面数，则有

$$h_- \geqslant 2f_-. \qquad ③$$

用欧拉定理得 $\quad e + f - k = 2 \qquad ④$

则有

$$\begin{aligned} 2f_+ &= 2f - 2f_- \\ &= 4 + 2k - 2e - 2f_- && (\text{由 ④}) \\ &= 4 + h - 2e - 2f_- && (\text{由 ①}) \\ &\geqslant 4 + h - h_+ - 2f_- && (\text{由 ②}) \\ &= 4 + h_- - 2f_- \geqslant 4. && (\text{由 ③}) \end{aligned}$$

从而

$$f_+ \geqslant 2.$$

即这个多面体至少有两个侧面，它的边界按规定方向是可被环绕的.

[证 2] 按题设，对于每一个顶点至少有一条棱向它驶来，且至少有一条棱由它驶出. 所以没有"死胡同" 出现. 于是能够从一个顶点出发走过一条由首尾相接的棱组成的任意长的链. 由于顶点数是有限的，故在某个时候首次遇到一个已经走过的顶点 E. 因此存在一条封闭的由首尾相接的棱组成的从顶点 E 到 E 的圈 k，它将多面体的表面分成两部分 G 和 H，而圈 k 是两部分的公共边界. 设 G 是在圈 k 前进方向的左方.

考察 G 中的所有圈(包括 k 在内). 对每个这样的圈 h，其中所包含

的侧面数记为 $f(h)$，称为圈 h 的权．设圈 h_0 是其中权最小的圈．我们断言，$f(h_0)=1$，即圈 h_0 恰好环绕 1 个侧面．

事实上，若 $f(h_0)>1$，则在 h_0 内必存在一条棱 K，它不在 h_0 上，但与 h_0 有 1 个公共顶点 P．不妨设棱 K 上的箭头指向异于 P 的另一个端点 P_1．于是可以从点 P 出发沿棱 K 走下去，直到迂到 h_0 的另一个顶点或迂到方才走过的道路上的某一个顶点为止．无论哪种情形，都得到一个新圈，且它的权小于 $f(h_0)$，此与 $f(h_0)$ 的最小性矛盾．

同理，在 H 中也可以找到一个权最小的圈 h_1，它也恰好环绕 1 个侧面．因为 G 和 H 中至少有 1 个所含侧面数大于 1，故 $h_0\neq h_1$．可见，h_0 和 h_1 即为所求．

4·29 给定平面上的点集 $P=\{P_1,P_2,\cdots,P_{1994}\}$，其中任何 3 点都不共线．将 P 中所有点任意分成 83 组，使得每组至少有 3 点，且每点恰属于其中 1 组．然后将同一组中的每两点间连一条线段，而不在同一组的两点间不连线，这样得到一个图 G．不同的分组方式得到不同的图．将图 G 中所含的以 P 中的点为顶点的三角形的个数记为 $m(G)$．

（1）求 $m(G)$ 的最小值 m_0；

（2）设 G^* 是使 $m(G^*)=m_0$ 的一个图，并将 G^* 中的线段（指以 P 的点为端点的线段）用 4 种颜色涂色，每条线段恰涂四色之一．试证存在一种涂色方案，使 G^* 涂色后不含以 P 的点为顶点的单色三角形（即 3 边颜色相同的三角形）．

（中国高中数学联赛，1994 年）

［解］ 由于将点集 P 分成 83 组的不同分组方式只有有限多种，故其中必有一种分组方式使连成的三角形的个数最小．设相应的图为 G，于是 $m(G)=m_0$．设图 G 由分组 $X_1,X_2,\cdots,X_{83}$ 得到，其中 X_i 表示第 i 组点的集合，记 $x_i=|X_i|$，$i=1,2,\cdots,83$，于是有 $x_1+x_2+\cdots+x_{83}=1994$，且

$$m_0=C_{x_1}^3+C_{x_2}^3+\cdots+C_{x_{83}}^3.$$

若有 x_i,x_j，使得 $|x_i-x_j|\geqslant 2(1\leqslant i<j\leqslant 83)$，不妨设 $x_i>x_j$，则当将 X_i 中 1 点划给 X_j 而其他点均不动时，记所得的分组方式所对应的图为 G'，$m(G')=m_1$，于是有

$$m_0-m_1=C_{x_i}^3+C_{x_j}^3-C_{x_i-1}^3-C_{x_j+1}^3$$

$$=\frac{1}{2}[(x_i-1)(x_i-2)-x_j(x_j-1)]>0,$$

此与 m_0 的最小性矛盾. 由此可知,对于任何 $1\leqslant i<j\leqslant 83$,均有 $|x_i-x_j|\leqslant 1$.

因为 $1994=83\times 24+2=81\times 24+2\times 25$,所以83组中必有81组各有24点而另2组各有25点. 故得

$$m_0=81C_{24}^3+2C_{25}^3=168544.$$

设 G^* 所对应的分组是 $X_1,X_2,\cdots,X_{83}$ 且 $x_1=x_2=25,x_3=x_4=\cdots=x_{83}=24$. 下面给出 G^* 的一种涂色法,使得将 G^* 用4种颜色涂色后不含单色三角形.

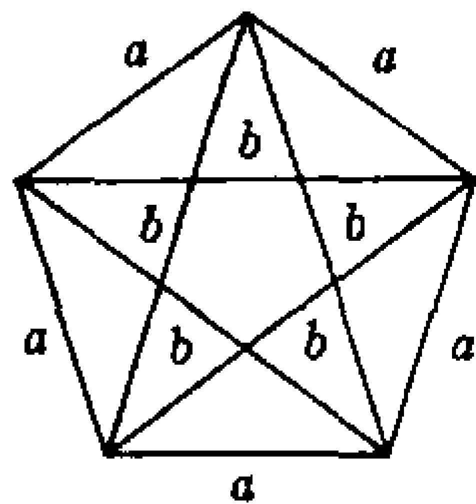
由于不同组的点间没有连线,故只要将各组的点之间的连线分别涂色就行了. 又因每组都是25个点或24个点,所以只须对一组25个点间的连线给出满足要求的涂色法,对于共有24个点的组,只要将前者擦去一点就行了.

将 X_1 中的25点划分成5个子集:

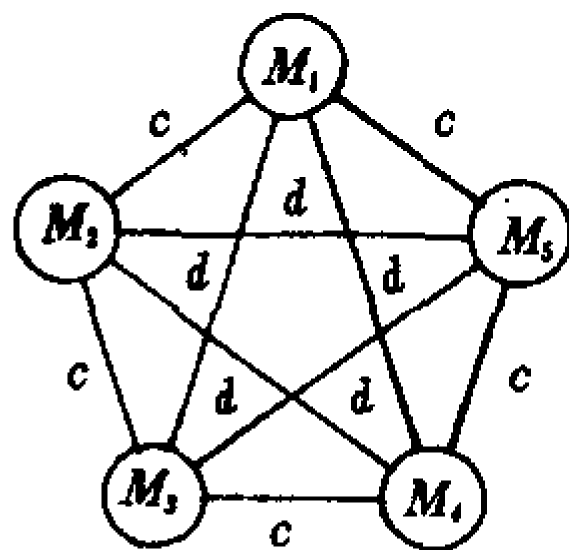
$X_1=M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4\cup M_5$,

$|M_i|=5,i=1,2,3,4,5.$

将由 X_1 中的点及其间连线所构成的图记为 G_1^*,由 M_i 中的点及其间连线所成的图记为 G_{1i}^*. 用 a,b,c,d 表示4种不同的颜色. 将 G_{1i}^* 涂色如下图(a)所示,然后对图 G_1^* 中5个子图之间的连线涂色如下图(b)所示. 易见,这种涂色法中,涂色后的 G_1^* 中没有单色三角形.



(a)



(b)

4·30 在平面上给定 n 个点,其中任何3点都不共线. 在这些点的每两点之间都连结一条线段,并将其中某些线段涂成红色,另外某些线段涂成蓝色,使得从任何一点走到另外任何一点,都只要沿着涂色线段

走就可以实现,而且这种路线是惟一的.试证可以将尚未涂色的每条线段都涂上红蓝两色之一,使得以给定点为顶点的任一个三角形的红边条数为奇数.

(匈牙利数学奥林匹克,1970年)

[证] 设 AB 是一条尚未涂色的线段.按已知,有惟一的一条折线从 A 到 B,其上的每一条边都已涂色.我们把这条折线记为 V_{AB},且规定为线段 AB 涂色的原则如下:当折线 V_{AB} 上有奇数条蓝色线段时,将 AB 涂成蓝色;当折线 V_{AB} 上有偶数条蓝色线段时,将 AB 涂成红色.按此原则,我们可以给图中的每条线段都以惟一确定的方式涂上颜色.

下面我们来证明,以3个给定点为顶点的任一三角形的红边条数都是奇数.换句话说,任一三角形的蓝边条数都是偶数.

设 $\triangle ABC$ 是任意三角形.考察连结点 A 和 B 的惟一的原已涂色的折线 V_{AB} 和点 C 的关系.若点 C 在 V_{AB} 上,则取 C 为 D;若折线 V_{AB} 和 V_{BC} 没有公共边,则取 B 为 D;若折线 V_{AB} 和 V_{BC} 有公共边,则把从 B 算起的最后一个公共顶点取为 D.这样一来,从点 D 出发,可以沿着互不相同的已涂色的线段分别走到点 A,B,C(当点 D 与点 A,B,C 之一重合时,连结两点的折线退化为一点),而且由惟一性知,$V_{AB}=V_{AD}\cup V_{DB}$,$V_{AC}=V_{AD}\cup V_{DC}$,$V_{BC}=V_{BD}\cup V_{DC}$.设折线 V_{AD},V_{BD},V_{CD} 中蓝色线段条数分别为 α,β,γ,V_{AB},V_{BC},V_{AC} 中蓝色线段条数分别为 x,y,z,则有 $x+y+z=2(\alpha+\beta+\gamma)$.因而 x,y,z 3数中奇数的个数为偶数,所以,3条线段 AB,BC,AC 中涂成蓝色的线段条数为偶数.

4·31 将正六边形的某些边和对角线涂上红蓝两色之一,求证

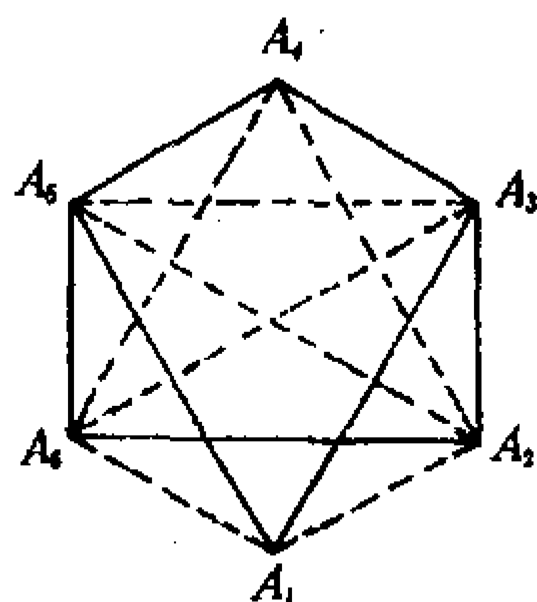
(1) 如果共涂色15条线段,则图中至少有两个单色三角形(三边同色的三角形);

(2) 如果只涂色14条线段,则不一定存在单色三角形.

(第19届全俄数学奥林匹克,1993年)

[证] (1) 涂色15条线段时,每条边和每条对角线都涂了色.顶点 A_1 共引出5条线段,其中必有3条同色.不妨设 A_1A_2,A_1A_3,A_1A_4 都是红色.考察线段 A_2A_3,A_2A_4,A_3A_4.如果其中有1条红色,不妨设为 A_2A_3,则 $\triangle A_1A_2A_3$ 为红三角形;如果3条都是蓝色,则 $\triangle A_2A_3A_4$ 是蓝三角形.这表明图中总有1个单色三角形.不妨设 $\triangle A_1A_2A_3$ 为红三

角形.



考察$\triangle A_4A_5A_6$,如果它是单色三角形,则图中至少有两个单色三角形.如果它不是单色三角形,则它必有1条蓝边,不妨设为A_4A_5.再分别考察线段组$\{A_4A_1,A_4A_2,A_4A_3\}$和$\{A_5A_1,A_5A_2,A_5A_3\}$.若其中一组中有两条红线,则又得到一个红三角形,即图中至少有两个单色三角形.否则,两组中都至少有两条蓝线.这时,至少共有4条蓝线的另外端点都属于$\{A_1,A_2,A_3\}$,从而总有从A_4,A_5引出的各1条蓝线段的另一个端点是公共的,于是得到一个蓝三角形.

综上可知,无论哪种情形,总是至少有两个单色三角形.

(2) 右图中有7条红线和7条蓝线,但没有单色三角形,其中对角线A_1A_4未涂色.

4·32 试证在二染色的有7个顶点的完全图K_7中至少存在4个单色三角形.

(中国国家集训队训练题,1989年)

[证1] 因为二染色的K_6中至少存在两个单色三角形,故在二染色的K_7中必存在两个单色三角形.设$\triangle ABC$是一个单色三角形.考察以除点A之外的其余6点为顶点的二染色完全子图,则其中又至少有两个单色三角形.加上$\triangle ABC$便知K_7中有3个单色三角形.3个三角形共有9个顶点,故由抽屉原理知7点中必有1点至少是两个单色三角形的公共顶点.将这个公共顶点去掉后,以其他6点为顶点的K_6中又至少有两个单色三角形.从而在二染色的K_7中至少有4个单色三角形.

[证2] 图中的7个顶点共可组成7个不同的六点组.以每组的6个顶点为顶点的完全子图K_6中至少有两个单色三角形.7个K_6中至少有14个单色三角形(包括重复计数).显然,K_7中的每个单色三角形恰属于4个不同的K_6,故知至少有4个不同的单色三角形.

[证3] 注意,每个异色三角形或者有2条红边和1条蓝边,或者有1条红边和2条蓝边.我们称由某顶点发出的1条红边和1条蓝边所成的角为异色角.易见,每个异色三角形中恰有两个异色角.

设图中的7个顶点为$A_1,A_2,\cdots,A_7$,由顶点A_i引出的红线和蓝线

条数分别为 r_i 和 $6-r_i$，$i=1,2,\cdots,7$. 于是，以 A_i 为顶点的异色角的个数为 $r_i(6-r_i)$. 因而，图 K_7 中的异色角的总数为 $\sum_{i=1}^{7} r_i(6-r_i)$. 所以异色三角形的总数为

$$S=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{7} r_i(6-r_i)\leqslant \frac{1}{2}\times 7\times 9=31\frac{1}{2}.$$

这表明图中至多有 31 个异色三角形. 因为 K_7 中共有 35 个不同的三角形，所以至少有 4 个单色三角形.

4·33　已知在红蓝二染色的 K_8 中既不存在红三角形也不存在蓝 K_4，问其中最少有多少条红边?最多有多少条红边?说明理由.

（天津市代表队测验题，1990 年）

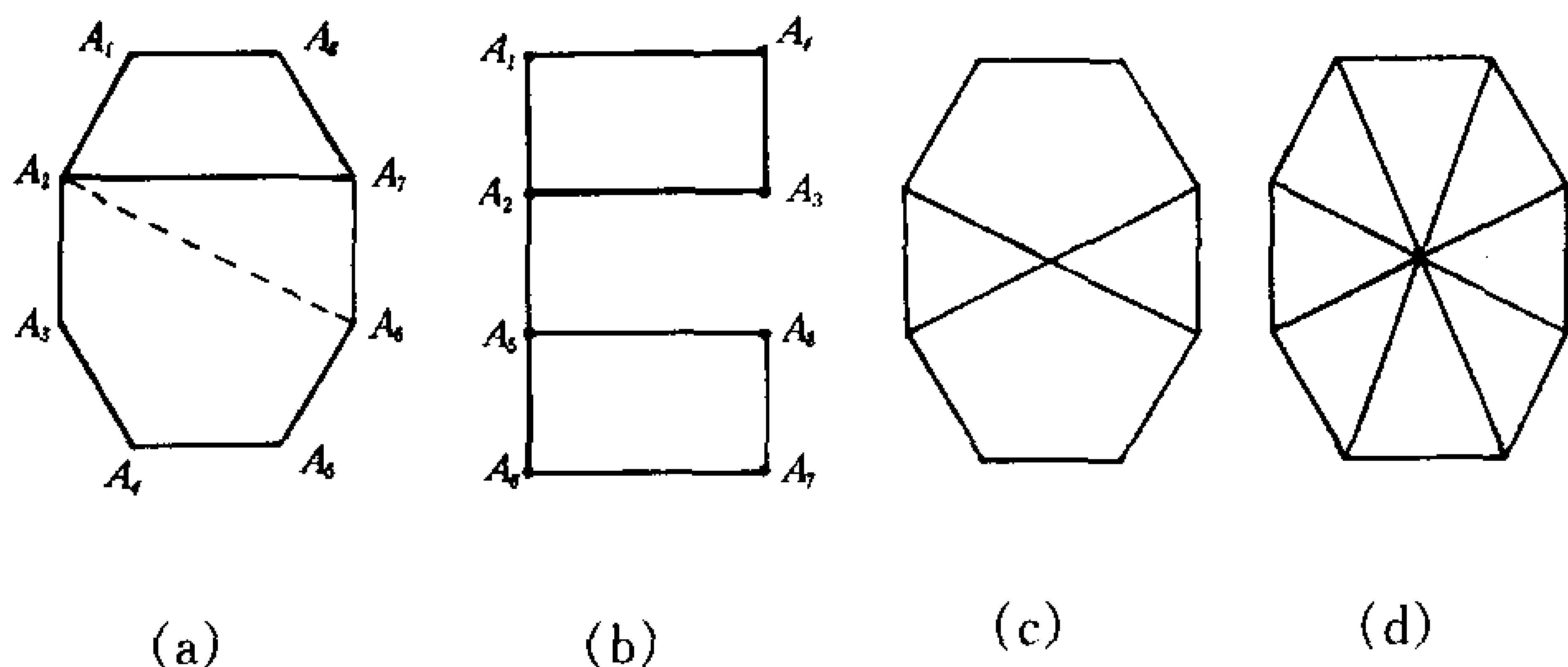
[解]　在 K_8 中每点连有 7 条边. 若顶点 A 引出 6 条蓝边，则在以 6 条边的另外端点为顶点的 K_6 中，或者有红三角形，或者有蓝三角形，从而导致蓝 K_4，此与已知矛盾. 由此可知，K_8 中的每个顶点至少引出两条红边，从而 K_8 中至少有 8 条红边.

另一方面，若顶点 B 引出 4 条红边，则在以它们的另 4 个顶点为顶点的 K_4 中，或者有 1 条红边，从而导致红三角形，或者它本身就是蓝 K_4，此与已知矛盾. 故知 K_8 中的每个顶点至多引出 3 条红边，从而 K_8 中至多有 12 条红边.

(1) 若 K_8 中恰有 8 条红边，则每点恰引出两条红边，从而 8 条红边必构成一个或两个圈. 因每点至多引出 3 条红边，故当有两个圈时，顶点互不相交. 又因图中没有红三角形，故当有两个圈时，必然各有 4 条边.

当 8 条红边构成一个圈 $A_1A_2A_3\cdots A_8$ 时，$A_1A_3A_5A_7$ 为蓝 K_4；当 8 条红边组成两个圈 $A_1A_2A_3A_4$ 和 $A_5A_6A_7A_8$ 时，$A_1A_3A_5A_7$ 也是蓝 K_4. 可见，K_8 中至少有 9 条红边.

(2) 设 K_8 中恰有 9 条红边. 由于其中没有红三角形且每点至多引出 3 条红边，至少引出 2 条红边，故 8 个顶点中恰有 2 个顶点各引出 3 条红边，其余 6 点各引出 2 条红边. 这样一来，K_8 只能有下列两种可能情形：图中画出的都只是红边，其中图(a) 中的虚线表示可将边 A_2A_7 去掉而代之以 A_2A_6. 容易看出，(a) 和(b) 两图中都有蓝 K_4：$A_1A_3A_5A_7$. 故知 K_8 中至少有 10 条红线.



(a)　(b)　(c)　(d)

在图(c)和(d)中都既无红三角形又无蓝 K_4，且图(c)中共有10条红边，图(d)中共有12条红边.

综上可知，K_8 中最少有10条红边，最多有12条红边.

4·34　连结圆周上9个不同点的36条直线染成红色或蓝色，假定由9点中每三点所确定的三角形都至少含有一条红色边. 证明存在四点，其中每两点的连线都是红色的.

（第8届加拿大数学奥林匹克，1976年）

[证]　因为从一点引出的8条直线被染成红或蓝两种颜色，则至少有4条直线同色.

(1) 如果有一点 A 连出4条蓝色直线 Ax_1, Ax_2, Ax_3, Ax_4，由于没有三边都是蓝色的三角形，则6条直线 $x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4$ 都是红色的，即4点 x_1, x_2, x_3, x_4 符合要求.

(2) 如果有一点至少连出5条红色直线.

首先可以证明，不可能每一点都恰好连出5条红线. 否则这9个点连出 $\frac{9\times5}{2}$ 条红线，而 $\frac{9\times5}{2}$ 不是整数，这是不可能的.

因此，必有一点 B 至少连出6条红线，设为

$$By_1, By_2, \cdots, By_6.$$

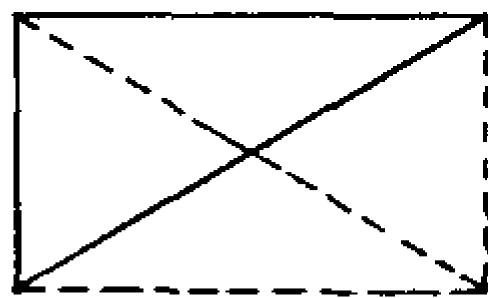
再考虑从点 y_1 出发的5条直线 $y_1y_2, y_1y_3, \cdots, y_1y_6$，则至少有三条同色，设为 y_1y_2, y_1y_3, y_1y_4. 如果这三条都是蓝色的，那么 B, y_2, y_3, y_4 的每两点连线都是红色的，点 B, y_2, y_3, y_4 符合要求，如果这三条都是红色的，考虑 $\triangle y_2y_3y_4$，因为三边中至少有一条是红色的，假定 y_2y_3 是红色的，则 B, y_1, y_2, y_3 的每两点连线都是红色的，点 B, y_1, y_2, y_3 符

合要求.

4·35　求最小正整数 n,使在任何二染色的 n 个顶点的完全图 K_n 中,总存在同色的 m 条线段,它们两两之间没有公共端点.

(中国国家集训队训练题,1991 年)

[解]　显然,$m=1$ 时,$n=2$.当 $m=2$ 时,$n=5$.事实上,在如图所示的二染色 K_4(实线表示蓝色,虚线表示红色)中,任何两条同色线段都有公共端点.但在二染色的 K_5 中,若所有线段都同色,当然有同色的两条线段没有公共点,否则,必有红蓝各 1 条线段有 1 个公共端点,设 A_1A_2 为红,A_2A_3 为蓝.可见,无论 A_4A_5 为何种颜色,都总有同色的两条线段没有公共端点.这就证明了 $m=2$ 时,所求的最小正整数 $n=5$.



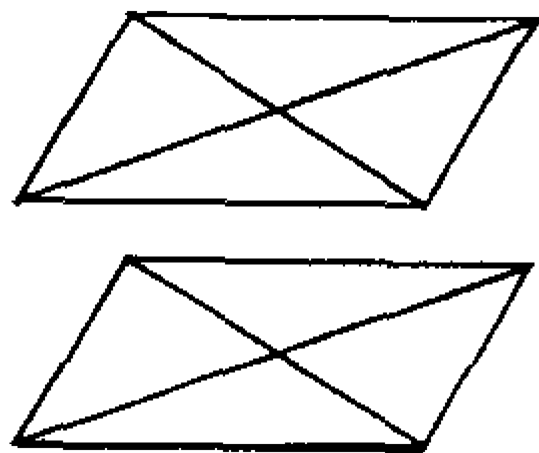
下面我们用归纳法来证明,对所有自然数 m,均有 $n=3m-1$.

上面我们已经证明了 $m=1,2$ 时命题成立.设命题于 $m=k$ 时成立.当 $m=k+1$ 时,若 K_{3k+2} 的所有边都同色,当然可以找到 $k+1$ 条线段满足要求.否则,必有 1 个顶点是 1 条红边和 1 条蓝边的公共端点.除去这两条边的 3 个端点,还余下 $3k-1$ 个顶点.由归纳假设知,以这 $3k-1$ 个顶点为顶点的完全子图 K_{3k-1} 中,存在同色的 k 条线段,两两没有公共端点.再加上前两条中与之同色的 1 条,便得到 $k+1$ 条线段,它们同色且两两没有公共端点.

另一方面,将 K_{3k+1} 中的顶点分成两组:A 组有 k 个顶点,B 组有 $2k+1$ 个顶点.将 B 组顶点间的线段都染成红色,其他的所有线段都染成蓝色.于是,无论是 $k+1$ 条红线段还是 $k+1$ 条蓝线段,其中总有两条线段有 1 个公共端点.这表明所求的最小自然数 $n=3k+2$,这就完成了归纳证明.

4·36　求最小正整数 n,使在任何二染色的 K_n 中,都存在 3 个单色三角形,它们两两之间没有公共边.

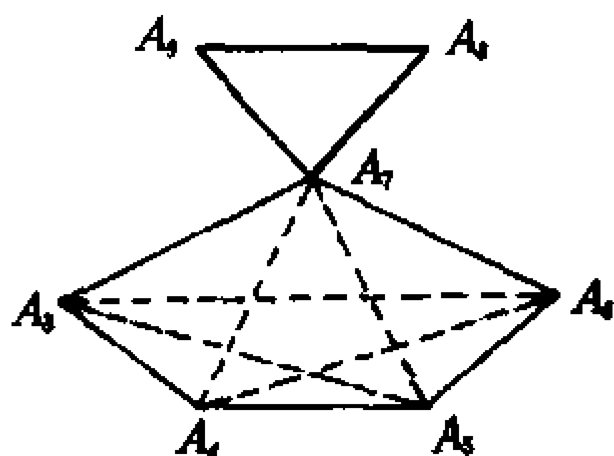
(中国国家集训队训练题,1991 年)



[解]　如图所示的二染色的 K_8 中有两个蓝 K_4,其余未画出的边全是红边.易见,图中没有红三角形而恰有 8 个蓝三角形.但任何 3 个蓝三角形中,总有两个三角形在同一个蓝 K_4 中,二者有 1 条公共

边.可见,所求的最小正整数 $n \geqslant 9$.

对于二染色的 K_9,设 $\triangle A_1A_2A_3$ 是其中的一个单色三角形.考察以 $\{A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9\}$ 为顶点的完全子图 K_6,其中必有单色三角形.设 $\triangle A_7A_8A_9$ 是蓝三角形.再考察以 $\{A_3,A_4,A_5,A_6,A_7\}$ 为顶点的 K_5,若其中有单色三角形,则加上前两个共 3 个单色三角形两两没有公共边.若其中没有单色三角形,则可分解为一红一蓝两个各有 5 条边的圈(见图).同理,在分别以 $\{A_3,A_4,A_5,A_6,A_8\}$,$\{A_3,A_4,A_5,A_6,A_9\}$ 为顶点的 K_5 中,只要有一个 K_5 中有单色三角形,问题就解决了.否则,两个 K_5 都可分解为一红一蓝两个各有 5 条边的圈.因为以 $\{A_3,A_4,A_5,A_6\}$ 为顶点的 K_4 的颜色已确定了,故必有 $A_3A_8,A_3A_9,A_6A_8,A_6A_9$ 都是蓝边.从而 $\triangle A_3A_7A_9$ 和 $\triangle A_6A_7A_8$ 都是蓝三角形.再加上开头的单色三角形 $A_1A_2A_3$ 即满足题中要求.

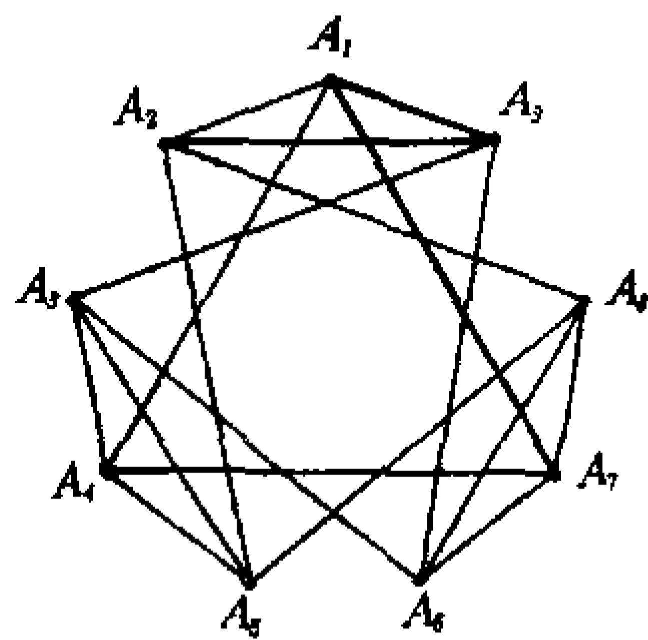


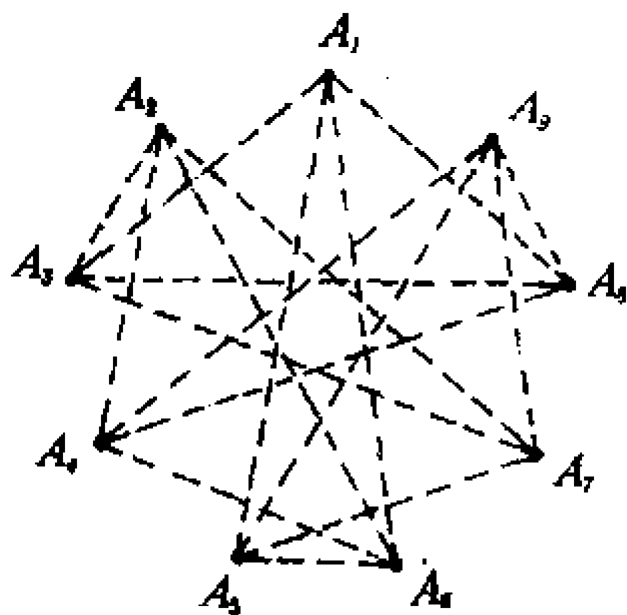
综上可知,所求的最小正整数 $n=9$.

4·37　求最小正整数 n,使当以任意方式将 K_n 二染色时,总存在两个单色三角形,二者恰有 1 条公共边.

(中国国家集训队训练题,1993 年)

[解]　在右图的 K_9 中,为清楚起见,我们把蓝线与红线分别画在两个图中.易见,图中有 6 蓝 6 红共 12 个单色三角形,图中的 36 条边恰好每边都是一个单色三角形的一条边,任何两个单色三角形都没有公共边.可见,所求的最小正整数 $n \geqslant 10$.





在二染色的 K_{10} 中,用计算异色角和异色三角形的方法不难算出,其中至少有 20 个单色三角形.每个三角形 3 条边,这些单色三角形至少有 60 条边.但 K_{10} 中的边数为 $C_{10}^2=45$,故必有两个单色三角形恰有 1 条公共边.

综上可知,所求的最小正整数 $n=10$.

4·38　一棱柱分别以五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 与 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 为上、下底,这两个五边形的每

一条边及每条线段 $A_iB_j(i,j=1,2,3,4,5)$ 均涂上红绿两色之一. 以棱柱顶点为顶点,以已涂色的线段为边的任何三角形的三边均不同色. 求证上、下两底的 10 条边同色.

(第 21 届国际数学奥林匹克,1979 年)

[证] 我们分两步用反证法来证明.

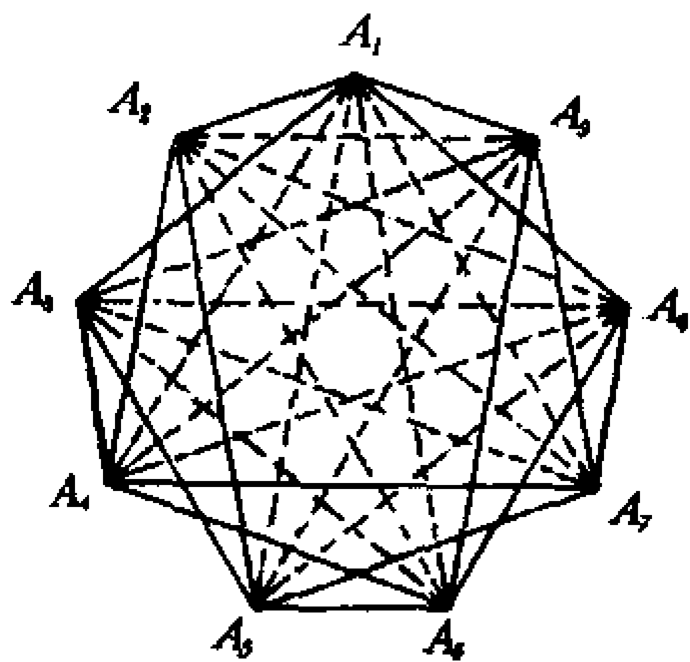
(1) 先证上、下底的各 5 条边同色. 若不然,设上底的 5 条边不同色,于是其中必有两条邻边异色. 不妨设 A_1A_2 为红边,A_1A_5 为绿边. 考察由 A_1 向下底各顶点引出的 5 条线段 $A_1Bj(j=1,2,3,4,5)$. 由抽屉原理知其中必有 3 条同色,而同色 3 条的另 3 个端点中又必有两个相邻,不妨设 A_1B_1,A_1B_2 都是红边. 于是 A_1A_2,A_1B_1,A_1B_2 3 条线段都是红的. 考察 3 条线段 A_2B_1,A_2B_2,B_1B_2. 若其中有一条红线段,则得到一个 3 边同为红色的三角形,矛盾. 若 3 条线段均为绿色,则构成一个 3 边同为绿色的三角形,矛盾. 同理可证,下底的 5 条边也同色.

(2) 再证上、下底必同色. 设上底为红色. 像(1) 中那样考察由 A_1 向下底引出的 5 条线段,则其中必有两条相邻线段同色,不妨设为 A_1B_1 和 A_1B_2. 若二者同为红色,则像(1) 中一样地又可导出矛盾. 故二者必同为绿色. 因为不存在 3 边同色的三角形,故知 B_1B_2 为红色,从而下底 5 条边全为红色,这就证明了上、下底的 10 条边同色.

4·39 在空间中给定 9 点,其中任何 4 点都不共面. 求最小自然数 n,使在给定点间任意连结 n 条线段并将每条线段都染上红蓝两色之一时,总存在一个各边同色的三角形.

(第 33 届国际数学奥林匹克,1992 年)

[解] 将 9 点依次记为 $A_1,A_2,\cdots,A_9$ 并将它们分成 5 组: $\{A_1\}$, $\{A_2,A_3\}$, $\{A_4,A_5\}$, $\{A_6,A_7\}$ 和 $\{A_8,A_9\}$. 若两点分别属于相邻两组(第 5 组与第 1 组也相邻),则在它们之间连一条蓝线(用实线表示);若两点分别属于不相邻的两组,则在它们之间连一条红线(图中用虚线表示);若两点属于同一组,则它们之间不连线. 这时,图中共有 32 条线但没有各边同色的单色三角形,故知所求的最小自然数 $n \geqslant 33$.



另一方面,当这 9 点间连有 33 条线段且每条线段都染有红蓝两色

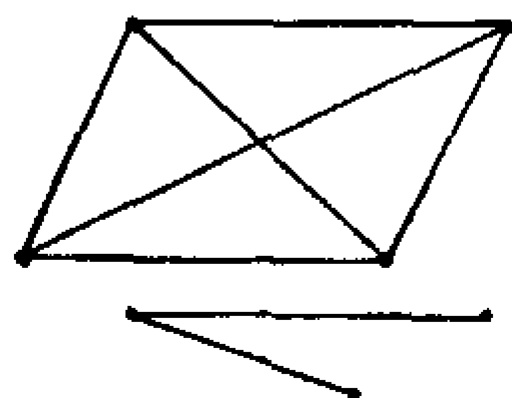
之一时,由于9个顶点的完全图 K_9 共有36条边,故知这时图中只少3条边.于是,我们可从9点中选取3点,使所少的3条边中每边都至少有一个端点是所选的3点之一.这样一来,除这3点之外的其余6点为顶点的子图是一个二染色的完全子图 K_6.从而其中必有单色三角形.

综上可知,所求的最小自然数 $n = 33$.

4·40　求最小正整数 n,使在任何二染色的 K_n 中,都存在具有相同颜色但没有公共边的两个单色三角形.

(中国国家集训队训练题,1991年)

[**解1**]　在右图所示的 K_7 中,没有画出的线段均为红色,已画出的是蓝色线段.易见,其中的任何两个蓝三角形或任何两个红三角形都有1条公共边.这表明所求的最小正整数 $n \geqslant 8$.



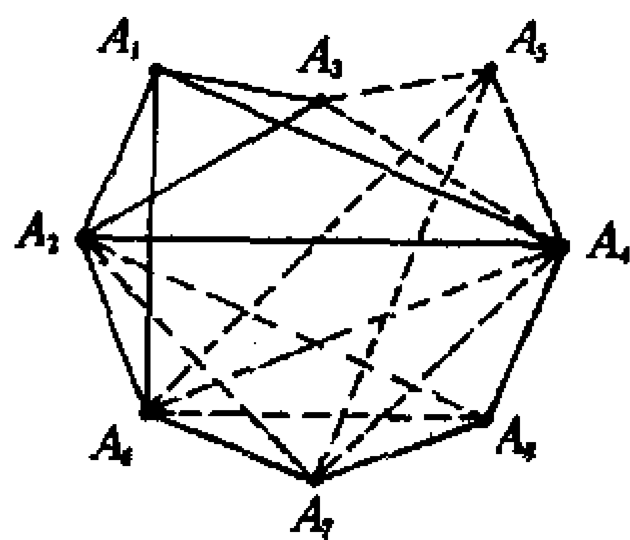
下面我们用反证法来证明二染色的 K_8 中一定存在满足题中要求的两个三角形.

设有一个二染色的 K_8,其中不存在满足题中要求的两个三角形.

由于二染色 K_8 中必有单色三角形,不妨设 $\triangle A_1A_2A_3$ 是蓝三角形.考察以 $\{A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8\}$ 为顶点的完全子图 K_6.由反证假设知其中不能有蓝三角形,故必有红三角形.不妨设这个红三角形与 $\triangle A_1A_2A_3$ 有1个公共顶点.若不然,则二者顶点间的9条连线中必有5条同色.设有5条红色.于是 A_1,A_2,A_3 中至少有1点向红三角形引出两条红线,从而得到与蓝 $\triangle A_1A_2A_3$ 有1个公共顶点的红三角形.设红三角形是 $\triangle A_3A_4A_5$.

考察以 $\{A_2,A_4,A_6,A_7,A_8\}$ 为顶点的二染色的 K_5.由反证假设知其中没有单色三角形.从而它可分解为一红一蓝两个各有5条边的圈(如图).

考察以 $\{A_1,A_2,A_4,A_6,A_7,A_8\}$ 为顶点的二染色的 K_6.由反证假设知其中不能有红三角形,故其中有两个蓝三角形且均与蓝 $\triangle A_1A_2A_3$ 有一条公共边,当然只能是 A_1A_2.由此可知,A_1A_4,A_1A_6 为蓝边.



再考察以 $\{A_2,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8\}$ 为顶点

的 K_6.类似地可得出,A_5A_6,A_5A_7 为红边.最后考察边 A_3A_6.若它为蓝边,则 $\triangle A_2A_3A_6$ 和 $\triangle A_2A_1A_4$ 为两个蓝三角形满足要求,矛盾;若 A_3A_6 为红边,则 $\triangle A_3A_4A_6$ 和 $\triangle A_4A_5A_7$ 为满足要求的两个红三角形,矛盾.从而证明了二染色的 K_8 中必有两个满足题中要求的三角形.

综上可知,所求的最小正整数 $n = 8$.

[解 2] 由解 1 开头的例子知,只须证明在二染色的 K_8 中必存在两个满足题中要求的三角形.为此,我们先证如下的引理.

引理 在二染色的 K_8 中,至少存在 8 个不同的单色三角形.

引理的证明 因为 K_8 中共有 $C_8^3 = 56$ 个三角形,故只须证明其中至多有 48 个异色三角形(即 3 边不同色的三角形).

我们将两边异色的角称为异色角.显然,每个异色三角形中恰有两个异色角.

设点 A_i 引出的红线数为 r_i,于是引出的蓝线数为 $7 - r_i$,$i = 1, 2, \cdots, 8$.因此,以 A_i 为顶点的异色角的个数为 $r_i(7 - r_i)$.从而 K_8 中异色角的总数为 $\sum_{i=1}^{8} r_i(7 - r_i)$.所以异色三角形的总数不超过

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} r_i(7 - r_i) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} 3 \times 4 = 48,$$

当且仅当每点引出红线和蓝线数都是3或4时,异色三角形数才能等于48.

回到题目的证明.由引理,二染色的 K_8 中至少有 8 个单色三角形.

(1) 设 K_8 中有 5 个单色三角形同色.不妨设都是蓝色.如果这 5 个蓝三角形两两都有公共边,则 5 个蓝三角形必有一条公共边.设这 5 个三角形为 $\triangle A_1A_2A_3$,$\triangle A_1A_2A_4$,$\triangle A_1A_2A_5$,$\triangle A_1A_2A_6$ 和 $\triangle A_1A_2A_7$.考察以 $\{A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}$ 为顶点的 K_5.若其中有 1 条蓝边,设为 A_3A_4,则 $\triangle A_1A_3A_4$ 和 $\triangle A_1A_2A_5$ 是两个蓝三角形且二者没有公共边,矛盾;若其中全是红边,当然存在两个红三角形,二者没有公共边,矛盾.这表明 K_8 中若有 5 个单色三角形同色,其中必有两个没有公共边.

(2) 设 K_8 中恰有 4 红 4 蓝 8 个单色三角形.如果 4 个蓝三角形有一条公共边,设为 A_1A_2,则顶点 A_1 引出 5 条蓝边.由引理证明最后的说

明即知,这时 K_8 中不可能只有 8 个单色三角形,矛盾.因此,若 4 个蓝三角形两两都有公共边,则它们构成一个蓝 K_4.4 个红三角形也是如此.

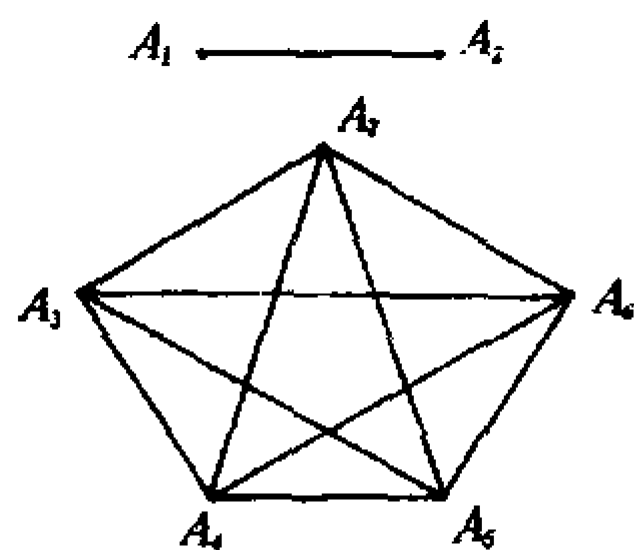
若结论不成立,K_8 中恰有 4 红 4 蓝 8 个单色三角形时,必有一个红 K_4 和一个蓝 K_4.显然,二者至多有 1 个公共顶点.易见,无论有否公共顶点,总可以从红 K_4 和蓝 K_4 中各取出 1 个三角形,二者没有公共顶点.于是又可像解 1 开头那样得到一个新的单色三角形,此与恰有 8 个单色三角形矛盾.这就证明了二染色 K_8 中必有两个三角形满足题中要求.

综上可知,所求的最小正整数 $n = 8$.

4·41 求最小正整数 n,使在任何二染色的 K_n 中,都存在 m 个两两没有公共顶点的单色三角形.

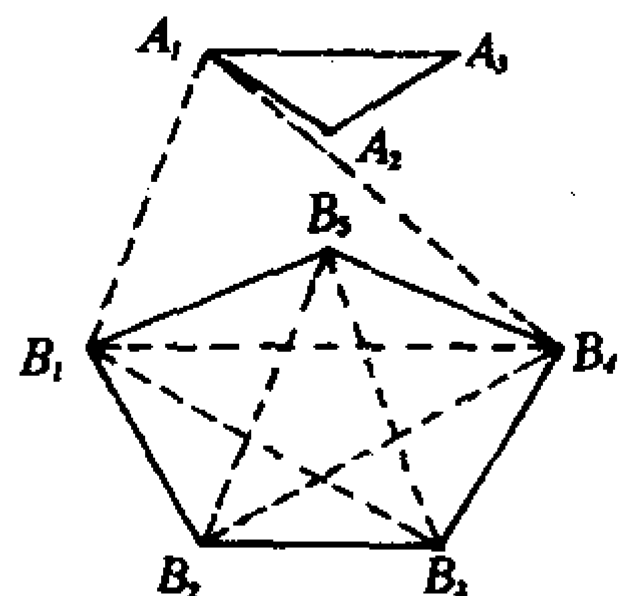
(中国代表队模拟考试题,1991 年)

[解] 显然,当 $m = 1$ 时,$n = 6$.下面我们来考察当 $m = 2$ 时,最小正整数 n 是几.这时,图中所示的二染色 K_7 中,仅仅画出了蓝线,其余未画出的均为红线.易见,图中没有红三角形,而 10 个蓝三角形都在下面的蓝 K_5 中,当然任何两个都有公共顶点.由此可知,当 $m = 2$ 时,所求的最小正整数 $n \geqslant 8$.



对于二染色的 K_8,不妨设 $\triangle A_1A_2A_3$ 是其中的蓝三角形.若以另外 5 点 $\{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$ 为顶点的 K_5 中还有单色三角形,问题就解决了,故只须再讨论其中没有单色三角形的情形.这时,二染色的 K_5 可以分解为一红一蓝两个各有 5 条边的圈(如图).此外,在以 $\{A_i, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$ 为顶点的二染色 K_6 中,必有两个以 A_i 为公共顶点的单色三角形,$i = 1,2,3$. 3 个 K_6 中共有 6 个单色三角形.

(1) 设其中有 1 个红三角形,不妨设为 $\triangle A_1B_1B_4$.考察以 $\{A_2, A_3, B_2, B_3, B_5\}$ 为顶点的 K_5.如果其中有单色三角形,则与 $\triangle A_1B_1B_4$ 便是满足要求的一对.否则,这个二染色 K_5 中每个顶点都引出两条红边和两条蓝边.但 B_5B_2,B_5B_3 已为红边,故 B_5A_2,B_5A_3 应为蓝边,这导



致 $\triangle B_5A_2A_3$ 为蓝三角形,矛盾.

(2) 设 6 个单色三角形都是蓝色的,于是每个 K_6 中的两个蓝三角形都有 1 条公共边. 设第 1 个 K_6 中的两个蓝三角形是 $\triangle A_1B_1B_2$, $\triangle A_1B_2B_3$,即 B_2 是两个蓝三角形的公共顶点. 如果后两个 K_6 中的蓝三角形对中之一不以 B_2 为公共顶点,则必存在两个无公共顶点的蓝三角形;如果后两对也都以 B_2 为公共顶点,即 $\triangle A_2B_1B_2$, $\triangle A_2B_2B_3$ 和 $\triangle A_3B_1B_2$, $\triangle A_3B_2B_3$ 均为蓝三角形. 这样一来, $\triangle A_1B_1B_2$ 和 $\triangle A_2A_3B_3$ 便是两个无公共顶点的蓝三角形.

至此,我们证明了当 $m=2$ 时,所求的最小正整数 $n=3m+2=8$. 对于一般的 m;我们用归纳法来证明同样的结论成立.

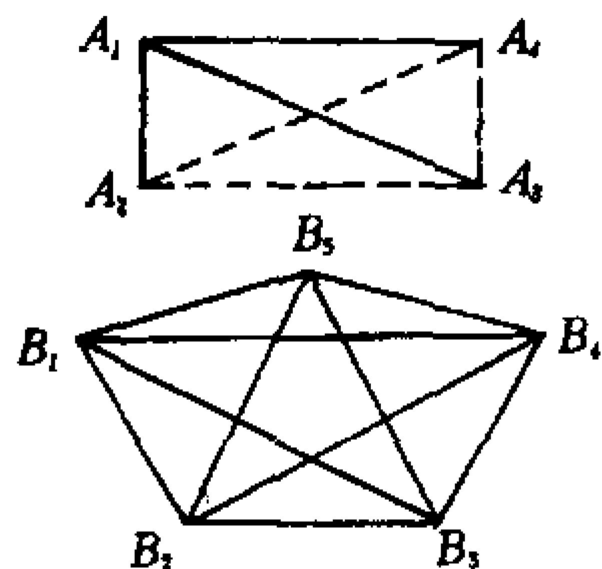
设当 $m=k$ 时,所求的最小正整数 $n=3m+2$. 当 $m=k+1$ 时,二染色的 K_{3k+5} 中当然存在一个单色三角形. 除了这个三角形的3个顶点之外,还有 $3k+2$ 个顶点. 由归纳假设知,以后 $3k+2$ 个顶点为顶点的 K_{3k+2} 中有 k 个两两没有公共顶点的单色三角形. 加上开头的 1 个,共有 $k+1$ 个两两没有公共顶点的单色三角形.

另一方面,像开头一样,由 $3m+1$ 个顶点中取两个顶点 A_1 和 A_2 并将 A_1A_2 染成蓝色. 然后把以其余顶点为顶点的完全子图 K_{3m-1} 全部染成蓝色,其余各边均为红色. 于是这个 K_{3m+1} 中没有红三角形,蓝三角形全在子图 K_{3m-1} 中,故其中任何 m 个单色三角形中必有两个三角形至少有 1 个公共顶点. 即这个 K_{3m+1} 中不存在 m 个两两没有公共顶点的单色三角形. 所以,当 $m\geqslant 2$ 时,所求的最小正整数 $n=3m+2$;当 $m=1$ 时, $n=6$.

4·42 求最小正整数 n,使在任何二染色的有 n 个顶点的完全图 K_n 中,都存在具有相同颜色的两个没有公共顶点的单色三角形.

(中国国家集训队测验题,1991 年)

[解] 首先,让我们来看右图所示的二染色的 K_9,其中虚线表示红色,实线表示蓝色,且没有画出的线都是虚线. 易见,以 $\{B_1,B_2,B_3,B_4,B_5\}$ 为顶点的蓝 K_5 中有 10 个蓝三角形,其中任何两个都至少有 1 个公共顶点. 图中再无别的蓝三角形. 此外,图中任何一个红三角形必有 1 条边是 3 条

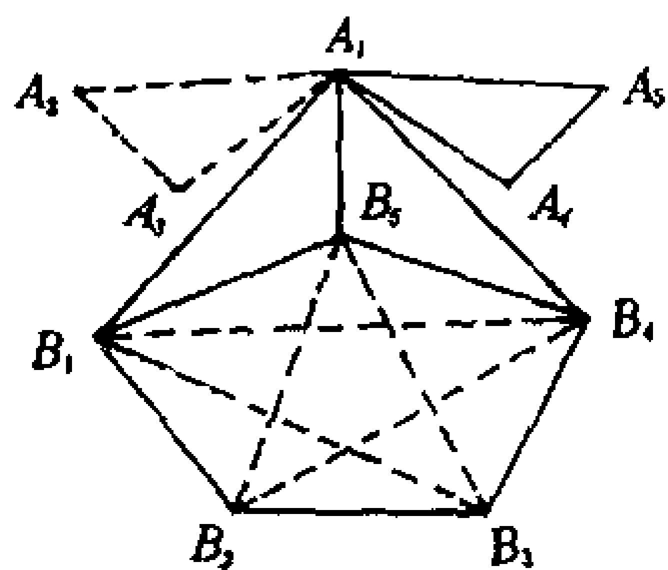


线段$\{A_2A_3, A_3A_4, A_4A_2\}$之一.从而任何两个红三角形也都至少有1个公共顶点.这说明所求的最小正整数$n \geqslant 10$.

下面我们来证明,在二染色的K_{10}中,总存在满足题中要求的两个单色三角形.设这个结论不成立.

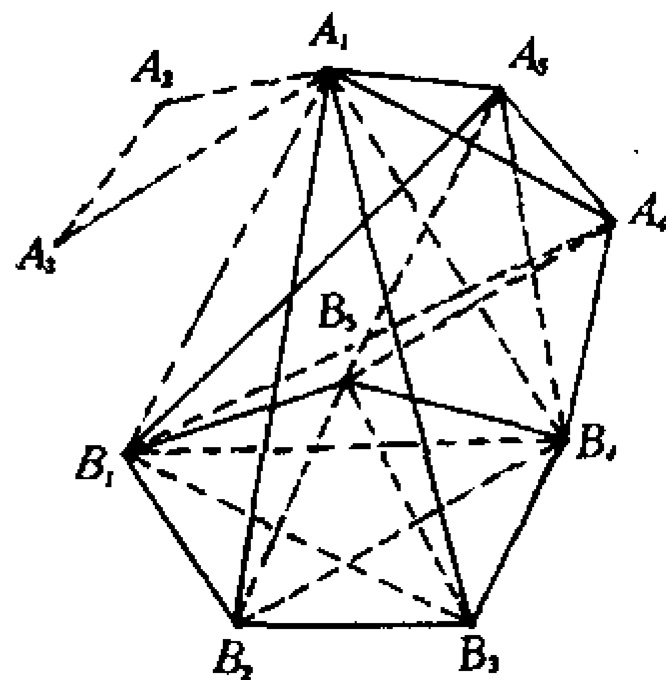
(1) 因为在二染色的K_6中必存在单色三角形,K_{10}中当然更是如此,设$\triangle A_1A_2A_3$是单色三角形.于是在以$\{A_4, A_5, \cdots, A_{10}\}$为顶点的$K_7$中又应存在一个单色三角形,不妨设为$\triangle A_4A_5A_6$.这两个单色三角形没有公共顶点,故必为一红一蓝.不妨设$\triangle A_1A_2A_3$为红,$\triangle A_4A_5A_6$为蓝.考察这两个三角形的顶点之间的9条连线.由抽屉原理知其中必有5条同色,不妨设为蓝色.这5条蓝线是从A_1, A_2, A_3分别引出的,故其中必有一个顶点引出两条蓝线,设为A_1A_4, A_1A_5,于是$\triangle A_1A_4A_5$为蓝三角形,它与红$\triangle A_1A_2A_3$恰有1个公共顶点A_1.这样一来,由反证假设便知,以另外5个顶点(为观察方便,改变记号为)$\{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$为顶点的二染色完全子图$K_5$中,没有任何单色三角形,故这个$K_5$必可分解为一红一蓝两个圈,每个圈恰有5条边.考察以$\{A_1, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$为顶点的完全子图$K_6$.这时,其中必有两个单色三角形.显然,二者以$A_1$为公共顶点.

(2) 设这两个单色三角形同色,不妨设为蓝色,则二者必有1条公共边.设这两个蓝三角形是$\triangle A_1B_1B_5, \triangle A_1B_5B_4$(见图).考察以$\{B_2, B_3, B_4, A_4, A_5\}$为顶点的完全子图$K_5$.由反证假设知其中没有单色三角形,从而它又可分解为一红一蓝两个圈,每个圈恰有5条边.不妨设A_4B_2, A_5B_4为蓝边,于是$A_4B_3, A_4B_4, A_5B_2, A_5B_3$为红边.同理,以$\{B_1, B_2, B_3, A_4, A_5\}$为顶点的完全子图$K_5$也可分解为一红一蓝两个圈,每个圈恰有5条边.因而,顶点B_3恰在此K_5中引出两条红线.但上面已证B_3B_1, B_3A_4, B_3A_5都是红边,矛盾.



(3) 由(2)知两个单色三角形必为异色.不妨设$\triangle A_1B_2B_3$为蓝而$\triangle A_1B_1B_4$为红.考察以$\{A_4, A_5, B_1, B_4, B_5\}$为顶点的完全子图$K_5$.由反证假设知其中没有单色三角形,所以它可以分解为一红一蓝两个各有5边的圈.不妨设A_5B_1, A_4B_4为蓝边而$A_4B_1, A_4B_5, A_5B_4, A_5B_5$

为红边(如图). 若 A_5B_2 为红边,则 $\triangle A_5B_2B_4$ 和 $\triangle A_1A_2A_3$ 为两个无公共顶点的红三角形,此与反证假设矛盾,故 A_5B_2 为蓝边. 若 A_4B_3 为红边,则 $\triangle A_4B_3B_5$ 与 $\triangle A_1A_2A_3$ 为两个无公共顶点的红三角形,矛盾,故 A_4B_3 为蓝边. 这时,$\triangle A_4B_3B_4$ 与 $\triangle A_1B_2A_5$ 为两个无公共顶点的蓝三角形,此与反证假设矛盾.

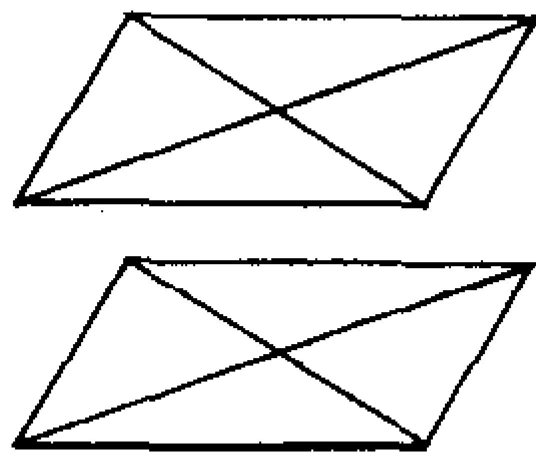


综上所述,我们证明了在二染色的 K_{10} 中总存在满足要求的两个单色三角形. 所以,所求的最小正整数 $n = 10$.

4·43　求最小自然数 n,使在二染色的 K_n 中,总存在两个单色三角形,二者恰有 1 个公共顶点.

(中国国家集训队测验题,1995 年)

[解]　将 8 阶完全图 K_8 染色如图所示,其中画出了蓝线,未画出的线全是红线. 易见,图中共有 8 个蓝三角形而没有红三角形,且任何两个蓝三角形或有公共边或无公共顶点. 故知所求的最小自然数 $n \geqslant 9$.



为证二染色的 K_9 中必有两个单色三角形恰有 1 个公共顶点,先证下面的引理.

引理　在二染色的 K_9 中,至少有 12 个不同的单色三角形.

引理的证明　设 K_9 中的 9 个顶点为 $A_1, A_2, \cdots, A_9$,其中自顶点 A_i 引出 r_i 条红线和 $8 - r_i$ 条蓝线. 我们称从一个顶点引出的一条红线与一条蓝线所构成的角为异色角. 于是以 A_i 为顶角的异角的个数为 $r_i(8 - r_i)$. 我们称既有红边又有蓝边的三角形为异色三角形. 显然,每个异色三角形恰有两个异色角. 所以,二染色的 K_9 中异色三角形的个数为

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9} r_i(8 - r_i) \leqslant \frac{1}{2} \times 9 \times 16 = 72,$$

即异色三角形的个数不多于 72 个. 因为 K_9 中三角形的总数为 $C_9^3 = \frac{1}{6} \times 9 \times 8 \times 7 = 84$,所以 K_9 中至少有 12 个单色三角形. 引理证毕.

由引理知,二染色的 K_9 中至少有 12 个单色三角形. 12 个三角形共

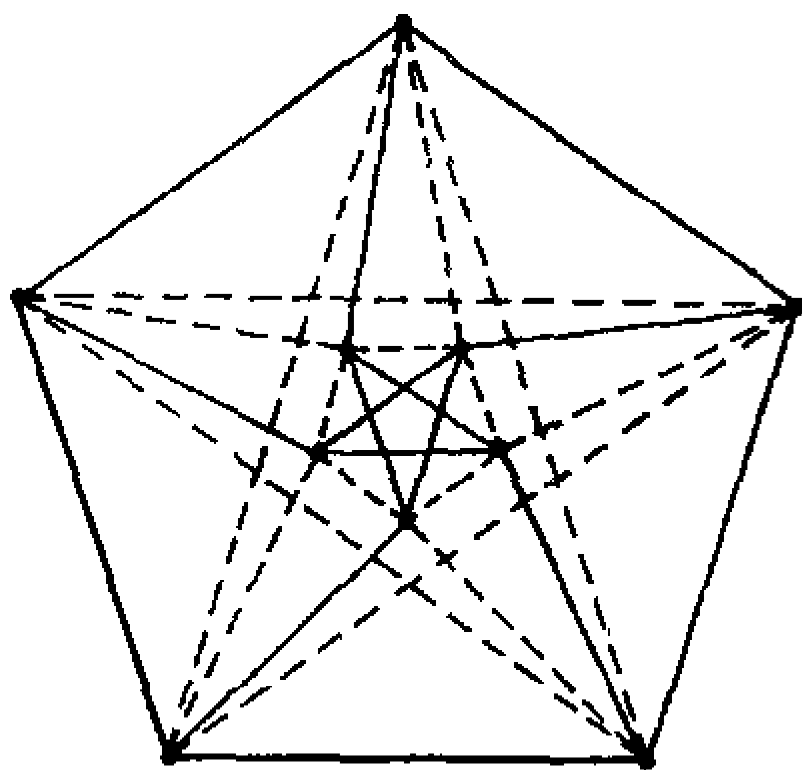
有36个顶点.由抽屉原理知,图中必有1个顶点是4个单色三角形的公共顶点.若其中任何两个单色三角形都不是恰有1个公共顶点,则二者必有公共边.因而4个单色三角形有1条公共边且4个单色三角形同色.不妨设$\triangle A_1A_2A_3$,$\triangle A_1A_2A_4$,$\triangle A_1A_2A_5$,$\triangle A_1A_2A_6$都是蓝三角形.考察以A_3,A_4,A_5,A_6为顶点的二染色的K_4.若其中有1条蓝边.不妨设为A_3A_4,则$\triangle A_1A_3A_4$和$\triangle A_1A_2A_5$都是蓝三角形且恰有1个公共顶点A_1;若其中全是红边,则红$\triangle A_3A_4A_5$和蓝$\triangle A_1A_2A_3$恰有1个公共顶点A_3.这就证明了二染色的K_9中必有两个单色三角形满足题中要求.

综上可知,所求的最小自然数$n = 9$.

4·44　求最小自然数n,使在有10个顶点,n条边且二染色的简单图中,总存在单色三角形或单色四边形.

(中国国家集训队测验题,1996年)

[解]　右图中有10个顶点和30条边,其中红边和蓝边各15条.易见,图中既无单色三角形也无单色四边形.故知所求的最小自然数$n \geqslant 31$.



下面证明当$n = 31$时,图中必存在单色三角形或单色四边形.这时,由抽屉原理知,图中总有16条边同色.于是只须证明,在有10个顶点和16条边的简单图中,总存在三角形或四边形.

由于图中16条边有32个端点,故由抽屉原理知必有1个顶点至多引出3条线.不妨设顶点A_{10}引出3条线,于是除A_{10}外的9点间共有13条边.13条边有26个端点,由抽屉原理又知必有1个顶点至多引出2条线.不妨设A_9引出2条线.于是以$\{A_1,A_2,\cdots,A_8\}$为顶点的子图中有11条边.11条边有22个顶点,由抽屉原理知必有1个顶点至多引出2条线.不妨设A_8引出2条线.于是以$\{A_1,A_2,\cdots,A_7\}$为顶点的子图中有9条边.类似地可设以$\{A_1,A_2,\cdots,A_6\}$为顶点的子图中有7条边.

考察以$\{A_1,A_2,\cdots,A_6\}$为顶点的子图,其中有7条边.这时,图中必有圈.若边数最多的圈有6条边,则第7条边无论连结哪两个顶点,总会形成三角形或四边形.若边数最多的圈有5条边,则另两条边或者都

出自圈外的顶点，或者至少有 1 条是五边形的对角线.无论哪种情形都导致三角形或四边形.若边数最多的圈至多有 4 条边，结论显然成立.

综上可知，所求的最小自然数 $n = 31$.

4·45 在一个凸多边形中作出所有对角线，将每条边和每条对角线都染上 k 种颜色之一，使得不存在以多边形顶点为顶点的单色封闭折线.问满足上述条件的多边形最多有多少个顶点？

（第 24 届全苏数学奥林匹克，1990 年）

[解] 设多边形的顶点数为 n，于是 n 边形共有$C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$ 条边和对角线.其中若有 n 条线段涂有同一种颜色，则由图论定理知其中必有一个圈，即单色封闭折线，与已知矛盾，故知每种颜色的线段条数都不超过 $n-1$.从而有

$$\frac{1}{2}n(n-1) \leqslant k(n-1).$$

由此解得 $n \leqslant 2k$.

下面指出，当 $n = 2k$ 时，满足要求的涂色法存在.取正 $2k$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2k}$，并将折线 $A_1A_{2k}A_2A_{2k-1}\cdots A_kA_{k+1}$ 涂上第一种颜色，将由这条折线旋转$\frac{i\pi}{k}$ 所得到的折线涂上第$i+1$种颜色，$i = 1,2,\cdots,k-1$.不难看出，每条线段都恰被染上 k 种颜色之一，且不存在单色的封闭折线.

综上可知，满足条件的多边形最多有 $2k$ 条边.

4·46 设有空间中若干个点，其中任何 4 点都不共面，某些点对间有线段相连，这样构成一个图.如果最少要用 n 种颜色给这些点染色，使每点都染上 n 种颜色之一，才能使得任何两个同色点之间都没有线段相连，则称这个图是 n 色图.求证对于任意 $n \in N$，都存在一个不含三角形的 n 色图.

（中国国家集训队选拔试题，1993 年）

[证 1] 对 n 用数学归纳法来证明.当 $n = 1$ 时结论显然成立.设 $n = k$ 时结论成立，相应的 n 色图为G，G 的顶点个数为m.作 k 个与G相同的图 $G_1, G_2, \cdots, G_k$.从 $G_1, G_2, \cdots, Gk$ 中各任取一点组成一个k点组，共有 m^k 种不同取法.在 $G_1, G_2, \cdots, G_k$ 的顶点之外另选m^k 个不同点，使得所有点中的任何 4 点都不共面.规定这 m^k 个点与前面的m^k 个

k 点组一一对应,并且每点都与它所对应的 k 点组中的k 个点各连一条线段.于是得到一个图 G^*.

下面证明 G^* 是 $k+1$ 色图.首先将 $G_1,G_2,\cdots,G_k$ 都按G 的染色方式染色,共用 k 种不同颜色.然后将后取的 m^k 个点都染上第$k+1$ 种颜色.显然,图中没有三角形且每条边的两个端点都不同色且图中共用了 $k+1$ 种颜色.

因为 $G_1,G_2,\cdots,G_k$ 都是 k 色图,所以不论怎样给它们染色,总可以从这 k 个图中各取1点,使所取的 k 个点互不同色.由构造过程知,这个 k 点组对应于一点A 且A 与这k 个点间都有线相连,于是点 A 只能染上与 k 点组中已有的k 种颜色都不同的另一种颜色.这表明 G^* 不能是 k 色图.

综上可知,G^* 为 $k+1$ 色图.这就完成了归纳证明.

[**证 2**] 对 n 用数学归纳法来证明.当 $n=1,2$ 时结论显然成立.

设存在不含三角形的 k 色图G_k,$k\geqslant 2$.让我们来构造不含三角形的 $k+1$ 色图 G_{k+1}.

设 G_k 有 m 个顶点 $A_1,A_2,\cdots,A_m$.再取 $m+1$ 个新顶点 A'_1,$A'_2,\cdots,A'_m,A'_{m+1}$,使这 $2m+1$ 个顶点中的任何 4 点都不共面.对于每个 $i(1\leqslant i\leqslant m)$,将 A'_i 与A_i 的所有邻点都连结起来,然后再将 A'_i 与 A'_{m+1} 连结起来.这样得到的图记为 G_{k+1}.

由于 G_k 不含三角形,并且在构造 G_{k+1} 的过程中,G_k 的各点之间没有增加新的连线,所以,G_{k+1} 中不含3个顶点都属于 G_k 的三角形.又因 $A_1',A_2',\cdots,A'_m,A'_{m+1}$ 中任一点的两个邻点间都没有连线,所以 G_{k+1} 中不含至少有1个顶点属于$\{A'_i\mid i=1,2,\cdots,m+1\}$ 的三角形.可见,G_{k+1} 中不含任何三角形.

因 G_k 是k 色图,故可用k 种不同颜色为G_k 的顶点进行满足题中要求的染色.然后对每个 $A'_i(1\leqslant i\leqslant m)$,都染上与 A_i 相同的颜色.最后将 A'_{m+1} 染上第 $k+1$ 种颜色.这样,图 G_{k+1} 中共有 $k+1$ 种颜色且任何两个同色点间都无线相连.

如果 G_{k+1} 是 k 色图,则因 A'_{m+1} 与 $A_1',A_2',\cdots,A'_m$ 间都有线相连,故 $A_1',A_2',\cdots,A'_m$ 至多染有$k-1$ 种颜色.但 G_k 上恰用k 种颜色,故 G_k 上至少有1种颜色 α 与$A_1',A_2',\cdots,A'_m$ 上的颜色都不同.将颜色为 α 的所有顶点A_i 都改变为A'_i 的颜色,则 G_k 的新染色法仅用了$k-1$

种颜色且仍满足题中要求，此与 G_k 为 k 色图矛盾.

综上可知，G_{k+1} 为 $k+1$ 色图. 这就完成了归纳证明.

4·47　在某国的一些城市之间辟有空中直达航线，求证其中必有两个城市，与二者直接通航的城市数目相同.

（第 28 届莫斯科数学奥林匹克，1965 年）

［证］　设辟有空中直达航线的城市共有 n 个，于是每个城市至少有一条航线，至多有 $n-1$ 条航线. 由抽屉原理知其中必有两个城市的航线数相同，亦即与这两个城市直接通航的城市数相同.

4·48　怎样用最少数量的航空线路连结 50 个城市，才能使得从一个城市到另一个城市的旅行都至多需乘两次（换乘一次）飞机？

（第 31 届莫斯科数学奥林匹克，1968 年）

［解］　固定一个城市，并将另外 49 个城市中的每个城市都用一条航线与该市相连，便满足题中要求.

另一方面，将 50 个城市都连结起来，至少要 49 条航线. 故知最少要有 49 条航线.

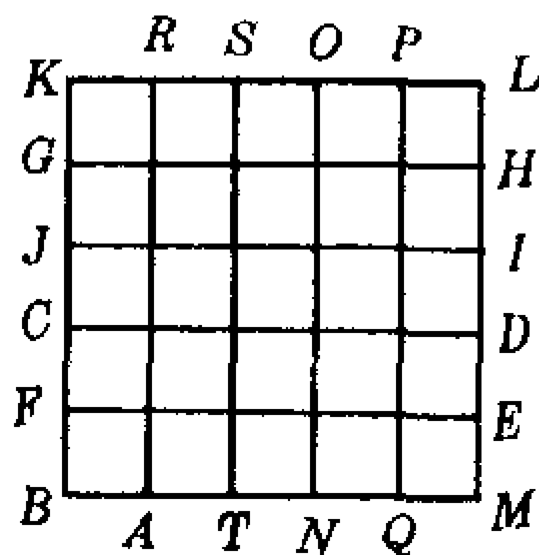
4·49　在 X 城的地铁线路中，从任何一个车站乘车可以到任何另一个车站. 试证可以将其中一个车站关闭修理，使得列车不能通过此站，但自其他任何车站仍可乘车到另外任何车站.

（第 36 届莫斯科数学奥林匹克，1973 年）

［证］　我们将相邻两个车站之间的线路称为一段. 固定一个车站 A，由其他任何一个车站 B 到 A 所经过的最少段数称为 B 与 A 的距离. 将与 A 距离最远的车站之一关闭修理即满足题中要求.

4·50　某城市的街道平面图是一个 5×5 的方格图表，其中 A 处有一部扫雪机，求扫遍所有街道并最终回到出发点的最短路线的长度.

（第 52 届莫斯科数学奥林匹克，1989 年）



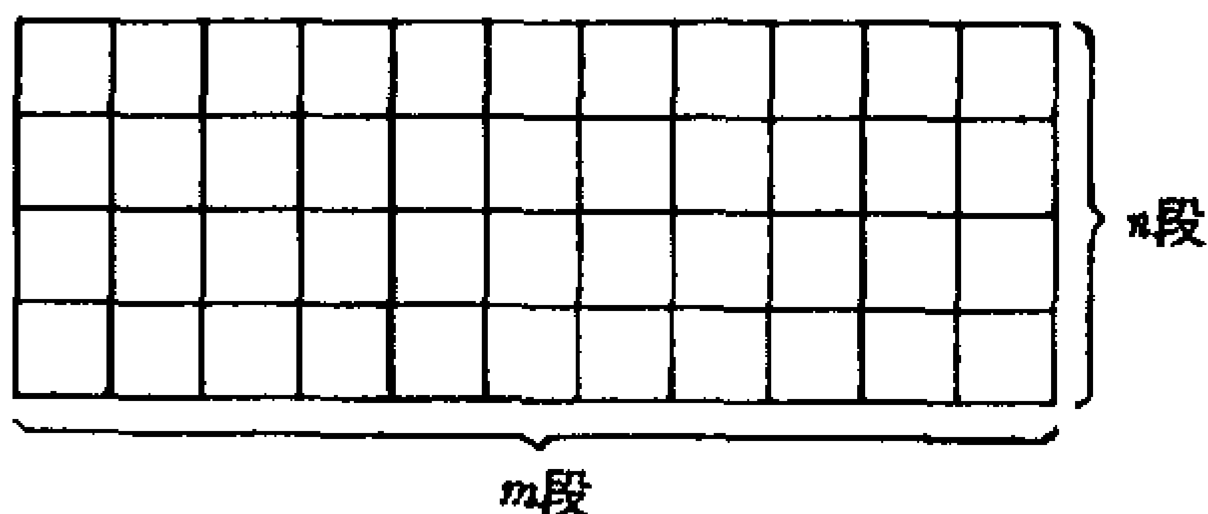
［解］　显然，图中共有 60 段长度为 1 的线段，但有 16 个奇顶点，即方格表中除了 4 个角点外，其余的 16 个边界结点. 由于可将它们分成 8 对，故至少有 8 段路要重复走两次. 所以，任何一条扫遍街道的回路的长度至少为 68.

另一方面，当沿着折线 $ABCDEFGHIJKLMNOPQARSTA$ 扫雪时，所走路线的长度恰为 68. 故知最短路线的长度为 68.

4·51 矩形城市恰好有 m 段长和 n 段宽(如图)，一个妇女住在城市的西南角，工作在东北角，她每天步行去工作，但是在任何给定的行程上，她确信她的路线不包含任何交叉点两次，证明她所能采取的路线数目 $f(m,n)$ 满足 $f(m,n)\leqslant 2^{mn}$.

(第 9 届加拿大数学奥林匹克，1977 年)

[证] 各条可容许的路线把所有方格的集合分成两个不相交的子集(其中之一可能是空集，例如一直往北，然后再一直往东的路线).



所以，可容许的路线数目 N 小于或等于一切方格的子集的个数.

因为一共有 mn 个方格，所以一切方格的子集的个数为 2^{mn}.

因而有 $N=f(m,n)\leqslant 2^{mn}$.

事实上，当 m 和 n 都大于 1 时，等号不成立. 因为有某些子集不能和可容许的路线对应.

4·52 某国有若干个城市，在一些城市之间辟有单向飞行的航线. 已知从任何一个城市出发，都不能经过中转而到达每个城市至少 1 次，求证可以将全国的城市分成 A，B 两组，使得从 B 组的任何一个城市出发，都不能通过这些航线而飞抵 A 组中的某个城市.

(第 18 届全俄数学奥林匹克，1992 年)

[证] 设 b 是辟有单向飞行的城市之一. 我们将由 b 出发，通过这些单向航线(包括中转)所能抵达的所有城市算作 B 组(包括 b)，而把所有其他城市算作 A 组. 因从 b 出发不能到遍所有城市，故 A 非空且显然由 B 组任何城市出发都不能到达 A 组某市，否则由 b 出发亦能到达，矛盾.

4·53 一条马路上有 6 个车站，今有一辆汽车由 a_1 驶向 a_6，沿途各站可自由上下乘客，但此辆汽车在任何时候至多可载客 5 人. 试证：在此 6 站中必定有两对(四个不同的)车站 $A_1,B_1;A_2,B_2$ 使得没有乘客在 A_1 站上而且在 B_1 站下(A_1 在 B_1 之前)，也没有乘客在 A_2 站上而

且在 B_2 站下(A_2 在 B_2 之前).

(中国北京市数学竞赛,1957 年)

[证] 令 C_{kl} 表示在 a_k 站上而在 a_l 站下的乘客人数,则所有的 C_{kl} 如下

$$\begin{array}{cc|ccc|}
C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\
 & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\
 & & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\
\hline
 & & & C_{45} & C_{46} \\
 & & & & C_{56}
\end{array}$$

显然,我们只须证明在这15个数中可以找到两个数0,而且这两个0不在同一行或同一列中即可(不在同一行说明上车站不同,不在同列说明下车站不同).

注意到表中虚线内的 C_{kl},这些数(共9个)表示汽车从车站 a_3 开出之后还未到 a_4 站时,车上的人数.

由于有9个数,而车上只能载5个人,所以其中至少有4个为0.这4个0不能在同一行也不能在同一列(因为每行,每列都只有三个数).

因而可以找到不在同一行也不在同一列的两个0,即 C_{pq},C_{rs}.于是 a_p,a_q;a_r,a_s 即为题中所求的 A_1,B_1;A_2,B_2.

4·54 某国共有1985个机场,从每个机场都飞起一架飞机,并且都降落在离原来机场最远的一个机场.问能否出现这样的情况,即所有1985架飞机全都降落在某50个机场中?(可以认为地面是平面,飞行皆沿直线且每两个机场之间的距离都互不相等.)

(第48届莫斯科数学奥林匹克,1985年)

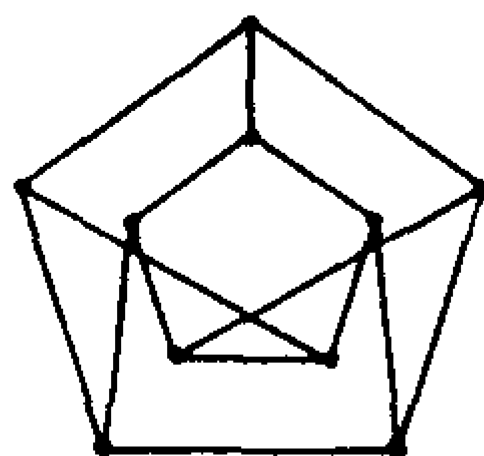
[解] 设有一个正50边形,每个顶点处都有1个机场,其余的1935个机场都在形内.于是,当每个机场飞起一架飞机时,每个顶点的飞机都飞往相对顶点处的机场;从内部机场飞起的飞机一定飞往某顶点的机场.可见,所有飞机都飞往正50边形顶点处的50个机场.只要适当调整机场的位置,使它们之间的距离互不相等就行了.

4·55 某国建立了这样的航空网:任何一个城市至多与另外3个

城市有航线且从任一城市到另外的任一城市至多需要换乘一次.问这个国家最多有多少个城市?

(第3届全苏数学奥林匹克,1969年)

[解] 从一个城市A至多可以到达3个城市,这3个城市中的每个至多与另外的两个城市有航线.可见全国至多有10个城市.



右图中有10个城市和15条航线,每个城市恰与3个城市有航线且满足至多换乘一次的要求.故知所求的最大值为10.

4·56 设有两个国家,一个是寻常的国家,另一个是它的镜子国.对于寻常国家中的每一个城市,镜子国中都有一个城市与它对应,反过来也是一样.已知当寻常国家中的某两个城市之间有铁路连接时,在镜子国中相应的两个城市之间没有铁路连接;而对寻常国中的任意两个无铁路连接的城市,在镜子国中相应的两个城市之间却一定有铁路连接.设在寻常国中有两个城市A和B,女孩阿莉莎由A城到B城,至少要经两次中转.试证阿莉莎在镜子国中,可以由任何一个城市到达另一个城市,而都不需要超过两次中转.

(第38届莫斯科数学奥林匹克,1975年)

[证] 既然由A到B需要中转,故知A,B两城之间没有铁路直达.于是按已知,A和B在镜子国的对应城市A'和B'之间必有铁路.由A'城到B'城可以直达而不必中转.

对于镜子国中任意一个城市C',它在寻常国的对应城市为C.因为由A到B至少中转两次,故C不能与A,B两城都有铁路,否则中转一次就可以了.从而C'与A',B'之一间有铁路.这意味着由C'到A'或由C'到B'至多需要中转一次.

对于镜子国中任意两个既异于A'又异于B'的城市C'和D',由上一段的分析知,C'至少与A',B'之一间有铁路,D'也是如此.可见,由C'到D'至多要中转两次.

综上可知,在镜子国中,从一个城市到另一个城市至多要中转两次.

4·57 某城的每一条道路均连结着两个十字路口,且都限定为单向行车线.市政当局为设置加油站网点开展一次设计竞赛,要求自每个

十字路口均可按规定方向行车到达加油站之一，但由任何一个加油站都不能按规定方向驶抵另外的任何一个加油站. 求证在所有的应征方案中，都设计了相同数目的加油站.

（圣彼得堡数学奥林匹克，1988 年）

［证］ 任取两个设计方案，将其中一个方案中的加油站网点称为红点，将另一个方案中的网点称为蓝点. 显然，只要证明互不相重的红点和蓝点个数一样多就行了. 因此不妨设所有红点与蓝点都互不相同.

对任何一个红点 A，按已知，由 A 可抵达某个蓝点 B. 反之，由蓝点 B 又可抵达某个红点 C. 若 $C \neq A$，则从红点 A 可以驶抵红点 C，矛盾，故必有 $C = A$. 此外，如果由红点 A 可以驶抵两个不同的蓝点 B 和 D，则由 B 可以驶抵 D，矛盾. 这表明可以将红点和蓝点一对一地搭配成对，每一对中的两个加油站可以互相驶抵. 这就证明了两个方案中的加油站个数相等.

4·58 在 M 国里，城市之间都有公路相通. 每条公路之长都小于 500 千米，而且从任何一个城市到另外任一城市沿公路乘行的路程也都少于 500 千米. 每当一条公路关闭维修时，由每个城市都仍可沿其余公路到达另外任一城市. 求证此时由任一城市沿公路乘行到另一城市时，都少于 1500 千米.

（第 38 届莫斯科数学奥林匹克，1975 年）

［证］ 若不然，设 C 和 D 是这样的两座城市，即当公路 AB 关闭时，由 C 到 D 沿公路乘行的最短路线不少于 1500 千米. 因每条公路之长都小于 500 千米，故这条路线中间必有城 M，由它到 C 和到 D 都不少于 500 千米. 由此可知，在公路 AB 关闭之前，由 C 至 M 及由 D 至 M 的最短路线都须经过公路 AB. 设由 C 到 M 的路线形如 $CABM$，于是由 D 至 M 的路线或为 $DABM$，或为 $DBAM$. 若为前者，路线 CAD 根本不受公路 AB 关闭的影响且长度不超过 1000 千米，矛盾；若为后者，则因 AB 关闭后，公路 CA, BM, DB, AM 都照常开放且 $CA + BM < 500, DB + AM < 500$，故知路线 $CAMBD$ 由 C 到 D 且全长小于 1000 千米，矛盾.

4·59 从某机场同时飞起 100 架飞机（1 架指挥机和 99 架补给飞机）. 油箱装满时，每架飞机都可以飞行 1000 千米，在飞行过程中飞机可以相互补充燃料，飞机在把燃料完全输出后即按计划着陆. 问应当按

怎样的方式安排飞行,才能使指挥机尽可能地飞得远?

（第31届莫斯科数学奥林匹克,1968年）

[解] 因为每架飞机油箱装满时,可以飞行1000千米,故知100架飞机起飞时所带的燃料,可供飞行100000千米.因此,为使指挥机飞得尽可能远,应使其他飞机尽可能早地把燃料输出而降落.例如飞行10千米时,每架飞机都用去燃料的百分之一,于是即可让一架飞机将其油箱燃料分输给其余的99架飞机,然后这架飞机即可降落.总之,当还有k架飞机飞行时,只要油箱空出了$\frac{1}{k}$,即可让一架飞机分输燃料,然后降落,而这些燃料恰好充满其余飞机的油箱.这样即可使指挥机飞得最远.

4·60 能否在城市里开设10条公共汽车的线路,使得对于其中任何8条线路,都至少有一个车站不在它们之中的任何一条线路上,但对于其中任何9条线路,都经过全市所有车站?

（第13届莫斯科数学奥林匹克,1950年）

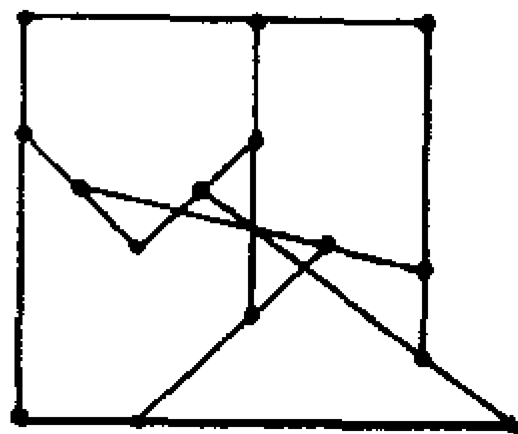
[解] 考察如下的几何模型:在平面上作10条直线,使得其中任何两条直线都相交,但任何3条直线都不共点.于是对于其中的任何8条直线,仅仅沿着它们走到达不了另外两条直线的交点.另一方面,由于每个交点都在两条直线上,故对任何9条直线,都可沿着它们走而到达任何一个交点.

把每条直线视为一条汽车线路,把每个交点都视为一个车站,则这就是一张满足要求的公共汽车线路的设计图.

4·61 已知地铁线路网中的每条线路上都至少有4个车站,其中可供换乘的车站不多于3个,在每个可供换车的车站上交叉的线路都不多于两条.如果从任意一个车站上车,都至多需要换两次车,即可到达另外任意一个车站,问这个线路网中最多可以有多少条线路?

（第29届莫斯科数学奥林匹克,1966年）

[解] 固定一条线路,其上至多有3个可供换车的车站,于是从这条线路至多可以换乘到另外3条线路上去.而从这3条线路中的每条线路至多还可以换乘到另外两条新路线上去.因此,线路的总条数不多于$1+3+3\times2=10$.



另一方面，右图所示的线路网中有 10 条线路且满足题中全部要求．故知所求的线路数的最大值为 10.

4·62　N 城的道路均可双向行车，现决定在两年内翻修全部道路．为此在第一年中，有些道路成为单行线；到了第二年，这些道路恢复双向行车，其余道路则限制为单向行车线．已知在翻修过程中的任何时刻，都能从城市中任何一个地点驱车前往另外任何地点．试证可将 N 城的所有道路全都改为单行线，使得仍可由城中任一地点驱车前往另外任何地点.

（第 35 届莫斯科数学奥林匹克，1972 年）

［证］　首先，将第一年修路时的单行线涂上红色并标上指示行车方向的箭头.

其次，任取红路的两个相邻路口 A 和 B，设箭头指向是 $A \to B$．这表明由 A 可以到 B，但不能沿这条路从 B 到 A．下面我们就来给出由 B 到 A 的路线．在第一年修路时，按假设是有一条路线由 B 到达 A 的．当然现在路线上可能有些段涂有红色，另一些段则尚未涂色．因为路线的行驶方向是从 B 到 A，故红路段的箭头方向是与 $A \to B$ 一致的．所以，我们只要把这条路线的无色路段涂红，并标上与已有方向一致的箭头就可以了．连同 $A \to B$ 一起，我们得到了一个单向行车的闭环路.

对于 N 城的每一段红路段都这样做了以后，我们得到了若干个由箭头表示方向的单向行车的闭环路，此外再无别的红路段．因此，对于某个闭环路上的任何两个路口 C 和 D，即可以沿着箭头从 C 到 D，也可以沿着箭头从 D 到 C（顶多绕点远而已）.

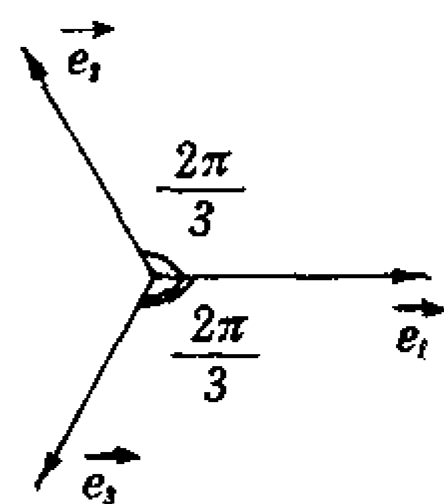
最后，我们将 N 城尚未涂色的路段都涂上绿色，并按第二年修路时规定的方向标上箭头．于是，全城的道路都变成了单行线，并已规定好了行车方向.

下面就来证明，按照上面规定的方向，可以从任一路口 A 到达任何另一路口 B．为此，我们取第二年修路时由 A 至 B 的路线．当然，这条路线上有绿色箭头也有红色路段．显然，绿色箭头所指都是由 A 到 B 的应走方向．当中间遇上红路段时，若箭头所指相反，则可沿环路另一方向绕过去．这样一来，我们总可以从 A 驱车沿单行线而到达 B.

综上可知，上面设计的单行线路图满足题中要求.

4·63　设某地区的布局相当于一个被分划成许多全等的正三角

形的网络平面，三角形的每条边都是公路，而每一个顶点都是一个路口，且在每个路口都交汇着6条公路．现从同一条道路上的 A，B 两处（两点位于某三角形的同一条边上）同时各开出一辆汽车，二者以同样速度朝同一方向开去．在每一个路口处，每辆汽车都可以继续直行，也可以向左或向右转弯120°．问这两辆汽车能否相遇？



（第17届莫斯科数学奥林匹克，1954年）

［**解**］　这两辆汽车不会相遇．若不然，则 A 和 B 必是两个路口．设汽车开始时的行驶方向是 $\vec{e_1}$．易见，在汽车行驶过程中只有3个不同方向：$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$，这里 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ 都是单位向量且设小正三角形边长为1．设在某一时刻两车在某一路口相遇，这时二车沿方向 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ 所走过的边数分别为 m_1+1，m_2，m_3 和 n_1，n_2，n_3，于是有

$$m_1\vec{e_1}+m_2\vec{e_2}+m_3\vec{e_3}=n_1\vec{e_1}+n_2\vec{e_2}+n_3\vec{e_3}, \qquad ①$$

$$1+m_1+m_2+m_3=n_1+n_2+n_3. \qquad ②$$

因为 $\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3}=0$，故由①有

$$(m_1-m_3-n_1+n_3)\vec{e_1}+(m_2-m_3+n_3-n_2)\vec{e_2}=0.$$

由此可知

$$m_1-m_3-n_1+n_3=0, m_2-m_3-n_2+n_3=0.$$

两式相加即得

$$m_1+m_2-2m_3-n_1-n_2+2n_3=0. \qquad ③$$

由③和②得到

$$1+3m_3=3n_3. \qquad ④$$

因 m_3，n_3 都是整数，故④式右端是3的倍数而左端不是，矛盾．

4·64　城市的公共汽车线路网是按照下列原则布列的：

（1）由任何一个车站都可以不用转车而直接抵达任何另一车站；

（2）任何两条线路都恰有一个公用车站，可以由它进行换乘；

（3）每条线路都恰有3个车站．

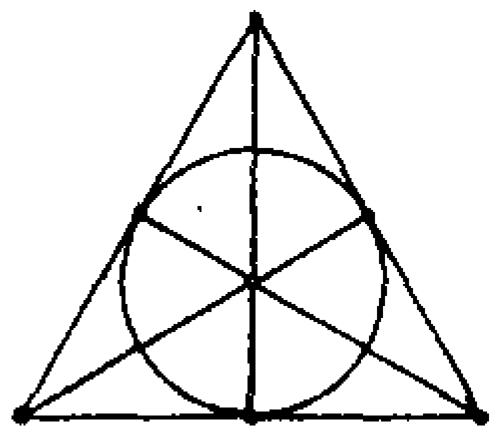
问该市有多少条公共汽车线路？

（第9届莫斯科数学奥林匹克，1946年）

［**解**］　设经过车站 A 的线路共有 n 条，则这 n 条线路上除 A 之外

的另外 $2n$ 个车站互不相同. 取异于 A 的两个车站 B 和 C 且使 A,B,C 不在一条线路上. 于是由(1) 和(3) 知 B,C 在某条线路上且这条线路上还有一个车站 $D\neq A$. 由(2) 知前 n 条线路每条与后一条线路恰有一个公共车站且这 n 个公共车站互不相同,故得 $n=3$. 由此可知,城市中不同的车站总数为 $m=n(n-1)+1=7$.

每个车站都恰在 3 条线路上,7 个车站共有 21 条线路,但在这个计数过程中,每条线路都恰被计数 3 次,故城市中共有 7 条不同的线路. 右图中有 7 个车站且恰有 7 条线路:3 条边、3 条中线及内切圆. 容易看出,这 7 条线路的网络满足题中要求.



4·65　某城市共有 57 条公共汽车线路且满足下列条件:

(1) 从任何一个车站都可以不经转车而直接到达其他任何一个车站;

(2) 任何两条线路都恰有一个公用车站,从它可由一条线路换乘到另一条线路;

(3) 每一条线路都不少于 3 个车站.

问这 57 条线路中的每条线路上各有多少个车站?

(第 9 届莫斯科数学奥林匹克,1946 年)

[解]　首先证明,每条线路上的车站数都相同. 若不然,设有两条线路 l_1 和 l_2 上的车站数不同:

$l_1:M,A_1,A_2,\cdots,A_m,l_2:M,B_1,B_2,\cdots,B_n$ 且 $m>n$. 因为每条线路的车站数不小于3,故过 M 站还有第 3 条线路 l_3. 在 l_3 上取车站 $C\neq M$,则 C 与每个 A_i 之间都有一条线路. 因为每两条线路都有一个公用车站,故上述 m 条线路中的每条上都有 $\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$ 中的一个车站. 因为 $m>n$,故由抽屉原理知这 m 条线路中总有两条经过同一个 Bj,矛盾.

设经过线路最多的一个车站 A 共有 m 条线路,则由(2) 知其他的线路上每条都恰有 m 个车站. 从而由前段证明知每条线路上都有 m 个车站,而每个车站都有 m 条线路经过. 故知线路数与车站数相同,即为 $n=m(m-1)+1$. 又因已知线路总数为 57,故有 $m(m-1)=56$,解得 $m=8$,即每条线路都恰有 8 个车站.

组合卷

4·66 已知公共汽车线路上共有14个车站(包括起点和终点),且车上至多能载25位乘客.试证在公共汽车由起点驶往终点的一次行程中,

(1)必能找到8个不同的车站 $A_1,B_1,A_2,B_2,A_3,B_3,A_4,B_4$,使得对每个 $k=1,2,3,4$,都没有乘客由 A_k 站乘往 B_k 站(即在 A_k 站上车,到 B_k 站下车);

(2)能否存在这样的情形,即不存在10个不同的车站 $A_k,B_k(k=1,2,3,4,5)$,具备类似于(1)的性质?

(第14届莫斯科数学奥林匹克,1951年)

[解] 先证如下的引理:

引理 如果在 7×7 的方格表中的24个方格中标有星号,则必可从表中选出4行 a_1,a_2,a_3,a_4 和4列 b_1,b_2,b_3,b_4,使得在 a_i 行与 b_i 列相交处的方格中标有星号,$i=1,2,3,4$.

首先证明,可以划去过某标有星号的方格的一行一列方格,使在余下的 6×6 方格表中,至少标有15个方格.如果表中每行每列至多有5个星号,则可任选一个星号并划去它所在的一行一列方格;如果在某行中有6个星号,则6个星号所在的6列中,总有一列至多有4个星号,于是划去这一行一列即满足要求;对于某一行中有7个星号的情形可作类似处理.

然后,类似地可以证明:当在 6×6 的方格表的15个方格中标有星号时,必可划去某星号所在的一行一列方格,使得在余下的 5×5 方格中,至少还有8个星号.接着再作第3次划去某星号所在的一行一列方格,使得在余下的 4×4 方格表中至少还有一个星号,这就完成了引理的证明.

现在回到命题本身.注意在第7,8两站之间时,车上至多有25人.画一个 7×7 的方格表,将它的7行依次标上整数 $1,2,\cdots,7$,代表前7个车站,将它的7列依次标上整数8到14,代表后7个车站.如果汽车上有乘客自车站 Q_i 乘往 $Q_j(i\leqslant7,j\geqslant8)$,则将表中第 i 行 j 列的方格空着,而将其余的方格全都标上星号.显然,空格不多于25个,故星号不少于24个.由上面证明的引理即知,从 7×7 方格表中可以选出4个星号,使其中任何两个星号都既不同行又不同列.于是这4个星号所在的行和列的标号即为所求8个车站的编号.这就证明了(1).

再来考虑问题(2). 考察如下的情形：对于每一对 $i,j,1\leqslant i<j\leqslant 10$，都恰有1位乘客自第 i 站乘至第 j 站(过了第10站后，车上无乘客空驶). 这样，当汽车从第5站驶往第6站时，乘客最多，恰有25人. 但此时不存在5对车站. 使每对车站都无人把它们作为起始站和终点站. 这就说明了问题(2) 的答案是肯定的.

4·67 设某国共有100个城市，它们之间有道路网相连. 已知即使关闭其中一个城市 A 的所有道路后，都仍然可由其他城市中的任一城市沿道路网抵达任何另一个城市. 试证可将该国分解为两个主权国家，每国50个城市，使得在两个国家内部都可由任一城市抵达本国的任何另一个城市.

(圣彼得堡代表队选拔试题，1992年)

[证] 我们关于 n 使用数学归纳法来证明，可将100个城市划归两个国家 A 和 B，使得两国城市数分别为 n 和 $100-n$.

$n=1$ 时命题显然成立. 设命题于 $n=k$ 时成立. 当 $n=k+1$ 时，命题是否成立的关键在于能否从 B 国拨一个城市给 A 国.

首先从 B 国任取一个与 A 国某城有道路相通的城市 α_1. 按题意，这样的城市必可取得. 如果将 α_1 拨给 A 国之后，B 国的国内交通网仍然是连通的(即从任何一个城市只经国内道路即可抵达任何另一个城市)，则问题就解决了；若不然，则 B 国在 α_1 被拨走之后，其余的城市将被分成一些非空子集 $B_{11},B_{12},\cdots,B_{1m_1}$，其中 $m_1\geqslant 2$，使得每个子集内的城市之间是连通的，而属于任何两个不同子集的城市之间都不能仅通过 B 国内部的道路来通行. 换句话说，B 国的交通网是连通的，其 m_1 个子集之间的连通都只能经过 α_1 才行. 我们将 $\{B_{11},B_{12},\cdots,B_{1m_1}\}$ 称为从属于 α_1 的对 B 国的分划. 这时，将 α_1 留给 B 国，并从子集 B_{11} 中任取一个与 A 国有道路相通的城市 α_2. 如果将 α_2 拨给 A 国后，B 国的交通网仍然是连通的，则问题就解决了；若不然，则又得到一个从属于 α_2 的 B 国的分划 $\{B_{21},B_{22},\cdots,B_{2m_2}\}$. 因为 $B_{12},\cdots,B_{1m_1}$ 之间可通过 α_1 连通，所以它们的并集属于某一个 B_{2i}，不妨设 $i=m_2$. 于是 B_{21}，$B_{22},\cdots,B_{2m_2-1}$ 都是 $B_{11}-\{\alpha_2\}$ 的子集，即都是 B_{11} 的真子集. 如此继续下去，可得一串城市 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots$ 和相应于它们的分划中的子集串 $B_{11}\supsetneqq B_{21}\supsetneqq B_{31}\supsetneqq\cdots$，使得或者到某个 α_i 时划给A国后满足要求，或者一

直进行下去，直到某个 B_{j1} 仅有1个城市 α_{j+1} 为止. 这时，只要把 α_{j+1} 拨给 A 国就可以了，即当 $n = k + 1$ 时命题也成立.

4·68 两家航空公司为10个城市通航，使得任何两个城市之间恰有一家公司开设直达航班提供往返服务. 试证至少有一家公司能提供两个不交的旅游圈，每个圈都可游览奇数个城市.

（第31届国际数学奥林匹克预选题，1990年）

[证] 用10个点来表示10个城市并将两家公司的航线分别用红线和蓝线来表示，于是问题化为求证在二染色的 K_{10} 中，必存在颜色相同且不交的两个单色奇圈(即有奇数条边的圈).

因为在二染色的 K_6 中必存在单色三角形，故在二染色的 K_{10} 中存在两个不交的单色三角形. 若二者同色，则即为所求；若二者不同色，不妨设 $\triangle A_1A_2A_3$ 为蓝三角形而 $\triangle A_4A_5A_6$ 是红的. 考察两个三角形之间的9条连线：

$$A_iA_j, i = 1,2,3, j = 4,5,6.$$

由抽屉原理知其中必有5条同色. 不妨设为蓝色. 从而 A_4, A_5, A_6 中至少有1点，它向点 A_1, A_2, A_3 至少引出两条蓝线. 于是得到一个蓝三角形，它与红三角形 $A_4A_5A_6$ 恰有1个公共顶点.

现在我们重新给定记号，设 $\triangle A_1A_2A_3$ 是蓝三角形而 $\triangle A_3A_4A_5$ 是红三角形. 考察以其余5点为顶点的完全子图. 如果其中有单色三角形，则不论红或蓝，都可与前两个单色三角形之一配成满足要求的一对. 以下设完全子图 K_5 中没有单色三角形. 这时，用反证法容易证明，每个顶点都恰引出2条蓝线和2条红线. 于是整个图中有5条蓝线和5条红线. 因为单看蓝线时是每点度数都为2的偶图，故它必构成1个有5条边的圈. 显然，它与蓝 $\triangle A_1A_2A_3$ 即为满足要求的两个单色奇圈.

4·69 某城市是可以分成若干方块的矩形形状：它有 n 条街道互相平行，而另一组 m 条街道与前一组交成直角. 一些警察在城市的街道上(而不是在十字路口)值勤. 每个警察报告从他身旁开过去的公共汽车的号码，运行方向以及通过的时间. 为了能根据警察提供的信息再现沿着环路(不重复走过任一段街道)行驶的公共汽车的路线，最少需要多少名警察在马路上值勤?

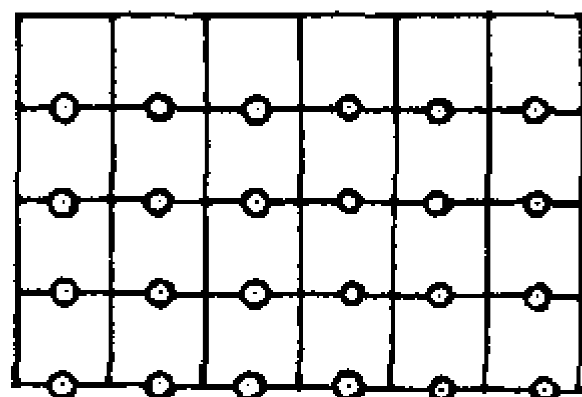
（第2届全苏数学奥林匹克，1968年）

[解] 设若干位警察按要求站位值勤. 我们把两个相邻十字路口

之间的马路称为一段并把站有警察的马路段去掉，按题中要求便知，这时的马路网没有环路而是被分成了 k 片连通线路，而且不同片之间互不通连.

如果一片连通马路网含有 p 个十字路口，则其中恰好有 $p-1$ 段马路.因为全城共有 mn 个十字路口，所以 k 片马路网至多有 $mn-k$ 段马路，而且这些段马路上没有值勤警察，否则就被去掉了.又因全城马路共有 $2mn-m-n$ 段，故知站有警察的马路段的条数不少于

$$mn-m-n+k\geqslant(m-1)(n-1).$$



右图中的小圆圈表示警察的站位，这种站位显然满足题中要求且共有 $(m-1)(n-1)$ 名警察.所以，所求最小值为 $(m-1)(n-1)$.

4·70 在某市区内，对于任意 3 个十字路口 A,B,C，都有从 A 通向 B 但不经过 C 的路.试证从任意一个十字路口到其他任一个十字路口至少有两条不相交的路（十字路口是至少有两条路相交的地方；市区内的十字路口不少于 3 个）.

（第 6 届全俄数学奥林匹克，1966 年）

［证］ 我们把直接从十字路口 A 到 B 且不经过任何其他十字路口的道路称为一段并称构成道路的段数为道路的长度.设从 A 到 B 的最短路的长度为 n.我们关于 n 用数学归纳法来证明.

当 $n=1$ 时，存在最短路 AB.因至少有 3 个十字路口，故还有异于 A,B 的十字路口 C.按已知，A 和 C 之间存在一条路 p 不经过 B，C 和 B 之间存在一条路 q 不经过 A.将 p 和 q 接起来即得与道路 AB 不交的另一条从 A 到 B 的路.

当 $n>1$ 时，设 D 是位于从 A 到 B 的最短路上且离 A 最近的十字路口.由归纳假设知，从 D 到 B 有两条不交的道路 s 和 t.此外，按已知还应有一条从 A 到 B 不经过 D 的道路 r.若 r 与 s,t 都不相交，问题已解决.若 r 与 s 相交，则接下去沿 s 走到 B，此路与 t 不交.

4·71 某州有若干个城市，每两市之间都恰好用汽车，火车和飞机三种交通工具之一直接往来.已知在全州中 3 种工具都用到；但没有任何一个城市 3 种方式全有；并且没有任何 3 个城市中两两之间的交通方式全相同.问该州最多有几个城市?

（第 10 届美国数学奥林匹克，1981 年）

[**解**]　将每个城市用一个点来表示，按两市之间的交通工具为汽车，火车和飞机的不同，将相应两点间连一条红，黄，蓝线．根据题意可知，这个图具有如下性质：

(1) 每两点间有 1 条线，其上涂有红黄蓝三色之一；

(2) 整个图中 3 种颜色的边全有；

(3) 每个顶点所引出的所有边中，至多有两种不同颜色；

(4) 图中不存在单色三角形，即 3 边同色的三角形．

将所有顶点可分成 3 类：非红，非黄，非蓝．非红类顶点表示该顶点引出的边中没有红边，非黄与非蓝的意义与此类似．当然，一个顶点可能属于上述 3 类中的两类．

如果由顶点 A 引出 3 条同色线，不妨设为红边 AB，AC，AD，则由 (4) 知，边 BC，BD，CD 都不是红色的．设 BC 为蓝边，则顶点 B 和 C 都是非黄类顶点，因而 BD 和 CD 均只能为蓝边．这样一来，$\triangle BCD$ 为蓝三角形，此与(4) 矛盾．所以，从一点引出的同色线段至多两条，因而图中至多有 5 个顶点．

设有 A, B, C, D, E　5 点，其中 A 和 B 都属于非红类，不妨设 AB 是蓝边．由(4) 知 $\{AC, BC\}$，$\{AD, BD\}$，$\{AE, BE\}$ 3 组边中，每组至少有 1 条黄边．又由(2) 知，C, D, E　3 点间至少有 1 条红边，故必有顶点属于非蓝类，不妨设为 C．从而 AC，BC 都是黄色的．于是 CD，CE 都是红边，而 AD，AE 一蓝一黄．这样一来，DE 若为红边，则 $\triangle CDE$ 为红三角形，矛盾；DE 若为黄边或蓝边，则导致顶点 D 或 E　3 种颜色的边全有，矛盾．故知至多有 4 个城市．

当有 4 个顶点时，不妨设其为凸四边形的 4 个顶点．当 4 边均为红色而两条对角线一黄一蓝时，显然满足题中要求．由此可知，该州最多有 4 个城市．

4·72　已知某城市的形状是一个多边形，它被道路分隔为一些多边形的区域，在这些多边形的顶点处都辟有广场．每一条道路都连接两个广场，并且不再穿过其他广场．在每一条道路上都只允许车辆单向行驶，并且

(1) 车辆既可驶入每一个广场，又可驶离每个广场；

(2) 车辆可沿着城市的周界环行一周．

试证城市中存在一块区域，车辆可以沿着界定这块区域的道路环行一

周.

（原苏联教委推荐试题，1991 年）

[证] 将多边形区域的块数记作 n，并对 n 进行归纳. 当 $n=1$ 时，由(2) 知命题成立. 设命题对所有 $n<k$ 都成立. 当 $n=k$ 时，在城市周界上选取一个广场 A，使得车辆可以由它驶向市内(如果没有这样的广场，则可将所有道路的行车方向全都改为相反的方向来解同样的问题). 由广场 A 向市内出发，沿着道路按规定方向行驶. 由(1) 知驶到每个广场后都可再驶离这个广场. 直到重新驶到城市周界的广场或者驶到某个已经到达过的广场为止. 无论哪种情况，我们都从城区中划出了一块区域，沿着这个区域的边界我们可以环行一周. 显然，这个区域被道路分成的多边形区域的块数小于 k. 于是由归纳假设知题中所要求的多边形区域存在.

4·73 某市购进一批公共汽车，计划建立 1983 个汽车站并在它们之间设置若干条线路，使得

(1) 尽可能多设置一些线路；

(2) 任何两条线路都至少有 1 个公用车站；

(3) 每个车站都至多在两条不同线路上.

问在上述要求下，最多能开辟多少条线路?每条线路至少应经过多少个车站?

（中国安徽省合肥市数学竞赛，1983 年）

[解] 用 S 表示 1983 个车站的集合. 设共设置 k 条线路，并用 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 分别表示第 $1,2,\cdots,k$ 条线路上的全部车站的集合. 于是按已知有

(i) 对任意 $1\leqslant i<j\leqslant k$，$A_i\cap A_j\neq\varnothing$；

(ii) 对任意 $1\leqslant i<j<m\leqslant k$，$A_i\cap A_j\cap A_m=\varnothing$.

由 (i) 知，集合 A_i 与另外$k-1$ 个集合中的任何一个都至少有 1 个公共元素. 由 (ii) 又知这些公共元素互不相同. 因此有 $|A_i|\geqslant k-1$，$i=1,\cdots,k$. 于是集合 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 的元素数之和不小于$k(k-1)$. 在这个计数过程中，每个元素都被计算了两次，所以集合 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k$ 至少有$\frac{1}{2}k(k-1)$ 个元素. 故得

$$\frac{1}{2}k(k-1)\leqslant 1983.$$

由此解得 $k \leqslant 63$.

容易看出,设置 63 条线路是可以做到的.故知最多能开辟 63 条线路,每条线路至少应经过 62 个车站.

4·74 在 20 个城市之间辟有 172 条航线,试证利用这些航线,可以由其中任何一个城市飞往另外的任一城市(包括中转后到达).

(第 46 届莫斯科数学奥林匹克,1983 年)

[证] 若不然,则存在两个城市 A 和 B,使得从 A 不能飞到 B.我们将凡是从 A 出发能飞到的城市连同 A 一起称为第 1 组,其余的城市称为第 2 组,B 当然在第 2 组.设两组城市数分别为 k 和 $20-k$,$1 \leqslant k \leqslant 19$.容易看出,从第 1 组的任一城市不能飞到第 2 组的任一城市.否则,后者应该属于第 1 组.因此,不能从一个城市飞往另一个城市的城市对的数目至少为 $k(20-k) \geqslant 19$.另一方面,如果任何两个城市之间都有航线,共有 $C_{20}^2 = 190$ 条.因为已知有 172 条航线,所以没有航线的城市对只有 18 个,不能从一个城市飞往另一个城市的城市对的数目至多 18 个,矛盾.

4·75 已知两国之间开设有航空业务,在分属两国的任何两个城市之间都恰有 1 条单向航线,但每一城市均有飞往另一国某些城市的航线.试证从中可以找出 4 个城市 A,B,C,D,使得可以由 A 直飞 B,由 B 直飞 C,由 C 直飞 D 且由 D 直飞 A.

(第 54 届莫斯科数学奥林匹克,1991 年)

[证 1] 设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是第一国的城市,而由 A_i 可以直飞的所有第二国的城市的集合记为 M_i,$i=1,2,\cdots,n$.按已知,每个 M_i 都非空.我们证明原命题的一个等价命题:存在两个不同的集合 M_i 和 M_j,使二者互不包含,即 $M_i - M_j \neq \varnothing$,$M_j - M_i \neq \varnothing$.利用这个命题的结论,取 $B_i \in M_i - M_j$,$B_j \in M_j - M_i$.则有 $A_i \to B_i \to A_j \to B_j \to A_i$,这里箭头表示直飞.

下面来证等价命题.若不然,则对任何一对 (i,j),$1 \leqslant i < j \leqslant n$,集合 M_i 和 M_j 都是一个包含另一个.于是使 $|M_i|$ 最小的 M_i 便含在所有其余 $M_j(j \neq i)$ 之中.由于 M_i 非空,不妨设城市 $B \in M_i$,于是第一国的所有城市的飞机都单向飞往 B,从而 B 不能飞往任一 A_k,此与已知矛盾.

[证 2] 设 $\{|M_1|,|M_2|,\cdots,|M_n|\}$ 中最小的之一是 $|M_i|$.B_i

$\in M_i$，于是有 $A_i \to B_i \to A_j \neq A_i$. 因为 $|M_j| \geqslant |M_i|$ 且 $B_i \notin M_j$，故必存在 $B_j \in M_j$ 但 $B_j \notin M_i$，从而有 $A_i \to B_i \to A_j \to B_j \to A_i$.

4·76　设某市的道路刚好交织成 $(n-1) \times (n-1)$ 的方格网. 该市欲开设若干条公共汽车线路，要求每条线路的汽车都至多转弯一次，并要求自 n^2 个路口中的每个路口都可乘车抵达其余的任何一个路口，且中途至多换乘一次. 问该市最少要设置多少条线路?

（第18届全俄数学奥林匹克，1992年）

［解］　由于每条线路的汽车都至多转弯一次，故每条线路都至多行经一条横向街道和一条纵向街道. 按已知，全市共有 n 条横向街道和 n 条纵向街道，每条街道上恰有 n 个十字路口. 如果每条横向街道上都至少有一条线路，则至少共有 n 条线路. 如果某条横向街道上没有线路通过，则由于每条沿纵向穿过该横向街道的线路只经过该街道的一个十字路口，所以也至少有 n 条线路才能走遍该横向街道的 n 个十字路口. 可见，至少要有 n 条线路.

另一方面，可以设置 n 条线路如下：让第 i 路汽车自北向南走遍第 i 条纵向街道，到达最南的横向街道后朝西转弯，并沿该横向街道走到西南角为止. 容易验证，这 n 条线路满足题中的要求.

综上可知，最少要设置 n 条线路.

4·77　10家航空公司在城市 $P_1, P_2, \cdots, P_{1983}$ 之间设有航班. 已知任何一个城市都可直达其他任何一个城市而无需中转，而且每条(直达)航线允许几家公司共同使用. 试证必有一家公司，它能够提供这样的环游服务，即从某个城市出发，经过奇数条航线，然后回到原来的城市.

（第24届国际数学奥林匹克候选题，1983年）

［证］　我们对公司数 n 用归纳法来证明：如果有 n 家航空公司 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 和 $m > 2^n$ 个城市 $P_1, P_2, \cdots, P_m$，且任意两个城市间都有航班，则必有一家公司能提供只用奇数条航线的环游飞行. 若这一命题得到证明，则因 $1983 > 1024 = 2^{10}$，故原题的结论成立.

当 $n = 1$ 时，$m > 2$，显然，$P_1P_2P_3P_1$ 即为满足要求的环游航线. 设命题于 $n = k$ 时成立. 当 $n = k + 1$ 时，考察公司 A_{k+1} 的航线设置情形. 如果它能提供由奇数条航线组成的环游飞行，则结论成立. 故只须再讨论不能提供这种环游飞行的情形.

设 P_1 是有公司 A_{k+1} 的航线的城市之一(若这样的城市不存在,则所有城市间只有 k 家公司,由归纳假设即知结论成立),并按下述方式将所有城市分成两组:令 $P_1 \in R$,然后将从 P_1 出发,沿公司 A_{k+1} 的航线可以直达的所有城市归入 Q 组.接着再把由 Q 中城市出发,沿公司 A_{k+1} 的航线可以直达的所有城市归入 R 组.这样继续下去,直到不能进行时告一段落.由于 A_{k+1} 的航线不能提供有奇数条航线的环游飞行,故同组的两个城市之间没有 A_{k+1} 的航线.如果尚未分组的城市间还有 A_{k+1} 的航线,则任取一个有 A_{k+1} 航线的城市归入 R 组并重复上述的分组过程,直到没有 A_{k+1} 的航线为止.最后把余下的城市都归入 R 组,于是所有城市被分成 R 和 Q 两组,每组内的城市之间没有 A_{k+1} 的航线.两组 R 和 Q 中,至少有1组的城市数大于 2^{n-1} 且这些城市间只有 k 个公司 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 的航线.由归纳假设知命题于 $n = k+1$ 时成立.

4·78　某王国有 k 个大都市和若干个城市,其各城市(包括都市)之间有公路相连,且可从任何一个城市到达另外任何一个城市.试证可把这个王国分划成 k 个共和国,使得每个共和国都有一个都市作为首都;同时,对任何城市而言,从它到所在共和国的首都的道路是它到 k 个都市的道路中最短的(由最少条公路组成的道路称为最短道路).

(第26届独联体数学奥林匹克,1992年)

[证]　首先把 k 个大都市各划归一个共和国,共有 k 个共和国.然后按以下方式逐步扩大各共和国:把与某都市有1条公路相连的城市划归该都市所在的共和国(若某城市与多于一个都市各有一条公路相连,则可任意划归其中的一个共和国).然后每次都把每个与已划定的城市有一条公路相连的城市划归前者所在的共和国,直到所有城市都划分完毕为止.因为从任何一个城市都可以到达另外的任何城市,故经有限步划分之后,必可将所有城市都划归 k 个共和国.

如果某城市在第 n 步划归某共和国,则显然它与该国首都之间的道路由 n 条公路组成,并且它与其他都市之间的道路至少由 n 条公路组成.这意味着它到本共和国首都的道路是最短的.

4·79　某国有 $2k+1$ 个航空公司,其中第 i 家公司恰拥有 i 条航线,$i = 1, 2, \cdots, 2k+1$,每条航线都连结两个城市.该国有一条法律,规定每个公司在每个城市都只能拥有1条航线,各个公司的航线设置都

符合这条法律.现在这些公司决定重新调整航线的归属关系,使得各公司都拥有同样数目的航线.求证他们的决定可以实现且仍然都符合法律规定.

(第18届全俄数学奥林匹克,1992年)

[证] 考察两个航空公司 I 和 J,设二者分别拥有 i 条和 $2k+2-i$ 条航线,$1\leqslant i\leqslant k$.将设有这两个公司航线的每个城市都对应于平面上的一个点,并在有 I 公司航线相连的两个城市所对应的点间连一条红线,有 J 公司航线相连的两个城市所对应的点间连一条蓝线.于是得到一个红蓝二染色的图,其中有 i 条红边和 $2k+2-i$ 条蓝边,且每个顶点都至多连出1条红边,也至多连出1条蓝边.因而,这个图可以分解为彼此没有公共顶点的一些圈和一些(非封闭的)链.在每条圈或链上,红蓝线段都是相间地分布,从而每条圈上红蓝线段条数相等,而在每条链上,两种线段的条数之差为1.由于图中蓝线比红线多 $2(k+1-i)$ 条,故至少有 $2(k+1-i)$ 条链,其中每条链上都是蓝线段比红线段多1条.从这些链中选定 $k+1-i$ 条,并将选出的这些链上的每条线段都改涂为另一种颜色(红改蓝,蓝改红).显然,改涂后的每条链上红线段比蓝线段多1条.从而整个图中红蓝线段条数相等,都是 $k+1$ 条.这样一来,I 和 J 两个公司都拥有 $k+1$ 条航线,且航线设置仍然符合法律规定.

依次对 $i=1,2,\cdots,k$ 的公司对进行上述变换,最后便可使所有公司都各拥有 $k+1$ 条航线且这些航线的设置符合法律规定.

4·80 某国有1988个城市及4000条路(每条路连结两个城市),求证有一条封闭的路线通过的城市不超过20.

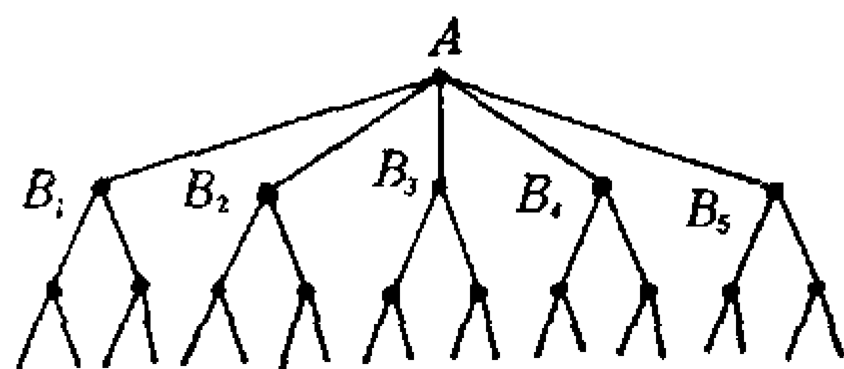
(中国国家集训队训练题,1990年)

[证] 用1988个点来代表1988个城市.如果两个城市之间有一条路,就在相应两点之间连一条线.于是得到一个有1988个顶点和4000条边的图,要证的结论是图中必有一个不超过20条边的圈.

将图中凡是度数不超过2的顶点都去掉,然后把余下的图中度数不超过2的顶点也都去掉.这样继续下去,直到余下的图中每个顶点的度数都不小于3为止.因为原图中的边数比顶点数的2倍还多,所以上述的顶点度数都不小于3的图是存在的,称这个图为 G,它有 $n(n\leqslant 1988)$ 个顶点和多于 $2n$ 条边.显然,只须证明图 G 中必有边数不多于

20 的圈.

因为图 G 中所有顶点度数之和大于 $4n$,故由抽屉原理知必有一个顶点 A 的度数至少为5.由点 A 发出的5条边的另5个顶点 B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 中每点度数不小于3,除了与点 A 的连线外,至少还各发出两条边.这些边的另外顶点中每点又至少发出两条边.这样继续下去,直到第9次为止.每次所得到的顶点数分别不少于 $5,10,20,40,\cdots,1280$.如果在第9次之前(包括第9次)出现两个顶点重合,则导致一个边数不超过18的圈,当然满足题中要求.若直到第9次为止,产生的顶点全都互不相同,则顶点数不小于 $1+5\times(1+2+4+\cdots+256)>2000$,此不可能.这表明图中总存在边数不多于18的圈.



4·81　已知在一个大圆形湖的岸边建有若干个居民点,其中某些居民点之间有船通航,且两个居民点之间通航当且仅当按反时针方向,在这两个居民点之后的两个居民点间不通航.求证可以乘船从任何一个居民点到达另一个居民点且换乘不多于两次.

(第14届全苏数学奥林匹克,1980年)

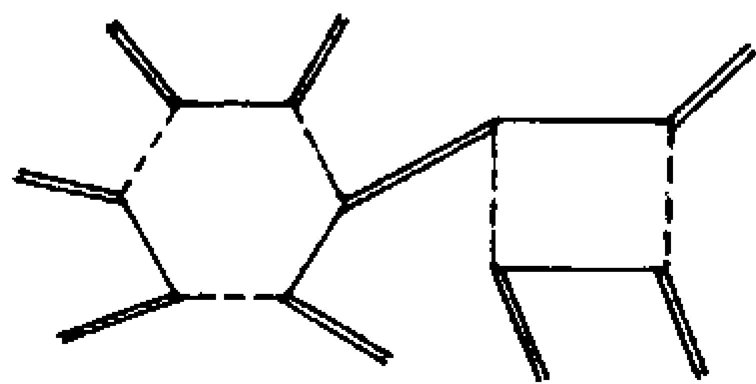
[证]　设 $A,B,C,D,E,F,\cdots$ 是依次排列的居民点.不妨设 A,B 之间通航,于是 B,C 之间不通航.若 C,D 之间不通航,则 B,C 应通航,矛盾,故 C,D 之间通航.由此可知,这些居民点可以两两成组,每组之间通航.设 $\{A,B\},\{E,F\}$ 是不同两组.若 B,F 之间不通航,则 A,E 必通航.故知两组之间或者前面居民点之间通航,或者后面的居民点通航.由此便知结论成立.

4·82　某王国共有3种类型的道路:公路,铁路和乡间土路.已知由每个城市都恰连出3条路且恰好是3种道路每种1条,且由任何城市出发可以到达其他任何城市.求证可以走遍全国所有城市而不需要按不同方向多次走过任何一条道路.

(圣彼得堡数学选拔考试,1993年)

[证]　首先不计铁路而光是考虑由公路和土路组成的交通图 G.这时,每点的度数都是2,因此图 G 可以分解为若干个互相没有公共顶点的圈.在每个圈上都规定一个周游方向,以后无论何时走进圈中,总按规定方向行走.由于全国都要走遍,我们再用铁路为边将这些圈互相

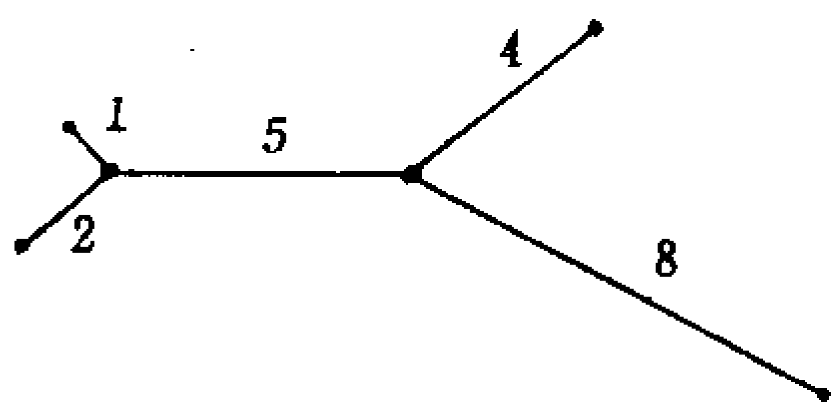
连起来.由于每个圈上都是公路与土路交替排列着,故每个圈上的顶点数都是偶数,从而每个圈引出的铁路边都是偶数条.现在将每个圈看作一个点,则以铁路为边的图是个连通的偶图.由欧拉一笔画定理知,可以走遍此图所有顶点而经过每条边恰好一次.回到原来的交通图.当沿着铁路一旦走入某个圈时,即沿圈上规定的方向走到另一条铁路的起点.显然,这样走遍全国的走法满足题中要求.



4·83　国王要在他的王国里建造 n 个城市,并在它们之间修建 $n-1$ 条道路,使得从每一个城市都可以通往其他各个城市(每条道路连结两个城市且不穿过其他城市,任何两条道路不相交).国王还希望使得城市之间沿道路网的最短距离分别为 $1,2,3,\cdots,\frac{1}{2}n(n-1)$.如果(1) $n=6$;(2) $n=1986$,试问国王的愿望能够实现吗?

(第 20 届全苏数学奥林匹克,1986 年)

[解]　(1)当 $n=6$ 时,所提的条件可以被满足,设计如右图所示.



(2)当 $n=1986$ 时,$\frac{1}{2}n(n-1)=993\times1985$ 为奇数.

设 n 为使 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 为奇数的任一正整数,则 $1,2,\cdots,\frac{1}{2}n(n-1)$ 中奇数的个数为 $\frac{1}{4}n(n-1)+\frac{1}{2}$.另一方面,由题中条件知,任何两个城市之间的通道(除去重复路线)都是惟一的.选定一个城市 A,称与 A 距离为偶数的城市为"好的"(A 也算作好的),否则称为"坏的".设 n 个城市中有 x 个好的,y 个坏的,则 $x+y=n$.任取一个好城与一个坏城组成一对,二者之间的距离为奇数.显然,这样的城对共有 xy 个,两个好城与两个坏城之间的距离均为偶数.因而有

$$n^2-n+2=4xy,$$

$$n=n^2-4xy+2=(x-y)^2+2.$$

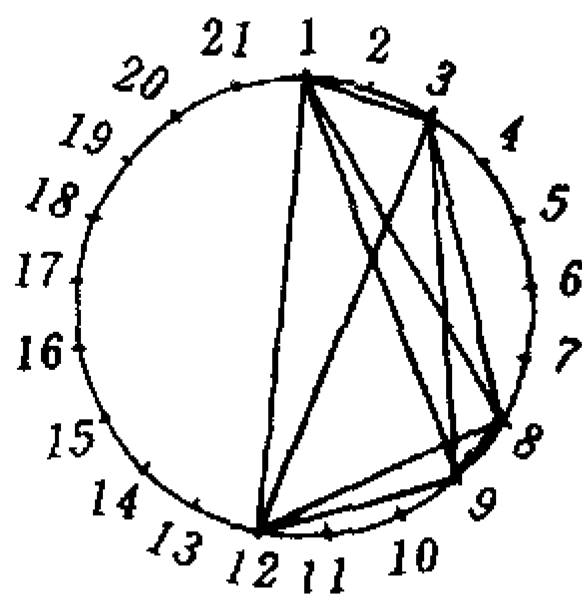
可见,若能满足题中要求,必有 $n-2$ 为完全平方数.但 $1984=64\times31$ 不是完全平方数,故知当 $n=1986$ 时,国王的愿望无法实现.

4·84　某国共有21个城市，由若干个航空公司担负它们之间的空运业务，每一个航空公司都在5个城市的两两之间设有直达航班（不着陆直达且在两个城市之间可以有多家航空公司开设航班），每两个城市之间至少有一个直达航班．问最少要有多少家航空公司？

（第22届全苏数学奥林匹克，1988年）

［解1］　为使这个国家有一个满足要求的航空网，每两个城市间至少有一个航班，至少应有 $C_{21}^2 = 210$ 个航班．每个航空公司开设10个航班，故至少应有21家航空公司．

右图中我们将21个城市取为正21边形的顶点．图中画出的图形是第一家航空公司的航线示意图，它所联系的5个城市的号码是1,3,8,9,12．这样取的好处是5点间的10条连线的长度（用所对劣弧长来度量）分别为1,2,3,4,5,6,7,8,9,10，任何两条长度不等．故当将号码轮换而得出其他20家公司服务的城市号码组时，所得的210条连线无一重复，刚好是每两个城市间有一个直达航班．所以，所求的航空公司的最少家数是21．



［解2］　像解1中一样地可证至少要有21家航空公司．

下面，我们用"字典排列法"写出21家航空公司中每家公司所经营的5个城市的号码，使得任何两组号码恰有一个重复．因而它们所经营的航线互不重复．这就保证了210条航线恰好是每两个城市间各一条．这21个号码组具体排列如下：

(1,2,3,4,5),(1,6,7,8,9),

(1,10,11,12,13),(1,14,15,16,17),

(1,18,19,20,21),(2,6,10,14,18),

(2,7,11,15,19),(2,8,12,16,20),

(2,9,13,17,21),(3,6,11,16,21),

(3,7,10,17,20),(3,8,13,14,19),

(3,9,12,15,18),(4,6,12,17,19),

(4,7,13,16,18),(4,8,10,15,21),

(4,9,11,14,20),(5,6,13,15,20),

(5,7,12,14,21),(5,8,11,17,18),

(5,9,10,16,19).

可见,为满足题中要求,最少要有 21 家航空公司.

4·85　某个国家有若干个城市.从任何一个城市都可直接到达另一个城市而不经过其他城市.每两个城市之间的路费是已知的.要到全国各城市旅游一次,有两种选择路线的方法,其中每一种路线都恰经过每个城市一次.

第一种方法是起点可以任选,而以后的每个城市都这样选取:从该路线尚未经过的城市中选择与前一城市间路费最少的城市(若这样的城市有多个,则从中任选一个),直到所有城市都走遍.

第二种路线的起点也是任选的,但以后每个城市的选取原则是:从该路线尚未经过的城市中选择与前一城市间路费最多的一个城市,直到所有的城市都走遍.

试证第一种路线的全部路费不多于第二种路线的全部路费.

(第 11 届全苏数学奥林匹克,1977 年)

[证]　我们在两条路线的各 $n-1$ 个区段之间建立一个一一对应,使沿着第一条路线的区段的路费不高于沿着第二条路线的对应区段的路费.我们用 $t_i(A)$ 表示第 i 条路线上城市 A 的"尾集"($i=1,2$),即它是第 i 条路线上排在 A 后的所有城市的集合.对任意城市 A,我们用 A' 和 A'' 来分别表示在第一和第二条路线上紧排在 A 后的城市.

现在来定义对应 f:对于第一条路线上的任一区段 AA',如果 $t_1(A)\cap t_2(A)\neq\varnothing$,则定义 $f(AA')=AA''$.否则就令 $f(AA')=BB''$,其中 B 为第二条路线中 $t_1(A)$ 的最后一个城市,它当然排在 A 的前面,并且 A 还是第一条路线中 $t_2(B)$ 的最后一个城市.可见逆映射 f^{-1} 可用同样的原则来定义,所以 f 是一一对应,即双射.

下面来验证 $|f(a)|\geqslant|a|$,其中 $|a|$ 表示经过区段 a 时所付的路费.当存在 $C\in t_1(A)\cap t_2(A)$ 时,按定义有

$$|f(AA')|=|AA''|\geqslant|AC|\geqslant|AA'|;$$

当 $t_1(A)\cap t_2(A)=\varnothing$ 时,

$$|f(AA')|=|BB''|\geqslant|BA|=|AB|\geqslant|AA'|.$$

这就证明了任何一条第一种路线所用的路费都不多于第二种路线的路费.

第五章　人际关系和社会活动

5·1　试证在任何一群人中，认识这些人中奇数个人的人数是偶数(认识是相互的，即若 A 认识 B，则 B 也认识 A).

(匈牙利数学奥林匹克，1943 年)

[证]　因为认识关系是相互的，故每两个认识的人组成一个熟人对. 设这群人中共有 n 个熟人对. 而在统计认识人数时，每个熟人对恰被两人各计数 1 次，故所有人的认识人数的总和为偶数. 从而知认识人数为奇数的人的个数必为偶数，否则总和为奇数.

5·2　设大厅中共有 100 位客人，其中每人都与其余 99 人中的至少 67 人相识. 求证一定可以找到其中 4 人，他们全都彼此相识.

(波兰数学奥林匹克，1967 年)

[证]　任取一位客人 A. 按已知，他至少与 67 人相识. 考察这 67 人的相识情形，不难看出，这 67 人中的每个人都至少与其余 66 人中的 34 人相识. 再于这 67 人中任取 B，则既与 A 相识，又与 B 相识的人至少有 34 人. 于这 34 人中任取一人 C，则 C 至少与这 34 人中的 1 人相识，取 D 与 C 相识，同时 D 也与 A，B 相识. 于是 $\{A,B,C,D\}$ 4 人便满足要求.

5·3　设大厅中共有 100 位客人，其中每人都与其余 99 人中的至少 66 人相识. 求证可以出现这种情况：这些客人中的任何 4 人中必有两人不相识(这里所谓的相识，指二人互相认识).

(波兰数学奥林匹克，1967 年)

[证]　将 100 个人分成 A，B，C 三组，且三组人数分别为 33，33，34. 当同组人互不相识而异组的每两人都相识时，每人至少与其余人中

的 66 人相识. 但 100 个客人中的任何 4 人中,总有两位同组,二者不相识.

5·4 今有 7 个男孩,其中每一人在其余 6 人中都至少有 3 个亲兄弟,求证这 7 个男孩全是亲兄弟.

(第 53 届莫斯科数学奥林匹克,1990 年)

[证] 若不然,设其中的甲乙两个男孩不是亲兄弟. 于是其余 5 个男孩至多是甲乙两人之一的亲兄弟. 由抽屉原理可知,甲乙两人中必有一人在其余 5 人中至多有两个亲兄弟,从而他在其余 6 个人中也至多有两个亲兄弟,此与已知矛盾.

5·5 在选拔参加全苏数学奥林匹克的选手时,共邀请了 11 名市级竞赛的获奖者,他们分别来自 8,9,10 和 11 年级. 试问能否让他们围坐在一张圆桌周围,使得在任何相连 5 人中,都有来自全部 4 个年级的选手?

(第 53 届莫斯科数学奥林匹克,1990 年)

[解 1] 11 名学生分属于 4 个年级,由抽屉原理知,必有 1 个年级至多有 2 人,不妨设为 8 年级. 若 8 年级只有 1 人,显然不满足要求;若 8 年级有 2 人,则其余 9 人被这两人分成两个连续段,两段中有 1 段至少有 5 人,也不满足题中要求. 故知所要求的围坐法不能实现.

[解 2] 如果所要求的围坐法能够实现,则每相连 5 人中,都有 4 个年级的学生至少各 1 人. 这 11 名学生共能组成 11 个不同的连续五人组,因此每个年级的学生在五人组中出现的次数都至少为 11. 但每人恰出现在 5 个五人组中,故每个年级的学生至少 3 人,矛盾.

5·6 设围绕圆桌至少坐着 5 个人,求证一定可以调整他们的座位,使得每个人两侧都挨着两个新邻居.

(波兰数学奥林匹克,1968 年)

[证] 用自然数 $1,2,\cdots,n$ 依次表示围绕圆桌而坐的 n 个人,于是编号为 i 的人与编号为 $i-1, i+1$ 的两人相邻,其中 $i=1$ 时, $i-1=0$ 表示第 n 个人; $i=n$ 时, $i+1=n+1$ 表示第 1 个人.

当 n 为奇数时,只要将 n 个人重新排序为

$$1,3,\cdots,n,2,4,\cdots,n-1,$$

则每人都挨着两个新邻居.

当 n 为偶数时,可以排序如下:

$$1,3,\cdots,n-1,2,4,\cdots,n-4,n,n-2,$$

因为 $n\geqslant 6$,故这样的排法可以实现.易见,每人都挨着两个新邻居.

5·7　科学家们在会议上相逢,其中有些是朋友.已知如果某两位科学家在与会者中的朋友数相同,则他们没有共同的朋友.求证可以找出一位科学家,他在与会者中恰有1位朋友.

(第37届莫斯科数学奥林匹克,1974年)

[证]　设这些科学家中朋友数最多的一位 A 共有 n 位朋友 B_1, $B_2,\cdots,B_n$.按已知,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 的朋友数互不相同.他们中每人朋友数都不超过 n,也都不少于1人,故知他们 n 个人的朋友数恰分别为 n, $n-1,\cdots,1$(次序可以不同).特别地,其中必有一位科学家 B_i 恰有1位朋友.

5·8　试证在任何6个人中,总可以找出3个人,他们相互认识或相互都不认识.

(匈牙利数学奥林匹克,1947年)

[证]　用6个点来代表6个人.若两人相互认识,则在相应两点间连一条红线;若两人不认识,则在相应两点间连一条蓝线.于是得到一个共有6个顶点且每两点之间恰连有一条线,每条线都涂有红蓝两色之一的图(以后称之为二染色的 K_6).

在其中任取一点 A,由点 A 共引出5条线.由抽屉原理知其中必有3条同色,不妨设 AB_1,AB_2,AB_3 都是红色的.考察线段 B_1B_2,B_2B_3, B_3B_1.若其中有1条红线段,则得到一个3边皆红的单色三角形.若3边皆蓝,则 $\triangle B_1B_2B_3$ 是蓝色的单色三角形.这就证明了结论成立.

5·9　国际数学奥林匹克主试委员会有34个国家参加,每国由领队和副领队两人参加.会前与会者互相握手,但同一国家的领队与副领队间不握手.会后东道国的领队问与会者握手的次数,所得的答数互不相同,问东道国的副领队与多少人握过手?

(第26届国际数学奥林匹克候选题,1985年)

[解]　显然,每个人最多与66人握手.既然67个人的答数互不相同,答数的集合当然是 $\{0,1,\cdots,66\}=E$.对于每个 $k\in E$,恰有1人 $p(k)$ 恰好与 k 个人握过手.

$p(66)$ 与另外33国的66人各握一次手,因而另外66人每人至少握了1次手,所以 $p(0)$ 一定与 $p(66)$ 是同一国的,他们当然不是东道

国的领队与副领队. 与 $p(1)$ 握手的只有 1 人, 当然是 $p(66)$. 因此, $p(0)$ 与 $p(1)$ 是仅有的两个未与 $p(65)$ 握手的人,从而 $p(1)$ 与 $p(65)$ 必是同一国家的. 类似地可知; $p(j)$ 与 $p(66-j)$ 是同一国家的, $j=2,3,\cdots,32$. 因此,东道国的副领队是 $p(33)$,他恰好与 33 人握过手.

5·10 一群童子军,年龄从 7 岁至 13 岁,来自 11 个国家. 求证至少有 5 个孩子,每一个的同龄人多于同国籍的人.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1989 年)

[证] 考虑一个 7 行 11 列的矩形数表. 数表中第 i 行 j 列的数 a_{ij} 表示第 j 个国家的年龄为 $6+i$ 的人数.

令 $r_i=\sum_{j=1}^{11}a_{ij}$ 为第 i 行的行和, $1\leqslant i\leqslant 7$.

$c_j=\sum_{i=1}^{7}a_{ij}$ 为第 j 列的列和, $1\leqslant j\leqslant 11$.

则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{11}a_{ij}\left(\frac{1}{c_j}-\frac{1}{r_i}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{11}\frac{a_{ij}}{c_j}-\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{11}\frac{a_{ij}}{r_i}\\
&=\sum_{j=1}^{11}\frac{1}{c_j}\sum_{i=1}^{7}a_{ij}-\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{11}a_{ij}\\
&=\sum_{j=1}^{11}1-\sum_{i=1}^{7}1\\
&=11-7\\
&=4.
\end{aligned}$$

由于 $a_{ij}\left(\frac{1}{c_j}-\frac{1}{r_i}\right)<1$,所以在上述和式中至少有 5 个 $\frac{1}{c_j}-\frac{1}{r_i}>0$,即至少有 5 个孩子,每个人的同年龄的人数 (r_i) 多于同国籍的人数 (c_j).

5·11 已知一群人中至少有两人是朋友,求证可以把他们分成两组,使得同组中的朋友对数小于异组间的朋友对数.

(第 52 届莫斯科数学奥林匹克,1989 年)

[证] 设一群人的人数为 n 并用平面上的 n 个点来表示. 如果两人是朋友,则将相应两点间连一条线. 下面我们对人数 n 用归纳法来证

明：可以适当地将每点都涂上红蓝两色之一，使得端点异色的线段条数大于端点同色的线段条数.

当 $n = 2$ 时，按已知，两人是朋友. 故只须将两点涂成一红一蓝便可使命题成立. 设当 $n = k$ 时命题成立. 当 $n = k + 1$ 时，按归纳假设，我们可以先对其中 k 点涂好颜色，使得端点异色的线段多于端点同色的线段. 然后考察第 $k + 1$ 个点. 设它与蓝点连线数为 m_1，与红点连线数为 m_2. 若 $m_1 \geqslant m_2$，则将它涂成红色；若 $m_1 < m_2$，则将它涂成蓝色. 这样一来，$k + 1$ 点之间仍然是端点异色的线段多于端点同色的线段，这就完成了归纳证明.

5·12　有 n 个人互不相识. 试证总可以让其中一些人互相结识，使对任何 3 个人，他们在这 n 个人范围内所认识的人数都不全相等.

（第 7 届全苏数学奥林匹克，1973 年）

［证 1］　用数学归纳法来证明. 当 $n = 2$ 时，结论显然成立. 设结论于 $n = k$ 时成立. 当 $n = k + 1$ 时，由归纳假设知可让前 k 个人中的一些人互相结识，使这 k 个人认识人的人数满足题中要求. 易见，这时 k 个人中或者无人所认识的人数为 0，或者无人所认识的人数为 $k - 1$，或者二者兼有之. 若为前者，则只要保持第 $k + 1$ 人与前 k 人都不认识就行了；若为后者，则当让第 $k + 1$ 人与前 k 人都认识时便满足题中要求，这就完成了归纳证明.

［证 2］　将 n 个人排号分别为 $1,2,\cdots,n$. 对于号码为 i,j 的两人，当且仅当 $|i - j| \leqslant \frac{n}{2}$ 时让二人结识. 容易看出，只有号码为 k 和 $n - k$ 的两人才有相同数目的熟人. 所以任何 3 人所各自熟识的人数都不全相同.

5·13　偶数个人围绕着一张圆桌开讨论会，休息后他们以不同次序重新围着圆桌坐下. 求证至少有两个人，他们中间的人数在休息前后是相等的.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题，1988 年）

［证］　设共有 $2n$ 个人并将座位依次编号为 $1,2,\cdots,2n$. 每个人对应于一个数对 (i,j)，其中自然数 i,j 分别表示他休息前后的座号. 设这 $2n$ 个人所对应的数对为 (i,j_i)，$i = 1,2,\cdots,2n$. 显然，$\{j_1,j_2,\cdots,j_{2n}\}$ 是 $1,2,\cdots,2n$ 的一个排列.

若结论不成立,则对任意两个数对(i_1,j_{i_1})和(i_2,j_{i_2}),都有

$$i_1-i_2\not\equiv j_{i_1}-j_{i_2}\pmod{2n},$$

亦即有

$$i_1-j_{i_1}\not\equiv i_2-j_{i_2}\pmod{2n}.\qquad ①$$

由①知$\{1-j_1,2-j_2,\cdots,2n-j_{2n}\}$是模$2n$的一个完全剩余系.于是有

$$\sum_{i=1}^{2n}(i-j_i)\equiv\sum_{k=1}^{2n}k=n(2n+1)\not\equiv 0\pmod{2n}.\ ②$$

另一方面,由于$\{j_1,j_2,\cdots,j_{2n}\}$是$1,2,\cdots,2n$的一个排列,又有

$$\sum_{i=1}^{2n}(i-j_i)=0,$$

此与②矛盾.这表明必有两个人在休息前后,坐在他们中间的人数相等.

5·14 在一群数学家中,每个人都有一些朋友(关系是相互的),求证存在一位数学家,他的所有朋友的朋友数的平均数不小于这群人的朋友数的平均数.

(第31届国际数学奥林匹克候选题,1990年)

[证] 将这群数学家的集合记为M,$n=|M|$.对于$m\in M$,将m的所有朋友的集合记为$F(m)$,并记$f(m)=|F(m)|$.于是本题化为:存在$m_0\in M$,使得

$$\frac{1}{f(m_0)}\sum_{m\in F(m_0)}f(m)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{m\in M}f(m).$$

若不然,则对任何$m_0\in M$,均有

$$n\cdot\sum_{m\in F(m_0)}f(m)<f(m_0)\sum_{m\in M}f(m).$$

对所有$m_0\in M$求和,得到

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{m\in M}f(m)\Big)^2&=\sum_{m_0\in M}f(m_0)\sum_{m\in M}f(m)\\&>n\sum_{m_0\in M}\sum_{m\in F(m_0)}f(m)\\&=n\sum_{m\in M}\sum_{m_0\in F(m)}f(m)\end{aligned}$$

$$= n\sum_{m\in M}f(m)\sum_{m_0\in F(m)}1 = n\sum_{m\in M}f^2(m),$$

此与柯西不等式矛盾.

5·15　$2n$ 位武士在国王阿杜尔的王宫中聚会,已知每位武士在与会者中的仇人都不超过 $n-1$ 人,试证国王的谋臣有办法安排所有武士围着一张圆桌坐下,使得每位武士都不与自己的仇人相邻.

(第 27 届莫斯科数学奥林匹克,1964 年)

[证]　首先让 $2n$ 位武士随便就坐.若此时有相邻的 A 和 B 是仇人,我们就来调整座位.在其余 $2n-2$ 人中,A 至少有 n 位朋友而 B 至多有 $n-2$ 个仇人.设 B 坐在 A 的右方.从 A,B 依次往右数去,A 的前 $n-1$ 位朋友每人右方都还有人且不是 A,其中必有 1 人右方是 B 的朋友.不妨设 A 的朋友 C 的右邻是 B 的朋友 D.这时,我们就让从 B 到 C 的所有人 $BEF\cdots GHC$ 全部按颠倒的顺序 $CHG\cdots FEB$ 重新入座.显然,这样调整之后,相邻仇人的对数至少减少 1 对.只要座中还有仇人相邻,就照样进行调整.由于仇人对只有有限多个,故经若干次调整后,必会使得每位武士都不与自己的仇人相邻.

5·16　会议室里共有 60 名学生.已知其中的任何 10 名学生中都有 3 名学生是同班的.问这 60 名学生中是否必有 15 名是同班同学?是否必有 16 名是同班同学?

(第 57 届莫斯科数学奥林匹克,1994 年)

[解]　首先,如果 60 名学生分属于 4 个班,每班 15 人,则由抽屉原理知,10 名学生分属于 4 个班,其中必有 3 人是同班的.这表明 60 名学生中不一定有 16 人是同班同学.

如果 60 名学生中没有 15 名是同班同学,则这 60 名学生所属的班至少有 5 个.按各班在会议室的学生数排序为甲,乙,丙,丁,戊,….若丁班只有 1 人,则因甲,乙,丙各至多有 14 人.于是从丁开始往后至少有 18 个班各有 1 人.从其中所选的任何 10 人都不满足题中要求.因此丁班人数不少于 2.从甲,乙,丙,丁 4 班各取 2 人,再从以后的班级中选 2 人,则 10 人中没有 3 人同班.所以,60 人中必有 15 人是同班同学.

5·17　由 5 人组成一个公司,其中任何 3 人中总有两人彼此认识,也总有两人彼此不认识.求证可以让 5 人围绕圆桌而坐,使得相邻的人

都彼此相识.

（保加利亚数学奥林匹克,1978年）

［证］ 用5个点来代表5个人.当两人相识时,在相应两点间连一条红线,否则就连一条蓝线.于是得到一个二染色的有5个顶点的完全图.由于任何3人中总有两人相识,也总有两人不相识,故这个图中没有单色三角形(即3条边颜色相同的三角形).

我们指出,从图中任一顶点都不能引出3条同色线段.若不然,不妨设AB,AC,AD都是红线段,于是当BC,CD,DB中有1条红线时,便得到红三角形,否则便有蓝三角形,矛盾.因此,图中每个顶点都恰引出两条红线和两条蓝线.

考察图中所有红边所构成的子图,这时,每个顶点的度数都是2.因此,这个子图必是一个有5条边的圈.让5个人按红圈上顶点的次序围绕圆桌就坐便可满足题中要求.

5·18 已知在参观团的任意4个人中,总有1人原先见过其余的3个人,求证在参观团的任何4人中,总有1人原先见到过所有团员.

（匈牙利数学奥林匹克,1960年）

［证］ 如果参观团中的任何两人原先都见过面,结论自然成立.否则,设A和B是原先未见过面的一对团员.如果除这一对之外,其他任何两人都原先见过面,结论也成立.因而只须讨论还有异于$\{A,B\}$的两人对事先未见过面.若这两人中既无A又无B,设为$\{C,D\}$,则$\{A,B,C,D\}$4人不满足已知条件,矛盾.故$\{A,B\}\cap\{C,D\}\neq\varnothing$,不妨设$D=A$.于是有了两个事先未见过面的团员对$\{A,B\}$和$\{A,C\}$.同理可证,若再有未见过面的团员对,则与前两对中的每对都恰有一个公共成员.若为$\{A,D\}$,则$\{A,B,C,D\}$又不满足已知条件,故只能为$\{B,C\}$.容易看出,团中再也没有其他的原先未见过面的团员对了.由于这3对中不同团员只有3人,故在参观团的任何4人中,总有1人异于A,B,C,他原先见过所有团员.

5·19 已知一次集会有1982个人参加,其中任何4人中至少有1人认识其余3人.问在这次集会上,认识所有到会者的人最少有多少人?

（第11届美国数学奥林匹克,1982年）

［解］ 首先,设1982人中的A,B,C3人互不认识,而其余的1979

人都认识全体到会者,这种情形显然满足题中要求.所以,所求的认识所有到会者的人数的最小值不大于1979.

另一方面,若认识所有到会者的人数的最小值小于1979,则至少有4人不全认识所有到会者.设A与B互相不认识,于是除A与B之外,至少还有两人不全认识所有到会者.设C不认识D且$\{C,D\}\cap\{A,B\}=\varnothing$,则$A,B,C,D$4人中谁也不全认识其余3人,此与已知矛盾.可见,另两个不全认识所有到会者的C和D都是至少不认识A,B之一.但这又导致A,B,C,D4人中谁也不全认识其余3个人,与已知矛盾.

综上可知,在这次集会上,认识所有到会者的人数最少为1979.

5·20 已知3所学校中的每所都有n名学生,且任何1名学生认识其他两所学校的学生总数都是$n+1$,求证可以从每所学校各选1名学生,使得这3名学生彼此都相识.

(匈牙利数学奥林匹克,1977年)

[证] 设A是$3n$名学生中认识另一所学校中的学生数最大的一名学生.不妨设A是第1所学校的学生,他认识第2所学校中的k名学生,$k\geqslant\frac{1}{2}(n+1)$.于是$A$认识第3所学校中的$n+1-k$名学生.因为$k\leqslant n$,故$n+1-k\geqslant 1$.

考察第3所学校里认识A的学生B.如果B认识第2所学校中认识A的某学生C,则A,B,C即为所求.如果第2所学校中认识A的k名学生都不认识B,则B至多认识这所学校中的$n-k$名学生,从而B至少认识第1所学校中的$(n+1)-(n-k)=k+1$名学生,此与k的最大性矛盾.可见必有3名学生满足要求.

5·21 设有n个人聚会,其中有某些人相互认识.已知其中每两个互不认识的人都恰有两个共同认识的人,而每两个熟人都没有共同认识的人.求证每个与会者都有同样数目的熟人.

(第23届莫斯科数学奥林匹克,1960年)

(基辅数学奥林匹克,1983年)

[证1] 设与会者A有m个熟人$B_1,B_2,\cdots,B_m$.由于每两个熟人都没有共同的熟人,故知$B_1,B_2,\cdots,B_m$两两不认识.对任何$i,j(1\leqslant i<j\leqslant m)$,$B_i$和$B_j$恰有两个共同的熟人,除$A$之外还有一个共同的熟

人 C_{ij}. 显然, C_{ij} 不是 A 的熟人,从而不属于 $\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$. 定义映射

$$f:(B_i,B_j) \longrightarrow C_{ij}.$$

若还有 $(k,h) \neq (i,j)$,使 (B_k,B_h) 也对应于 C_{ij},则 A 和 C_{ij} 至少有 3 个共同的熟人,矛盾,故知映射 f 为单射. 反之,对任一个与 A 不认识的人 C, A 和 C 恰有两个共同的熟人,二者当然都在 $\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$ 中. 这样一来,映射 f 就是由 $\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$ 的所有二元子集到不认识 A 的所有人的集合的一个双射. 故得

$$n = 1 + m + C_m^2. \quad ①$$

若有与会者 B 的熟人数 $m' \neq m$. 则与上面论证一样地可得

$$n = 1 + m' + C_{m'}^2. \quad ②$$

显然,② 与 ① 矛盾. 这就证明了所有与会者都有同样数目的熟人.

[证 2] 设 A 与 B 相识. 记所有与 A 相识的人为 $B,A_1,A_2,\cdots,A_n$. 由已知, $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都不与 B 相识. 因为 A_j 与 B 不相识,由已知,恰有两人与二者都相识,其中 A 是 1 个,记另 1 个人为 B_j. 于是,对每一个与 A 相识的 A_j,都相应地有与 B 相识的 B_j. 显然有 $A_i \neq B_j$. 当 $i \neq j$ 时, $A_i \neq A_j$,则必有 $B_i \neq B_j$. 否则将导致 3 个人 B,A_i,A_j 都认识 A 和 B_i,矛盾. 由此可知,认识 B 的人数不少于认识 A 的人数. 同理,认识 A 的人数也不少于认识 B 的人数,所以 A 和 B 认识的人数相等.

设 C 和 D 不相识. 由已知,存在 E 和 F 与 C,D 都相识. 由(1) 中结果知, C 和 E, D 和 E 认识的人数都相等,故 C 和 D 认识的人数也相等.

综上可知,与会的所有人认识的人数都相等.

5·22　1990 个人分成若干个互不相交的子集,使得

(a) 每个子集中没有人认识这子集中所有的人.

(b) 每个子集中,任意三个人中至少有两个人互不相识.

(c) 每个子集中,对任意两个互不相识的人,这一子集中恰有一个人认识这两个人.

(1) 证明在每个子集中,各个人认识的人数相等.

(2) 问上述子集最多能有几个?

(亚太地区数学奥林匹克,1990 年)

[解] (1) 只考虑一个子集.

设 y_1 与 y_2 在同一子集中,且互不相识(由条件(a) 这是可能的). 由(c),存在 x 与 y_1,y_2 都相识.

设除去 x 及 y_1 自身外，y_1 认识的人为

$$\{z_{11},z_{12},\cdots,z_{1h}\}.$$

y_2 认识的人为

$$\{z_{21},z_{22},\cdots,z_{2k}\}.$$

由(b)，x 与 $z_{11},z_{12},\cdots,z_{1h},z_{21},z_{22},\cdots,z_{2k}$ 均不相识.

由(c)，因为 y_1 和 y_2 不相识，又恰有 x 与它们相识，所以 y_2 与 z_{11}，$z_{12},\cdots,z_{1h}$ 均不相识. 于是 $z_{11},z_{12},\cdots,z_{1h}$ 与 $z_{21},z_{22},\cdots,z_{2k}$ 互不相同.

由(c)，z_{11} 与 y_2 恰有一个公共相识的人，不妨设为 z_{21}. z_{12} 与 y_2 也恰有一个公共相识的人，显然此人不是 z_{21}，否则 y_1 与 z_{21} 有两个公共相识的人 z_{11} 与 z_{12}，与(c)矛盾，设 z_{12} 与 y_2 的公共熟人为 z_{22}.

如此继续下去，可知 $h\leqslant k$(这是因为，$z_{11},z_{12},\cdots,z_{1h}$ 在 $z_{21},z_{22},\cdots,z_{2k}$ 中各有一相识的人，且这些人互不相同.

由对称性，亦有 $k\leqslant h$. 所以 $k=h$. 即互不相识的两个人，熟人的个数相同.

对于 y_1 的熟人 x，x 的熟人 y_2 与 y_1 互不相识，由上面的论证，我们知道 x 与 z_{11} 的熟人的个数相同，z_{11} 与 y_2 的熟人的个数相同，从而这一子集中，每个人的熟人的个数均为 $h+1$.

(2) 在同一子集中，x 有一不认识的人 y，x,y 有一公共熟人 z，z 有一不认识的人 u，u 不可能与 x,y 都认识(否则与(c)矛盾)，设 u 不认识 x，则 u 与 x 有一公共熟人 v，v 不同于 y,z，于是每一组至少5个人.

5个人的组是可以存在的. 只需 x 认识 y，y 认识 z，z 认识 u，u 认识 v，v 认识 x，除此之外每两对人互不相识.

于是，小组的个数至多为 $\dfrac{1990}{5}=398$.

5·23　在一个车厢中，任何 $m(m\geqslant 3)$ 个旅客都有惟一的公共朋友(当甲是乙的朋友时，乙也是甲的朋友；任何人都不作为自己的朋友)，问在这个车厢中，朋友最多的人有多少位朋友？

(中国国家集训队选拔试题，1990 年)

[解]　设朋友最多的人有 k 个朋友，显然，$k\geqslant m$. 若 $k>m$，设 A 有 k 个朋友 $B_1,B_2,\cdots,B_k$，并记 $S=\{B_1,B_2,\cdots,B_k\}$. 设 $\{B_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_{m-1}}\}$ 是 S 的任一个 $m-1$ 元子集，则 $A,B_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_{m-1}}$ 这 m 个人

有惟一的公共朋友,记为 C_i. 因 C_i 是 A 的朋友,故 $C_i \in S$. 定义映射

$$f: \{B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_{m-1}}\} \longmapsto C_i \in S,$$

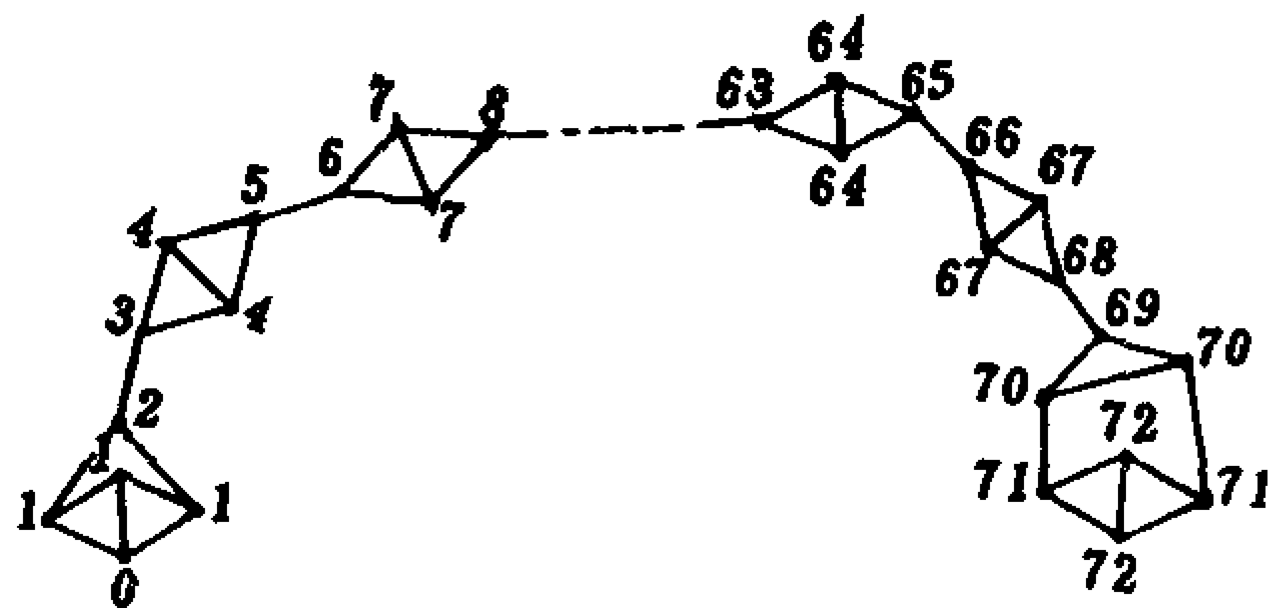
则 f 是从 S 的所有 $m-1$ 元子集的集合到 S 的一个单射. 事实上,若有 S 的两个不同的 $m-1$ 元子集 $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_{m-1}}\}$ 和 $\{B_{j_1}, B_{j_2}, \cdots, B_{j_{m-1}}\}$,二者有相同的象 C_i,则因 $\{B_{i_1}, \cdots, B_{i_{m-1}}\} \cup \{B_{j_1}, \cdots, B_{j_{m-1}}\}$ 中至少有 m 个元素,这 m 个人有两个公共朋友 A 和 C_i,此与已知矛盾.

由于 f 是单射,故有 $C_k^{m-1} \leqslant k$. 另一方面,因为 $m \geqslant 3, m-1 \geqslant 2$,所以 $C_k^{m-1} \geqslant C_k^2 > C_k^1 = k$,矛盾. 可见,所求的最大值为 m.

5·24　市镇里有100个居民,他们每人都恰有3个熟人. 元月1日,有一居民获知了一条消息,当日便告知了他的3个熟人;元月2日这些知情者又将消息告知了他们的所有熟人,如此继续下去. 问是否可能在3月5日时,消息尚未传遍所有居民,而在3月19日时,则已传遍了?

(第41届莫斯科数学奥林匹克,1978年)

[解]　可以实现. 下图中给出了100个居民的关系网络,当然也是据题设要求消息的传播图:其中每个点代表一个居民,互为熟人所对应的点间有线段连结. 每点旁标出的整数表示该人获知消息时是从元月1日算起的第几天. 图中的中间部分共有22个菱形,88个顶点,整个图中恰有100个顶点. 从元月1日到3月5日共计64天,所以沿着这个图传播,消息刚好传到标有64的两点所代表的居民,当然还没有传遍所有居民. 由图中所标的数可知,还要经过8天,即到了3月13日时才能传遍所有居民. 这就表明了题中所要求的情形是可以实现的.



5·25　试证在任何由12个人组成的人群中,都可以找出两个人来,使得在其余10个人中都至少有5个人,他们中的每个人都或者同时认识开头的两个人,或者同时不认识这两个人.

(第48届莫斯科数学奥林匹克,1985年)

[证]　我们用12个点来代表12个人,且当两人相识时,在相应两

点间连一条红线，当两人不相识时，在相应两点间连一条蓝线．由一点引出的两条线段构成一个角，当两边同色时称为同色角，两边异色时称为异色角．易见，我们的问题是12点中必可找出两点，使其他10点对这两点张成的10个角中至少有5个同色角．

设第 i 点引出 n_i 条红线和 $11-n_i$ 条蓝线，$i=1,2,\cdots,12$，则以第 i 点为角顶的同色角的个数为 $C_{n_i}^2+C_{11-n_i}^2\geqslant 25$．所以，图中至少共有 $25\times 12=300$ 个同色角．图中12个顶点共可组成不同的两点组 $C_{12}^2=66$ 个．$300=66\times 4+36$，故由抽屉原理知，必存在一个两点组及另外至少5点，使每点对前两点的张角都是同色的．

5·26 已知晚会上有 n 个人，试证其中存在2人，使得其余的 $n-2$ 个人中，至少有 $[\frac{n}{2}]-1$ 个人，每个人或者同这2人都相识，或者都不相识（假定相识是相互的）．

（第14届美国数学奥林匹克，1985年）

［证］ 用 n 个点来代表 n 个人，且当两人相识时，在相应两点间连结一条红线，当两人不相识时，就在相应两点间连一条蓝线．于是我们得到一个二染色的有 n 个顶点的完全图．由同一点引出的两条线构成一个角．当两条边同色时称为同色角，而当两条边异色时称为异色角．于是本题要证的是：图中必存在两个顶点，使其余的 $n-2$ 个点中，至少有 $[\frac{n}{2}]-1$ 个点对前两点所张成的角都是同色角．

设第 i 个顶点共引出 k 条红线和 $n-k-1$ 条蓝线，于是以这点为顶点的异色角共有 $k(n-k-1)$ 个．由均值不等式有

$$k(n-k-1)\leqslant\frac{1}{4}(n-1)^2.$$

所以，整个图中至多有 $\frac{1}{4}n(n-1)^2$ 个异色角．从而至少有 $nC_{n-1}^2-\frac{1}{4}n(n-1)^2=\frac{1}{4}n(n-1)(n-3)$ 个同色角．

另一方面，n 个顶点共可组成 C_n^2 个点对，于是由抽屉原理知必有一个点对，使其余 $n-2$ 点对二者张成的同色角的个数不小于 $\frac{1}{2}(n-3)$，亦即同色角的个数不小于 $[\frac{n}{2}]-1$．

5·27 设某城市居民的年龄不是用整数而是用实数来表示，每两人 x 与 x' 或者互相认识或者互相不认识. 而且当两人不认识时，存在居民链 $x = x_0, x_1, \cdots, x_n = x'(n \geqslant 2)$，使 x_{i-1} 与 x_i 都互相认识. 在一次调查中，所有男居民都申报了自己的年龄，且至少有一个男居民，但每个女居民仅仅提供了如下信息：她们每人的年龄都等于自己所认识的所有人的年龄的平均值. 求证上述条件足以惟一确定所有女居民的年龄.

（第 35 届国际数学奥林匹克预选题，1994 年）

[证] 设共有 m 个男居民，他们的年龄分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$，$m \geqslant 1$. 只须证明，每个女居民的年龄都可以表成 $c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_ma_m$，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 都是非负常数且 $c_1 + c_2 + \cdots + c_m = 1$.

我们对城中女居民的人数 n 使用数学归纳法来证明. 当 $n = 1$ 时，惟一的女居民所认识的人全是男居民，结论显然成立. 设当 $n = k$ 时结论成立. 考察 $n = k + 1$ 的情形. 任取一位女居民 W，设她的年龄为 w，她认识 h 个居民，$k \geqslant 1$，且 h 人中至少有 1 个男居民. 现将 W 视为男居民，则女居民剩下 k 人，于是由归纳假设知 k 个女居民中每人年龄都可写成

$$x = c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_ma_m + c_{m+1}w, \qquad ①$$

其中 $c_{m+1} \geqslant 0$ 且 $c_1 + c_2 + \cdots + c_m + c_{m+1} = 1$. 这样，认识 w 的 h 个人的年龄之和为

$$hw = b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_ma_m + b_{m+1}w,$$

其中 $b_1, b_2, \cdots, b_{m+1}$ 都是非负常数且 $b_1 + b_2 + \cdots + b_{m+1} = h$. 此外，因为 W 至少认识 1 位男居民，所以 $b_{m+1} \leqslant h - 1$，即 $h - b_{m+1} > 0$. 因而有

$$w = \frac{b_1}{h - b_{m+1}}a_1 + \frac{b_2}{h - b_{m+1}}a_2 + \cdots + \frac{b_m}{h - b_{m+1}}a_m. \qquad ②$$

易见，上式中所有系数之和为 1. 将 ② 代入 ① 即得，其他女居民的年龄为

$$x = \left(c_1 + \frac{c_{m+1}b_1}{h - b_{m+1}}\right)a_1 + \left(c_2 + \frac{c_{m+1}b_2}{h - b_{m+1}}\right)a_2 + \cdots + \left(c_m + \frac{c_{m+1}b_m}{h - b_{m+1}}\right)a_m,$$

其中 m 个括号中的系数之和为 1，这就完成了归纳证明.

5·28 在有男女青年参加的晚会上,已知对其中任何一组男青年,至少认识其中1名男青年的姑娘的人数都不少于这组男青年的人数.求证每个男青年都可以和他所认识的姑娘结伴,共同起舞.

(罗马尼亚数学奥林匹克,1978年)

[证] 对男青年的人数 n 使用数学归纳法来证明.当 $n = 1$ 时,结论显然成立.设结论对所有 $n < k$ 成立.当 $n = k$ 时,考察如下两种情形.

(1) 设有某组 m 个男青年,他们所认识的姑娘总数恰为 m, $m < k$.记这 m 个男青年所成的集合为 A.由归纳假设,这组男青年中的每人都可以与自己所认识的姑娘结伴起舞.对于其余的男女青年,题中的条件仍被满足.事实上,设 B 是不属于 A 的全部 i 名男青年的集合.由已知, $A \cup B$ 中的 $i + m$ 名男青年至少认识 $i + m$ 位姑娘.因为认识 A 中男青年的姑娘总数恰好为 m,故认识 B 中男青年的姑娘总数不少于 i.这样一来,由归纳假设便知 B 中每位小伙子也都可以和自己相识的姑娘结伴跳舞.

(2) 设对任意 $m < k$,任何 m 位男青年所认识的姑娘数都大于 m.任取1位男青年并让他与1位认识的姑娘结伴.则由于余下的 $k - 1$ 位男青年中的任何 m 人所认识的姑娘总数都不少于 $m + 1$.故当去掉已结伴的那位姑娘后,所认识的姑娘数仍然不少于 m,即题中条件仍然成立.于是由归纳假设即知结论于 $n = k$ 时成立.

5·29 在一个房间里有9个人,其中任意3人中都至少有两人相互认识,求证其中必有4人,他们中任何两人都相互认识.

(第19届国际数学奥林匹克候选题,1977年)

[证] (1)若有某人 A 与另外4人 B,C,D,E 中的每人都不认识,则因任意3人中都必有两人相互认识,故 B,C,D,E 4人中的任何两人都相互认识.

(2) 设9人中任何1人不认识的人数都不大于3.这等价于每人认识的人数至少为5.但因认识是相互的,故9人所认识的人数之和应为偶数.所以不可能每人都恰好认识5人,其中有1人至少认识另外6人.不妨设 A 与 B,C,D,E,F,G 中的每个人都相识.

考察 B,C,D,E,F,G 6人之间的相识情形.这时, B 与后5人中的3人都相识或都不相识.不妨设这3人是 C,D,E.若 B 与 C,D,E 都不

相识，则由已知可知 C,D,E 3 人两两相识. 从而 A,C,D,E 4 人两两相识. 若 B 与 C,D,E 都相识，则因 C,D,E 3 人之中必有两人相识，不妨设 C 和 D 相识，则 A,B,C,D 4 人两两相识.

5·30　已知某村庄共有1000个居民，他们每天都向自己的熟人讲述昨天见到或听到的新闻且每件新闻都可传遍所有居民. 试证可以选择90个居民，使得只要把某条新闻告诉这90个人，则10天后这条新闻就会传遍所有居民.

（第15届全苏数学奥林匹克，1981年）

［证］　如果居民 X 与 A_1，A_1 与 A_2，…，A_k 与 Y 两两都是熟人，我们就说这些居民构成一条链 $X—A_1—A_2—\cdots—A_k—Y$. 由已知条件可知，任何两人都由某条链连接. 如果在村子中存在闭链，即 X 与 Y 也是熟人，则可规定其中两人不是熟人，而使得没有闭链.

取最长的一条链 $X—A_1—A_2—\cdots—A_{10}—\cdots—A_k—Y$. 如果 $k \leqslant 19$，则任何人与 A_{10} 相连的链长都不超过 10，从而只要将新闻告诉 A_{10}，10天后即可使全村人都知道这条新闻. 如果 $k \geqslant 20$，那么就分出居民 $X,A_1,A_2,\cdots,A_{10}$ 以及与他们不经过 A_{11} 而相连的所有人（总共不少于11人）. 由于原链是最长链，所以这些分出的居民中的任何一人与 A_{10} 相连的链都不超过11人. 可见，只要让 A_{10} 知道新闻，10天之后这些分出的居民就全都知道了这则新闻.

分出这些人之后，余下的居民仍然满足题中的条件，故又可像上面一样地处理，并重复这个过程. 这样一来，或者在某一步中能使所有居民都在10天后了解这则新闻且总步数不超过89，或者在重复上述过程89步之后，余下的人数不超过21人. 若为后者，则只要再从中选1人即可完成10天内传播新闻的任务. 可见，至多选取90人即可满足题中要求.

5·31　某校组织学生观测彗星共20次，每次活动恰有5名学生参加，且任何两名学生都至多同时参加1次活动. 求证参加这20次活动的不同学生数不少于21人.

（第57届莫斯科数学奥林匹克，1994年）

［证］　如果有一名学生 A 共参加了5次活动，则因任何两名学生都至多同时参加1次活动，所以 A 所参加的5次活动中，每次除 A 外的另外4人共20人互不相同. 因而5次活动至少有21人参加.

如果参加活动的学生都至多参加 4 次，则因 20 次活动共有 100 人次，所以参加活动的人数至少有 25 人.

综上可知，参加这 20 次活动的不同学生数不少于 21 人.

5·32. 某班共有 30 名学生，每名学生在班内都有同样多的朋友. 期末时任何两人的成绩都可分出优劣，没有相同的. 问比自己的多半朋友的成绩都要好的学生最多能有多少人？

（第 20 届全俄数学奥林匹克，1994 年）

[解] 将成绩比自己的多半朋友都要好的学生称为"好学生". 设全班共有 x 名好学生，且每名学生都恰有 k 个朋友.

考察班上的朋友对. 显然，全班共有 $15k$ 个朋友对. 全班第 1 名的学生，在他所在的 k 个朋友对中都是成绩较好的. 其余的每名好学生，都至少在 $[\frac{k}{2}]+1 \geqslant \frac{k+1}{2}$ 个朋友对中是成绩较好的. 因此，x 个好学生至少共在 $k+\frac{1}{2}(x-1)(k+1)$ 个朋友对中是成绩较好的. 于是有

$$\frac{1}{2}(x-1)(k+1)+k \leqslant 15k.$$

由此解得

$$x \leqslant 28\frac{k}{k+1}+1. \qquad ①$$

另一方面，比班内最差的好学生成绩还差的学生数至多为 $30-x$，于是又有

$$\frac{k+1}{2} \leqslant 30-x,$$

$$k \leqslant 59-2x. \qquad ②$$

因为 ① 式右端是 k 的递增函数，故由 ① 和 ② 可得

$$x \leqslant 28 \cdot \frac{59-2x}{60-2x}+1.$$

整理后得到

$$x^2-59x+856 \geqslant 0. \qquad ③$$

由 ③ 解得

$$x \leqslant \frac{59-\sqrt{57}}{2}, \quad x \geqslant \frac{59+\sqrt{57}}{2}.$$

再由 $x \leqslant 30$ 为整数即知 $x \leqslant 25$，即班中至多有 25 名好学生.

下面举例说明好学生数可以达到 25 名. 由 ① 和 ② 知, 为使 $x = 25$, 取 $k = 9$ 是适宜的. 将全班学生按成绩好坏排名次为 1,2,…,30, 并将这些号码依次填入 6×5 的方格表中如图所示. 规定当两名学生的号码是下列 3 种情形之一时, 两人是一对朋友:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

(1) 处于相邻两行, 但处于不同的列;

(2) 处于同一列, 但其中一人在最后一行;

(3) 同处于最上面一行中.

易见, 每人都恰有 9 名朋友, 且前 25 人都是好学生.

综上可知, 全班最多能有 25 名好学生.

5·33　8 位歌手参加艺术节 准备为他们安排 m 次演出, 每次由其中 4 位登台表演. 要求 8 位歌手中任意两位同时演出的次数都一样多. 请设计一种方案, 使得演出的次数 m 最少.

(第 11 届中国中学生数学冬令营, 1996 年)

[解]　设任意两位歌手都同时演出 r 次, 于是有

$$mC_4^2 = rC_8^2.$$

$$6m = 28r,$$

$$3m = 14r.$$

因此有 $3 \mid r$. 所以, $r \geqslant 3, m \geqslant 14$.

将 8 名歌手分别编号为 1,2,…,8, 并安排 14 次演出如下:

$$\{1,2,3,4\}, \quad \{5,6,7,8\},$$
$$\{1,2,5,6\}, \quad \{3,4,7,8\},$$
$$\{1,2,7,8\}, \quad \{3,4,5,6\},$$
$$\{1,3,5,7\}, \quad \{2,4,6,8\},$$
$$\{1,3,6,8\}, \quad \{2,4,5,7\},$$
$$\{1,4,5,8\}, \quad \{2,3,6,7\},$$
$$\{1,4,6,7\}, \quad \{2,3,5,8\}.$$

易见, 每两位歌手都恰好同时演出 3 次. 故知所求的 m 的最小值为 14.

5·34　已知一个国际社团的成员来自六个国家, 共有成员 1978 人. 用 1,2,3,…,1978 将这些成员编号. 试证此社团中必有一名成员,

他的顺序号数与他的两个同胞的顺序号数之和相等或是他的一个同胞的顺序号数的二倍.

(第 20 届国际数学奥林匹克,1978 年)

[证] 若不然,则在六国的任一国家中,任一成员的顺序号数都不等于同国另外两个成员的号码之和,也不等于另一个成员的号码的 2 倍.换句话说,这时,任一国中任两个成员的顺序号数之差一定不是该国中某成员的号码.

用 A,B,C,D,E,F 表示六个国家.由于 $1978=6\times 329+4$,故由抽屉原理知有一个国家,不妨设 A 国在社团中至少有 330 人,其号码依次为

$$a_1>a_2>a_3>\cdots>a_{330}.$$

考虑下列差数

$$a_1-a_2,a_1-a_3,\cdots,a_1-a_{330}. \quad ①$$

由反证假设知 $a_1-a_i\notin A,i=2,3,\cdots,330$,这表示号码为 a_1-a_i 的成员不是 A 国人.于是以①中各差为号码的 329 名成员都是 B,C,D,E,F 五国的人.因为 $329=5\times 65+4$,所以这五国中又有一国,不妨设 B 国至少有 66 名成员的号码在①之中,设他们的号码依次为 $b_1>b_2>\cdots>b_{66}$.

考虑下列差数

$$b_1-b_2,b_1-b_3,\cdots,b_1-b_{66}. \quad ②$$

类似于上段论证知,以②中各差为号码的 65 名成员都是 C,D,E,F 四国的人.由于 $65=4\times 16+1$,故知四国中必有一国,不妨设为 C 国至少有 17 名成员的号码在②之中,设他们的号码依次为 $c_1>c_2>\cdots>c_{17}$.

考虑差数

$$c_1-c_2,c_1-c_3,\cdots,c_1-c_{17}. \quad ③$$

由反证假设有 $c_1-c_i\notin C$ 且容易验证 $c_1-c_i\notin A\cup B,i=2,3,\cdots,17$.因此以③中各差数为号码的成员必为 D,E,F 三国之人.由抽屉原理及对称性知可设其中至少有 6 人是 D 国人.他们的号码依次为 $d_1>d_2>d_3>d_4>d_5>d_6$.

考虑差数

$$d_1-d_2, d_1-d_3, d_1-d_4, d_1-d_5, d_1-d_6. \quad ④$$

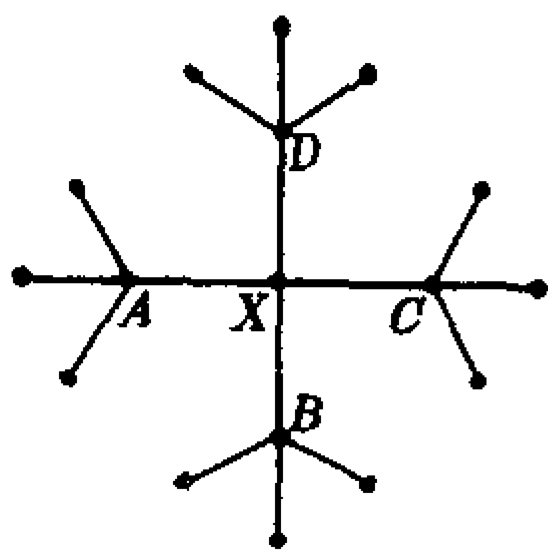
类似于上面论证知以④中差数为号码的5人全是E,F两国的人,不妨设其中至少有3人是E国人,他们的号码依次是$e_1>e_2>e_3$.这样一来,以e_1-e_2,e_1-e_3为号码的成员必为F国人,但以e_2-e_3为号码的也只能是F国人.于是有$(e_1-e_2)+(e_2-e_3)=e_1-e_3$,此与反证假设矛盾.

5·35 某公司有17个人,其中每个人都恰好认识另外4个人,求证存在两个人,他们彼此不相识且没有共同的熟人.

(第26届独联体数学奥林匹克,1992年)

[证] 用平面上的17个点代表17个人,当且仅当两人相识时,在相应两点间连一条线.于是得到一个有17个顶点和34条边的图.

若本题结论不成立,则任一顶点X与其余16个顶点之中的任何顶点之间或者有边相连,或者同时与某顶点有边相连.由于顶点X恰引出4条边,而这4条边的另4个顶点A,B,C,D每点又各引出另外3条边,共有顶点17个.如果还有某顶点不在上面已出现的顶点之中,则它与X之间的关系与反证假设矛盾.从而知上面所出现的17个顶点互不相同(见图).由于图中还有18条线未画出,显然,这18条线全都是图中的自由顶点之间的连线(即图中未标字母的那12个顶点间的连线).这12个自由顶点分成4组,每组3点.由于每个自由顶点都必须与另外3组顶点中各1点有边相连,故组内3点之间无边相连.这样一来,无边相连的异组两个自由顶点与任何其他顶点都不同时有边相连,矛盾.



5·36* 围绕圆桌坐着n个人,允许任何邻座两人交换位置.问最少要做多少次交换,才能使得原来邻座的任何两人仍然相邻,但顺序却完全颠倒过来了?

(第44届莫斯科数学奥林匹克,1981年)

[解] 当$n=2k$时,用一条直线将圆桌分成两部分,使每一部分都坐有k个人.对每一部分,设依次坐着的k个人为$a_1,a_2,\cdots,a_k$,并按如下方式进行交换:先让a_1与$a_2,a_3,\cdots,a_k$交换,然后a_2与$a_3,a_4,\cdots,a_k$交换,…… 最后a_{k-1}与a_k交换.易见,其中任何两人都恰好交换一

次，所以共进行了 $C_k^2=\frac{1}{2}k(k-1)$ 次交换. 于是 n 个人共进行了 $2C_k^2=k(k-1)$ 次交换，且这时 n 个人的顺序完全颠倒过来了.

当 $n=2k+1$ 时，将圆桌分成两部分，使两部分的人数分别为 k 和 $k+1$. 像上面一样地可以证明，进行 $C_k^2+C_{k+1}^2=k^2$ 次交换可以使 $2k+1$ 个人的顺序完全颠倒过来.

下面用数学归纳法证明上面得到的次数是最少的.

当 $k=1,2$ 时，命题显然成立. 设命题于 $n=2k$ 时成立. 当 $n=2k+2$ 时，设 A 和 B 的位置是相对的，即 A，B 两人之间无论哪边都夹着 k 个人. 保持 A，B 两人座位不动并对另外的 $2k$ 个人按没有 A，B 两人在场的情形进行交换，由归纳假设知最少要进行 $k(k-1)$ 次交换，才能使他们的顺序完全颠倒过来. 再考察他们与 A，B 两人的交换. 为满足要求必须使 A 与 B 连线两边的人完全互换，故这 $2k$ 个人要么与 A 做交换，要么与 B 交换. 从而至少交换 $2k$ 次. 于是总共至少进行 $k(k-1)+2k=k(k+1)$ 次交换，即命题于 $n=2k+2$ 时成立.

设命题于 $n=2k+1$ 时成立. 当 $n=2k+3$ 时，设 A，B 两人一边夹有 k 个人，另一边夹有 $k+1$ 个人. 像前段一样，当不考虑 A 和 B 时，由归纳假设知，最少要做 k^2 次交换才能使其余 $2k+1$ 个人的顺序完全颠倒过来. 再考察他们与 A，B 两人的交换. 这时有两种可能：一种情形是像前段一样地交换，至少要进行 $2k+1$ 次；另一种情形是 A，B 分别与同一部分中的所有人交换一次且 A 和 B 也交换一次. 这时也至少进行 $2k+1$ 次交换，从而至少共进行 $k^2+2k+1=(k+1)^2$ 次交换，即命题于 $n=2k+3$ 时也成立.

5·37 已知国会里的每位议员至多有 3 个政敌. 求证可以把国会分成两院，使每位议员在他所在的院内至多有一个政敌(当 B 是 A 的政敌时，A 也是 B 的政敌).

(第 13 届全苏数学奥林匹克，1979 年)

[证] 对于把所有议员分成两院的每一种分法，都计算两院中同院政敌对数之和 S. 因为把议员分成两院的不同分法只有有限多种，故其中必有一种分法使同院政敌对的总数 S 达到最小值. 易证，这种分法便满足题中要求.

若不然，设议员 A 属于上院且在上院中至少有两个政敌. 于是当

把议员 A 分到下院时,将使 S 减少,此不可能.

5·38　已知某议会共有 30 位议员,其中每两人或者是朋友或者是政敌,每位议员恰有 6 个政敌. 每三位议员组成一个三人委员会. 如果一个委员会中的三人两两都是朋友或两两都是政敌,则称之为"好委员会". 求所有好委员会的个数.

(第 24 届全苏数学奥林匹克,1990 年)

[解 1]　将好委员会的全体记为 X,所有其他的委员会所成的集合记为 Y. 集 X 和 Y 中的元素个数分别记为 x 和 y. 于是

$$x + y = C_{30}^3 = 4060. \quad ①$$

对任一议员 a,记有 a 参加的所有委员会的集合为 S_a. 在 S_a 中,另两人同时为 a 的朋友或政敌的委员会的总数为 $C_6^2 + C_{23}^2 = 268$. 对于 30 位议员来说,这种委员会共有 8040 个. 显然,在这个计数过程中,X 中的每个委员会被计数 3 次,而 Y 中的委员会则仅被计数 1 次,故有

$$3x + y = 8040. \quad ②$$

将 ① 与 ② 联立即得 $x = 1990$.

[解 2]　用 30 个点来代表 30 位议员. 如果两位议员是朋友,就在相应两点间连一条红线,否则就连一条蓝线. 显然,好委员会就化为单色三角形,问题就是求图中的单色三角形的总数. 为此,我们先来求三边颜色不全相同的异色三角形的总数.

我们将两边异色的角称为异色角. 显然,每个异色三角形中恰有两个异色角. 图中每个顶点都恰发出 6 条蓝线和 23 条红线,构成 $23 \times 6 = 138$ 个异色角. 所以,异色三角形的总数为 $138 \times 30 \div 2 = 2070$. 因为顶点在 30 个点中的所有三角形的总数为 $C_{30}^3 = 4060$,所以单色三角形的总数,即好委员会的总数为 1990.

5·39　某人给 6 位不同的收信人写了各一封信,并且准备了 6 个写有收信人姓名地址的信封. 共有多少种向信封内装入信笺的办法,使得每份信笺与信封上的收信人都不相符?

(波兰数学奥林匹克,1961 年)

[解]　显然,将指定的 i 封信笺装对信封的不同装法的总数是 $(6-i)!$. 从而,至少有 i 封信笺装对信封的装法总数是

$$m_i = C_6^i(6-i)! = \frac{6!}{i!}, i = 0, 1, \cdots, 6,$$

其中包括重复计数.于是由容斥原理可知,6 封信笺全都装错的不同装法的总数为

$$
\begin{aligned}
m &= m_0 - m_1 + m_2 - m_3 + m_4 - m_5 + m_6 \\
&= 6!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right) \\
&= 720 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720}\right) \\
&= 265.
\end{aligned}
$$

5·40　有 17 位科学家,其中每人都与其他所有人通信.在他们的通信中只讨论 3 个问题,且每对科学家之间的通信只讨论一个问题,求证必有 3 位科学家,他们之间互相通信讨论的是同一个问题.

(第 6 届国际数学奥林匹克,1964 年)

[证]　用空间中任何四点都不共面的 17 点来表示 17 位科学家并在任何两点间都连一条线段,然后视两位科学家讨论的是 1,2,3 号问题的不同而分别把相应两点间的连线涂成红,黄,蓝色.显然,问题化为求证图中必存在单色三角形.

将 17 点分别记为 $A_1, A_2, \cdots, A_{17}$.设图中没有单色三角形.考察由 A_1 引出的 16 条线.因为它们只有 3 种不同颜色,故由抽屉原理知其中必有 6 条线同色,不妨设 $A_1A_2, A_1A_3, \cdots, A_1A_7$ 都是红色.由反证假设知,$\{A_2, A_3, \cdots, A_7\}$ 中任何两点间的连线都是黄色或蓝色.

考察由 A_2 引出的 5 条线.由抽屉原理知其中必有 3 条线同色,不妨设 A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5 为黄色,于是 A_3A_4, A_3A_5, A_4A_5 都是蓝色,即 $\triangle A_3A_4A_5$ 为蓝三角形,矛盾.

5·41　在一本家庭影集中有 10 张照片,每张照片上都有 3 个人:站在中间的是个男人,站在他左边的是他的儿子,而右边是他的兄弟.若已知 10 张照片上站在中间的 10 个男人互不相同,问这些照片上最少有多少个不同的人?

(第 19 届全俄数学奥林匹克,1993 年)

[解]　我们把每张照片上站在中间的人称为主角,其余的称为配角,并将照片上的所有人按代划分:其中辈份最高的称为 0 代,且当 $k = 0, 1, 2, \cdots$ 时,照片上第 k 代人的儿子属于 $k+1$ 代.用 r_k 表示主角中 k 代人的人数,而用 t_k 表示配角中 k 代人的人数.由于每位主角都有兄

弟,二人的父亲是共同的,所以 $k+1$ 代男人的父亲的人数不超过 $\frac{1}{2}r_{k+1}+t_{k+1}$. 同时,又因每一位主角都有儿子,所以 $k+1$ 代男人的父亲人数又不少于 r_k. 从而有

$$r_k \leqslant \frac{1}{2}r_{k+1}+t_k,\quad k=0,1,2,\cdots.$$

此外,$1 \leqslant \frac{1}{2}r_0+t_0$. 将这些不等式相加,得到

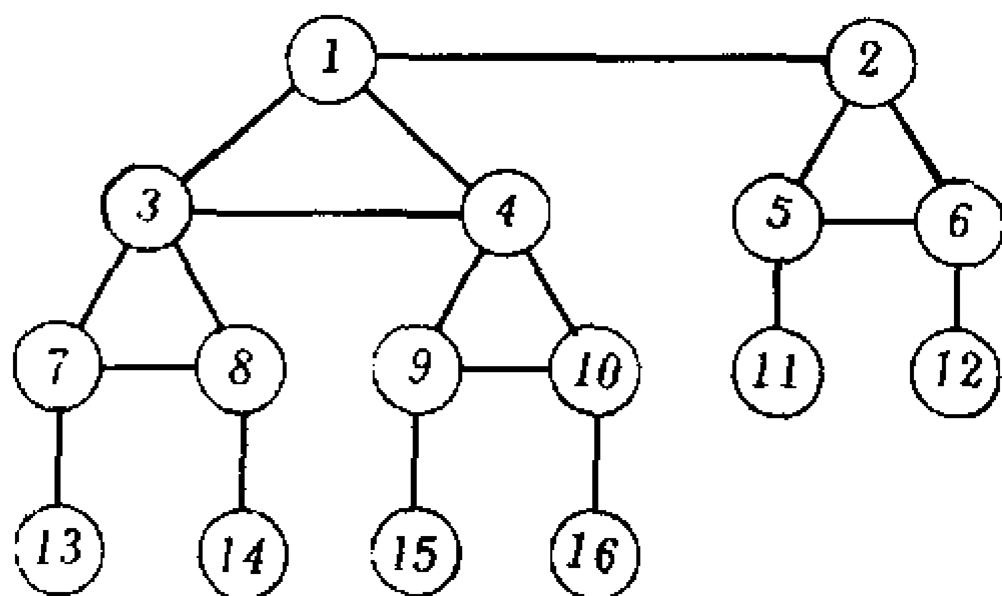
$$\frac{1}{2}(r_0+r_1+\cdots)+1 \leqslant t_0+t_1+\cdots.$$

$$(r_0+r_1+\cdots)+(t_0+t_1+\cdots) \geqslant \frac{3}{2}(r_0+r_1+\cdots)+1$$

$$=\frac{3}{2}\times 10+1=16.$$

可见,照片上至少有 16 个不同的人.

另一方面,当 16 人的亲缘关系如右图所示,其中横线表示兄弟关系,斜线和竖线表示父子关系时,可安排 10 张照片如下:(3,1,2),(5,2,1),(7,3,4),(9,4,3),(11,5,6),(12,6,5),(13,7,8),(14,8,7),(15,9,10),(16,10,9). 易见,这 10 张照片满足题中要求.



综上可知,这 10 张照片上最少有 16 个不同的人.

5·42 在人民友谊大学的学生中,恰好有 50 人会英语,50 人会法语,50 人会西班牙语. 试证可以把所有学生分成 5 组(各组人数不一定相等),使得在每一组中,会英语、法语和西班牙语的学生恰好各有 10 人(可能有某些学生不会上述 3 种语言的任何一种,而另外的人可能同时会上述语言中的两种或三种).

(第 2 届全苏数学奥林匹克,1968 年)

[证] 首先证明,可以把这些学生分成若干组,使得每组学生中,会英语,法语,西班牙语的学生恰好各有两人.

我们用 a,b,c 来分别表示只会英语,法语和西班牙语但不会另两种语言的学生;用 ab,bc,ca 来分别表示不会西班牙语、英语和法语,但

会另两种语言的学生;用 abc 来表示三种语言都会的学生.并用 $n_a,n_b,n_c,n_{ab},n_{bc},n_{ca},n_{abc}$ 来分别表示会相应语言的大学生的人数.

如果 $n_{ab}>0,n_{bc}>0,n_{ca}>0$,则可选出一组$(ab,bc,ca)$且一直选下去,直到3个数中有一个变成零为止.不妨设 $n_{ab}=0$.

如果 $n_{ab}=0,n_{bc}>0,n_{ca}>0$,那么 $n_a>0,n_b>0$,于是可选出一组(bc,ca,a,b),直到 n_{bc} 与 n_{ca} 两数中至少有一个变为零为止.

如果 $n_{ab}=n_{bc}=0,n_{ca}>0,n_{abc}>0$,则可选出一组$(ca,abc,b)$且直到 n_{ca} 与 n_{abc} 至少有一个数变为零为止.

如果 $n_{ab}=n_{bc}=n_{ca}=0,n_{abc}>1$,则可每次选出一组$(abc,abc)$,直到 $n_{abc}\leqslant 1$ 为止.

如果 $n_{ab}=n_{bc}=n_{ca}=0,n_{abc}=1$,则因 $n_{abc}+n_a=n_{abc}+n_b=n_{abc}+n_c$ 且为偶数,故有 $n_a=n_b=n_c>0$.从而可分出一组(abc,a,b,c)后化为 $n_{abc}=0$ 的情形.

如果 $n_{ab}=n_{bc}=n_{abc}=0,n_{ca}>0$,则因 $n_{ca}+n_c=n_{ca}+n_a=n_b$ 且为偶数,所以可每次选出一组(ca,ca,b,b)或(ca,c,a,b,b),直到 $n_{ca}=0$ 为止.

如果 $n_{ab}=n_{bc}=n_{ca}=n_{abc}=0$,则由上述分组过程可知,这时有 $n_a=n_b=n_c$ 且为偶数.若不为零,则可分成若干组,每组都是(a,a,b,b,c,c).

这样,我们就把全体至少会三种语言之一的大学生分成了25组,每组中会英、法、西语的大学生都恰好各有2人.然后再把这25组中的每5组合在一起,得到5个大组.最后将余下的三种语言都不会的学生随意划入5大组中的某一组.显然,这样得到的5大组学生满足题中要求.

5·43 有1000位来自不同国家的代表参加一个会议,每个代表都懂得若干种语言.已知其中任意3位代表之间都可进行交谈而不需其他人帮助(可能出现3人中有1人为其余两人当翻译的情况).试证可以将所有代表分配住进500个房间,每个房间住两人,使得每个房间中的两个人都可以进行交谈.

(第35届莫斯科数学奥林匹克,1972年)

[证] 首先证明,如果4人中的任何3人都可进行交谈,则必可将

4 人安排住进两个房间，使得每个房间的两人都可交谈.

如果 4 人中的任何两人都可交谈，安排住进两个房间当然没有问题. 如果 4 人中有两人 A 和 B 不能交谈，则因 $\{A,B,C\}$ 和 $\{A,B,D\}$ 都能交谈，故必 $\{A,C\}$，$\{B,C\}$，$\{A,D\}$，$\{B,D\}$ 都能交谈，故只要将 A，C 安排在一个房间，B 和 D 在另一个房间就可以了.

现从 1000 人中任取 3 人，则其中必有 2 人能交谈，于是可安排二人住进第 1 间房. 然后从 998 人中任取 3 人，其中又有二人能交谈可安排进第 2 号房间. 依此类推，安排了 498 个房间后还余下 4 人. 由前段证明知这 4 人可安排进两个房间，使得每个房间的两人都可以交谈.

5·44 9 位数学家在一次国际会议上相遇，发现他们中的任何 3 人中都至少有两人会讲同一种语言. 已知每位数学家都至多会讲 3 种语言，求证至少有 3 位数学家能讲同一种语言.

（第 7 届美国数学奥林匹克，1978 年）

[证 1] 若不然，则每种语言至多有两人会讲. 数学家 A 至多会讲 3 种语言，他至多能与其他 8 人中的 3 人各有一种共同语言，从而至少与其他 8 人中的 5 个均无共同语言. 设这 5 人是 B,C,D,E,F.

考察数学家 B. 他至多与 C,D,E,F 中的 3 人各有一种共同语言. 因而至少与 4 人中的 1 人没有共同语言，不妨设为 C. 于是 A,B,C 三人中任何两人均无共同语言，与已知矛盾，故知至少有 3 人能讲同一种语言.

[证 2] 如果 9 人中任何两人都有一种共同语言，则结论显然成立. 否则，必有两人间没有共同语言. 设数学家 A 和 B 间没有共同语言. 由于任何 3 人中都必有两人有一种共同语言，故其余 7 人都或与 A，或与 B 有一种共同语言. 由抽屉原理知 7 人中至少有 4 人与 A,B 之一各有一种共同语言，不妨设为 A. 因为 A 至多会 3 种语言，所以 4 人中总有两人与 A 的共同语言是相同的，即 3 人会同一种语言.

5·45 在一次演讲中，有 5 位数学家每人均打两次盹，且每两人都有同时在打盹的时刻，求证必有 3 人同时在打盹的时刻.

（第 15 届美国数学奥林匹克，1986 年）

[证] 考察数学家 A，他共打两次盹，记为 t_1 和 t_2. 另外的 4 位数学家都各有一次与 A 同时打盹的时刻，即每人都至少在时刻 t_1 和 t_2 之一打盹. 由抽屉原理便知 4 人中总有两人在时刻 t_1 或 t_2 同时打盹. 再加

上 A,便有 3 人同时打盹.

5·46 在一个长的报告中,1987 个听众每人都瞌睡了两次.每两个听众都恰有一个时刻同时打瞌睡.证明一定有一个时刻至少有 663 个听众打瞌睡.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1988 年)

[证] 设最晚开始打瞌睡的人第一次打瞌睡是在中午.如果至少有 663 个人在这时睡觉,结论已经成立.如果至多有 662 个人在这时瞌睡,那么至少有 $1987-662=1325$ 个人在中午没睡.从现在起,我们仅考虑在中午没睡的至少 1325 人.

显然这 1325 个人,在上午,下午各有一次瞌睡,如果 A,B 在上午的瞌睡时间有重叠,记为 $[A,B]$,否则记为 (A,B).

对于任一 (A,B),A 与 B 在下午瞌睡时间有重叠,用 $\text{I}(A,B)$ 表示下午的,A 与 B 至少有一个瞌睡的区间.

对于 (A,B) 与 (C,D),我们证明 $\text{I}(A,B)$ 与 $\text{I}(C,D)$ 必有重叠部分.

这在 A,B,C,D 有相同的瞌睡时间时,显然成立.

如果 A,B,C,D 是四个不同的人,且 $\text{I}(A,B)$ 与 $\text{I}(C,D)$ 无重叠,则必有 $[A,C]$,$[A,D]$,$[B,C]$,$[B,D]$,这与 (A,B),(C,D) 相矛盾!

由此可见,所有 $\text{I}(A,B)$ 有一公共点 t.

如果至少有 663 个人在 t 瞌睡,则结论成立.

如果至多有 662 个人在 t 时瞌睡,则有 $1325-662=663$ 个人在 t 时是清醒的,每两个这样的人 C,D 必有 $[C,D]$(否则 $t\in\text{I}(C,D)$),因而他们在某一时刻同时睡觉.

5·47 球状的行星被 37 个点状卫星所环绕.试证任何时刻都可在行星表面上找到一点,使得天文学家从这一点上看到的卫星不多于 17 个.

(第 37 届莫斯科数学奥林匹克,1974 年)

[证] 过行星中心和任意一对点状卫星作平面 P(作为赤道平面),再作行星的与平面 P 垂直的轴,这条轴与行星表面交于极点 A 和 B.易见,当天文学家处于 A 和 B 时,都看不见平面 P 上的两颗卫星,而且在 A 和 B 不能同时看见任何一颗卫星.既然在 A 和 B 共能看到至多

35 颗卫星,故由抽屉原理知,A 和 B 中至少有 1 点,天文学家处于该点时,能看到的卫星不多于 17 个.

5·48 设某星系中共有奇数个行星,每个行星上都有一位天文学家观察最近的一个行星且行星之间的距离两两不等.求证有一个行星无人观察.

(第 6 届全俄数学奥林匹克,1966 年)

[证] 记行星的个数为 n,并设行星 A 和 B 是所有行星对中距离最近的一对行星,于是二者之上的天文学家在互相观察.

考察其余的 $n-2$ 个行星及其上的天文学家.如果其中有一个天文学家在观察 A,B 之一,则显然必有一个行星无人观察.如果任何人都不在观察 A 和 B,则可再用上面的方法,从 $n-2$ 个行星中再选出两个行星,使二者之上的天文学家互相观察.依此类推,因为 n 是奇数,故必有一个行星无人观察.

5·49 在问询处有 20 个学生需要解答 20 个问题.已知他们每个人都恰能解答两个问题,而且每个问题都有两个人可以解答.试证可以将这些问题分配给这些学生每人一题去解答,使得每个学生都分得一个他会解答的问题,而且所有问题都能分配下去.

(第 14 届莫斯科数学奥林匹克,1951 年)

[证] 用 20 个点来代表 20 名学生,如果两名学生能回答同一个问题,就在相应两点间连一条线,则每点恰好连有两条线.于是我们得到了一个每点度数皆为 2 的偶图.从而它可以分解为若干个(至少一个)互不相交的圈.

将每个圈任意规定顺序,并将每条边所代表的问题分配给该边始点所代表的学生去解答,这样的分配法即可实现题中要求.

5·50 学生在一学年中,规定在每连续的 7 天中都应该做 25 道习题.学生做每一道习题所需的时间,在同一天中是不变的,但在一学年里是按照学生自己所了解的规律变化的,并且做任何一道习题所需的时间都不足 45 分钟.试证学生为了使做题所用的时间最少,他可以选择一个星期中的某一天,并在每个星期的这一天做完 25 道习题.

(第 25 届莫斯科数学奥林匹克,1962 年)

[证] 设学生在某连续 8 天中所做习题的数目分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_8$.按已知有

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = 25 = a_2 + a_3 + \cdots + a_8.$$

故得 $a_1 = a_8$,这意味着学生在一天中所做习题的数目是以7天为周期变化的.因此,学生只要安排好一个星期中的解题计划就行了.

将学生在星期一,二,三,四,五,六,日一天做完25道题目所需的时间分别记作 $s_1, s_2, \cdots, s_7$.于是,当学生不是一天做完,而是分7天去做,做题数分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_7$ 时,他所花费的总时间为

$$T = \frac{1}{25}(a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_7 s_7).$$

显然,从 $\{s_1, s_2, \cdots, s_7\}$ 中选取最小的 s_k 并令 $a_k = 25$,其余的 $a_i = 0$,就能使时间 T 达到最小值.

5·51 (1)8年级学生站成一排,他们每人前面站着一名身材较矮的7年级学生.试证在把8年级和7年级学生按高矮重新排列后,每个8年级学生仍然比站在他前面的7年级学生要高.

(2)一群战士站列成一个矩形方阵,且在每一行中战士按高矮排列.试证在把每一列中的战士也按高矮重新排列后,每一行中的战士仍然按高矮排列着.

(第6届全俄数学奥林匹克,1966年)

[证] 为证(1),只须证明按身高排列的第 k 个8年级学生高于按身高排列的第 k 个7年级学生即可.换句话说,只须证明按身高排列的第 k 个8年级学生至少高于 k 名7年级学生.

设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是按身高排列的前 k 名8年级学生.按已知,他们每人前面都有一名身材较矮的7年级学生,所以这 k 名7年级学生都矮于第 k 名8年级学生.

(2)的证明可归结于(1)的情形.

5·52 某天,甲乙丙三个男孩在图书馆相遇.甲说:"从现在起我将每隔一天来一次图书馆".乙说,他将每隔两天来一次,丙则表示将每隔三天来一次图书馆.听到他们的谈话后,图书馆管理员指出,每逢周三图书馆休息.孩子们回答说,如果他们当中某人该来的那一天恰逢休息日,那么他就第二天再来,并且以后来图书馆的日期将从这一天算起.孩子们都这样做了.有一次他们又在图书馆相遇了,这天是周一,问上述谈话发生在周几?

(第16届全苏数学奥林匹克,1982年)

[解] 我们从周一开始往前倒推，列出他们分别来馆的日期．遇到周三就停止了，但遇到周四则要注意有两种可能，都不能忽略．具体开列如下：

$$甲:\begin{cases}1,6,4,2,7,5;\\1,6,4,1,\dot{6},4,\cdots.\end{cases}$$

$$乙:\ 1,5,\dot{2},\dot{6}.$$

$$丙:\begin{cases}1,4,7;\\1,4,\dot{6},2,5,1,\cdots.\end{cases}$$

易见，三人谈话的日期是 9 天前的周六．

5·53 某天有若干位读者去过图书馆，他们每人只去一次，但在任何 3 位读者中，至少有两人这天在图书馆相遇过．试证必可找到两个时刻，使得在这一天到过图书馆的任何一位读者，都至少在这两个时刻之一时在图书馆中．

（匈牙利数学奥林匹克，1950 年）

[证 1] 设当天第 1 个离开图书馆的人的离馆时刻为 t_1，最后一个进馆的读者进馆的时刻为 t_2．不妨设 t_1 早于 t_2．显然，进馆时刻不迟于 t_1 的人于时刻 t_1 在图书馆；离馆时刻不早于 t_2 的人于时刻 t_2 在图书馆．

如果读者 A 在 t_1 之后进馆而在 t_2 之前离馆，则 A，第 1 个离馆读者和最后进馆的读者这 3 人中的任何两人都未在图书馆相遇，此与已知矛盾，故知这天到过图书馆的每位读者，都至少在 t_1 和 t_2 之一在图书馆．

[证 2] 设第 1 个离开图书馆的读者 A 的离馆时刻为 t_1，在 t_1 之后进馆的读者中，第 1 个离开图书馆的读者 B 的离馆时刻为 t_2．显然，不迟于 t_1 进馆的读者于时刻 t_1 在图书馆；迟于 t_1 但不迟于 t_2 进馆的读者于时刻 t_2 在图书馆．

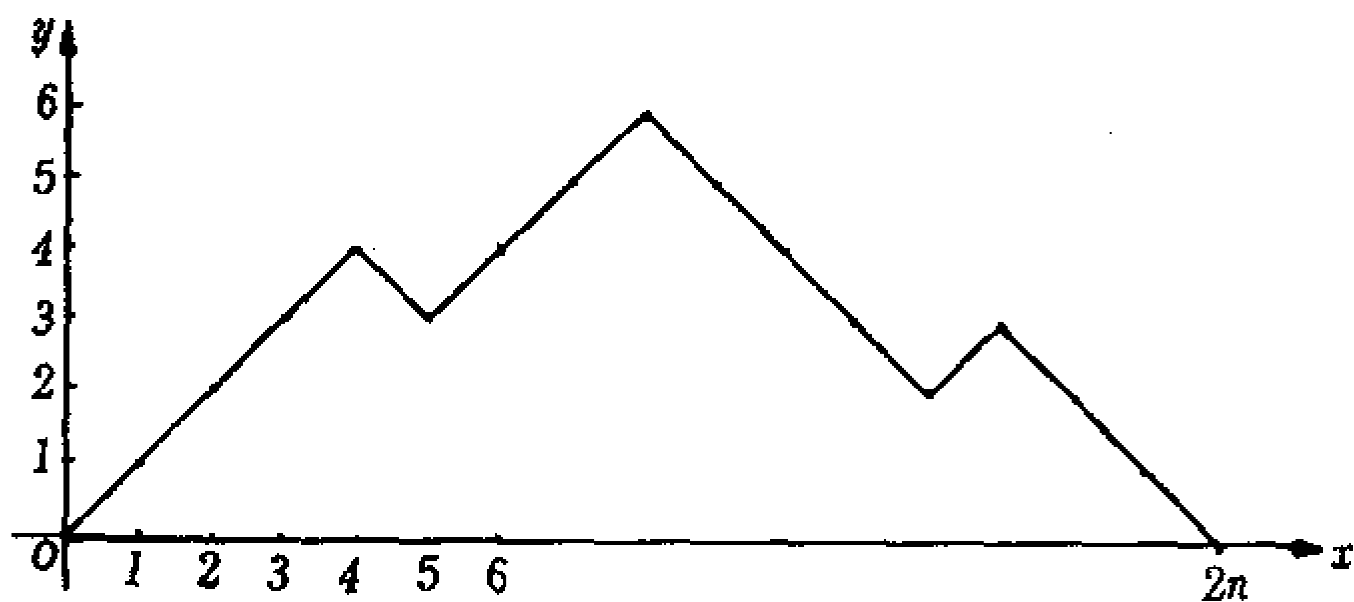
如果有读者 C，进馆时刻迟于 t_2，则 A,B,C 这 3 位读者中的任何两人都未在图书馆相遇，此与已知矛盾．这表明这天到过图书馆的每位读者都至少在 t_1,t_2 之一在图书馆．

5·54 为了统计到图书馆来的读者人数，在图书馆门口挂了两块黑板．来的每一位读者必须在一块黑板上写上当他进入阅览室时室内读者的人数，当他离开时，则在另一块黑板上写上阅览室余下的读者的

人数.试证在一天之中,两块黑板上出现的全部整数是相同的(次序可以不同).

(匈牙利数学奥林匹克,1974年)

[证1] 设这一天到阅览室的共有 n 人次.取一个直角坐标系,在 x 轴上标出整点 $0,1,2,\cdots,2n$.当 $x=0$ 时函数值为0,然后人数每变动一次,自变量 x 增加1,每进入1人,函数值增加1;每走出1人,函数值减少1.直到最后1人走出时,$x=2n$,函数值为0.然后把每相邻两点 (i,y_i),$(i+1,y_{i+1})$ 之间用斜线段连结,于是得到函数图像如下图所示:



显然,图像中每条向上的斜线,对应于进室1人,每条向下的斜线,对应于走出1人.而且该人在相应黑板上所写的数,恰为斜线下端点所表示的函数值.

由于函数图像折线的两端点都在 x 轴上,故在相同高度的向上斜线段的条数与向下斜线段的条数相等,从而它们下端点的个数也相等,因此,对于每一个整数,它在两块黑板上出现的次数都相同.

[证2] 我们对于人次数 n 用归纳法来证明.

当全天来阅览室的读者总人次数 $n=1$ 时,结论显然成立.设 $n=k$ 时成立.当 $n=k+1$ 时,设阅览室开门后连续进入 m 人后第1次走出1人,这人是第 i 个进馆的人($i\leqslant m$).于是第 m 个进馆人和第1个离馆人分别在两块黑板上所写的数都是 $m-1$.由于我们的问题只统计室内人数,而不计读者是谁,故当 $i<m$ 时,只要把留在室内的第 m 个视为是第 i 个进馆的人,则以后的情形与第 m 个人不存在完全一致,于是问题化为 $n=k$ 的情形.由归纳假设知 $n=k+1$ 时结论也成立,这就完成了归纳证明.

5·55 10人到书店去买书,已知

(1) 每人都买了3种书;

(2) 任何两人所买的书中,都至少有一种相同.

问购买人数最多的一种书最少有几人购买?说明理由.

(第8届中国中学生数学冬令营,1993年)

［解 1］ 设 A 是 10 人之一. 由已知, A 共买了 3 种书, 且其余 9 人中每人所买的书中都至少有一种与 A 所买的书相同. 于是由抽屉原理知, 9 人中至少有 3 人, 加上 A 共 4 人买了同一种书. 因而, 所求的最小值不小于 4.

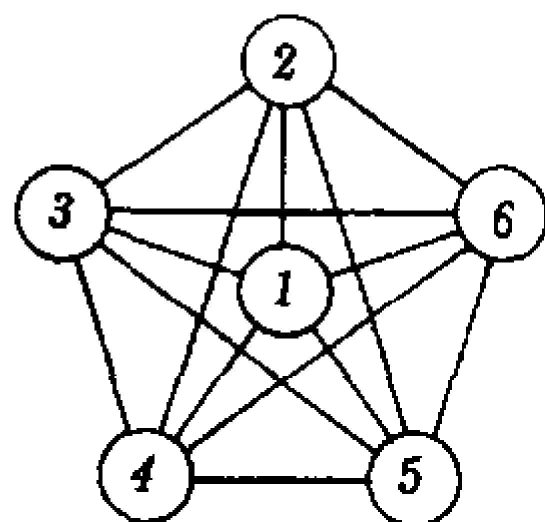
若购买人数最多的一种书共有 4 人购买, 则每种书都恰有 4 人购买. 设 10 人共买了 n 种不同的书, 则有 $4n = 30$. 但因 $4 \nmid 30$, 此不可能, 故知所求的最小值不小于 5.

我们用数字来表示书种的号码并使 10 人分别买书如下

$$(123),(123),(145),(167),(246),$$
$$(246),(257),(347),(356),(356).$$

容易验证, 他们所买的书满足题中要求且购买人数最多的一种书有 5 人购买, 故知所求的最小值等于 5.

［解 2］ 右图中, 由正五边形的中心和两个相邻顶点构成的三角形共有 5 个, 由正五边形的 3 个不全相连的顶点构成的三角形也共有 5 个. 不难看出, 这 10 个三角形中的任何两个都至少有一个公共顶点. 将这些三角形的顶点号码组写出来并让 10 人所买的书号依次为这 10 个三角形的顶点号码组:



$$(123),(134),(145),(156),(162),$$
$$(245),(356),(426),(523),(634).$$

显然, 每种书都有 5 人购买. 故知所求的最小值不超过 5.

设所求的最小值为 4, 10 人共买了 n 种书且第 i 种书有 m_i 人购买, 于是 $m_i \leqslant 4$ 且 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = 30$. 当两人买同一种书时, 称之为一个"书对". 由已知, 每两人之间至少有 1 个书对, 于是至少共有 $C_{10}^2 = 45$ 个书对. 另一方面, 由第 i 种书形成的书对有 $C_{m_i}^2$ 个, 共有 $C_{m_1}^2 + C_{m_2}^2 + \cdots + C_{m_n}^2$ 个书对. 从而有

$$C_{m_1}^2 + C_{m_2}^2 + \cdots + C_{m_n}^2 \geqslant 45. \quad ①$$

因为 $C_4^2 = 6, C_3^2 = 3, C_2^2 = 1$, 故又有

$$C_{m_1}^2 + C_{m_2}^2 + \cdots + C_{m_n}^2 \leqslant 7C_4^2 + C_2^2 = 43. \quad ②$$

由于 ① 与 ② 矛盾, 故知所求的最小值为 5.

5·56 10 人到书店去买书, 已知.

(1) 每人都买了 3 种不同的书;

(2) 每两人所买的书中都至少有 1 种相同;

(3) 每种书至多有 5 人购买;

(4)10 人共买了 n 种不同的书.

求 n 的所有可能值.

(中国国家集训队训练题,1993 年)

[**解**] 由(1) 和(3) 可知,$n \geqslant 6$.我们用自然数 1,2,3,⋯ 来表示书种的号码,当 $n = 6$ 时,10 人可买书如下:

(1,2,3),(1,3,4),(1,4,5),(1,5,6),(1,2,6),
(2,4,5),(3,5,6),(2,4,6),(2,3,5),(3,4,6).

当 $n = 7$ 时,10 人可买书如下:

(1,2,3),(1,4,5),(2,4,6),(2,4,6),(2,5,7),
(2,5,7),(3,4,7),(3,4,7),(3,5,6),(3,5,6).

容易验证,这两组买书情形都满足题中要求.

如果至少买 8 种书,则由抽屉原理知购买人数最少的一种书 α 至多有 3 人购买.

(i) 若 α 只有 1 人 A 购买,则 A 还要买另两种书 β 和 γ.由(2) 知另 9 人每人都要买 β 与 γ 之一种.于是至少有 5 人要买这两种中的同一种,加上 A 便有 6 人买同一种,此与(3) 矛盾.

(ii) 若书 α 恰有两人购买,设这两人买的各 3 种书是 (α,β,γ),$(\alpha,\delta,\varepsilon)$,则 $\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ 4 种书互不相同.否则,又要导致 6 人买同一种书.由(2) 知,另 8 人中每人都要买 $\{\beta,\gamma\}$ 与 $\{\delta,\varepsilon\}$ 两对书中的各 1 种.而由(3) 又知,另 8 人中买 $\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ 的恰好各有 4 人.将 8 人分成两组:买书为 (β,δ,χ) 和 $(\gamma,\varepsilon,\chi)$ 的人为第 1 组,买书为 (β,ε,χ) 和 (γ,δ,χ) 的人为第 2 组.由(2) 可知,每组所买的第 3 种书都得相同,但这样一来,总共只买了 7 种书,矛盾.

(iii) 设每种书至少有 3 人购买,第 i 种书有 m_i 个人购买.当有两个人买同一种书时,我们就说两人间有 1 个书对.于是由(2) 知,两人间至少有 1 个书对.因而有

$$C_{m_1}^2 + C_{m_2}^2 + \cdots + C_8^2 \geqslant C_{10}^2 = 45. \qquad ①$$

另一方面,由于 $C_3^2 + C_5^2 > 2C_4^2$,故又有

$$C_{m_1}^2 + C_{m_2}^2 + \cdots + C_{m_8}^2 \leqslant 5C_3^2 + 3C_5^2 = 45. \qquad ②$$

由 ① 和 ② 知

$$C_{m_1}^2 + C_{m_2}^2 + \cdots + C_{m_8}^2 = 45. \qquad ③$$

③ 式意味着 10 人中每两人恰有 1 个书对,8 种书中有 5 种各有 3 人购买,有 3 种各有 5 人购买.这样一来,后 3 种书共有 15 人次购买,从而 10 人中必有两人买了 3 种书中的相同两种,即 2 人间有两个书对,矛盾.

综上可见,n 只可能取两个值:6 和 7.

5·57　9 人到书店去买书,每人都买了 4 种书,每两人所买的书中都恰有两种相同.问他们 9 人一共买了多少种书?说明理由.

（中国国家集训队测验题,1993 年）

[**解 1**]　设 A,B 两人买的 4 种书分别为(1,2,3,4),(1,2,5,6).

(1) 如果有人未买 1,2 两种书,则他买的 4 种书只能是(3,4,5,6).因此,这种人至多 1 人,其余 6 人至少买了 1,2 两种之一.不妨设 C,D,E3 人都买了第 1 种书.如果这 3 人中有 1 人买了第 2 种书,则买 1,2 两种书的至少有 3 人;如果这 3 人都未买第 2 种,则由于他们每人买的书都与 A 恰有两种相同,故 3 人都要买 3,4 中的一种.不妨设买第 3 种书的有两人,于是买 1,3 两种书的有 3 人.

(2) 由上述证明知可设 A,B,C3 人买的书分别为(1,2,3,4),(1,2,5,6),(1,2,7,8).易见,其余 6 人都至少买 1,2 两种书之一.不妨设 D,E,F3 人都买了第 1 种书.如果 3 人中有 1 人买了第 2 种,则买 1,2 两种书的至少有 4 人.如果这 3 人都未买第 2 种,则每人都恰买 3,4 两种之一,5,6 两种之一,7,8 两种之一.如果 D,E,F 买了{3,4,5,6,7,8}中的同一种,则又出现至少 4 人买了同样的两种书的情形.否则 D,E,F 买的 4 种书只能是(1,3,5,7),(1,3,6,8),(1,4,5,8),(1,4,6,7) 中的 3 组.不妨设为前 3 组.显然,G,H,I 3 人至少有两人买第 2 种.由于有两人买的是(1,3,5,7),(1,3,6,8),故买 2 号的两人不能买 4 号,因而只能买 2,3 两种.与(1,4,6,7) 比较,只能买(2,3,6,7).但两人不能买相同的,矛盾.这表明至少有 4 人买了两种同样的书.

(3) 设 A,B,C,D 4 人买的书分别为(1,2,3,4),(1,2,5,6),(1,2,7,8),(1,2,9,10).若其余 5 人中有人未买全 1,2 两种,不妨设 E 买 1 未买 2,则他必从 4 对(3,4),(5,6),(7,8),(9,10) 中各买 1 种,这导致 E

买了5种书,矛盾.这意味着9人每人都买了1,2两种书.由于每两人买的4种书恰有两种相同,故知9人共买了20种书.

[**解2**] 按已知,A与其他8人中的每人买的书都恰有两种相同,共有16种.但A共买4种书.由抽屉原理并进一步分析可知,或者其他8人中的5人连同A 6人买了同一种书,或者其他8人组成4个四人组,每组连A 5人买同一种书.对于其他8人也都是这种情形.如果9人中没有6人买同一种书的情形,则买每种书的人都恰为5人,买书的总数应为5的倍数.但9人买书总数为36,矛盾.所以,必有6人买了同一种书.

设A,B,C,D,E,F都买了书α.若有两人G和H没买α,则因G,H每人与前6人都共有12种书相同,故或者前6人中有4人与G,H之一共5人买了同一种书,或者6人分成4个三人组,每组3人与G(或H)买同一种书.

(1) 若为前者,设A,B,C,D,G都买了书β,则除β外G与A,B,C,D还各有一种相同的书.因G除β外还买了3种书,故A,B,C,D4人中必有两人与G同买了书γ.于是这两人买了3种相同的书α,β,γ,矛盾.

(2) 设为后者,即6人分成4个三人组(每人恰属于两组),每组3人与$G(H)$买同一种书.设G和H买的4种书分别为$(\beta,\gamma,\delta,\epsilon)$,$(\beta,\gamma,\theta,\varphi)$.则买$\delta,\epsilon$种书的两个三人组的并集与买$\theta,\varphi$两种书的两个三人组的并集相同.于是由抽屉原理知,买θ种书的3人中有两人同时买了δ或ϵ种书.这导致两人买了3种相同的书,矛盾.这表明至少有8人买了书α.

设A,B,C,D,E,F,G,H 8人买了书α.除α之外,8人中后7人各与A有一种相同的书,都是A的其余3种书之一.由抽屉原理知必有3人加上A 4人买了同一种书β.于是有4人买了书α和β.因而,所有人都买了书α与β.所以,9人共买了20种书.

5·58 7名学生决定在星期天走遍7家电影院,各家影院的场次都是9:00,10:40,12:20,14:00,15:40,17:20,19:00和20:40(共8场).在看每一场电影时,都是6名学生在一起,而另一名学生(场次不同时不一定是同一人)单独去另一家电影院.到了晚上发现,每名学生都到过了每一家电影院.求证每一家电影院都至少有一个场次没有这

些学生光顾.

(第30届莫斯科数学奥林匹克,1967年)

[证] 若不然,则必有一家电影院,当天的8场电影中,每场都有这7名学生中的人到场观看.因为每名学生都到过了每家电影院,所以其余6家电影院至少各有两场有这7名学生中的人到场观看.可见,这7名学生在7家电影院至少看了20场.

另一方面,每个场次,7名学生只在两家影院看电影,他们全天只在7家影院看了16场,矛盾.

5·59 围着圆桌坐着来自k个城堡的13位勇士,其中$1 < k < 13$.每位勇士手中都拿着一只金的或银的高脚酒杯,并且其中恰有k只金杯.公爵让他们每人都将手中的杯子交给右边的邻座,并且一直重复进行下去,直到有某两个来自同一城堡的勇士都持有金杯为止,求证公爵的愿望总能实现.

(第46届莫斯科数学奥林匹克,1983年)

[证] 若不然,则在传递酒杯过程中的每一步,k个城堡的勇士手中都恰有1只金杯(无论该城堡来几人都是如此).因此,当酒杯传递一圈之后,k个城堡中每个城堡的勇士都有13人次拿到过金杯.但另一方面,在传递一圈的过程中,每位勇士都恰好拿到k只金杯中的每只杯子恰好一次,从而每人都拿到金杯k人次.因为13是质数,故k个城堡出席的人数不全相等,从而拿到金杯的人次数也不全相等,矛盾.

5·60 一次聚会上,每两个人致意的方式为四种方式(点头,握手,接吻,拥抱)中的一种.康迪和瑞迪接吻,没和萨迪接吻.对每三个人,两两致意的方式或者全相同,或者全不相同.问这次聚会最多有多少人?

(加拿大数学奥林匹克训练题,1989年)

[解] 最多9个人.

将每个人用一个点表示,根据两人致意的方式将相应的两个点的连线染成红、黄、蓝、黑四种颜色中的一种.

设康迪为点V_1.如果人数不小于10,则从点V_1引出的q条线中必有$\left[\frac{q}{4}\right]+1=3$条同色.设$V_1V_2, V_1V_3, V_1V_4$为红色.

由已知条件可知$\triangle V_1V_2V_3$,$\triangle V_1V_3V_4$,$\triangle V_1V_2V_4$的三边全为红色,因而$\triangle V_2V_3V_4$的三边全为红色.

根据已知,存在点 V_5,使 V_1V_5 不是红色,设 V_1V_5 为黄色,由于 $\triangle V_1V_2V_5$ 的三边均不同色,所以 V_2V_5 只能为蓝色或黑色.

同理 V_3V_5,V_4V_5 也只能为蓝色或黑色.

这样在 V_2V_5,V_3V_5,V_4V_5 这三边中至少有两条边同色,不妨设 V_2V_5 与 V_3V_5 同为蓝色,这时对 $\triangle V_2V_3V_5$ 来说,就出现两边为蓝色,一边为红色与已知矛盾.

所以人数不大于 9.

又,容易验证 9 个人是可能的.

5·61　一群年轻人去跳迪斯科,每次舞需交 1 元,每个男孩与每个女孩恰好跳一次后,大家去另一处跳舞.这里用辅币支付,他们用了与前面同样多的钱.每个人的入场费是一辅币,每次舞付一辅币,每个人恰好与其他人各跳两次舞(不分性别),最后还剩 1 个辅币,问一元换几个辅币?

(加拿大数学奥林匹克训练题,1989 年)

[解]　设有 b 个男孩,g 个女孩.又设每 1 元钱换 x 个辅币,则起先共跳 bg 次舞,后来共跳　$2C_{b+g}^2=(b+g)(b+g-1)$ 次舞.

由题意　$bgx=(b+g)(b+g-1)+(b+g)+1$,即

$$(b+g)^2+1=bgx.$$

令 $u=x-2$,则 $g^2-ubg+b^2+1=0$. ①

设 b,g 为使 ① 成立的正整数,并且 $b+g$ 最小,不妨设 $b\leqslant g$.

可以验证　$ub-g,b$ 是方程 ① 的解,由于$(ub-g)g=b^2+1>0$ 所以 $ub-g,b$ 是 ① 的正整数解.并且 $ub-g\geqslant g$.

从而有

$$(b+1)^2>b^2+1=g(ub-g)\geqslant g^2.$$

考虑到　$b\leqslant g$　则必有　$g=b$.　再代入 ① 可得

$$2g^2-ug+1=0$$

于是 g 整除 1,从而 $g=1,x=5,u=3$.即 1 元换 5 个辅币.

5·62　设一次聚会有 n 对夫妻参加,每个人在一段时间内既可单独休息,也可以参加某个聊天的小组,称之为团组.每对夫妻都不在同一个团组内,而且除此之外的每两人都恰有 1 次在同一个团组内.试证当 $n\geqslant 4$ 时,团组的总数 $k\geqslant 2n$.

(第 28 届国际数学奥林匹克候选题,1987 年)

[证] 将 n 位男士编号为 $1,2,\cdots,n$，他们的妻子依次编号为 $n+1,n+2,\cdots,2n$. 设成员 i 共参加 d_i 个团组，于是 $d_i \geqslant 2, i=1,2,\cdots,2n$.

(1) 存在某个 $d_i=2$，设 i 仅为团组 G_1,G_2 的成员. 由于其余 $n-1$ 对夫妻中的每对都恰有 1 人属于 G_1 而另 1 人属于 G_2，故有 $|G_1|=|G_2|=n$. 这样一来，G_1 中的每个成员都要与 G_2 中不是自己配偶的成员搭配 1 次属于一个团组，且不同搭配属于不同的团组，又因 $n\geqslant 4$，故有

$$k \geqslant 2+(n-1)(n-2) \geqslant 2n.$$

(2) 若所有 $d_i \geqslant 3$，则对每个 i 都对应 1 个未知数 x_i，并考察方程组

$$\sum_{i\in G_j} x_i = 0, \quad j=1,2,\cdots,k, \qquad ①$$

其中 G_j 表示第 j 个团组. 若 $k<2n$，即方程个数少于未知数的个数，则方程组 ① 必有非零解.

另一方面，设 $x_1,x_2,\cdots,x_{2n}$ 是 ① 的一组非零解，于是由 ① 及题中条件便有

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^{k}\Big(\sum_{i\in G_j} x_i\Big)^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i\in G_j} x_i^2 + 2\sum_{j=1}^{k}\sum_{i,k\in G_j} x_i x_k \\
&= \sum_i d_i x_i^2 + 2\sum_{\substack{k>i\\ k-i\neq n}} x_i x_k \\
&= \Big(\sum_i x_i\Big)^2 + \sum_{i=1}^{2n}(d_i-1)x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i x_{n+i} \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{2n}(d_i-2)x_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{2n} x_i^2 > 0,
\end{aligned}$$

矛盾，故有 $k\geqslant 2n$.

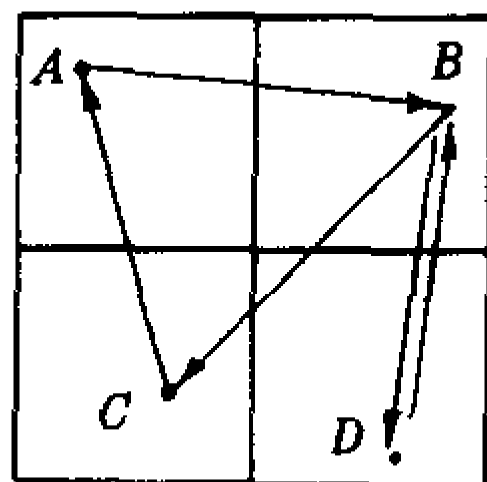
5·63 某王国的国土呈边长为 2 千米的正方形. 国王决定召唤全国的臣民于晚 7 时到自己的王宫里参加舞会. 为此，他在正午时分派出了一个飞报者，飞报者能够将任何指示传达给任何一个臣民，这些臣民又可以将任何指示传达给另外的任何臣民，如此等等. 每一个臣民在听到指示以前都处在一定的位置(自己家中)，并能以每小时 3 千米的速度(沿直线)跑向任何方向. 试证国王能够设法成功地将意图通知下

去，使得每一个臣民都能在舞会开始前到达王宫.

（第 50 届莫斯科数学奥林匹克，1987 年）

［证］ 国王可以按如下方式将指示传达下去. 先将整个王国划分为4个边长1千米的正方形，称之为1阶正方形；再将每个1阶正方形划分为4个边长为$\frac{1}{2}$千米的正方形，称为2阶正方形；再将每个2阶正方形划分为4个边长为$\frac{1}{4}$千米的3阶正方形；如此继续下去，直到阶数 n 足够大，使每个 n 阶正方形中至多有1人为止（如果有某些臣民处于 n 个正方形交界处，则可将他们随意归入其中的1个正方形中）. 然后，国王将指示分阶段通知下去：第1阶段，先通过飞报者及先得到指示的臣民把指示传达给每个1阶正方形中的1个臣民，然后飞报者和听到传达的臣民各自回到自己原来的位置. 第2阶段中，每个已听到传达的臣民和飞报者一起分别行动，设法将国王的指示传达给自己所在的1阶正方形中的每个2阶正方形中的1个臣民；在第3阶段中，再传达到每个3阶正方形中的1个臣民；如此继续下去，经过 n 个阶段后，全体臣民都接到了指示.

下面我们来估计各阶段传达所需要的时间. 由于王国中任何两点的距离都不超过$2\sqrt{2}$千米，所以当以每小时3千米的速度行进时，不足1小时即可由一处到达另一处. 因此，图中所示的方式传达，这个阶段不会超过3小时（即飞报者通知 B 后又通知 C，然后回到 A，B 得讯后通知 D，然后回到 B. 如果某个正方形中没有人居住，就更省时间了）. 第2阶段的通知可在4个2阶正方形中类似地进行，所需要的时间不超过$\frac{3}{2}$小时. 同理可知，第 k 阶段所需要的时间不超过$\frac{3}{2^{k-1}}$小时. 因此，整个传达过程所需的总时间



$$T \leqslant 3+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<6.$$

这说明在晚6时之前，全体臣民都接到了参加舞会的指示. 他们足可利用余下的1小时，在舞会开始之前到达王宫.

5·64 （1）15个席位均匀地围绕着圆桌安排，席上有15个客人的名片，客人们没有注意这些名片，直到他们坐下来，才发觉没有一个人

坐在自己的名片前面,证明可以转动圆桌,使得至少有两个客人同时对号入座.

(2) 举出一种入席顺序的例子,使这 15 个人恰好有一个人对号入座,而转动圆桌并不能使更多的客人对上号.

(第 7 届加拿大数学奥林匹克,1975 年)

[解] (1) 对于每个客人,恰好有一种转动圆桌的方法使他对上自己的名片,因为有 15 个客人,而至多有 14 种有效的转动,所以根据“抽屉原理”,必有某种转动至少有两个客人同时对上号.

(2) 把客人由 1 到 15 编上号,他们的名片也对应地编号,围绕圆桌依次安排名片,第一种可能的情形是让客人 x 面对着名片 $16-x$,转动 y 个席位,就使客人 x 面对着 $16-x+y \pmod{15}$,

当 $$x \equiv 16-x+y \pmod{15},$$

即 $$2x \equiv 16+y \pmod{15}.$$

时,客人 x 对上他自己的名片,这个同余式对每个 y 恰有一解.

第二种可能情形是让客人 x 面对着名片 $2x \pmod{15}$.

5·65 一副纸牌共有:(a)36 张;(b)54 张. 魔术师将它们分成若干堆,并在每张牌上写上一个数,该数等于它所在的堆中的纸牌张数. 然后,魔术师用某种方法把纸牌混为一堆,再重新分成若干堆,并在每张牌上又写上 1 个数且均写在已有数的右方,新写的数等于纸牌第 2 次所分堆中的纸牌张数. 问魔术师能否做到:所写的数对都互不相同,但对于每个数对(m,n),均可找到数对(n,m)?

(第 54 届莫斯科数学奥林匹克,1991 年)

[解] 可以做到. 将两次分堆情况用右图来表示,其中每个方格对应于一张牌,牌上所写的两个数(m,n)恰为该方格所在的行号和列号. 两图表分别给出(a)和(b)的解答. 第 2 图表中,第 1 行有 8

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								×
2							×	×
3						×	×	×
4					×	×	×	×
5				×	×	×	×	×
6			×	×	×	×	×	×
7		×	×	×	×	×	×	×
8	×	×	×	×	×	×	×	×

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	×	×	×	×	×	×	×		×
2	×	×						×	×
3	×							×	×
4	×						×	×	×
5	×					×	×	×	×
6	×				×	×	×	×	×
7	×			×	×	×	×	×	×
8		×	×	×	×	×	×	×	×
9	×	×	×	×	×	×	×	×	×

个“×”,表示第1次分牌时,要分出8堆各有1张牌的堆;第2行有4个“×”,表明要分出两堆各有两张牌的堆.列的方向表示的第2次分堆情况也是如此.容易看出,图表中“×”的个数恰等于纸牌的张数且“×”号的分布是关于主对角线对称的.

5·66 一副纸牌共有54张,魔术师把它们分成若干堆,观众则在每张纸牌上写上一个自然数,该数等于这张牌所在的堆中纸牌的张数.然后魔术师以专门的方式混合纸牌,并重新把它们分成若干堆,观众再次在每张牌上写上一个自然数,该数也等于纸牌现在所在堆中的纸牌张数.如此继续下去.问这种分堆写数的过程最少需要进行几次,才能使得各张纸牌上所写的(无序)数组互不相同?

(第54届莫斯科数学奥林匹克,1991年)

[解] 从上题的右图可见,经过两次分堆写数后,牌上所写的两个数相同(不计次序)的牌至多两张,二者所对应的方格一个在主对角线上方,另一个在主对角线下方且二者关于主对角线对称.第3次分堆时,可将主对角线及其上方的共30个数分为一堆,主对角线下方的24个数分为另一堆.然后将两堆中的牌分别写上第3个数30和24即可.事实上,第3次分堆不会抹杀原先数对不同的区别,而且将原为(m,n)和(n,m)的两张牌区分开来,分别变成$(m,n,30)$和$(n,m,24)$,其中$1\leqslant m\leqslant n\leqslant 9$.由此可见,适当地进行3次分堆写数即可满足要求.

下面证明两次分堆写数是不够的.若不然,设有两次分堆写数即可满足题中要求,其中第1次分堆时,堆中纸牌张数最多的一堆共有k张牌,不妨设这是第1堆.这时,每张牌上所写的一个自然数都是$1,2,\cdots,k$之一.第2次分堆时,设纸牌张数最多的一堆有m张.若$m>k$,则m张牌中至少有两张,其上的第1个数相同,从而两数都相同,不满足要求;若$m<k$,则类似的讨论可导出矛盾,故必有$m=k$.从而对两次分堆写数可用一个$k\times k$的方格表像前段证明中那样来显示.既然第1次分堆中的第1堆中有k张牌,故表中第k行中有k个“×”.同理,表中第k列中也有k个“×”.它们处于彼此关于主对角线对称的位置上.而处于对称位置的两个方格所对应的牌上的数分别为(n,k)和(k,n),不满足题中要求.

5·67 剧场售票处出售戏票$2n$张,每张票价5角,每人限购一张.开始时售票处没有钱,而排队购票的前$2n$个人之中,一半持有5角币,另一半只持有一元币,要让售票处不发生找钱困难,这$2n$个购票者有

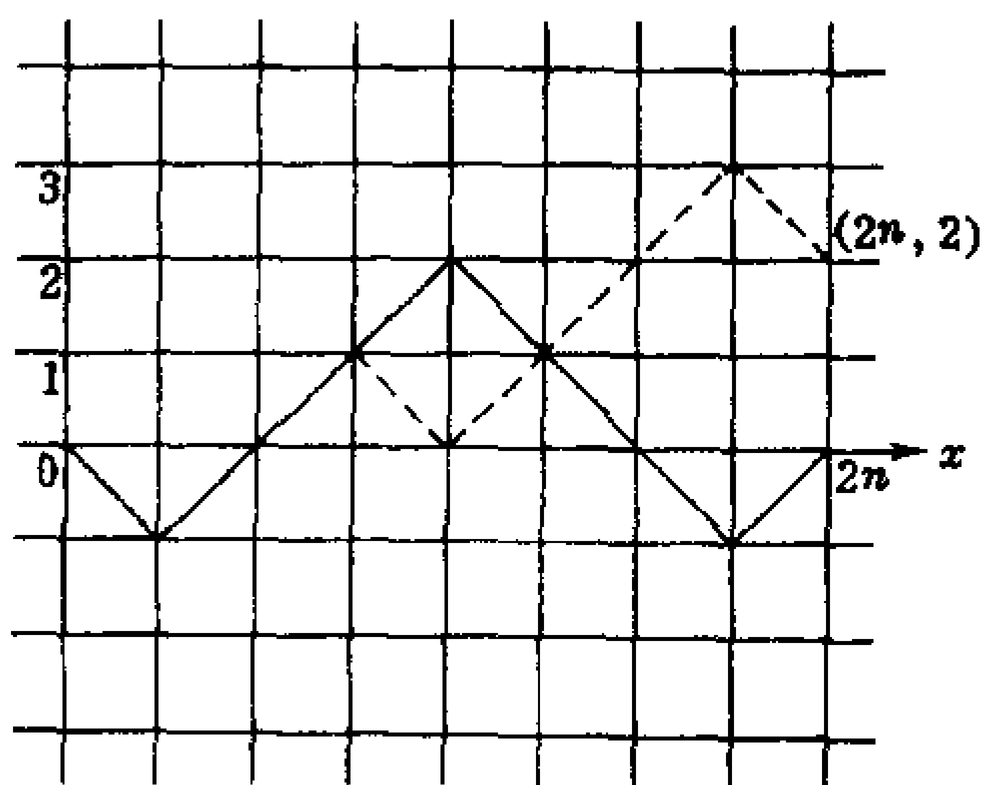
多种不同的排队方法？

（中国福建省福州市数学竞赛，1963 年）

［解］ 在平面直角坐标系 xoy 中，以原点 O 表示售票处，购票者依次以横坐标为 $1,2,\cdots,2n$ 的点表示.

令每个持一元人民币的购票者对应着数 1，每个持五角人民币的购票者对应着数 -1.

把每个购票者及他前面所有购票者对应着的数相加，并以所得的和为它的纵坐标，将它用点表示在平面上，然后把相邻的点用线段连结起来，得到一条折线(如图中实线所示).



因为有 n 个人持一元人民币，n 个人持五角人民币，所以这种折线从 $(0,0)$ 起到 $(2n,0)$ 止. 有 n 段上升，n 段下降，因此这种折线共有 C_{2n}^{n} 条.

不难看出，一条这种折线表示一种排队方法，反过来也一样. 因此总共有 C_{2n}^{n} 种不同的排队方法.

发生找钱困难的排队方法所对应的折线与直线 $y=1$ 接触，为了计算与直线 $y=1$ 接触的折线的数目，对所有这种折线，从第一次接触的点开始，把以后的折线部分以直线 $y=1$ 为轴翻转(如图中虚线所示)，这样就得到从 $(0,0)$ 起到 $(2n,2)$ 止的折线. 不难看出，每一条与直线 $y=1$ 接触的折线对应着一条从 $(0,0)$ 起到 $(2n,2)$ 止的折线，反过来也一样. 但从 $(0,0)$ 起到 $(2n,2)$ 止的折线有 $(n+1)$ 段上升，$(n-1)$ 段下降，因此共有 C_{2n}^{n-1} 条，即从 $(0,0)$ 起到 $(2n,0)$ 止，且与直线 $y=1$ 接触的折线有 C_{2n}^{n-1} 条，即发生找钱困难的排队方法有 C_{2n}^{n-1} 种.

于是，不发生找钱困难的排队方法有

$$C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n-1}=\frac{1}{n}C_{2n}^{n-1} \text{ 种.}$$

5·68 一个俱乐部中有 $3n+1$ 个人，每两个人可以玩网球，象棋或乒乓球，如果每个人都与 n 个人打网球，与 n 个人下棋，与 n 个人打乒乓球. 证明俱乐部中有 3 个人，他们之间玩的游戏是三种俱全.

（匈牙利数学奥林匹克，1987 年）

[证] 把人看作点.如果两人可以玩网球,就在相应两人间连一条红线;如果两人可以玩象棋,就在相应两人间连一条黄线;如果两人可以玩乒乓球,就在相应两人之间连一条蓝线.这样就得到了一个有 $3n+1$ 个点的图.

自一点引出的两条线,如果颜色不同,我们就说它们构成一个"异色角".

考虑"异色角"的个数.

一方面,每一点引出 n 条红线,n 条蓝线,n 条黄线,因此在每一点处有 $3n^2$ 个异色角.由于共有 $3n+1$ 个点,所以共有 $3n^2(3n+1)$ 个异色角.

另一方面,图中共有

$$C_{3n+1}^3=\frac{(3n+1)\cdot 3n\cdot(3n-1)}{6}=\frac{n(3n-1)(3n+1)}{2}$$

个三角形.由于 $3n^2(3n+1)>2C_{3n+1}^3$,所以必有一个三角形中异色角的个数为 3.

这个三角形三边颜色互不相同,即相应的三个人之间玩的游戏三种俱全.

5·69 11 个剧团参加汇演,每天都排定其中的某些剧团演出,其余的剧团则跻身于普通观众之列.在汇演结束时,每个剧团除了自己的演出日外,至少观看过每个其他剧团的一次表演.问这样的汇演最少要安排几天?

(第 13 届加拿大数学奥林匹克,1981 年)

[解] 设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 为汇演的日期集.

将每一剧团用一子集 $A\subset N$ 表示:剧团 A 在 x 日表演,当且仅当 $x\in A$.

为了使两剧团 A 和 B 至少一次互相观看对方的演出,即至少有一天属于 B 而不属于 A,也有一天属于 A 而不属于 B.所以不能有 $A\subseteq B$ 或 $B\subseteq A$,特别地 $A\neq B$,所以不同剧团有不同的演出日期集的子集.

我们先证 $n=6$ 是足够的.

事实上,11 个剧团的一种可能的演出集:

$$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},$$
$$\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\},\{6\}.$$

这恰好是日期集 $N=\{1,2,3,4,5,6\}$ 的 11 个子集，并且任何两个都互不包含.

其次，我们证明 $n=5$ 不能满足条件. 因为每个剧团的演出日期集 $A\subset\{1,2,3,4,5\}$，并且显然 $1\leqslant|A|\leqslant 4$(这里 $|A|$ 表示集合 A 中元素的个数).

定义链为序列 $A_1\subset A_2\subset A_3\subset A_4$，其中 $|A_i|=i,1\leqslant i\leqslant 4$. 则 A_1 的一个元素可以是 1,2,3,4,5 中的任何一数. A_2 含有 2 个元素，但其中有 1 个是 A_1 的元素，A_3 含有 3 个元素，但其中有 2 个是 A_2 的元素，同样 A_4 所含 4 个元素中有 3 个是 A_3 的元素. 因此这种链的个数为 120 个. 元素个数为 1 或 4 的每个子集出现在 $4\times3\times2=24$ 个链中，元素个数为 2 或 3 的每个子集出现在 $2\times3\times2=12$ 个链中(例如 A_2 含某两个数，A_1 含有这二数之一，A_3 再含有其他三数之一，A_4 再含有其余二数之一). 由于我们有 11 个剧团，每个剧团的演出日期集在 120 个链中出现 12 次或 24 次，所以 11 个演出日期集总共至少出现 $11\times12=132$ 次，根据抽屉原理，至少有两个演出日期集出现在同一个链中，记为 A 和 B，此与 A 和 B 互不包含相矛盾.

因而这样的安排最少要 6 天.

5·70　已知共有 12 个剧团参加一次为期 7 天的戏剧节，要求每个剧团都能看到其他所有剧团的演出(当天没有演出任务的演员在台下观看演出). 问最少共要演出多少场?

(中国国家集训队测验题，1994 年)

[解]　显然，每个剧团至少演出 1 场. 若 A 剧团在 7 天中只演出 1 场，则在 A 团演出的当天其他剧团都没有演出，否则将看不到 A 团的演出. 这样，该天只演出这一场.

若有 3 个剧团在戏剧节期间都仅仅各演 1 场，则这 3 个剧团占去 7 天中的 3 天. 从而其余 9 个剧团只能在其余 4 天中演出. 由于这 9 个剧团也要互相观摩，故他们各自演出的日期号码的集合互不包含. 但 4 个不同的自然数所构成的互不包含的子集最多 6 个而达不到 9 个，矛盾. 所以至多有两个剧团各演 1 场，其余剧团每团至少都演两场，即至少共演 22 场.

另一方面，只要将 12 个剧团的演出场次安排如下：

剧团	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
演出日期	1 2	1 3	1 4	1 5	2 3	2 4	2 5	3 4	3 5	4 5	6	7

便可满足题中要求，且 12 个队共演出 22 场.

综上可知，最少要演出 22 场.

5·71　某市有 n 所中学，第 i 所中学派出 C_i 名学生到体育馆观看球赛. 已知 $0 \leqslant C_i \leqslant 39$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $C_1 + C_2 + \cdots + C_n = 1990$，看台的每一横排有 199 个座位. 要求同一学校的学生必须坐在同一横排，问体育馆最少要安排多少横排才能保证全部学生都能按要求入座？

（中国高中数学联赛，1990 年）

[解 1]　由于 $C_i \leqslant 39$，故每一横排至少可坐 161 人. 于是只要有 13 排，至少可坐 $161 \times 13 = 2093$ 人，当然能坐下全部 1990 名学生.

下面我们用极端原理来证明只要安排 12 个横排就够了. 由于 C_1, $C_2, \cdots, C_n$ 只有有限多个，故它们的不超过 199 的有限和也只有有限多个. 选取其中最接近 199 的有限和，记为 $C_{i_1} + C_{i_2} + \cdots + C_{i_k}$，将这 k 个学校的学生安排在第一排就坐. 然后再对其余的诸 C_i 人进行同样的讨论并选取不超过 199 且最接近 199 的有限和，并把相应的学校的学生排在第二排. 依此类推，一直排到第十排并记第 i 排的空位数为 x_i, $i = 1, 2, \cdots, 12$.

如果 $x_{10} \geqslant 33$，则余下的未就坐的学校的学生数 C_i 全都不小于 34. 若余下的学校数不多于 4 个，则只要 11 排就够了. 若余下的学校数不少于 5 个，则可任取 5 个学校的学生安排在第 11 排. 这时有 $x_{11} \leqslant 29 < x_{10}$，此与 x_{10} 的最小性矛盾. 如果 $x_{10} \leqslant 32$，则前 10 排的空位总数 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} \leqslant 10x_{10} \leqslant 320$，亦即前 10 排已至少坐了 1670 人，未安排就坐的学生至多还有 320 人. 每排至少可坐 161 人，故只要有 12 排就够了.

最后，考察只有 11 排的情形. 这时，只容许有 199 个空位. 为了安排下全部学生，每排空位平均不能达到 19 个. 设 $n = 80$，前 79 个学校各出学生 25 人，最后一个学校派 15 人，则共有 1990 人. 但安排座位时，除了一排可坐 $25 \times 7 + 15 = 190$ 人外，其余 10 排每排至多能安排 7 个学

校的 175 人. 故 11 排至多安排 1940 人就坐. 这说明只有 11 排座位是不够的.

综上可见,最少需要 12 排座位.

[**解 2**] 只证有 12 排座位即可保证全部学生按要求入座. 11 排座位不够的例子见解 1.

首先按下述原则安排第一排:从第一所学校的学生起,依次排入第一排座位. 接着是第二所,第三所学校,…,而且只要还有空位,便让下一所学校的学生坐入,直到没有空位为止. 这时,上述最后一所学校的学生至少有 1 人就坐且该校学生或者刚好坐满这一排或者坐满这排座位后还有人无处可坐. 显然,这些学校的学生总数不少于 199.

然后,从下一所学校起,按同样原则安排第 2—9 排学生. 于是每排学生总数都不少于 199. 从而余下的学生至多 199 人,可以安排在第十排全部就坐. 最后将前 9 排每排的最后一所学校的学生全部调出,则其余学生已在前 10 排按要求坐好. 由于每排安排 5 个学校的学生不成问题,故可将调出的 9 个学校的学生安排在后两排,从而证明有 12 排座位就够了.

5·72 某电影院的座位有 m 排,每一排有 n 个座位. 不负责任的售票员卖出了 mn 张票,但这些票中有座位号相同的. 结果可以把观众这样安排就座,使得每人所坐的位置的排号与座号至少有 1 个与票上一致.

(1) 证明可这样来安排观众的座位,使得至少有 1 个观众的位置与票上号码完全一致而其余观众的座位仍满足原来的条件.

(2) 在满足原来条件的前提下,使座位与票上号码完全一致的观众人数最多的排法中,最少有几个这样的观众?

(第 26 届独联体数学奥林匹克,1992 年)

[**解**] (1) 如果坐好后发现任何人的位置与他的票号都不相同,则任取 1 人为第 1 号,并把坐在第 1 号手中票的号码所示的位置上的人称为第 2 号,把他的票上所示的位置上所坐的人记为第 3 号,这样继续下去. 因为总共只有有限多人,故当进行到某一步时,必然会有某人第 2 次被编号. 设他两次编号为 k_1, k_2,且 $k_2 - k_1 \geqslant 2$. 现在按以下方式重新为号码为 $k_1, k_1+1, \cdots, k_2-1$ 的观众重新安排座位:让号码为 k_1 的人去坐第 k_1+1 号原来所坐的位置,让号码为 k_1+1 的人去坐第 k_1+

2 号原来所坐的位置，…，最后让第 $k_2 - 1$ 号人去坐第 k_1 号原来所坐的位置. 这样一来，他们的位置都与票号一致了. 其余的人一律未动，当然还满足原来的条件.

(2) 所求的人数的最小值为 1. 考察所卖的票全都是各排第 1 号，且其中第 1 排的有 $m + n - 1$ 张，其余各排各有 $n - 1$ 张的情形. 这时，为满足题中的条件，持有 1 - 1 号票的 $m + n - 1$ 名观众必然坐满第 1 排和所有各排的第 1 号，其余的观众只能按票上的排号坐在该排，却无法坐在第 1 号. 可见，所坐位置与票号一致的观众只有 1 人且无法使之增多. 这表明所求的人数的最小值为 1.

5·73 已知 11 个人的俱乐部有一个委员会，委员会的每一次会议上，组成一个新的委员会，它与上一个委员会恰有 1 个成员不同（或者新增 1 名成员或者减少 1 名成员）. 委员会中至少有 3 个人，且按照俱乐部的规则，任一阶段的委员会成员必须与它前面的所有委员会都不同. 问是否可能在某一阶段，组成委员会的所有可能均已出现过了？

（中国国家集训队训练题，1990 年）

［解］ 如果能够实现，则按照先后顺序，奇数个成员的委员会和偶数个成员的委员会交替出现. 从而奇数个成员的委员会的总数与偶数个成员的委员会的总数相差不超过 1.

另一方面，这个差又等于

$$(C_{11}^3 + C_{11}^5 + C_{11}^7 + C_{11}^9 + C_{11}^{11}) - (C_{11}^4 + C_{11}^6 + C_{11}^8 + C_{11}^{10}) = 45,$$

矛盾. 故知题中所论的情况是不会出现的.

5·74 晚会上 $n(\geqslant 2)$ 对男女青年双双起舞. 设任何一个男青年都未与所有女青年跳过舞，而每个女青年都至少与一个男青年跳过舞. 求证必有两男 b_1, b_2 及两女 g_1, g_2，使得 b_1 与 g_1，b_2 与 g_2 跳过舞而 b_1 与 g_2，b_2 与 g_1 均未跳过舞.

（匈牙利数学奥林匹克，1964 年）

（第 26 届美国普特南数学竞赛，1965 年）

［证 1］ 设与之跳过舞的女青年数最多的男青年之一为 b_1. 因 b_1 未与所有女青年跳过舞，故可找到女青年 g_2 未与 b_1 跳过舞. 因 g_2 至少与一个男青年跳过舞，故存在 $b_2(\neq b_1)$ 与 g_2 跳过舞. 如果凡是与 b_1 跳过舞的女青年也都与 b_2 跳过舞，则与 b_2 跳过舞的女青年数至少比 b_1 大 1. 此与假设 b_1 的最大性矛盾. 故在与 b_1 跳过舞的女青年中至少有 1

人未与 b_2 跳过舞，取其中之一为 g_1. 易见，这样选取的 b_1, b_2, g_1, g_2 满足题中要求.

[证 2]　记与之跳过舞的男青年数最少的女青年之一为 g_1，并取与 g_1 跳过舞的男青年之一为 b_1. 因为 b_1 未与所有女青年跳过舞，故可取女青年 g_2 未与 b_1 跳过舞. 如果凡是与 g_2 跳过舞的男青年均与 g_1 跳过舞，则与 g_1 跳过舞的男青年至少比 g_2 多 1 人，此与 g_1 的选法矛盾. 故可选取 b_2 与 g_2 跳过舞但与 g_1 未跳过.

5·75　某天7个男孩先后去售货亭买冰淇淋. 已知每个人都去过3次，其中每两个人都在售货亭处相遇过，求证必有某一时刻有三个男孩同时在售货亭相遇.

（第 23 届全苏数学奥林匹克，1989 年）

[证]　若不然，则任何一次相遇都是两人相遇. 7 人中每两人相遇一次，共有 $C_7^2 = 21$ 次. 其中第一次相遇是有两人来到售货亭. 以后每次相遇的两人中，至少有 1 人是新来到售货亭的，20 次相遇至少有 20 人次来到售货亭. 总共来到售货亭的至少有 22 人次.

另一方面，已知每人都到过售货亭 3 次，7 人共去 21 人次，矛盾.

5·76　民兵连共有 100 名民兵，每天晚上派 3 人值班. 试证不能排出一个值班表，使得每两个人恰好一起值一次班.

（第 5 届全俄数学奥林匹克，1965 年）

[证]　若不然，则可以排出满足要求的值班表. 固定一名民兵 a 并考察表中所有含有 a 的值班组. 为使每个人都恰好与 a 一起值一次班，除 a 之外的其余 99 人必须分成若干个两人组，每组与 a 一起值一次班，这是不可能的.

5·77　队长每天晚上都从 33 名队员中指派 9 人或 10 人去值班，问最少经过多少天，才能使每个队员值班的次数都相等？

（第 21 届全苏数学奥林匹克，1987 年）

日	值班人员号码
1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
2	11,12,13,14,15,16,17,18,19,20.
3	21,22,23,24,25,26,27,28,29,30.
4	31,32,33, 1, 2, 3, 4, 5, 6.
5	7, 8, 9, 10,11,12,13,14,15.
6	16,17,18,19,20,21,22,23,24.
7	25,26,27,28,29,30,31,32,33.

[解]　设 9 人值班 k 天，10 人值班 n 天后，每个队员恰好都值班 m 天，于是有

$$9k + 10n = 33m.$$

当 $m = 1$ 时，上述方程没有正整数解，当 $m = 2$ 时，得到惟一的一组

解：

$k=4, n=3$. 这7天的值班人员可安排如右表所示. 其中前3天各有10人值班，后4天各有9人值班，且7天中每人恰好值班两次. 故知最少要经过7天才能使每个队员值班的次数都相等.

5·78 学校每天安排甲乙两班学生各一名同时值日，且第二天仅更换其中的一名学生. 两班学生都按自己班内所排好的次序依次参加值日，且当每人都轮过一次之后，又从表中的第一人轮起. 已知甲班有29名学生，乙班有32名学生，问能否拟订这样的值日计划，使在某一段时间内，甲班的每一名学生和乙班的每一个学生一起值日都恰好一次，然后又轮到第一对学生值日？

（第22届全苏数学奥林匹克，1988年）

[解] 设满足要求的值日计划是可以拟定的，且依照这个计划，甲班轮换了 a 次，乙班轮换了 b 次. 于是由条件知 $a+b=32\cdot 29$. 因为最后又轮到第一对学生，因而 a 是29的倍数而 b 是32的倍数. 于是 $a=32\cdot 29-b$ 是32的倍数而 $b=32\cdot 29-a$ 是29的倍数. 因为 $(29, 32)=1$，故 a 和 b 都是 $32\cdot 29$ 的倍数，从而 $a\geqslant 32\cdot 29, b\geqslant 32\cdot 29$，此与 $a+b=32\cdot 29$ 矛盾. 可见，所要求的值日计划是无法制定的.

5·79 为了守卫某一目标需有人昼夜值班，故分有白班和夜班. 可安排值班人员单值一个白班或一个夜班，也可安排其连续值班一昼夜. 值过一个白班，夜班，昼夜班后，值班人员应分别休息不少于1昼夜，1.5昼夜和2.5昼夜. 如果每班1人，问最少需要有多少个人参与值班？

（第54届莫斯科数学奥林匹克，1991年）

[解] 如果有4个人轮流值班，每人值班1昼夜后休息3昼夜，显然满足要求，故知4个人参加值班是足够了.

下面证明仅有3人参加值班是不够的.

(1) 在3人轮流值班的过程中，如果有某人值了昼夜班，然后应休息2.5昼夜. 但另两人至多连续值班两昼夜(白班，昼夜班，夜班或昼夜班，昼夜班)，所以在第1人值了昼夜班之后第3天，值班就进行不下去了.

(2) 在没人值昼夜班的情况下，在第2人值夜班之后，应休息1.5昼夜. 但另外两人只能连续值班一昼夜，至此，值班就进行不下去了.

综上可知,最少应有 4 人参加值班.

5·80　两种不同的药品 A 和 B 已经在两个医院中都做过了临床试验.试验结果表明,在两个医院中都是药品 A 比药品 B 效果好.但令人奇怪的是当人们把结果合并后发现,药品 B 比药品 A 效果好.问这是否可能,是否是计算错了?

（西班牙数学奥林匹克,1992 年）

[解]　可能实现.

分两种情况讨论.

(1) 若药品 A 和 B 在甲医院都有 n 个人接受试验,有效人数分别为 a 和 b,则有 $\frac{a}{n} > \frac{b}{n}$.从而有 $a > b$.设药品 A 和 B 在乙医院都有 m 个人接受试验,有效人数分别为 c 和 d,则又有 $c > d$.从而有 $a + c > b + d$,由此可得 $\frac{a+c}{m+n} > \frac{b+d}{m+n}$,即在两个医院试验人数均相同的情况下,合并后仍是药品 A 比 B 效果好.

(2) 当两个医院中至少有 1 个医院接受试验的人数不同时,题中所述的情况就可以实现了.例如药品 A 和 B 在甲医院都有 10 人接受试验,有效人数分别为 3 和 2;药品 A 和 B 在乙医院接受试验的人数分别为 90 和 990,有效人数分别为 45 和 488.易见

$$\frac{3}{10} > \frac{2}{10}, \frac{45}{90} > \frac{488}{990}.$$

但当合并起来看时,却有

$$\frac{3+45}{10+90} = \frac{48}{100} < \frac{490}{1000} = \frac{2+488}{10+990}.$$

即药品 B 比药品 A 效果好.

5·81　在一块平地上有 n 个人,对每个人,他到其他人的距离均不相同.每人都有一把水枪,当发出失火信号时,每人用枪击中距他最近的人.当 n 为奇数时,证明至少有一人的身上是干的.当 n 为偶数时,这个结论是否永远正确.

（第 19 届加拿大数学奥林匹克,1987 年）

[解]　(1) 当 n 为奇数时,设 $n = 2m - 1$.对 m 施行数学归纳法.

当 $m = 1$ 时,$n = 1$,结论显然成立.

假设命题对 m 成立,下面考虑 $2m + 1$ 个人的情形.设 A,B 两人间

的距离在所有的两人间的距离中为最小的. 现在撤出 A 和 B,使剩下 $2m-1$ 个人.

由归纳假设,至少有一个人身上是干的,设为 C. 再把 A,B 二人加进去,变为 $2m+1$ 个人,由于 $AC>AB, BC>AB$,则由题设,C 的身上仍然是干的.

于是对所有自然数 m,命题对 $n=2m-1$ 成立.

(2) 当 n 为偶数时,命题不真.

事实上,设 $n=2m$,$2m$ 个人记为 $A_j, B_j(j=1,2,\cdots,m)$. 设 A_j 与 B_j 的距离为 1,而与其他人距离都大于 1,例如,设 A_j 及 B_j 分别位于 $3j$ 及 $3j+1$ 处 $(j=1,2,\cdots,m)$,这时 A_j 与 B_j 互相击中.

5·82 兄弟三人及每人的妻子在同一天都去看望一位生病的长辈,任何一人去探病的次数都恰好一次. 三兄弟中的每个人在病房中都遇到他两位兄弟的妻子. 求证三兄弟中的某人在病房中遇到了自己的妻子.

(匈牙利数学奥林匹克,1959 年)

[证 1] 记三兄弟为 A,B,C,三人的妻子分别为 A',B',C'.

设 A 在病房没有见到 A'. 于是或者 A' 在 A 到病房之前已去过并离开了,或者 A' 在 A 离开病房之后才去的. 因为 A 只去病房一次且在病房中见到了 B' 和 C',故知 A' 或者离开病房比 B',C' 都早,或者来到病房的时间比 B',C' 都迟. 同理,如果 B 在病房未见到 B',C 在病房未见到 C',则 B' 和 C' 也都应是如此. 但这是不可能的. 因为 A',B',C' 三人中,只有 1 人离开病房比另两人早,也只有 1 人到病房的时间比另两人迟. 这就是说,三人中至少有 1 人离开病房的时间不比另两人都早,来到病房的时间也不比另两人都迟,她必在病房见到了自己的丈夫.

[证 2] 若不然,则 3 对夫妻都未在病房中相遇. 如果 A 到病房比 A' 早,由于 A 未见 A',故 A 应在 A' 到病房之前就离开了. 因为 A 见到 B',故知 B' 早于 A'. 又因 B 未见 B',若他在 B' 到病房之前就来过又离开了,则他无法见到 A',故 B 只能在 B' 走后才来,即 B 迟于 B'. 同理,若 A 迟于 A',则 B 早于 B'. 这就是说,两夫妻到病房的次序恰好相反.

由于只有夫早于妻和夫迟于妻两种不同情形,故由抽屉原理知,3 对夫妻中总有两对夫妻是同样的顺序,矛盾.

[证 3] 设来到病房的先后次序是 A,B,C,并设 B 未见到 B'. 于

是或者 B 在 B' 来之前已来过并离开了,或者 B 是在 B' 走后才来的.若为后者,则因 C 见到了 B',故 B 迟于 C,矛盾.因而只能为前者.又因 A 见到 B',故知 B 离开病房早于 A.这样一来,A 比 B 早到病房,晚离病房.既然 B 见到了 A',A 当然也遇见了 A'.

5·83　假定 n 个人各恰好知道一个消息,而所有 n 个消息都不相同.每次"A"打电话给"B","A"都把所知道的一切告诉"B",而"B"却不告诉"A"什么消息.为了使各人都知道一切消息,求所有需要两人之间通话的最少次数.证明你的结论.

(第3届加拿大数学奥林匹克,1971年)

[解]　用 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 表示 n 个人,$p_i\rightarrow p_j$ 表示 p_i 对 p_j 的通话.显然,通话序列

$$p_1\rightarrow p_n,p_2\rightarrow p_n,\cdots,p_{n-1}\rightarrow p_n,$$
$$p_n\rightarrow p_1,p_n\rightarrow p_2,\cdots,p_n\rightarrow p_{n-1}.$$

可以使得各人都知道一切消息,而总共所需通话次数是 $2n-2$ 次.

我们证明 $2n-2$ 是最少次数.

假设有一通话序列,使得各人都知道一切消息.考虑这样一次通话,即这次通话完毕时,接话人(设为 p)就已经知道一切消息,但是这时还没有别人全知道.显然,除 p 之外的 $n-1$ 个人每一个都必须在这次通话之前(包括这次通话),至少打过一次电话(否则 p 不可能知道一切消息),并且这 $n-1$ 个人中的每一个都必须在这次通话之后至少接一次电话,因此,所设的序列至少有 $2n-2$ 次通话.

5·84　一位主人正在等待7个或11个孩子的到来,他准备了77个弹子作礼物,并把这些弹子分装在 n 个袋中,使得到来的每一个孩子(不论7个还是11个),都能得到若干袋弹子,并且这77粒弹子是等分给这些孩子的.求 n 的最小值.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1991年)

[解]　由于这 n 袋弹子分成7份,每份有11粒弹子,用7个顶点 $x_1,x_2,\cdots,x_7$ 表示.

这 n 袋弹子又可分为11份,每份有7粒弹子,用11个顶点 $y_1,y_2,\cdots,y_{11}$ 表示.

若某一袋弹子分别出现在 x_i 和 y_i 中,则在 x_i 和 y_i 之间连一条边,这样就得到一个偶图

$$G=(X,Y,E),$$

其中 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_7\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_{11}\}$.

这个偶图 G 一定是连通的.

若不然，设 $G'=(X',Y',E)$ 是其连通子图，令 $|X'|=a$，$|Y'|=b$，其中 $a\leqslant 7$，$b\leqslant 11$，且等号不可能同时成立.

因为 G' 是连通的，所以

$$11a=7b.$$

由于 $(7,11)=1$，所以只有

$$a=7,b=11,$$

这与 $a\leqslant 7$，$b\leqslant 11$ 等号不可能同时成立矛盾.

因 G 是连通图，所以其边数 $\geqslant 7+11-1=17$. 因此

$$n\geqslant 17.$$

事实上，当 $n=17$ 时，若使得每袋弹子数分别为

$$7,7,7,7,7,7,7,4,4,4,4,3,3,3,1,1,1.$$

则这时满足题设要求.

所以 n 的最小值为 17.

5·85 已知一个保险柜由 11 个成员的委员会负责管理，保险柜上加了若干把锁，这些锁的钥匙分配给各个委员保管使用. 为了使任何 6 个委员同时到场就能打开保险柜，而任何 5 人到场都不能打开柜门，最少应给保险柜加多少把锁？

（波兰数学奥林匹克，1971 年）

[解] 设满足要求的锁的最少把数为 n 并记这 n 把锁的集合为 A. 设 A_i 是第 i 个委员可以打开的锁的集合. 按已知，对于 $\{1,2,\cdots,11\}$ 的任何 5 元子集 $\{i_1,i_2,\cdots,i_5\}$，都有

$$A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup A_{i_3}\cup A_{i_4}\cup A_{i_5}\neq A; \quad ①$$

对于 $\{1,2,\cdots,11\}$ 的任何 6 元子集 $\{j_1,j_2,\cdots,j_6\}$，都有

$$A_{j_1}\cup A_{j_2}\cup\cdots\cup A_{j_6}=A. \quad ②$$

由 ① 知集合 $A-\bigcup_{k=1}^{5}A_{i_k}$ 非空，设 $x_{i_1\cdots i_5}$ 是它的一个元素. 这表明，$x_{i_1\cdots i_5}$ 所代表的锁是编号为 $i_1,\cdots,i_5$ 的那 5 个委员打不开的一把锁. ② 式则意味着对任何 $j\notin\{i_1,i_2,\cdots,i_5\}$，都必有 $x_{i_1\cdots i_5}\in A_j$. 这样一来，我们

就将{1,2,…,11}的5元子集与锁之间建立了一个对应关系.

我们指出,这个对应关系是个单射.若不然,设对于两个不同的5元子集$\{i_1,\cdots,i_5\}$和$\{k_1,\cdots,k_5\}$有$x_{i_1\cdots i_5}=x_{k_1\cdots k_5}$.因为两个5元子集不同,故这两个5元子集的并集至少有6个元素,而这就导致有6个人都打不开同一把锁,矛盾.

因为{1,2,…,11}的不同5元子集共有$C_{11}^5=462$个,所以锁的把数$n\geqslant 462$.

另一方面,如果给保险柜加了462把锁,并将这些锁与集合{1,2,…,11}的462个5元子集一一对应.将每把锁的6枚钥匙分发给这把锁所对应的5人组之外的6个委员掌管使用,则任何5个委员都有一把锁打不开,而任何6个委员都可以打开全部锁.

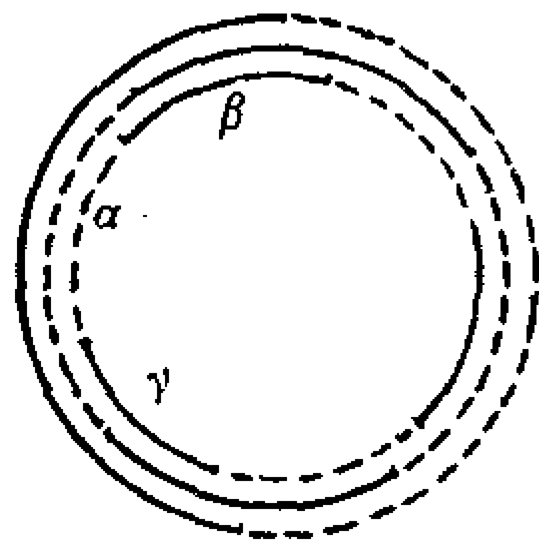
综上可知,最少应为保险柜加462把锁.

5·86　三位老人在长100米的林间路上散步,他们的速度分别是每小时1千米,2千米和3千米.当他们走到小路的尽头时,便转过身来以原速沿小路反向散步并一直这样继续下去.试证总能找到一个长达1分钟的时间间隔,使在这段时间内,三位老人朝向同一方向散步.

(第26届莫斯科数学奥林匹克,1963年)

[证]　三位老人的运动都以12分钟为周期:每经过12分钟,三人都回到出发点并开始按原出发方向继续行走.在这12分钟里,第1人走了一个来回;第2人走了两个来回;第3人走了三个来回.

现将时间轴缠绕在一个周长为12分钟的圆周上,并通过将圆弧染成黑色或白色来表示在该段时间是正向或反向行走.为了分别反映3人的动态,我们将圆周分为三层:第1层圆周由黑白各一段弧组成,每段弧各为6分钟;第2层圆周由相间的黑白各两段弧组成,每段弧长为3分钟;第3层圆周由相间的黑白各3段圆弧组成,每段弧长为2分钟.见右图,其中虚线表示白色.



先看第1,2两层圆周.不妨设第1层的两条弧的分点落在第2层的黑弧上,于是这两层圆弧有3段同色,其中有两段同为黑色共长3分钟,1段同为白色长3分钟.

再看第3层圆周与前两层中3段同色圆弧的相互关系.如果在同为

白色的3分钟圆弧中第3层中黑弧不足2分钟,则必在一端或两端,于是三层同为白色的部分超过一分钟,结论成立.否则,必有两分钟黑弧在前面两层3分钟白弧的中间.从而第3层圆周上与这两分钟黑弧相对的两分钟白弧完全落在第2层的3分钟白弧之内(图中 α 部分).而第3层圆周上,这段白弧两边各有一段两分钟黑弧,而前两层同为黑色的两段弧又共长3分钟,故至少有1段是3层同为黑色且长为1分钟的弧段,即结论成立.

5·87　已知平面上有4条直线,其中任何两条都不平行,任何3条都不共点.在每条直线上都有一个匀速行走的行人,现知第1位行人与第2,3,4位行人都曾相遇,第2位行人同第3,4位行人也都曾相遇.求证第3,4两位行人也必相遇.

(第21届莫斯科数学奥林匹克,1958年)

[证1]　在平面上引入直角坐标系并过原点作平面的垂线,把这条垂线作为时间轴,于是我们得到时空坐标系.当一个人沿平面上一条直线匀速行走时,他的运动图像是时空坐标系中的一条直线——"时空直线".这条时空直线沿时间轴在已知平面上的投影恰为行人运动的直线.既然第1,2两人曾经相遇,故两人所对应的时空直线必相交,于是这两条相交直线在空间中决定一个平面 M.第3,4两人中每人都曾与1,2两人相遇过,而任何3人不同时相遇,故知第3,4两人所对应的两条时空直线都与平面 M 交于两点,从而都在平面 M 上.如果第3,4两人不相遇,则两人所对应的时空直线必平行,从而它们的投影也平行,此与已知矛盾,所以第3,4两人必相遇.

[证2]　选取以第1位行人所在地为原点的运动坐标系,因而他在坐标系中处于不动的状态.因为其余3人都要和他相遇,故其余3人的运动轨迹都经过他所在的原点,且每人的运动轨迹都是一条直线.又因后两人都与第二人相遇,故后3人在运动坐标系中的轨迹全是同一条直线.

第3,4两人沿同一条直线运动,若不相遇,则必是在运动坐标系中的运动速度相同,而这意味着在原来平面上二人所行走的直线互相平行,此与已知矛盾.这就证明了第3,4两人必相遇.

5·88　设 A,B 两点位于某山峰的两侧且具有相同的海拔高度,连结两点的山路呈折线的形状,它的每个顶点都高于 A,B 两点.已知 A,

B 两点各有一位游客,问二人能否做到在任何时刻都保持在同样高度的条件下走过连结 A,B 两点的山路?

(第 23 届全苏数学奥林匹克,1989 年)

[解] 我们把位于 A,B 两点的游客分别称为甲和乙并且关于折线形山路作两点假设:

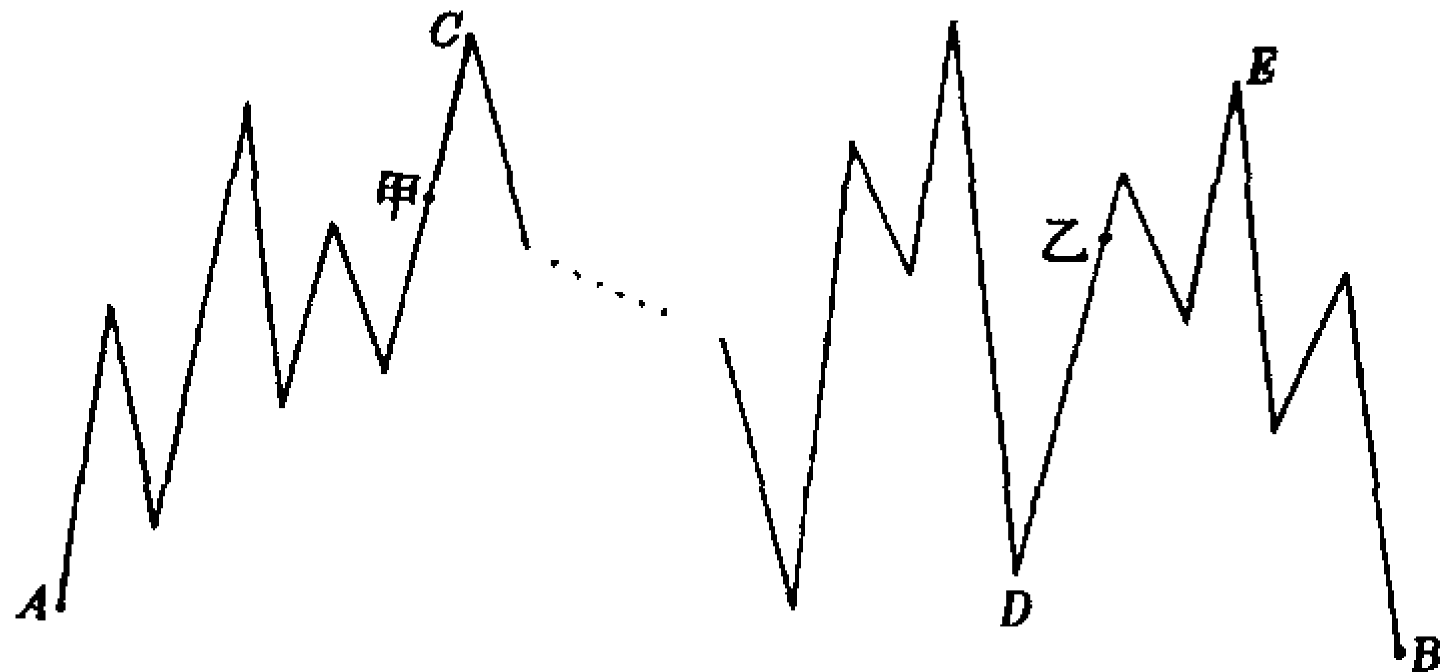
(1) 每段山路都是坡路.若某人前面有某段路是平路,则他可以一直走过去,而另一人只要站在原地不动就行了.

(2) 每相邻两段坡路都是上、下坡路各一段.若有相邻两段路同为上坡或同为下坡,则只要把它们视为一段就可以了.

我们把折线的由上坡转为下坡的顶点称为峰点,由下坡转为上坡的顶点称为谷点. 当然,A,B 两点也算作谷点,而且是最低的谷点.

开始后,甲乙二人同走上坡路并随时保持等高(下同).若二人所走路段的两个峰点等高,则可同时越过峰点分别进入下一段下坡路.若两个峰点高度不同,不妨设甲方的较高,则当乙走到峰点时,甲未到峰点而是走到与乙所在峰点等高的一点处.接着乙越过峰点进入下一段下坡路,甲则只能从坡上退下来.…

由类似的过程可以看出,二人同时上坡时,遇矮峰者越过;二人同时下坡时,越高谷者跨过.因此,当二人在前进过程中同时上坡或同时下坡时,总有一人可以越峰或跨谷前进.反过来说,当二人都无法前进时,一定是一方面临无法逾越的高峰而另一方遇到无法跨越的低谷(见下图).我们指出,没有不可跨过的深谷,即这时有办法使乙跨过谷点 D.注意,在乙所走过的峰点中,至少有一个不低于甲所越过的所有峰点,设距乙最近的一个峰点是 E.而在甲所走过的谷点中,总有一个不高于 D,取其中距甲最近的一个(在上图中就是)A.现在,让甲乙同时下坡,于是当乙在折线由 D 到 E 的部分上移动时,甲可以回到第一段而乙一直到达 D 并跨过 D.以后,因为 AC 上的所有谷点除 A 外都高于D,所以双方至少有一方可以前进,而且乙即使后退也不超过 D,直到乙前进时又遇到



比 D 更深的谷点为止，或者到甲越过 C 点又面临高峰或低谷为止．但这时又可重复上面的论证．这样继续下去，甲乙二人必然相遇．然后二人分别反向重复对方所走的路线即可完成题中要求的旅行．

5·89　在某城有1000栋独家住宅，其中每栋住有1人．在一个好天气的日子里，每一个人都将自己的家搬迁了一次(搬迁之后，每栋仍都住有1人，只是都调换了住宅)．试证在搬迁之后，可以将1000栋住宅分别漆上蓝色、绿色和红色，使得对每一个主人来说，他的新居和旧居的颜色都不一样．

(第33届莫斯科数学奥林匹克，1970年)

［证］　我们对住宅的栋数 n 使用归纳法来证明．当 $n = 2,3$ 时，结论显然成立．设结论当 $n < k$ 时都成立，则当 $n = k$ 时，我们任取一栋住宅编号为1，将原住1号的人所迁到的住宅编号为2，将原住2号的人所迁到的住宅(如果不是1号)编号为3，如此继续下去，必存在自然数 $m \leqslant k$，使得原住 m 号住宅的人迁到1号居住．于是得到一个号码圈，其中居住在每一号码的住宅中的人都搬到下一个号码的住宅．这样，我们可以从1号开始按蓝、绿、红的顺序循环染色直到 $m-1$ 号住宅．这时 $m-1$ 号和1号至多有两种不同颜色，我们总可选1种颜色来给 m 号住宅染色，使它与 $m-1$ 和1号住宅的颜色都不同．

若 $m = k$，则问题已经解决；若 $m < k$，则由归纳假设知对余下的 $k - m$ 栋住宅可以按要求进行染色．故知 $n = k$ 时结论仍然成立．这就完成了归纳证明．

5·90　M 国中有若干座城堡，从每座城堡都延伸出3条大道．已知从某城堡中出来一位骑士，他沿着这些大道走去，每当他走过一座城堡后，便转上相对来路而言的向左或向右的大道．但是，如果他这次向左拐，那么下次就一定向右拐，决不连续两次拐向同一个方向．求证在他漫游过程中，必在某个时刻回到了原出发时的城堡．

(第35届莫斯科数学奥林匹克，1972年)

［证］　设所有这些城堡间的路段(由一个城堡到另一个相邻城堡间的道路)共有 n 段，则当骑士漫游已走过 $4n+1$ 段时，由抽屉原理知，必有某段路，他至少5次走过它．因而，其中总有3次是沿同一方向走过这一路段．走过这一路段后可能向左也可能向右拐，但3次中总有两次是拐向同一方向的．我们把这位骑士两次走过的连续两段路的号

码(按他出发后走过的路段编号)分别记为$(i,i+1)$,$(j,j+1)$,其中$j>i$.则由骑士行走的规律便知$i-1$和$j-1$,$i-2$和$j-2$,…都是同一段路.特别地,1和$j-i+1$是同一段路.这就是说,骑士在走了$j-i$段路后回到了原出发的城堡.

5·91　生活在花城的小矮人中间流行感冒病.一天,若干小矮人着凉后患了感冒.后来再没有人着凉,但那些健康的矮人由于看望自己患病的亲友仍然要患病.已知每个矮人患病正好一天,并且痊愈后至少一天他具有免疫力(即这一天他不会再次感冒).每个健康的矮人不顾流行病而每天去看望自己的病友.当流行病开始后,这些矮人也不再接种疫苗.

(1) 如果在流行性感冒发病的前一天,某些矮人因接种了疫苗而在别人发病的第一天具有免疫力,问流行性感冒能持续多久?

(2) 如果在发病第一天全体矮人都没有免疫力,那么流行性感冒迟早必会结束.

(第14届全苏数学奥林匹克,1980年)

[解] (1) 我们把患病的,未患病且未接种疫苗的及接种疫苗的矮人分成A,B,C三组.第一天,A组人得病,B和C组人来看望他们,结果是B组人受传染而得病但C组人无病.第二天,B组人患病,C组和A组人来看望他们,结果是C组人得病而A组人因感冒刚好具有一天免疫力而不受感染.继续下去,总是三组人中有一组有病,二组来探病者中一组受传染而另一组不得病.故知流行性感冒将无限持续下去.

(2) 这时只要分成患病与暂未患病两组人.第一天A组患病,B组探望病友后也患病.第二天,A组病好后来探望B组病友,因有免疫力不再受传染,接着大家就都无病了.可见,第二天就结束了.

5·92　若干名儿童围成一圈,他们手中都拿有一些糖块.规定进行如下传递,每次传递的方法如下:如果某人手中糖块数是奇数,则他可再领取一块,然后每人都把手中糖块的一半传给右边的小朋友.求证一定可以经过若干次传递,使得所有儿童手中的糖块数都相同.

(中国北京市数学竞赛,1962年)

[证]　不妨设某次传递前手中糖块数最多的人有$2m$块,最少的有$2n$块,$m>n$.进行一次传递后,结果是

(1) 传递后每人手中的糖块数仍在$2n$与$2m$之间;

(2) 原来手中糖块数超过 $2n$ 块的,传递后仍然超过 $2n$ 块;

(3) 至少有一名原来糖数为 $2n$ 的孩子,传递后糖块数超过了 $2n$.

事实上,圈子中至少有一名拿 $2n$ 块糖的孩子的左邻手中糖块数为 $2h > 2n$. 传递之后,原拿 $2n$ 块糖的孩子手中的糖块数变为 $n + h > 2n$.

由于每传递一次,拿 $2n$ 块糖的孩子数至少减少 1,故若干次后,将使所有孩子手中的糖块数都大于 $2n$. 当他们都通过领取而使自己手中糖块数为偶数时,孩子手中糖块数的最小值至少上升了 2.

由于孩子手中糖块数的最大值在传递过程中不增而经过若干次传递之后最小值至少上升 2,故知经过多次传递后总可以使最大值与最小值相等,即所有孩子手中的糖块数都相同.

5·93 n 个小学生围坐在一个圆周上,一位老师沿该圆周逆时针方向行走并且给小学生发糖. 从某个小学生开始发糖,接着越过 1 个学生,给下个学生发糖;然后越过 2 个学生,再给下个学生发糖;然后越过 3 个学生,给下个学生发;…,每次都比上一次多越过 1 个学生. 问当 n 满足什么条件时,最终可使每个学生都得到糖?说明理由.

(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年)

[解] 将 n 个小学生从 1 到 n 编号,于是问题即为:当 n 为何值时,集合 $\left\{\frac{1}{2}k(k+1)(\bmod\ n) \mid k \in N\right\}$ 包含集合 $\{0,1,\cdots,n-1\}$,即包含 mod n 的完全剩余系.

(1) 设有奇素数 p,使得 $p \mid n$. 记 $a_k = \frac{1}{2}k(k+1)$. 于是有

$$a_{k+p} = a_k + \frac{1}{2}(2k+1+p)p \equiv a_k (\bmod\ p). \qquad ①$$

而当 $1 \leqslant i < j \leqslant p$ 时, $a_j - a_i = \frac{1}{2}(j-i)(i+j+1)$,故有

$$a_{p-1} \equiv a_p \quad (\bmod\ p). \qquad ②$$

由①和②知, $\{a_k(\bmod\ p) \mid k \in N\}$ 不能包含 mod p 的完全剩余系,从而 $\{a_k(\bmod\ n) \mid k \in N\}$ 也不能包含 mod n 的完全剩余系 $\{0,1,\cdots,n-1\}$.

(2) 设 $n = 2^m$, m 为非负整数. 易见 $a_{k+2^{m+1}} \equiv a_k (\bmod\ 2^m)$. 对任意 $i, j \in \{1,3,5,\cdots 2^{m+1}-1\}$,因为 $i+j+1$ 是奇数而 $|j-i| < 2^{m+1}$,故有

$$a_j - a_i = \frac{1}{2}(j-i)(i+j+1) \not\equiv 0 \pmod{2^m},$$

即 $a_j \not\equiv a_i \pmod{n}$. 由此可见，$\{a_1, a_3, a_5, \cdots, a_{2^{m+1}-1} \pmod{n}\} = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$.

综上所述，当且仅当 $n = 2^m$（m 为非负整数）时，最终可使所有学生都得到糖.

5·94 设有 25 人围绕圆桌就坐讨论问题，每小时表决一次，每个人都表态是或否. 表态方式如下：若在第 n 次表决时，他的表决结果与左右相邻 2 人中的至少 1 人相同，则他第 $n+1$ 次表态与第 n 次相同；若在第 n 次表决时他的表态与相邻 2 人均不相同，则他第 $n+1$ 次表态与第 n 次不同. 试证不论开始时大家如何表态，总存在一个时刻，从此以后每个人的表态都不再改变.

（第 26 届加拿大数学奥林匹克，1994 年）

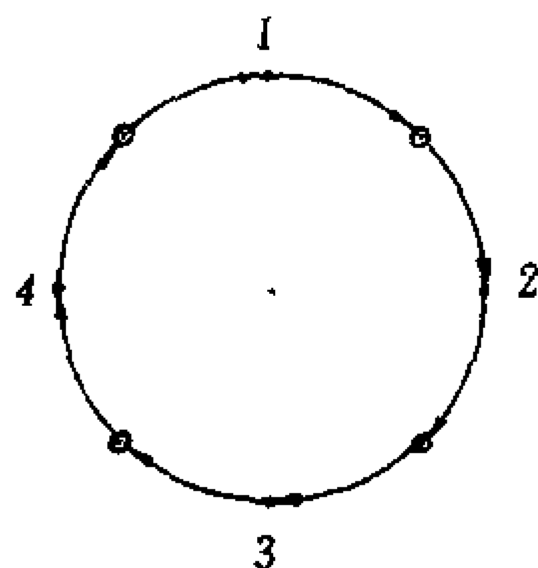
［证］ 因为 25 是奇数，所以在第 1 次表态时，总有两人结果相同. 不妨设二人为 A_1 和 A_2，并且用 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{25}$ 来依次表示这 25 个人. 显然，若在第 k 次表决时有连续 $m(>1)$ 个人表态相同，则这 m 个人在以后表决时的表态不变. 由此可知，A_1 和 A_2 的表态永远不变.

设在第 k 次表决后，与左右相邻 2 人的表态均不相同的人中号码最小的是 A_m，则在第 $k+1$ 次表决时，前 $m-1$ 人的表态均与上次相同，而 A_m 的表态与上次不同，从而与 A_{m-1} 表态相同. 这样一来，在第 $k+1$ 次表决后，与左右相邻 2 人的表态均不相同的人中的最小号码不小于 $m+1$. 这表明每表决一次，与左右相邻 2 人的表态均不相同的人的最小号码至少增加 1. 所以，经若干次（至多 12 次）表决之后，将没有人与左右相邻两人的表态均不相同. 从此以后，所有人的表态都不再改变.

5·95 国王刘德维克不信任自己的某些大臣. 他开列了全部大臣的名单，安排他们中的每一个人都监视其余大臣中的一个. 他指使第一个大臣监视第二个大臣的监视者，第二个大臣监视第三个大臣的监视者，如此继续下去，倒数第二个大臣则监视最后一个大臣的监视者，最后一个大臣则监视第一个大臣的监视者. 求证刘德维克共有奇数个大臣.

（第 33 届莫斯科数学奥林匹克，1970 年）

[证]　按照大臣们相互监视的顺序把他们排列在一个圆周上，并且假定大臣的人数 n 为偶数（右图画出了 $n=8$ 的情形）. 容易看出，监视第一个大臣的监视者的大臣的号码是 $\frac{n}{2}$ 而不是 n，此与已知矛盾.



5·96　试证不可能把25个人编成多于30个五人委员会，使得任何两个委员会的公共成员都不多于1个.

（第5届全俄数学奥林匹克，1965年）

[证]　若不然，设能编成31个五人委员会且满足要求. 因为31个五人委员会共有155人，故由抽屉原理知有一人 A 至少是7个委员会的成员. 又因已知任何两个委员会的公共成员至多一人，而 A 已经是这至少7个委员会的公共成员，所以这些委员会的其他成员互不相同. 这样，不同人数至少为 $4\times7+1=29$ 人，矛盾.

5·97　某一委员会先后开了40次会议，每次出席者都是10人，并且任意两位委员同时出席会议都不多于一次. 求证委员的人数多于60.

（第5届全俄数学奥林匹克，1965年）

[证1]　每次会有10人出席，共可组成 $C_{10}^2=45$ 个同时出席一次会议的二人组. 因为已知任何二人至多一起出席过一次会议，故知40次会共有 $40\times45=1800$ 个互不相同的二人组.

另一方面，如果委员数不超过60，则他们至多可组成 $C_{60}^2=1770$ 个不同的二人组. 由此可知委员人数一定多于60.

[证2]　设委员会共有 $n\leqslant60$ 名委员. 因为 $10\times40>6n$，故由抽屉原理知必有一人 A 至少出席了7次会议. 又因任何二人至多一起出席过一次会议，故 A 所参加的至少7次会议中，A 所遇到的委员互不相同. 因此，委员会中的人数不少于 $9\times7+1=64$，矛盾. 故知委员人数一定多于60.

5·98　沿着一条笔直的大道耸立着113座宫殿，每座宫殿内都住着一位国王. 每天有一位国王担当东道主，所有国王一早便去他的宫殿聚会，直到晚间才由仆人分别送回各自的宫殿. 他们这样过了一年，其他地方谁都未去过. 试证在这一年里，住在最边缘的国王之一走过了最

长的路程.

（第 33 届莫斯科数学奥林匹克，1970 年）

［证］ 若不然，设有一位不住在最边缘的国王 A，他在一年内所走的路程比住在左和右方最边缘处的两位国王中每一位所走的路程都长. 不妨设 A 在一年内往右边走的次数不少于往左边走的次数. 设国王 B 是 A 的左邻，则 B 往右边走的次数不少于 A 走的次数，往左走的次数不多于 A. 对于 A 每次往右走，B 也往右走且多走一段从 B 到 A 的路程；对于 A 每次往左走，B 都少走一段从 A 到 B 的路程. 可见，即使 B 从未到 A 的宫殿去过，B 全年所走的路程也不少于 A. 依此类推，住在最左边缘的国王全年所走的路程不少于 A，矛盾.

5·99 大会代表们要选举委员会，每一位代表都应该提出 10 名候选人. 如果某委员会的成员中至少有 1 人是某代表所提名的候选人，则称该委员会对于这位代表是“恰当”的. 已知对于任何 6 名代表都有某个仅由两人组成的恰当委员会，求证必可选出一个由 10 人组成的委员会，使得它对于所有代表都是恰当的.

（前苏联教委推荐试题，1991 年）

［证］ 任取 1 位代表 g，设 G 是 g 所提出的 10 名候选人的集合. 假定 G 不是对所有代表都恰当，于是存在代表 e，他所提出的 10 名候选人的集合 E 与 G 不交. 将 G 分成两个不交的子集 G_1 和 G_2，使 $|G_1| = |G_2| = 5$；对 E 也照此办理，分成 E_1 和 E_2.

下面来证明，4 个集合 $G_i \cup E_j (i, j = 1, 2)$ 中必有 1 个集合对于所有代表都是恰当的. 若不然，则对于每个集合 $G_i \cup E_j$，都可以找到一位代表 x_{ij}，使得该集合对于他不是恰当的. 但这样一来，对于 $g, e, x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ 这 6 位代表，就不可能有一个二人委员会对他们都是恰当的，此与已知矛盾.

5·100 在某次竞选运动中，各个政党共作出 p 种不同的诺言（$p > 0$），某些政党可以作出相同的诺言，任何两党都至少有一种公共诺言，但没有两党作出全部相同的诺言. 证明政党的个数不多于 2^{p-1}.

（第 4 届加拿大数学奥林匹克，1972 年）

［证］ 假设有 N 个政党，他们的诺言分别组成集合 $S_1, S_2, \cdots, S_N$.
由题设，S_i 中任两个都不相同，且任两个都有公共元素，从而没有 S_j 是 S_i 的补集，所以在 $S_1, S_2, \cdots, S_N$ 中至多有诺言集合所有子集个数

的$\frac{1}{2}$,即$N \leqslant \frac{1}{2} \cdot 2^p = 2^{p-1}$.

另一方面,$N = 2^{p-1}$是可以达到的.设$P_1, P_2, \cdots, P_p$是p种不同的诺言,$A_1, A_2, \cdots, A_{2^{p-1}}$是$\{P_2, P_3, \cdots, P_p\}$的子集,那么每一个政党可对应一个诺言的子集$\{P_1\} \cup A_i (i = 1, 2, \cdots, 2^{p-1})$,因此政党的个数可以多到$2^{p-1}$个.

5·101　给2000人依次编号为1,2,…,2000,如果某几个人(可以1人,但不可无人)的编号之和是5的倍数,则称之为"优团".求这2000人可组成的所有"优团"的个数.

(中国国家集训队测验题,1993年)

[解]　令

$$S_n = \{1, 2, \cdots, n\}.$$

对于S_n的子集,按其中数之和模5的值分成5类:$M_j, j = 0, 1, 2, 3, 4$.记这5类子集的个数分别为a_n, b_n, c_n, d_n, e_n.显然,本题就是要求出a_{2000}.

按定义知

$$a_n + b_n + c_n + d_n + e_n = 2^n, n = 0, 1, 2, \cdots, \quad ①$$

且有

$$a_{5n} = 2a_{5n-1}, a_{5n-1} = a_{5n-2} + b_{5n-2},$$
$$a_{5n-2} = a_{5n-3} + c_{5n-3}, b_{5n-2} = b_{5n-3} + d_{5n-3}.$$

从而有

$$a_{5n} = 2(a_{5n-3} + b_{5n-3} + c_{5n-3} + d_{5n-3})$$
$$= 2(2^{5n-3} - e_{5n-3}). \quad ②$$

又因

$$e_{5n-3} = e_{5n-4} + c_{5n-4}, e_{5n-4} = e_{5n-5} + d_{5n-5},$$
$$c_{5n-4} = c_{5n-5} + b_{5n-5}.$$

代入②即得

$$a_{5n} = 2(2^{5n-3} - b_{5n-5} - c_{5n-5} - d_{5n-5} - e_{5n-5})$$
$$= 2(2^{5n-3} - 2^{5n-5} + a_{5n-5})$$
$$= 3 \times 2^{5n-4} + 2a_{5n-5}. \quad ③$$

利用③式递推即得

$$
\begin{aligned}
a_{5n} &= 3\times 2^{5n-4} + 3\times 2^{5n-8} + 4a_{5n-10} \\
&= 3\times(2^{5n-4} + 2^{5n-8} + \cdots + 2^{5n-4n}) + 2^n a_0 \\
&= 3\times 2^n\,\frac{2^{4n}-1}{2^4-1} + 2^n. \qquad ④
\end{aligned}
$$

特别地,在 ④ 中令 $n = 400$,即得

$$a_{2000} = 2^{400}\left[\frac{1}{5}(2^{1600}-1)+1\right]. \qquad ⑤$$

按题中要求,空集不算在内,故由 ⑤ 知优团总数为 $a_{2000} - 1 = 2^{400}\left[\frac{1}{5}(2^{1600}-1)+1\right]-1$.

5·102 议会中共有2000名议员,他们决定审核国家财政预算,预算支出共有200项条款.每名议员都拿到一份预算草案,并根据本人的判断,逐款列出该项支出所能达到的最大限额.但全部数额之和不超过给定的总限额 S.议会逐款审定各项支出的拨款数目时,均将其确定为至少有 k 名议员所同意的数目(即至少有 k 名议员所给出的最大限额不低于该数目).问最少应将 k 确定为多少,才能保证最终所通过的拨款总数不超过限额 S?

(第54届莫斯科数学奥林匹克,1991年)

[解] 将2000名议员分成200组,每组10人并将这些组从1到200编号.对每个 i,$1\leqslant i\leqslant 200$,第 i 组中的10人都否决第 i 项条款而同意给其余的199项条款各拨款$\frac{S}{199}$.若事先确定 $k = 1990$,则表决结果将是每项条款都得到拨款$\frac{S}{199}$,全部拨款将超过 S.所以 $k = 1990$ 是不够的,即 k 至少应为1991.

另一方面,当 $k = 1991$ 时,对于每一项支出,均只有至多9名议员所提的款数限额少于所通过的款数.因而对于200项条款来说,至少有1项条款的所提限额少于所通过的款数的议员总数少于1800人,故知总有1名议员所提的各项限额均不小于所通过的款数.由于前者的限额之和不超过 S,故所通过的款数之和也不超过 S,即当 $k = 1991$ 是足够了.

综上可知,k 的最小值为1991.

5·103 设火星上有100个互相敌视的国家.为了维护和平,决定结成若干个联盟,要求每个联盟至多包括50个国家,而任何两国都至

少要同属于一个联盟.试问

(1) 为了满足上述要求,最少要建立多少个联盟?

(2) 如果还要求任何两个联盟的并集都不多于 80 个国家,结果又如何?

(第 25 届全苏数学奥林匹克,1991 年)

[解] 因为每个联盟至多有 50 个国家,故在这个联盟中,每国至多有49个盟国.但结盟之后,每个国家有99个盟国,所以每个国家至少要加入3个联盟.从而100个国家所结成的联盟的数目不少于$3\times100\div50=6$个.

(1) 将100个国家均分成4组,每组25个国家,每两组的50个国家结成一个联盟,共得 $C_4^2=6$ 个联盟,容易验证这 6 个联盟便满足要求,故这时最少结成 6 个联盟.

(2) 将100个国家均分成10组,每组10国.将这10组从1到10编号并令下列每5组结成一个联盟,共6个联盟:

$$\{1,2,3,4,5\},\{1,2,6,7,8\},\{1,3,6,9,10\},$$
$$\{2,4,7,9,10\},\{3,5,7,8,9\},\{4,5,6,8,10\}.$$

容易验证,这 6 个联盟满足全部要求,故这时也是最少结成 6 个联盟.

5·104 已知某团体有 $n(n\geqslant5)$ 个成员,并且有 $n+1$ 个三人委员会,其中任何两个三人委员会的成员都不完全相同.求证一定有两个三人委员会恰好有一个成员相同.

(第 8 届美国数学奥林匹克,1979 年)

[证 1] n 个成员在$n+1$个三人委员会中出现的总人次为$3(n+1)$.由抽屉原理知,总有一个成员 a,出现的次数 $m\geqslant4$.设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是所有包含a 的三人委员会.

若命题结论不成立,则任何两个三人委员会或者 3 个成员全不相同,或者恰有两个成员相同.我们断言,

$$A_i=\{a,b,c_i\},i=1,2,\cdots,m, \quad ①$$

其中诸 c_i 互不相同.若不然,设有

$$A_1=\{a,b,c_1\},A_2=\{a,b,c_2\},A_3=\{a,c_1,c_2\},$$

则 A_4 无法存在,故 ① 式成立.

下面用归纳法来证明.若 $n=5$时结论不成立,则由 ① 知 A_1,A_2,A_3,A_4 中已有 6 个不同成员,此不可能,故知 $n=5$ 时结论成立.

设命题对 $5 \leqslant n < k$ 成立,但 $n = k$ 时命题结论不成立.从 $k+1$ 个委员会中去掉①式所列的 m 个委员会后,尚有 $k-m+1$ 个委员会且其中均不含 a.容易看出,它们中既不含 b 也不含 c_i, $i = 1,2,\cdots,m$.因此,这 $k-m+1$ 个委员会都是由余下的 $k-m-2$ 个人组成的.记 $k-m-2=h$,于是 $k-m+1=h+3$.若 $h \leqslant 4$,则因 $C_h^3 \leqslant h$,故知由 h 个人不能组成 $h+3$ 个三人委员会,所以 $h \geqslant 5$.于是由归纳假设知其中必有两个三人委员会中恰有一个成员相同,此与反证假设矛盾,这就完成了证明.

[证 2] 用数学归纳法来证明.当 $n=5$ 时,互不相同的三人委员会共有 10 个.把它们分成如下的 5 对:

$$(\{a,b,c\},\{a,d,e\}),(\{b,a,d\},\{b,c,e\}),$$
$$(\{c,a,e\},\{c,b,d\}),(\{d,a,c\},\{d,b,e\}),$$
$$(\{e,a,b\},\{e,c,d\}).$$

易见,每对中的两个委员会恰有 1 个公共成员.这时 $n+1=6$,由抽屉原理知,6 个三人委员会中必有两个是上述 5 对中的 1 对,这两个委员会即为所求,即 $n=5$ 时结论成立.

设当 $5 \leqslant n < k$ 时命题成立.考察 $n=k$ 的情形.

(1) 如果有某个成员至多是 $k+1$ 个委员会中之一的成员,则当去掉这个成员时,$k-1$ 个成员至少组成 k 个委员会,由归纳假设便知命题结论成立.

(2) 设每个成员都至少是 $k+1$ 个委员会中的两个委员会的成员.任取一个委员会 $\{a,b,c\}$,对于成员 a,b,c 都至少还有 1 个委员会含有他.若结论不成立,则含有 a 的委员会还含有 b,c 之一,不妨设为 $\{a,b,d\}$,其中 $d \neq c$.还有一个含 c 的委员会,它还含有 a,b 之一,从而又必含 d,不妨设为 $\{a,c,d\}$.容易验证,除这 3 个委员会之外,不能再有含 a 的委员会,但可能还有委员会 $\{b,c,d\}$ 而不能再有含有 b,或 c 或 d 的委员会.因此,当把 a,b,c,d 4 人去掉时,至多去掉 4 个委员会,即由余下的 $k-4$ 个人组成的委员会至少有 $k-3$ 个.

这时,若 $k-4 \leqslant 4$,则 $C_{k-4}^3 \leqslant k-4$,即由 $k-4$ 人无法组成 $k-3$ 个三人委员会,所以有 $k-4 \geqslant 5$.这样一来,由归纳假设便知其中必有两个委员会恰有一个公共成员,此与反证假设矛盾.这就完成了归纳证明.

5·105　在密朗弗洛斯总统统治的国家中,新一届总统的选期临近了.国内共有两千万选民,但其中只有占人口百分之一的正规军支持原总统.密朗弗洛斯既想继续当总统,又想使选举成为民主的.于是他这样来安排"民主选举":先把全体选民分成人数相同的大组;其中每一个大组再分成若干个人数相等的次大组;然后这些次大组再继续分组,直到多次分组得到的最小组进行首轮选举,并以简单多数选举1名代表参加下一层次的选举.每个层次的组内选举都以简单多数选举1名代表,直到每个大组选出1名代表.最后由这些代表直接按简单多数来选举总统.密朗弗洛斯按自己的意愿将选民分组,并指示他的拥护者们该如何参加选举.问他能通过这样的操纵来使自己当选吗?

(第32届莫斯科数学奥林匹克,1969年)

[解]　他可以获胜.总统的支持者共有20万人.如果最小的组由5人组成而总统将他的支持者每3人安排在一个选举小组中,则选举之后产生的4百万名代表中支持总统的有66666人.再按这个办法进行7个层次的选举,结果可列表如下:

	代表总数	支持人数
1	4000000	66666
2	800000	22222
3	160000	7407
4	32000	2469
5	6400	823
6	1280	274
7	256	91

然后第8层次选举每8人一组,总统把自己支持者每5人安置在1组.于是产生的32个代表中,有18人是总统支持者.这次直接选举总统就可以了.

5·106　n个国家,每国3名代表组成的m个委员会$A_n(1)$,$A_n(2)$,…,$A_n(m)$称为一个会圈,如果

(1) 每个委员会都有n名成员,他们分别属于n个国家,每国1名;

(2) 任何两个委员会的成员都不完全相同;

(3) $A_n(i)$和$A_n(i+1)$没有公共成员,$i=1,2,\cdots,m$.并约定$A_n(m+1)=A_n(1)$;

(4) 若$1<|i-j|<m-1$,则$A_n(i)$与$A_n(j)$至少有1名公共成员.

问是否存在一个由11国组成的1990个委员会的会圈?

(第31届国际数学奥林匹克预选题,1990年)

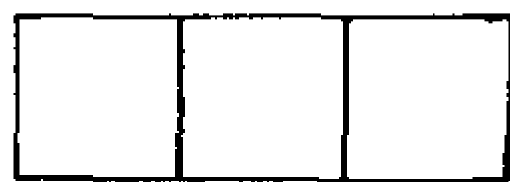
[解]　存在.

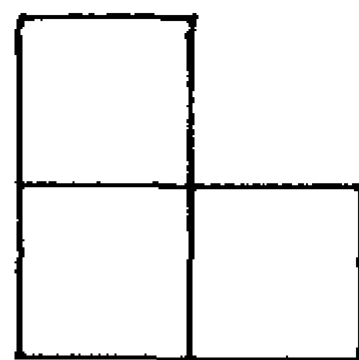
将由 n 个国家组成的 m 个委员会的会圈记为 (m,n)，并将由委员会 $A_n(i)$ 的全体成员和第 $n+1$ 个国家的第 j 名代表组成的会议记为 $(A_n(i),j)$.

设 $\{A_n(1),A_n(2),\cdots,A_n(m)\}$ 是一个 (m,n) 会圈. 当 m 为奇数时，$\{(A_n(1),1),(A_n(2),2),(A_n(3),1),\cdots,(A_n(m),1),(A_n(1),2),(A_n(2),1),\cdots,(A_n(m),2)\}$ 就是一个 $(2m,n+1)$ 会圈，其中第2个分量交替地取值 1 和 2；当 m 为偶数时，$\{(A_n(1),3),(A_n(2),1),(A_n(3),2),(A_n(4),1),(A_n(5),2),\cdots,(A_n(k-2),1),(A_n(k-1),2),(A_n(k),3),(A_n(k-1),1),(A_n(k-2),2),\cdots,(A_n(5),1),(A_n(4),2),(A_n(3),1),(A_n(2),2)\}$ 就是一个 $(2(k-1),n+1)$ 会圈，其中 k 为一个不大于 m 的偶数，并且除了 $A_n(1),A_n(k)$ 对应的第2个分量是 3 外，其余委员会的第 2 个分量交替取值 1 和 2.

显然，$A_1(1)=\{1\},A_1(2)=\{2\},A_1(3)=\{3\}$ 组成一个 $(3,1)$ 会圈. 于是，按照上面给出的构造新会圈的方法，可以依次得到会圈 $(6,2)$，$(10,3)$，$(18,4)$，$(34,5)$，$(66,6)$，$(130,7)$，$(258,8)$，$(514,9)$，$(1026,10)$. 再取 $k=995$，即可得到 $(1990,11)$ 会圈.

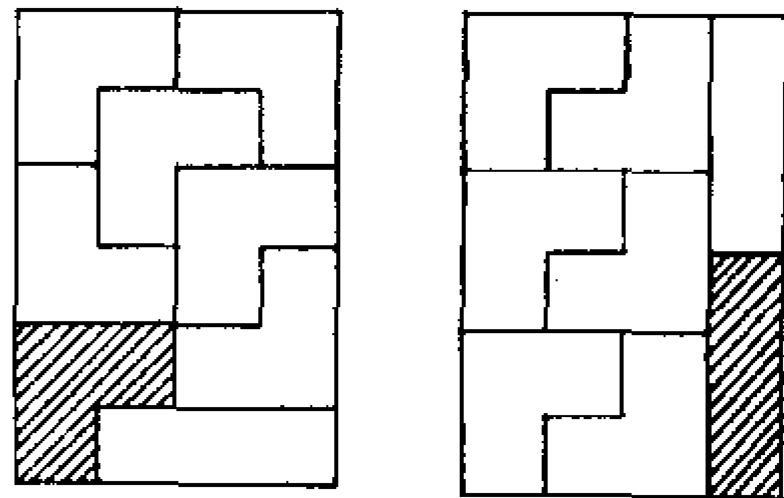
5·107　别佳有一套由小薄木块组成的玩具，装在一个矩形的盒子里，铺开成一层，恰好盖满整个盒底. 每一个小木块的面积都是 3cm^2，其形状或为矩形，或为角形（右图）. 别佳说：丢了一块角形木块后，他用一块矩形木块来代替，仍能用这些木块恰好盖满盒底. 问能否断定别佳是在说谎？





（第 34 届莫斯科数学奥林匹克，1971 年）

［解］　不能断定. 例如当角形木块有 7 块，矩形木块为 1 块时，盒底为 4×6 矩形时，就仍然可以铺满，见右图. 显然，还可以举出更多的这种例子.



5·108　已知某国的居民不是骑士就是无赖，骑士说实话而无赖总是说谎. 我们碰上该国的 3 位居民 A,B,C,A 说："如果 C 是骑士，那么 B 是无赖."C 说："A 和我不同，一个是骑士，一个是无赖." 问 3 个

人中,谁是骑士,谁是无赖?

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

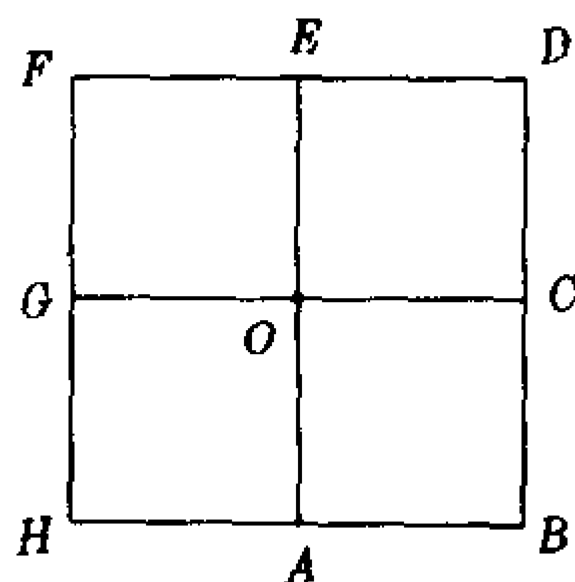
[解] 设 A 为骑士.若 C 也是骑士,则由 C 的话为实知 A 应为无赖,矛盾;若 C 为无赖,则 C 的话为谎话,从而 A 亦应为无赖,矛盾.可见,A 为无赖.

再由 A 的话为谎话可知 C 是骑士,B 也是骑士.所以 A 是无赖,B 和 C 都是骑士.

5·109 S 城呈正方形,它有 6 条道路,即正方形的 4 条边和两条中位线.一个警察沿着道路追捕一个歹徒.如果在某一时刻警察和歹徒处于同一条道路上,那么歹徒就向警察投降.试证当警察速度大于歹徒速度的 2.1 倍时,警察必能抓住歹徒.

(第 41 届莫斯科数学奥林匹克,1978 年)

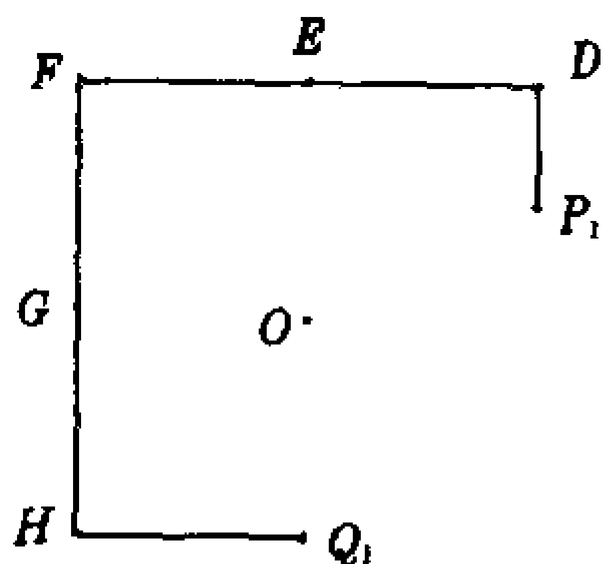
[证] 警察可先占据正方形的中心 O.这时,歹徒只能在正方形的某条边上且不能处于中点.



(a)

首先,警察沿正方形 $OABC$ 跑一圈,如果没有抓到歹徒,就依次沿正方形 $OGHA$,$OEFG$,$OCDE$,$OABC$ 追查下去并循环追查,经有限次后,必可抓住歹徒.

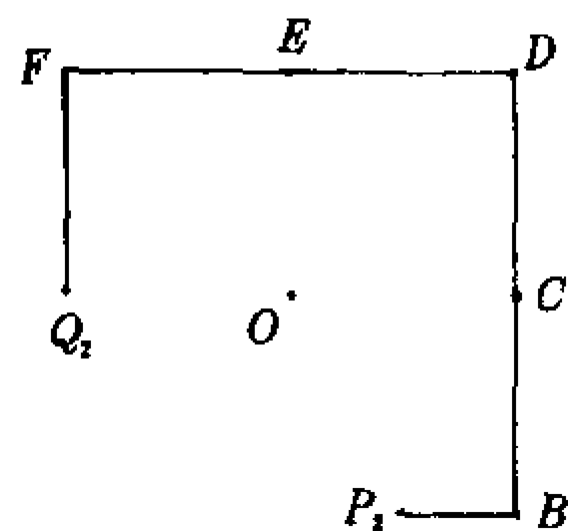
事实上,如果警察在跑过第一个正方形时没有抓到歹徒,则因警察位于点 B 时歹徒不能在 HB,BD 两条边上,所以当警察返回中心点 O 时,歹徒只能位于形如右图所示的折线上,其中 $P_1D=k$,$HQ_1=2k$,此处设正方形 $BDFH$ 的边长为 2,而 k 为警察跑过路程 1 时歹徒所走的路程长度.按已知 $k<\frac{1}{2.1}=0.4762$.



(b)

接着,警察沿正方形 $OGHA$ 追查.这时,歹徒可能由点 P_1 出发向点 B 移动,也可能由点 Q_1 出发向点 B 移动.但当警察到达点 H 时,歹徒均未到达点 B,故若为后者,歹徒必然被抓住.若仍未抓住歹徒,则必为前者.因此,当警察回到点 O 时,歹徒只能位于图(c)所示的折线上,其中 $P_2B=5k-2<k$,$FQ_2=2k$.比较图(c)与

(b) 中的两条折线可以看出，当把图(c) 中的折线绕点 O 逆时针旋转 90° 时，点 B,D,F,Q_2 分别重合于点 D,F,H,Q_1，但点 P_2 落在线段 DP_1 之内，即后一条折线比前一条短，长度差为 $2-4k>0$. 不难看出，以后警察每追过一个正方形，歹徒可潜伏的折线长度都减少 $2-4k$. 从而经有限次之后即可抓住歹徒.

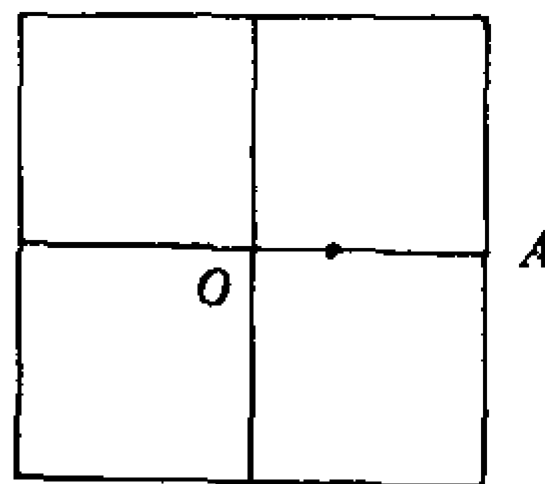


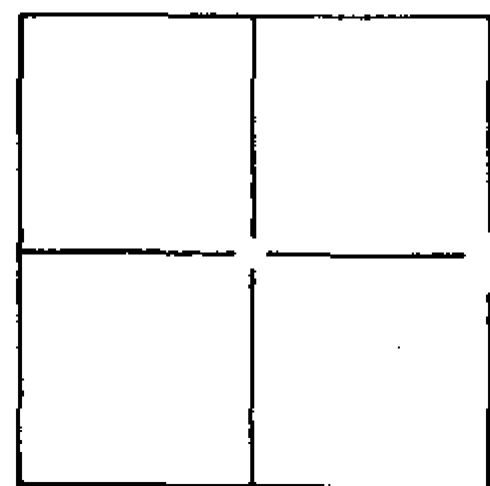
(c)

5·110 公园里有 6 条道路成田字形，即其中 4 条为一个正方形的 4 条边，另两条是正方形的两组对边的中点连线. 小男孩卡亮从爸爸妈妈身边跑开了且总沿着这 6 条路跑. 如果他跑的速度比爸爸和妈妈都快两倍，而三人在整个过程中都可以互相看见. 问爸爸和妈妈能否抓住卡亮？

(第 33 届莫斯科数学奥林匹克，1970 年)

[解] 可以抓住卡亮. 只要爸爸站在右上图黑点所示的位置，它距 A 的距离是与点 O 距离的两倍，随时监视点 O 和点 A，便可使小卡亮无法通过这两点. 这样一来，田字形的路中就再没有回路了(见右下图). 于是妈妈跟在卡亮后面追，就一定可以抓住卡亮了.





5·111 X 城有 10 条无限长的平行大道，它们每经过相等的一段长度就与一条横街相交. 两个沿着大道与横街巡逻的警察，试图发现可能藏于街边屋后的歹徒. 如果歹徒与警察出现在同一条大道或横街上，歹徒即可被发现. 已知歹徒的速度不超过警察速度的 10 倍，且一开始时他们之间的距离都不超过 100 个路段(每两个相邻的路口之间的一段道路称为一个路段). 求证警察能够发现歹徒.

(第 35 届莫斯科数学奥林匹克，1972 年)

[证] 不妨设大道是东西向的，横道是南北向的. 自北而南将大道依次编号为 1,2,…,10. 开始时，警察甲站在 2 号大道的一个道口上，负责监视整条大道，于是歹徒无法横越 2 号大道. 这时警察乙在 1 号大道的相应路口上，先向东巡察 100 个路段，再回过头来向西巡视 100 个

路段.如果歹徒躲藏于这两条大道之间的带形区域中(称之为1号区域,2号,3号区域依次定义),他将被发现.如果没发现歹徒,则乙走到3号大道进行监视,再由甲巡察2号区域,同时监视2号大道,防止歹徒逃向1号区域.这样继续下去,迟早必然发现歹徒.

5·112　一些男孩与女孩组成一个 $n\times n$ 的方阵,我们已知每行,每列及每条平行于对角线的直线上的女孩的人数.对于哪些 n,这些信息足以确定方阵中哪些位置为女孩?对于哪些位置,可以断定那里是否有女孩?

(第30届国际数学奥林匹克候选题,1989年)

[解]　显然,对于 $n=1,2,3$,信息是足够的.当 $n=4$ 时,信息未必足够.右表中数字1和0分别代表女孩与男孩.当将1和0互换时,所有的信息均不改变.另一方面,4角的位置是否女孩可以确定;中央4个位置也可以确定.例如图中画"×"的位置.由第1行数之和与第1列数之和已知,a,b,c 这3个角位之数已知,"×"格左方与上方两格中的数之和也已知,故"×"格左下方与右上方两数之和已知,从而"×"格中的数可以确定.由对称性知中央4个位置是否女孩均可确定.

a	1	0	c
0	×		1
1			0
b	0	1	

当 $n=5$ 时,角上的4个位置均可确定.中心位置也可以确定.事实上,当记第 i 行 j 列的女孩数为 a_{ij} 时,便有

$$3a_{33}=\sum_{j=1}^{5}a_{ij}-\sum_{j\neq 3}\sum_{i=1}^{5}a_{ij}+(a_{41}+a_{52})+(a_{14}+a_{25})$$
$$+(a_{12}+a_{21})+(a_{45}+a_{54})+\sum_{i=1}^{5}a_{ii}+\sum_{i+j=6}a_{ij}.$$

易见,其中每个和式或括号中的和数都是已知的,所以 a_{33} 可以求得.但其余的20个位置都是无法确定的,这只要参照4×4方阵中有8个位置无法确定的理由即可推得.

当 $n\geqslant 6$ 时,仅有角上的4个位置可以确定.因为 $n\times n$ 方阵中总可划出一个 5×5 的方阵,使所论位置既不是这子阵的角上也不是中心.

5·113　设有30个人坐在一张圆桌的周围,其中的每个人都或者是白痴,或者是聪明人.对在座的每个人都提问:"你右边的邻座是聪明

人还是白痴?”聪明人总是给出正确的答案,而白痴则既可能回答正确,也可能回答得不正确.已知白痴的个数不超过 F,求总可以指出 1 位聪明人的最大的 F.

(第 19 届全俄数学奥林匹克,1993 年)

[解] 设白痴的人数 $F \neq 0$.把围坐在圆桌周围的所有人分组如下:彼此相邻坐在一起的聪明人作为一组;彼此相邻坐在一起的白痴也作为一组.于是共得 $2k$ 组,其中聪明人有 k 组,白痴有 k 组,而且交替分布在圆桌周围.将第 i 组聪明人的人数记为w_i,第 i 组白痴的人数记为 f_i,$i = 1,2,\cdots,k$.显然有

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_k + f_1 + f_2 + \cdots + f_k = 30,$$

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_k = F. \quad ①$$

考察由彼此相邻的被左邻称为聪明人的序列.显然,由一组聪明人(w_i 个)所形成的这种序列的项数不小于 $w_i - 1$,而且序列中只要有一项是聪明人,他后面的人都是聪明人.而由一组白痴所产生的这种数列的长度则不超过 $f_i - 1$.因而,当 $w_{i_0} = \max\limits_i w_i > \max\limits_i f_i$ 时,这 w_{i_0} 位聪明人所产生的序列的项数不小于任何 f_i,从而知这个序列不能光由白痴构成,故其中最后 1 人必为名副其实的聪明人.这时,我们有

$$\max_i w_i \geqslant \frac{30 - F}{k}, \qquad \max_i f_i \leqslant F - k + 1,$$

$$\frac{30 - F}{k} > F - k + 1, k = 1,2,\cdots,F, \quad ②$$

即不等式 ② 对所有 k 成立时可以指出 1 位聪明人.不等式 ② 等价于

$$k^2 - (F + 1)k + 30 - F > 0$$

对所有 $1 \leqslant k \leqslant F$ 成立,而这又只须

$$\Delta = (F + 1)^2 + 4(F - 30) < 0. \quad ③$$

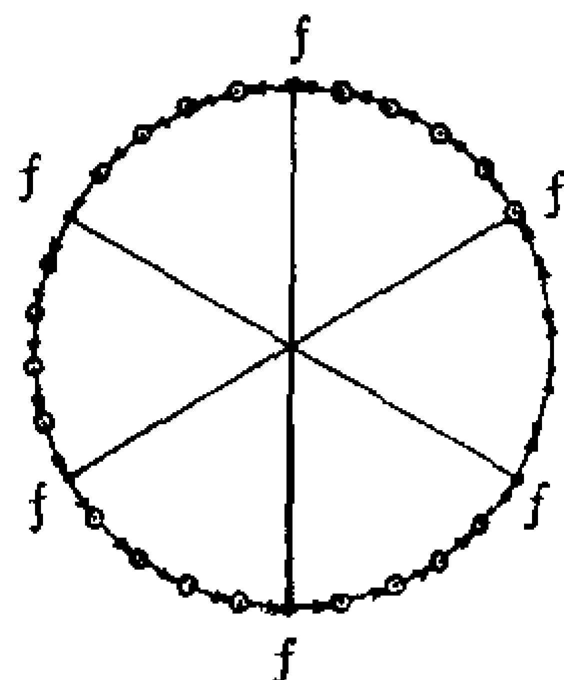
由 ③ 解得

$$F < -3 + \sqrt{128} < -3 + 12 = 9.$$

可见,当 $F \leqslant 8$ 时可以依据已知的答案而指出 1 位聪明人.

另一方面,当 $F = 9$时,上述结论不再成立,即并不总是可以指出1 位聪明人.为此,我们考察右图所示的 30 个人,其中黑点表示白痴,小圆圈表示聪明人,其中共有 9 个白痴.图中与有 f 的人被他的左邻指为

白痴，其他人均被指为聪明人.易见，当将此图绕中心沿逆时针方向旋转 60°,120°,180°,240°,300°时，答案不变，而实际上则每个位置都既可为聪明人，也可能变为白痴.所以，以答案为基础无法指出任何 1 个真正的聪明人.



综上可知，F 的最大值为 8.

5·114 某次化学会议共有 k 人参加，其中有化学家也有炼丹术士，且化学家人数多于炼丹术士.已知对任何问题的回答，化学家们总是说真话，炼丹术士们则有时说真话，有时说谎话.一位旁听会议的数学家试图判明每一位与会者的身份，即确定他们中究竟谁是化学家，谁是炼丹术士.他于是向每一个与会者都提出一些问题："某人是化学家还是炼丹术士?"(当然可以提问："你本人是化学家还是炼丹术士?")试证数学家只需提出 $2k-3$ 个问题，即可判明所有与会者的身份.

(第 42 届莫斯科数学奥林匹克,1979 年)

［证］ 将所有与会者排成一行并从 1 到 k 编号.数学家从 1 号开始，逐个询问他对其右邻的看法.设第 n 号与会者是第一个认为其右邻(即第 $n+1$ 号与会者)是炼丹术士的人；而从第 1 号到第 $n-1$ 号都认为自己的下一号是化学家.于是将第 n 和 $n+1$ 号两人叫出队列，并再向第 $n-1$ 号提问对其新右邻的看法；如此继续下去.最后，在叫出若干对人之后，到达队尾.这样一来，队列中的每个人都认为自己的右邻是化学家；而被叫出列的每一对人中，则都是前 1 人认为自己的右邻是炼丹术士.由此可知

(1) 在出列的每对人中，都至少有一人是炼丹术士；

(2) 仍然留在队列中的人中，化学家比炼丹术士多，特别地，队列中可能只剩下 1 个人，他当然是化学家；

(3) 如果留在队列中的第 i 人是化学家，那么他后面的每人都是化学家.进一步地，若队列中有 m 人，则后$\left[\frac{m}{2}\right]+1$人都是化学家.

迄今，数学家共提了 $k-1$ 个问题.设出列的共有 h 对人.如果 $m=1$，则 h 对出列人中的每对中恰有 1 个炼丹术士(否则炼丹术士人数多于化学家).于是只要向队列中的化学家提问 h 个问题，询问每对中 1

人的身份就可以了.如果 $m \geqslant 2$,则队列中至少后两人是化学家.于是只要向最后1人提问至多 $k-2$ 个问题,依次问清其他人的身份就行了.可见,只需提不超过 $2k-3$ 个问题,就可以弄清所有与会者的身份.

5·115　森林中长有枞树和桦树,并且在离每棵枞树刚好为1千米的距离上都恰长有10棵桦树.森林的管理人说,林中的枞树多于桦树.问他的话能是真话吗?

（圣彼得堡数学奥林匹克,1988年）

[解1]　可以是真话.我们来构造满足题中要求的例子.为此,我们依次构造枞树和桦树的配置图 $G_1, G_2, G_3, \cdots$,使得在每个图中,在离每棵枞树1千米的距离上都刚好有10棵桦树.

首先,任取1棵枞树并在以它所在点为心,1千米为半径的圆上取10棵桦树并记这11棵树的图为 G_1.设已经构造好了图 $G_1, G_2, \cdots, G_k$,于是我们按如下程序来构造图 G_{k+1}.取一个以点 O 为心,1为半径的圆并在圆上取10个点 $M_0, M_1, \cdots, M_9$,使得点 $O, M_0, M_1, \cdots, M_9$ 之间任何两点的连线与图 G_k 中任何两棵树所在点的连线都不平行.然后将图 G_k 分别平移一个向量

$$\overrightarrow{M_0M_i}, i=0,1,\cdots,9,$$

其中平移 $\overrightarrow{M_0M_0}$ 表示不动.将所得的10个像的并集取作 G_{k+1} 的一部分.再将 G_k 平移一个向量 $\overrightarrow{M_0O}$,并将这个像上的原来桦树的像全部换栽为枞树但去掉圆心处的枞树像,由此即得全部的图 G_{k+1}.不难验证,对于 G_{k+1} 中的每棵枞树,都有10棵桦树与它的距离均为1千米.另一方面,可以算出,在图 G_1 中,有1棵枞树和10棵桦树;在图 G_2 中有20棵枞树和100棵桦树;在 G_3 中有300棵枞树和1000棵桦树;…;在 G_{11} 中,有 11×10^{10} 棵枞树和 10^{11} 棵桦树,即枞树多于桦树.可见,G_{11} 即为满足要求的配置图.

[解2]　可以是真话.我们依次构造配置图 $G_1, G_2, G_3, \cdots$.令 G_1 由两棵枞树和两棵桦树组成,它们分别位于边长为1千米的正方形的两组相对顶点上.于是对于 G_1 中的每棵枞树,都恰有两棵桦树与它的距离均为1千米.

设已经构造好了图 $G_1, G_2, \cdots, G_k$,我们按如下程序来构造图 G_{k+1}.取1个长为1千米的向量,使它与 G_k 中任何两棵树所在点的连线

都不平行.然后将 G_k 沿这个向量平移,并将所得的像中的两种树互换. G_k 与互换后的像之并即为 G_{k+1}.易见,对于 G_m 中的每棵枞树,都恰有 $m+1$ 棵桦树与它的距离均为1千米(若发生多于 $m+1$ 棵桦树与它的距离均为1千米,则可通过调整所取向量的方向使之消失).由此可见,在 G_9 中,对于每棵枞树,都恰有10棵桦树与它的距离均为1千米. G_9 中有枞树和桦树各512棵.最后,从 G_9 出发,利用解1中的方法构造 G_{10},则 G_{10} 中有枞树 11×512 棵,有桦树5120棵,即枞树多于桦树,且对 G_{10} 中的每棵枞树,都恰有10棵桦树与它的距离均为1千米.可见, G_{10} 即满足要求.

5·116 假定在 r 个人中,消息的传递都是通过电话进行的.当两个人 A 和 B 在电话谈话时, A 把他当时知道的一切消息全部告诉 B,而 B 也把自己当时所知道的一切消息全部告诉 A.设 a_r 表示在要使每个人都知道 r 个人的所有消息的条件下,这 r 个人之间需要打电话的最小次数.

(1)求 a_3;

(2)求 a_4;

(3)对于 $r\geqslant3$,求证 $a_r\leqslant a_{r-1}+2$.

(中国上海市初中数学竞赛,1993年)

[解] 将 r 个人分别记为 $A_1,A_2,\cdots,A_r$.

(1) $r=3$ 时,首先 A_1 与 A_2 通话,其次 A_2 与 A_3 通话.这时 A_2 与 A_3 已知3人的全部消息,但 A_1 却尚未知道 A_3 的消息,故 A_1 尚需再与 A_3 或 A_2 通话1次.可见 $a_3=3$.

(2) $r=4$ 时,通话4次: $\{A_1,A_2\}$, $\{A_3,A_4\}$, $\{A_1,A_4\}$, $\{A_2,A_3\}$ 即可满足要求.由此可知 $a_4\leqslant4$.

若只通话3次,则4个人中至少有两个人各只通话1次(若有人1次话未通显然不满足要求).于是这两人中若通话1次,则不知道其他人的消息.这两人若均是与其他人通话,则先通话的人不了解后一人的消息.这表明无论怎样通话3次都不能满足要求.

所以 $a_4=4$.

(3) $r\geqslant5$ 时,首先让 A_r 与 A_{r-1} 通话,然后由归纳假设知 $A_1,A_2,\cdots,A_{r-1}$ 之间通话 a_{r-1} 次即可知前 $r-1$ 人知道全部消息.最后由 A_1

与 A_r 通话一次，A_r 也知道了全部消息. 这表明 $a_r \leqslant a_{r-1}+2$. 而 $r=3$，4 时这一不等式显然也成立.

5·117　军营的一个排里有3名中士和若干名士兵，3名中士按顺序每天一人轮流值班. 军官下达了如下的命令：

(1)每天的值班中士至少要处罚1名士兵；

(2)任何一名士兵至多受到两次处罚，而且不能在同一天受到两次处罚；

(3)任何两天处罚的士兵不能完全相同；

(4)不论哪名中士，如果违犯了前3条规定中的某一条，就要被关禁闭.

那么，是否至少有1名中士在值班时，只要知道自己值班前各天的处罚情况，就不会是3人中最先遭禁闭者？证明你的结论.

（第22届全俄数学奥林匹克，1996年）

[解]　第3名值班中士可以做到不先受禁闭.

我们把依次进行的每3个值勤日称为一个值勤周期. 为了不先受到禁闭，第3个值班中士在每个值勤周期的最后一天值班时，都恰处罚在前两天中所有被处罚过一次的哪些士兵. 按条件(3)知这样的士兵存在，因此第3名中士的办法完全符合前3条规定.

按照这种策略，在每个值勤周期结束时，每名士兵或已被处罚两次，或者一次也未被罚. 而且后一种士兵的人数越来越少. 最后将出现这种情况：在某一新的值勤周期开始时，未受过处罚的士兵至多1人. 若为0人，则第1名中士最先受禁闭；若为1人，则第2名中士最先受禁闭. 这表明第3名中士可以明哲保身，不会最先受到禁闭.

5·118　由1600名议员组成16000个委员会，每个委员会都由80名议员组成，求证一定存在两个委员会，它们至少有4名公共的成员.

（第22届全俄数学奥林匹克，1996年）

[证]　设第 i 名议员共参加 k_i 个委员会，于是

$$k_1+k_2+\cdots+k_{1600}=16000\times 80.$$

由于第 i 名委员参加了 k_i 个委员会，所以他参加了 $C_{k_i}^2$ 个“委员会对”. 1600名议员共参加的委员会对的个数为 $C_{k_1}^2+C_{k_2}^2+\cdots+C_{k_{1600}}^2$. 由柯西不等式有

$$\sum_{i=1}^{1600} iC_{k_i}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{1600} k_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{1600} k_i$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{1600}\left(\sum_{i=1}^{1600} k_i\right)^2 - 40 \times 16000$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1600}(80 \times 16000)^2 - 40 \times 16000$$

$$= 16000 \times 31960.$$

另一方面,共有 16000 个委员会,共可组成 $C_{16000}^2 = 8000 \times 15999$ 个不同的委员会对.因为

$$8000 \times 15999 \times 3 = 24000 \times 15999$$

$$< 16000 \times 24000 < 16000 \times 31960.$$

于是由抽屉原理知必有 4 个各由一名委员导致的委员会对是同一个委员会对,这意味着对中的两个委员会至少有 4 名共同成员.

5·119　n 个人参加一次聚会($n \geqslant 6$).已知

(1)每个人至少同其中$\left[\frac{n}{2}\right]$个人互相认识;

(2)对于其中任意$\left[\frac{n}{2}\right]$个人,或者其中有 2 人相识,或者余下的人中有 2 人相识.

求证这 n 个人中必有 3 人两两相识.

(中国高中数学联赛,1996 年)

[证]　用 n 个点代表 n 个人并在每相识的两人所对应的两点间连一条线段,于是得到一个有 n 个顶点的图.问题化为证明图中必有三角形.

若不然,则图中没有三角形.

任取图中一条边 AB,于是顶点 A 和 B 的度数(引出的边的条数)都至少是$\left[\frac{n}{2}\right]$且任何另外的顶点都不会同时有边与 A,B 相连.

当 n 为偶数时,m 个人恰好均分成两半,其中一组与 A 有边相连而与 B 不相连,另一组与 B 有边相连但与 A 不相连.接已知条件(2),两组中总有一组的两点间有边相连.这导致三角形存在,与反证假设矛盾.

当 n 为奇数时,$n = 2\left[\frac{n}{2}\right] + 1$.若 n 个人中每个人都与 A,B 之一

相识,则同上一样地可导出矛盾.故只须再考察恰有$\left[\frac{n}{2}\right]$个人与A相识,也恰有$\left[\frac{n}{2}\right]$个人与B相识且有另一点C与A和B都不相连的情形.按反证假设知,与A相识的人互不相识,与B相识的人也互不相识而且两组人互不相同.

按已知条件(1),至少有$\left[\frac{n}{2}\right]$个人与C相识.设其中有k_1个人与A相识,有另外的k_2个人与B相识.于是$k_1+k_2\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]$,$k_1\geqslant1$,$k_2\geqslant1$.不妨设$k_1\geqslant k_2$.因为$n\geqslant6$,$\left[\frac{n}{2}\right]\geqslant3$,所以$k_1\geqslant2$.

设B_1,B_2与A,C相识,A_1与B,C相识.于是A_1与B_1,B_2都不相识.又因A_1与其他所有与B相识的人都不相识,故知A_1至少与$\left[\frac{n}{2}\right]+1$个人不相识.这表明$A_1$至多与$\left[\frac{n}{2}\right]-1$个人相识,此与已知条件(1)矛盾.

5·120　某次会议共有$12k$个人出席,其中每个人都恰好同其余$3k+6$个人相互问候过,对任何两个人,同这两个人都互相问候过的人数都是相同的,问共有多少人出席会议?

(第36届国际数学奥林匹克预选题,1995年)

[解]　设对任何两个人,同这两个人都互相问候过的人数都是n.

任意固定一人a,将与a互相问候过的人所成的集合记为B,未与a互相问候过的人所成的集合记为C.于是$|B|=3k+6$,$|C|=9k-7$.

任取$b\in B$,同a和b都问候过的人当然都在B中.因此,b同B中n个人相互问候过.b同C中$3k+5-n$个人相互问候过.再任取$c\in C$,同a和c都互相问候过的人当然都在B中.因而c同B中n个人互相问候过.在B与C之间的相互问候对的个数为

$$(3k+6)(3k+5-n)=(9k-7)n.$$

$$9k^2-12kn+33k+n+30=0.$$

由于上式中除n之外的各项都是3的倍数,故必有$n=3m$,$m\in N$.由此可得

$$4m=k+3+\frac{9k+43}{12k-1}. \qquad ①$$

当 $k\geqslant 15$ 时,$9k+43<12k-1$.从而①式右端最后一项不能为整数,所以 $1\leqslant k\leqslant 14$.将①式改写成

$$4m=k+3+\frac{3}{4}+\frac{175}{4(12k-1)}. \qquad ②$$

为使②式右端是整数,$\frac{175}{12k-1}$必须是整数.又因 $175=5^2\times 7$,$12k-1>7$,故 $12k-1$ 只能为 25,35 或 175.显然,三者之中只有 35 是可以实现的.这时 $k=3$,$m=2$,$n=6$,$3k+6=15$.即惟一可能满足要求的情形是每人都与 15 人相互问候过,与每两人都互相问候过的人数都是 6.

下面我们举例说明上述情形是可以实现的.设共有 36 人出席会议,其中穿有红,橙,黄,绿,蓝,紫 6 种颜色上衣的各有 6 人,我们分别用 R,O,Y,G,B,V 来表示穿有这 6 色上衣的人.然后让这 36 个人依次坐在 6 行 6 列的 36 个座位上,按上衣颜色标志如右表.规定每个人都恰好与他同行,同列及同色上衣的人互相问候过,则每人都恰好与 15 人互相问候过.因此,只须再验证与任何两人都互相问候过的恰有 6 人.

R	O	Y	G	B	V
V	R	O	Y	G	B
B	V	R	O	Y	G
G	B	V	R	O	Y
Y	G	B	V	R	O
O	Y	G	B	V	R

(1)当 P 和 Q 两人同行时,与两人同行的另 4 人,与 P 同列而与 Q 同色的人以及与 P 同色而与 Q 同列的人共 6 人与 P 和 Q 都互相问候过,其他人都至多与 P,Q 之一互相问候过.

(2)当 P 与 Q 同列或 P 与 Q 同色时,像(1)中一样地可以指出与 P,Q 二人都互相问候过的也都恰有 6 人.

(3)设 P 与 Q 既不同行也不同列又不同色.这时与 P 同行与 Q 同列的人,与 P 同列而与 Q 同行的人,与 P 同行与 Q 同色的人,与 P 同色而与 Q 同行的人,与 P 同列与 Q 同色的人及与 P 同色与 Q 同列的人恰为与 P,Q 都互相问候过的 6 人.

综上可知,共有 36 人出席会议.

5·121 1994 位国会议员中的每一位都恰好使自己的一个同事受过一次侮辱.求证可以组成一个包括 665 位议员的委员会,使得它的成员中任何一人都没有侮辱过任何另一人.

(第 57 届莫斯科数学奥林匹克,1994 年)

[证] 因为 $1994=664\times 3+2$,所以有 $664\times 3<1994\leqslant 665\times 3$.因

此，我们用数学归纳法来证明一个一般性的命题：在共有 n 个人的群体中，如果每个人至多伤害过1个同伴，那么当 $3(m-1)<n\leqslant 3m$ 时，可以从中选出 m 个人来，使得在选出的人中，任何一人都未伤害过任何另一人. 显然，本题是这个命题于 $n=1994, m=665$ 的特例.

$m=1$ 时结论显然. 让我们来看 $m=2$ 的情形. 将这 n 个人的集合记为 A. 如果 A 中至少有1人 a 未被别人伤害过，由于 a 至多伤害过1个同伴 b 而 $n>3$. 故可从余下 $n-2$ 人中任选一人 c，于是 a 和 c 互未伤害，当然 $\{a,c\}$ 满足要求. 如果 A 中无人未被伤害过，则每人都恰被别人伤害1次，每人也都恰好伤害过1人.

用 n 个点代表这 n 个人. 当 a 伤害 b 时，就在相应两点间画一个箭头指向 b. 于是得到一个 n 阶有向图. 在上段最后的情况中，每点都是2度，且恰有1个箭头指向它，也恰有1个箭头离开它. 于是这个图可以分解为若干个互不相交的圈. 若有两个以上的圈，则从两个圈中各取1点代表的两人满足要求. 若只有1个圈，则圈上的顶点数不少于4. 于是可从中选取不相邻的两个顶点，它们所代表的两个人满足题中要求. 这表明 $m=2$ 时命题成立.

设 $m\leqslant k$ 时命题成立，则证当 $m=k+1$ 时结论也成立. 将 A 中未曾受过别人伤害的人构成的子集记作 A_1，下面分两种情形来分别讨论.

(1)设 $A_1\neq\varnothing$，即 $|A_1|\geqslant 1$. 这时，把被 A_1 中的人伤害过的所有人所成的子集记为 A_2. 由于 A_1 中每人至多伤害过1个人，所以 $|A_2|\leqslant|A_1|$. 再令 $A_3=A-A_1-A_2$. 如果 $|A_3|\leqslant 3k$，则因 A_3 也满足命题中的条件，于是由归纳假设知可从 A_3 中选取子集 B，使得 B 中成员谁也没有伤害过谁且有 $|B|\geqslant\frac{1}{3}|A_3|$. 这样一来，集合 $A_1\cup B$ 中的成员互未伤害过且有

$$|A_1\cup B|=|A_1|+|B|\geqslant\frac{1}{2}(|A_1|+|A_2|)+\frac{1}{3}|A_3|\geqslant k+1.$$

可见，从 $A_1\cup B$ 中任取 $k+1$ 个人便满足要求. 若 $|A_3|>3k$，则 $|A_3|=3k+1$ 或 $3k+2$. 这时先从 A_3 中去掉1人或2人，并将余下的 $3k$ 人的集合记为 A'_3. 于是由归纳假设知，可从 A'_3 中选取子集 B，使得 $|B|=k$ 且 B 中成员互未伤害. 从而集 $B\cup A_1$ 又满足题中要求.

(2)设 $A_1=\varnothing$. 这时 A 中每个人都至少受过一个同伴的伤害,从而 A 中每个人都恰好伤害过一个同伴也恰好受到过一个同伴的伤害.这又导致每点度数皆为 2 的 n 阶有向图,又可分解为若干个互不相交的圈.若图中有不少于两个圈,则分别应用归纳假设即可得证.若图中只有 1 个圈,则从中显然可以选出互不相邻的 $k+1$ 个顶点,它们所代表的 $k+1$ 个人便满足题中的要求.

综上可知,命题于 $m=k+1$ 时成立,这就完成了归纳证明.

第六章 比赛与考试

6·1 30个球队参加足球冠军赛，求证在赛程中的任何时刻，总有两个球队已赛过的场数相同.

（第28届莫斯科数学奥林匹克，1965年）

［证］ 首先注意，在整个比赛过程中，一个球队最少赛0场，最多赛29场. 但在30个球队中，如果有一队赛0场，则任何队都不能赛29场；如果有一队赛29场，则任何队都至少赛一场. 不妨设为前者. 这时30个球队中每队已赛的场数都是0，1，2，…，28这29个数之一. 由抽屉原理便知其中必有两队已赛过的场数相同.

6·2 在足球锦标赛中18个队彼此之间进行了8轮比赛，即每支球队与其他8个不同的队进行了比赛. 求证存在3个队，它们彼此之间暂时尚未赛过.

（第15届全苏数学奥林匹克，1981年）

［证］ 设A是其中一支球队，前8轮中A先后与8支球队进行了比赛，我们把这9支球队算作第一组，另外9支球队为第二组. 因为每轮比赛每支球队都要赛一场，所以第二组的9支球队中至少有一支球队要同第一组的队比赛. 从而前8轮结束后，第二组中总有两个队B和C没有赛过. 于是A，B，C三队即为所求.

6·3 智利举办国际足球比赛. 当地俱乐部的卡洛 — 卡洛队以8分获得冠军，莫斯科的迪纳莫队以1分之差屈居亚军，巴西俱乐部的果林基安斯队得4分获第3名，前南斯拉夫俱乐部的茨维娜星队获第4名，也得4分. 问还有多少个队参加了比赛及它们各得了多少分？

（第32届莫斯科数学奥林匹克，1969年）

[解] 首先,因为4队得分总和为23分,故至少进行了12场比赛,从而至少有6个队参加比赛.

另一方面,如果有$n\geqslant7$个队参赛,则要进行$C_n^2\geqslant21$场比赛,共得$2C_n^2$分(每场比赛两队共得2分).各队得分的平均值为$n-1\geqslant6$.但前4名共得23分,平均分不足6分,矛盾.可见,这次比赛的参赛队共有6个.

6队参赛,共进行15场比赛,共得30分.可见,最后两队得7分,当然只能是第5名得4分,第6名得3分.

6·4 20个足球队参加全国冠军赛,问最少应该进行多少场比赛,才能使得任何3个队中总有两个队彼此赛过?

(第3届全苏数学奥林匹克,1969年)

[解] 设进行了m场比赛后使得任何3队中已有两队彼此赛过.设A队是所有球队参赛场次最少的一个球队,它共参赛k场.于是已经与A队赛过的队至少进行了k场比赛.没与A赛过的$19-k$个队中的任何两队之间都得赛一场,否则存在3个队,其中任何两队都未彼此赛过.于是有

$$2m\geqslant(k+1)k+2C_{19-k}^2=2(k-9)^2+180\geqslant180.$$

这意味着至少进行90场比赛.

另一方面,将20个球队均分成两组,每组内的任何两队之间比赛一场,不同组的任何两队之间不赛,则共进行了90场比赛.由于任何3个队中总有两个队在一组,它们之间已经进行了一场比赛,故知这种安排满足题中要求.

综上可知,最少要进行90场比赛.

6·5 n个队参加一次足球比赛,每两个队都比赛一场,每场比赛中,胜队得2分,负队得0分,平局则各得1分.问在比赛中获得相邻名次的两个队的得分最大可以相差多少分?

(第38届莫斯科数学奥林匹克,1975年)

[解] 当A队全胜所有其余各队而所有其余各队都战平时,A队得$2(n-1)$分,其余每队均得$n-2$分.这时,第1名与第2名得分之差为n.故知所求的最大值不小于n.

另一方面,对任意$k<n$,考察第k名与第$k+1$名得分之差.因为前$k-1$名中每人得分都不少于第k名的得分,故第k名的得分不多于$2(n-1)-(k-1)=2n-k-1$.又因第$k+1$名的得分不少于后(n

$-k-1$) 名中任何一人的得分,故他的得分不少于 $n-k-1$. 从而第 k 名与第 $k+1$ 名得分之差不多于 n.

综上可知,名次相邻的两队得分之差最大是 n.

6·6 设有 25 支足球队参加一次循环赛,赛后发现,每场比赛的总进球数以及每一个队的总进球数均不多于 4. 已知 A 队所攻进的总球数比其他任何一队都多,而被攻进的总球数比其他任何一队都少. 问 A 队最差能取得第几名?

(第 34 届莫斯科数学奥林匹克,1971 年)

[解] A 队可能是最后一名.

设另外 24 个队是 $B_1, B_2, \cdots, B_{24}$,并将 25 个队分成 8 组,其中第 1 组为 $\{A, B_1, B_2, B_3\}$,另外 7 组每组 3 个队.

设第 1 组的比赛结果是 A 胜 B_1:4 : 0,A 负于 B_2:0 : 1,A 负于 B_3:0 : 1,B_1 胜 B_2:1 : 0,B_1 胜 B_3:1 : 0,B_2 平 B_3:2 : 2. 其他 7 组中的每组 3 队之间的 3 场比赛都是每队各胜 1 场,各负 1 场. 比分都是 2 : 1,而不同组的任何两队的比赛结果都是 0 : 0. 这样,A 队 1 胜 2 负 21 平得 23 分(足球计分规则是胜 1 场得 2 分,平 1 场得 1 分,负 1 场得 0 分),B_1 队 2 胜 1 负 21 平得 25 分,B_2 和 B_3 队都是 1 胜 1 负 22 平各得 24 分. 另外 7 组中的 21 队中的每队都是 1 胜 1 负 22 平,各得 24 分. 可见,A 队为最后 1 名.

此外,A 队进球 4,失球 2;B_1 队进球 2,失球 4;B_2 和 B_3 队都是进球 3,失球 3;$B_4, B_5, \cdots, B_{24}$ 队也都是进球 3,失球 3. 可见,A 队进球数比其他任何一队都多,而失球数比其他任何一队都少. 可见,上述比赛结果满足题中要求.

6·7 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个自然数,其中任意 $k(k \leqslant n)$ 个自然数的和都不小于 $k(k-1)$ 且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n(n-1)$. 在有 n 个足球队参加的循环赛结束后,各队得分之和为 $n(n-1)$(足球比赛中,每队胜一场得 2 分,平一场得 1 分,负一场得 0 分). 求证可以出现这样的结局,使得各队得分恰为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

(圣彼得堡数学奥林匹克,1991 年)

[证] 关于足球队的个数 n 作归纳证明. 不妨设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$. 由于 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n(n-1)$,而 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \geqslant (n-1)(n-2)$,故有 $n-1 \leqslant a_n \leqslant 2n-2$. 将数 $2n-2-a_n$ 写成

$$2n-2-a_n=y_1+y_2+\cdots+y_{k-1}+y_k,$$

其中 $y_1,y_2,\cdots,y_{k-1}$ 皆为2而 y_k 等于2或1,视 a_n 的奇偶性而定.易见 $k\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$.令

$$b_j=\begin{cases}a_j, & j=1,2,\cdots,n-k-1,\\ a_j-y_{n-j}, & j=n-k,n-k+1,\cdots,n-1.\end{cases}$$

容易验证,这 $n-1$ 个自然数仍然满足题中的要求.于是由归纳假设知存在这样的结局,其中各队的得分恰为 $b_1,b_2,\cdots,b_{n-1}$.现在增加1个足球队,它战胜了原来的前 $n-k-1$ 个队,而在与原得分为 $b_j=a_j-y_{n-j}$ 的队比赛时,得分为 $2-y_{n-j}(j=n-k,n-k+1,\cdots,n-1)$.这样一来,最后一队的得分恰为 a_n,而前 $n-1$ 队的得分也分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$.这就完成了归纳证明.

6·8 在学校足球冠军赛中,要求每一队都必须同其余的各队进行一场比赛,每场比赛的胜队得2分,平局各得1分,负队得0分.已知有一队得分最多(其余每队得分都比这队少),但它胜的场次比任何一队都少,问最少有多少队参赛?

(第16届全俄数学奥林匹克,1990年)

[解] 我们称得分最多的队 A 为优胜队.

设 A 队胜 n 场,平 m 场,则 A 队的总分为 $2n+m$ 分.

由已知,其余的每一个队至少要胜 $n+1$ 场,即得分不少于 $2(n+1)$ 分.于是

$$2n+m>2(n+1),$$
$$m\geqslant 3.$$

因此可以找到这样一个球队,它和 A 队踢成平局,这个队的得分应不少于 $2(n+1)+1$ 分.从而又有

$$2n+m>2(n+1)+1,$$
$$m\geqslant 4.$$

	A	B	C	D	E	F	得分
A		1	1	1	1	2	6
B	1		2	0	0	2	5
C	1	0		0	2	2	5
D	1	2	2		0	0	5
E	1	2	0	2		0	5
F	0	0	0	2	2		4

设共有 s 队参赛,则优胜者至少应胜一场,否则它的得分不会超过 $s-1$ 分,而任何其他一队得分严格少于 $s-1$ 分,这样所有参赛队得分就少于 $s(s-1)$ 分,然而 s 队参赛所得总分为 $2C_s^2=s(s-1)$ 分,出现矛

盾.

于是 $m \geqslant 4, n \geqslant 1$,即优胜队 A 至少要进行5场比赛,即应有不少于6个队比赛.

我们可以得到一个比赛积分表,表中共有 A,B,C,D,E,F 六个队,且满足题设要求:优胜队 A 胜的场次最少,而得分最多.

综上可知,最少应有6个队参赛.

6·9 设有 n 支球队参加排球比赛,比赛按淘汰制进行.比赛中每相遇的两队赛一场,每场必有胜负,负者退出比赛.问到冠军产生时,共进行多少场比赛?

(基辅数学奥林匹克,1969年)

[解] 每场比赛恰有1队退出比赛.到冠军队产生时,共有 $n-1$ 队退出比赛,当然共进行了 $n-1$ 场比赛.

6·10 一次排球比赛中,每两个球队之间都比赛一场且每场都分出胜负.如果 A 队胜了 B 队,或者 A 队胜某个 C 队,而 C 队胜了 B 队,则称 A 队优于 B 队.在比赛结束后,优于其他所有球队的球队即被授予冠军称号.问比赛后能否恰好出现两个冠军队?

(原苏联教委推荐试题,1988年)

[解] 首先证明,冠军队必然存在.设 A 是所有球队中胜场次数最多的球队之一,则 A 队必为冠军队.若不然,则必存在 B 队,使 A 队不优于 B 队,即 B 队胜 A 队且 B 队战胜了负于 A 队的所有球队.这样一来,B 队至少比 A 队多胜1场,矛盾.同理可证,比赛后在任何一组球队中,总存在优于所有其他球队的球队.

设比赛结束后,有 A 和 B 两个冠军队且 A 胜 B.将除 A 和 B 之外的所有球队分成3组:所有负于 A 的队组成第1组;所有胜 A 而负于 B 的队组成第2组;所有既胜 A 又胜 B 的队组成第3组.

(1) 若第3组非空,则由前段证明知组中存在一个优于组中其他所有队的球队 C.又因 C 既胜 A 又胜 B,所以 C 为冠军队.

(2) 若第3组是空集,则因 B 是冠军队,故第2组非空,于是第2组中存在一个优于组中其他所有队的球队 C.又因 C 胜 A,A 胜 B,所以 C 队为冠军队.

综上可知,这时总有第3个冠军队存在.这表明不可能恰有两个冠军队.

6·11　93个排球队参加单循环赛,已知其中任何19个队中,都有一队战胜了其余18个队,也有一队负于其余18个队.求证所有这93个队的得分互不相同.

（圣彼得堡数学选拔考试,1993年）

［解］ 若不然,则有两个队A与B得分相同.不妨设A胜B.由于A与B得分相同,故必有另一个队C,它胜A而负于B.

考察A,B,C3队及另外16个队.按已知,这19个队中必有一队负于另外的18个队,我们称之为"老末队".由于A胜B,B胜C,C胜A,所以这个老末队异于A,B,C.去掉这个老末队并补上一个新队,于是这19个队中又将产生一个老末队.继续这个过程,当产生16个老末队后,将它们与A,B,C3队放在一起共19个队,其中任何一队都不全胜其余18个队,此与已知矛盾.

6·12　(1) 排球循环赛结束之后,发现对于其中任何两队,都存在第3队,它战胜过这两个队.求证循环赛中的代表队数不少于7.

(2) 在另一次排球循环赛中,对于其中任何3队,都有一个代表队战胜过这3个队.求证循环赛中的代表队数不少于15.

（第40届莫斯科数学奥林匹克,1977年）

［证］ 设共有n个代表队参加比赛,并将这些队编号为$1,2,\cdots,n$.若i_1,i_2两队皆负于j,则记为$(i_1,i_2)\to j$.

(1) 按已知应有$(1,2)\to j_1,(1,j_1)\to j_2.(1,j_2)\to j_3$且$j_1,j_2,j_3$互不相同.这意味着第1队至少负3场.同理可证每个队都至少负3场.所以整个比赛至少有$3n$场.故有

$$\frac{1}{2}n(n-1)=C_n^2\geqslant 3n.$$

解得$n\geqslant 7$.

(2) 由上段证明知,这时只须证明每队至少负7场.若不然,设第一队至多负6场.按已知有

$$(1,2,3)\to j_1,(1,2,j_1)\to j_2,$$
$$(1,j_1,j_2)\to j_3,(1,j_2,j_3)\to j_4,$$
$$(1,j_3,j_4)\to j_5,(1,j_3,j_5)\to j_6,$$

且易证j_1,j_2,j_3,j_4,j_5,j_6互不相同.考察$(1,j_3,j_6)$.因j_3胜过j_1,j_2,且j_6胜过j_5而第1队已负6场,故必有$(1,j_3,j_6)\to j_4$.又因j_4胜j_2,j_3,

j_6，故有$(1, j_4, j_5) \to j_1$. 最后考察$(1, j_1, j_4)$. 因为j_1胜j_4，j_5而j_4胜j_2，j_3，j_6，故战胜这3个队的队必为异于$j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6$的第7队，矛盾.

6·13 设有20个球队参加世界锦标赛和欧洲锦标赛. 在这些队中有k个欧洲队，他们在世界锦标赛中彼此交锋的结果计入欧洲锦标赛. 锦标赛按单循环赛制进行. 如果比赛按照

(1) 冰球赛制（允许平局，胜队得2分，负队得0分，平局各得1分）进行，

(2) 排球赛制（没有平局，胜队得1分，负队得0分）进行，

问为使在欧洲锦标赛中得分绝对多的队能够成为世界锦标赛中得分绝对少的队，k的最大值是多少？

（第9届全苏数学奥林匹克，1975年）

［解］ 我们研究更一般的情形，即$n(\geqslant 7)$个队参加世界锦标赛的情形.

(1) n个队参加世锦赛，得分总和为$n(n-1)$，k个队参加欧锦赛，得分总和为$k(k-1)$. 设欧洲冠军队在世锦赛和欧锦赛的得分分别为x和y，则$x \geqslant y$. 于是其余各队在世锦赛中得分都至少为$x+1$分，而每个欧洲队在欧锦赛中的得分至多为$y-1$分. 因而有

$$x + (n-1)(x+1) \leqslant n(n-1),$$
$$y + (k-1)(y-1) \geqslant k(k-1).$$

1		1	2	1	1	1	·	·	·	1
2	1		2	0	1	1				1
3	0	0		2	1	1				1
4	1	2	0		1	1				1
5	1	1	1	1		1				1
6	1	1	1	1	1					·
·	·									·
·	·									·
·	·									1
n	1	1	1	1	1	·	·	·	1	

由此分别解得$x \leqslant n - 2 + \dfrac{1}{n}$，$y \geqslant k - \dfrac{1}{k}$. 由于$x$和$y$都是整数，故有$k \leqslant y \leqslant x \leqslant n-2$.

右图中举出了循环赛记分表的例子，其中共有n个队参加世锦赛，而后$n-2$个队参加欧锦赛. 在欧锦赛中，第3队得分为$n-2$分，其他队得分均不超过$n-3$分，故第3队为欧洲冠军队. 它在世锦赛中得分仍为$n-2$，但其他各队的得分均不低于$n-1$，即第3队得分绝对少.

综上可知，所求的k的最大值为$n-2$.

(2)n 个队参加世锦赛,得分总和为$\frac{1}{2}n(n-1)$,k 个队参加欧锦赛,得分总和为$\frac{1}{2}k(k-1)$.像(1)中推理一样地可得

$$x+(n-1)(x+1)\leqslant\frac{1}{2}n(n-1),$$

$$y+(k-1)(y-1)\geqslant\frac{1}{2}k(k-1).$$

由此可得 $x\leqslant\left[\frac{n-3}{2}\right]$,$y\geqslant\left[\frac{k}{2}\right]+1$.从而有

$$\left[\frac{k}{2}\right]\leqslant\left[\frac{n-3}{2}\right]-1=\left[\frac{n-5}{2}\right].$$

将 n 分为奇数与偶数两种情形,由此便得

$$k\leqslant\begin{cases}n-5,当\ n\geqslant 8\ 为偶数,\\ n-4,当\ n\geqslant 7\ 为奇数.\end{cases}$$

我们仍然用循环赛记分表的例子,来分别说明上式中的等号可以成立:

1		1	1	1	1	1	0	0	0	1
2	0		1	1	1	1	0	0	1	0
3	0	0		1	1	.1	1	0	0	1
4	0	0	0		1	1	1	1	1	0
5	0	0	0	0		1	1	1	0	1
6	0	0	0	0	0		1	1	1	0
7	1	1	0	0	0	0		1	0	1
8	1	1	1	0	0	0	0		1	0
A	1	0	1	0	1	0	1	0		1
B	0	1	0	1	0	1	0	1	0	

1		1	1	1	1	0	0	0	1
2	0		1	1	1	0	0	1	0
3	0	0		1	1	1	0	0	1
4	0	0	0		1	1	1	1	0
5	0	0	0	0		1	1	0	1
6	1	1	0	0	0		1	1	0
7	1	1	1	0	0	0		0	1
A	1	0	1	0	1	0	1		0
B	0	1	0	1	0	1	0	1	

上面左图中 $n=8$;$k=3$,第6,7,8三个队参加欧锦赛,第6队为欧洲冠军.A,B两队为增补队,即当 $n=2l$ 的记分表已构造出来之后,$n=2(l+1)$,可按图中所示的形式加进去.上面右图中 $n=7$,$k=3$,第5,6,7三队参加欧锦赛,第5队为欧洲冠军.A,B两队为增补队.容易看出,两图给出的记分表满足题中要求.

综上可知,当比赛按排球赛制进行时,所求的 k 的最大值为

$$k_{\max}=\begin{cases}n-5,\text{当 } n\geqslant 8 \text{ 为偶数},\\ n-4,\text{当 } n\geqslant 7 \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

特别地,当 $n=20$ 时,按冰球赛制进行时,k 的最大值为 18;按排球赛制进行时,k 的最大值为 15.

6·14 $n(n>3)$ 名乒乓球选手单打比赛若干场后,任意两名选手已赛过的对手恰好都不完全相同.试证总可以从中去掉一名选手,使在余下的选手中,任意两名选手已赛过的对手仍然都不完全相同.

(中国高中数学联赛,1987 年)

[证 1] 如果从 n 名选手中去掉选手 A,能使在其余的选手中,任意两名选手已赛过的对手都不完全相同,则称 A 为可去选手.显然,本题就是要证明可去选手的存在性.

将 n 名参赛选手分别记为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,与 A_i 赛过的所有选手的集合记为 M_i, $i=1,2,\cdots,n$.于是由题意有

(1) $M_i\neq M_j, i\neq j$;

(2) $A_i\notin M_i, i=1,2,\cdots,n$;

(3) $A_i\in M_j\Longleftrightarrow A_j\in M_i$.

若不存在可去选手,设 A_1 是赛过场次最多的选手之一.因 A_1 不是可去选手,故存在指标 i 和 j, $i\neq j$,使得 $M_i-\{A_1\}=M_j-\{A_1\}$.由(1)知 $M_i\neq M_j$,不妨设 $A_1\in M_i$, $A_1\notin M_j$.因 A_j 也不是可去选手,故又存在 $k\neq l$,使 $M_k-\{A_j\}=M_l$.由(3)知 $A_j\in M_k\Longleftrightarrow A_k\in M_j$.因 $A_1\notin M_j$,所以 $A_1\neq A_k$.因而有 $A_k\in M_i$,再由(3)又有 $A_i\in M_k$.因为 $i\neq j$,故有 $A_i\in M_l$, $A_l\in M_i$.因为 $A_j\notin M_l$,由(3)有 $A_l\notin M_j$,所以 $A_l=A_1$.但与 A_l 赛过的选手数比与 A_k 赛过的选手数少 1,所以 $A_1=A_l$ 不是赛过场次最多的选手,矛盾.

[证 2] 用 n 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 来代表 n 名运动员.若结论不成立,则当去掉选手 A_i 时,总有选手 A_j 与 A_k, $j\neq k$,使得二人已赛过的对手除 A_i 外完全相同.这时,我们就将 A_j 与 A_k 点间连一条线 l_i, $i=1,2,\cdots,n$.于是我们得到一个有 n 个顶点且至少有 n 条边的图.显然,两点间至多有一条连线,即这个图为简单图.由图论定理知图中必有圈,不妨设为

$$A_{i_1}l_1A_{i_2}l_2\cdots A_{i_m}l_mA_{i_1}.$$

不妨设 A_{i_1} 与 A_1 赛过而 A_{i_2} 未与 A_1 赛过.因为 A_{i_2} 与 A_{i_3} 已赛过的对手除 A_2 外完全相同,故 A_{i_3} 也未与 A_1 赛过.类似地可证 $A_{i_4},\cdots,A_{i_m},A_{i_1}$ 都未与 A_1 赛过,矛盾.

6·15 12名网球选手参加比赛.已知网球比赛中没有平局,每两人之间都恰好比赛一场,而且比赛结果是不存在全负的选手.求证必存在3名选手 A,B,C,使得 A 胜 B,B 胜 C,而 C 胜 A.

(第33届莫斯科数学奥林匹克,1970年)

[证] 设12名选手中胜场最少的人之一是 C,战胜 C 的人是 $B_1,B_2,\cdots,B_n$.因 C 不是全负,故存在被 C 战胜的选手 A.如果 A 全负于 $B_1,B_2,\cdots,B_n$,则 A 至少比 C 多负一场,矛盾.故在 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中必存在一个 B_i,记作 B,它负于 A.这样得到的3名选手 A,B,C 便满足题中要求.

6·16 网球协会根据网球运动员的技术水平给他们编号:最强的运动员排名为第1号,其次为第2号,等等.设在号码之差大于2的两名运动员交锋时,总是号码较小的运动员取胜.现有1024名最强的运动员参加单打比赛.比赛按淘汰制进行:参赛者根据抽签结果分成若干对,每对中的两人比赛一场,胜者进入下一轮,于是每进行一轮比赛后,运动员人数减半,经过10轮比赛后产生冠军.问冠军的最大可能号码是多少?

(第7届全苏数学奥林匹克,1973年)

[解] 因为号码为 k 的运动员只可能败给号码不超过 $k+2$ 的运动员,故在每轮比赛之后,获胜运动员中的最小号码至多增加2,于是10轮比赛之后最强运动员的号码至多为21.

下面我们指出,第21号运动员不可能成为冠军.若不然,则第1轮比赛后,第1,2号运动员应被淘汰,但他俩只能分别负于第3,4号运动员;第2轮比赛后,第3,4号运动员应被淘汰,但他俩只能分别负于第5,6号运动员;继续下去,第9轮比赛后,最后只剩第19,20号这两名运动员并在第10轮由二人进行决赛.可见,冠军不可能是第21号运动员.

最后我们举一个第20号运动员成为冠军的例子.将全体运动员分成两组:第一组由第20号及514—1024号运动员共512人组成,另外的512人为第二组.前9轮的每场比赛都在组内进行.显然,第一组赛过9

轮之后剩下的惟一运动员是第 20 号. 而第二组中的比赛可以这样来设计:第一轮使第 3,4 名分别胜第 1,2 名,第 2 轮让第 5,6 名胜第 3,4 名,…,第 8 轮中第 17,18 名胜第 15,16 名,第 9 轮中第 18 名战胜第 17 名. 最后第 10 轮决赛中,第 20 名战胜第 18 名.

综上可知,冠军的最大可能号码是 20.

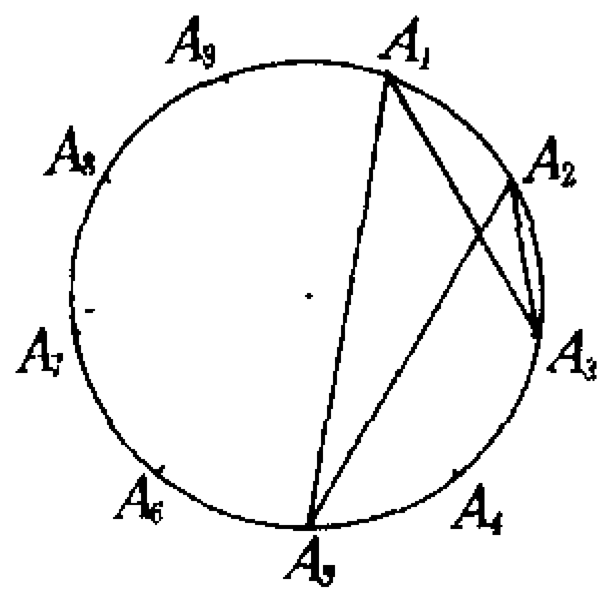
6·17 假设有 n 名网球运动员要进行这样的双打比赛:规定每一个运动员与其余运动员中的每一个作为对手都恰好只进行一场比赛,试问对于什么样的自然数 n 才能进行这种比赛?

(第 19 届全俄数学奥林匹克,1993 年)

[**解**] n 满足 $n \equiv 1 \pmod 8$.

假设按问题要求的比赛已经进行,这样,对于网球运动员 A 来说,他的竞赛对手必然是成对的. 因此,n 一定是奇数. 此外,按题中要求,A 恰参加 $\frac{1}{2}(n-1)$ 场比赛. 因此,n 个人共参加 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 场比赛(包括重复计数). 因为每场比赛有 4 人参加,故在上述计数过程中,每场比赛都恰被计数 4 次. 这样,$\frac{1}{2}n(n-1)$ 应为 4 的倍数,即 $n-1$ 为 8 的倍数.

下面我们来证明当 $k=1,2,\cdots$ 时,对于 $n=8k+1$ 名运动员参加的双打比赛是可以按要求进行的.



当 $k=1$ 时,我们把 9 名运动员分别放在一个正九边形 $A_1A_2\cdots A_9$ 的顶点处.

首先选定 A_1A_2 与 A_3A_5 进行双打比赛,并用线段连接竞赛对手,然后我们再把这些线段绕圆心旋转 $\frac{2\pi}{9}$ 的倍数,就得到其他八场比赛的结构. 在结构中,每一条弦 A_{ij} 只出现一次.

对于 $k>1$,我们先从 $8k+1$ 个网球运动员中选出一个来,再把其余的人按 8 人一组分成 k 组,并逐次把每一组和被选出的运动员按上面对 9 个人的程序进行比赛,最后剩下来的就只是不同组的竞赛对手之间的比赛,这只需要把每一组分成四队(每队两人)再进行不同组的队之间的比赛就可以了.

6·18　一个网球俱乐部的20位成员已经被安排了14场单打比赛，其中每个成员至少参加1场比赛．求证在这种安排中，必有6场比赛是在12名不同选手之间进行的．

（第18届美国数学奥林匹克，1989年）

［证1］　记参加第j场比赛的选手为(a_j,b_j)，并令

$$S=\{(a_j,b_j)\mid j=1,2,\cdots,14\}.$$

如果子集$M\subset S$中所含选手对中出现的所有选手互不相同，则称M为S的“良子集”．显然，这样的良子集存在且只有有限多个．设其中元素数最大的子集之一为M_0，它的元素数为r．显然，只须证明$r\geqslant 6$．

由于M_0是最大良子集，故在M_0中未出现过的$20-2r$名选手之间互相没有比赛．又因每人至少参加1场比赛，故这$20-2r$名选手中每人至少同前$2r$名选手比赛1场．所以，除了M_0中的r场比赛之外，至少还要进行$20-2r$场比赛，即比赛场次总数至少为$20-r$．又因比赛场次总数为14，所以$20-r\leqslant 14$，解得$r\geqslant 6$．

［证2］　用20个点来代表俱乐部的20位成员，并且当两人之间安排了一场比赛时，就在相应两点间连一条线段．于是我们得到一个有20个顶点和14条边的图．

对于图中的任一顶点A，我们把以A及所有与点A有通路相连的顶点为顶点的子图称为一个连通分支．由已知，图中每点都恰属于1个连通分支且每个连通分支中至少有1条边．

设图中共有k个连通分支．因为在每个连通分支中，边数都不少于顶点数减1，所以整个图中的边数不少于顶点数减k，即有$14\geqslant 20-k$．由此解得$k\geqslant 6$．

从图中任取6个连通分支，并在每个连通分支中各取1条边，则这6条边所对应的6场比赛的12名选手互不相同．

6·19　100名运动员参加长跑比赛，已知其中任意12人中可以找到2人，他们是相识的．求证：无论怎样给运动员分配号码（不一定从1到100）都可以找到2名相识的运动员，使他们的号码是从同一个数码开始的．

（第16届全俄数学奥林匹克，1990年）

［证］　因为这100名运动员的号码的首位数码都是1，2，…，9这9个数码之一，故由抽屉原理知其中必有12人的号码的首位数码相同．

再由已知条件又知这 12 人中必有两人相识,他们的号码的首位数码当然是相同的.

6·20 在一次有 m 人参加的拳击比赛中,每两名选手之间至多比赛 1 场.在进行了若干场比赛之后,组织者决定将选手分组.是否对任何自然数 n,$1 < n \leqslant m$,都能将所有选手分成 n 个组,使得对每名选手来说,在组内已与他赛过的选手数都不超过全部与他赛过的选手数的 $\frac{1}{n}$?

(加拿大数学奥林匹克训练题,1992 年)

[解] 总可以实现.

对于将 m 名选手分成 n 组的每一种分组法,我们来计算各组内已赛过的选手对的对数之和.因为不同的分法只有有限多种,故其中必有一种分法使选手对数最小.记这一分组法为 D,则 D 便满足题中要求.

若不然,则有拳击手 L,同组中与 L 已赛过的选手数大于与 L 已赛过的选手总数的 $\frac{1}{n}$.又因共分成 n 个组,故又必有另一组,其中与 L 已赛过的选手数小于与 L 已赛过的选手数的 $\frac{1}{n}$.这样一来,当把 L 调到后一组时,组内已赛过的选手对数之和将减少,矛盾.

6·21 在 20 名花样滑冰运动员表演之后,9 位裁判给运动员排出 1 至 20 的名次.已知不同裁判给每个运动员排的名次上下相差不超过 3.计算每一名运动员得到的名次之和,并把它们按递增的顺序排列:$C_1 \leqslant C_2 \leqslant C_3 \leqslant \cdots \leqslant C_{20}$.求 C_1 的最大值.

(第 2 届全苏数学奥林匹克,1968 年)

[解] 考察 9 个第一名的分布情形.如果一名运动员得了 9 个第一名,则 $C_1 = 9$.如果两名运动员分得 9 个第一名,则其中一人至少得了 5 个第一名,而他的其余名次最差是第四名,故有 $C_1 \leqslant 1 \times 5 + 4 \times 4 = 21$.如果 3 名运动员分得 9 个第一名,则因他们的最差名次是第四名,故 3 人名次之和不超过 $1 \times 9 + 3 \times 9 + 4 \times 9 = 72$,所以 $C_1 \leqslant 24$.如果 4 名运动员分得 9 个第一名,则 4 人名次的总和为 90,

A	1	1	1	3	3	3	4	4	4	$C_1=24$
B	3	3	3	4	4	4	1	1	1	$C_2=24$
C	4	4	4	1	1	1	3	3	3	$C_3=24$
D	2	2	2	2	2	5	5	5	5	$C_4=30$
E	5	5	5	5	5	2	2	2	2	$C_5=33$

故有 $C_1 \leqslant \left[\frac{90}{4}\right] = 22$. 易见,5 名或多于 5 名运动员分得 9 个第一名是不可能的. 由此可见, $C_1 \leqslant 24$.

如果前 5 名运动员 A, B, C, D, E 的所得名次如右图所示而其他 15 名运动员分别得到 9 个第六名, 第七名, …, 第二十名. 便有 $C_1 = 24$. 所以, C_1 的最大值为 24.

6·22　年级举行拔河比赛. 比赛中, 由该年级学生所可能组成的每一个队都应刚好参赛一次(除了由全年级学生所组成的队之外). 求证每一个由部分学生所组成的队, 都将和由该年级的其余所有学生组成的队比赛.

(第 50 届莫斯科数学奥林匹克, 1987 年)

[证 1]　如果全年级的每个学生都是不在甲队就在乙队, 则称甲乙两队是互补的. 显然, 每个学生都恰是互补两队之一队中的成员, 因而每个学生都恰好是所有代表队中的一半代表队的成员. 但所有代表队数目的一半恰好等于比赛所要进行的总场数. 因此, 每场比赛中每名学生都要出场. 从而每场比赛都恰为互补的两队进行比赛.

[证 2]　若不然, 则在某场比赛中出场的两个队 A_0 与 B_0 不是互补的. 我们将与 B_0 互补的队称为 A_1, 将与 A_1 对阵的队称为 B_1. 于是有 $A_0 \subsetneqq A_1, B_1 \subsetneqq B_0$.

再考察与 B_1 互补的队 A_2, 以及与 A_2 对阵的队 B_2. 同理有 $A_1 \subsetneqq A_2, B_2 \subsetneqq B_1$. 这样继续下去, 可以得到一个由代表队构成的无穷序列

$$A_0 \subsetneqq A_1 \subsetneqq A_2 \subsetneqq \cdots,$$

各队中的人数严格增加. 但学生人数是有限的, 故这一情形是不可能出现的.

6·23　n 个参赛者 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 进行循环赛($n > 1$). 每个参赛者同其他 $n-1$ 个参赛者都进行一局比赛, 假设比赛结果没有不分胜负的平局出现. w_r 和 l_r 分别表示参赛者 p_r 胜与负的局数, 求证 $\sum_{i=1}^{n} w_i^2 = \sum_{i=1}^{n} l_i^2$.

(第 26 届美国普特南数学竞赛, 1965 年)

[证]　因为每个参赛者都参加了 $n-1$ 局比赛, 并且没有平局, 则

对每个 $i(i=1,2,\cdots,n)$

$$w_i + l_i = n-1.$$

另外,所有参赛者胜与负的总局数都等于比赛的局数,因此

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} l_i$$

从而有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} w_i^2 - \sum_{i=1}^{n} l_i^2\\&= \sum_{i=1}^{n}(w_i^2 - l_i^2)\\&= \sum_{i=1}^{n}(w_i + l_i)(w_i - l_i)\\&= (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} w_i - \sum_{i=1}^{n} l_i\right)\\&= 0.\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^2 = \sum_{i=1}^{n} l_i^2.$$

6·24　在 n 名选手参加的循环赛中,每两人比赛一场(无平局).试证下列两种情形恰有 1 种发生:

(1) 可将所有选手分成两个非空集合,使得一个集合中的任何一名选手都战胜另一个集合中的所有选手;

(2) 可将 n 名选手从 1 到 n 编号,使得第 i 名选手战胜第 $i+1$ 名选手,$i=1,2,\cdots,n$,其中将 $n+1$ 理解为 1.

(第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年)

[证]　显然,(1) 和(2) 不能同时出现,以下证明(1) 和(2) 至少有一种出现.

设选手 A 胜场最多.若 A 战胜其他所有选手,则(1) 成立.否则必有选手 C 胜 A.因 A 胜场最多,故必有负于 A 的选手 B 战胜 C,于是得到一个选手圈 $\{A,B,C\}$:A 胜 B,B 胜 C,C 胜 A.

设这样的圈中含选手数最多的之一为 $\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$,其中 A_1 胜 A_2,A_2 胜 A_3,$\cdots$,A_{m-1} 胜 A_m,A_m 胜 A_1.若 $m=n$,则(2) 成立.以下设 $m<n$.令

$$S_1=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}.$$

对任意 $B\notin S_1$,或者 B 战胜 S_1 中所有选手,或者 B 负于 S_1 中的所有选手.若不然,则存在 $A_i,A_j\in S_1$,使 B 负于 A_i 而战胜 A_j.不妨设 $i<j$,从而有 $k,i\leqslant k\leqslant j-1$,使 B 负于 A_k 而战胜 A_{k+1}.但这将导致更长的选手圈,矛盾.再令

$$S_2=\{B\mid B胜A_i,i=1,2,\cdots,m\},$$
$$S_3=\{B\mid B负于A_i,i=1,2,\cdots,m\}.$$

对任意 $B\in S_2$ 与 $C\in S_3$,若有 C 胜 B,则可将选手 C 和 B 加入 $\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 中而得到更长的圈,矛盾,故必有 B 胜 C.若 S_2 非空,则令 $S=S_2,T=S_1\cup S_3$;若 S_3 非空,则令 $S=S_1\cup S_2,T=S_3$.易见,S 中的任一名选手都战胜 T 中的所有选手,即(1)成立.

6·25　设有 p 个球队($p\geqslant 5$)进行单循环赛(即每两个队都比赛一次,且仅比赛一次).又设

(1) 每场比赛没有平局.

(2) 任意两个球队 x 和 y,如 x 胜 y,则其余 $p-2$ 个队中,胜 x 负于 y 的队数不小于胜 y 负于 x 的队数.

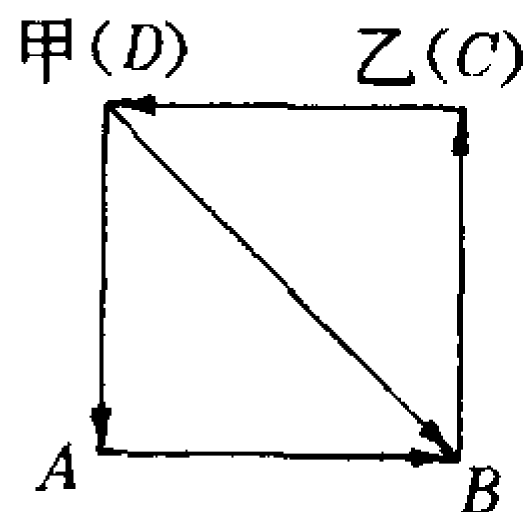
求证对任意两队 A 和 B,如 A 胜 B,则

(a) 必有两队 C 和 D,使比赛结果是:B 胜 C,C 胜 D,D 胜 A.

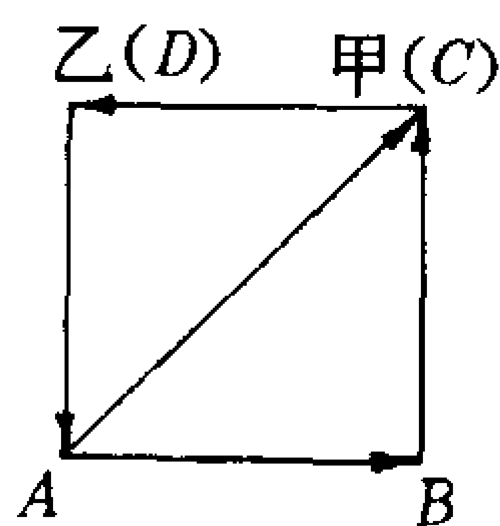
(b) 胜 A 的队数与负于 B 的队数的和不小于 $p-2$.

(中国湖南省数学竞赛,1979 年)

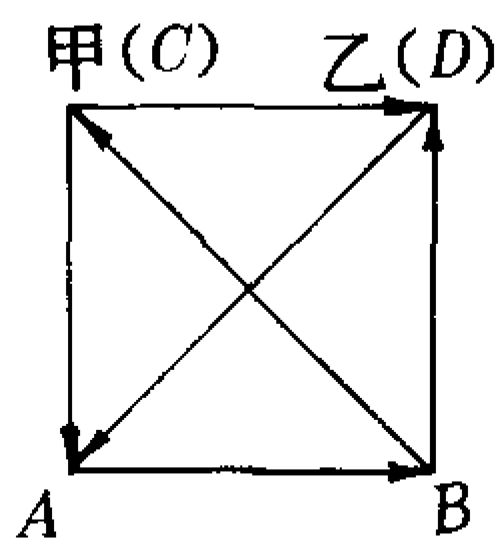
[证] (a) 分下列三种情况讨论:



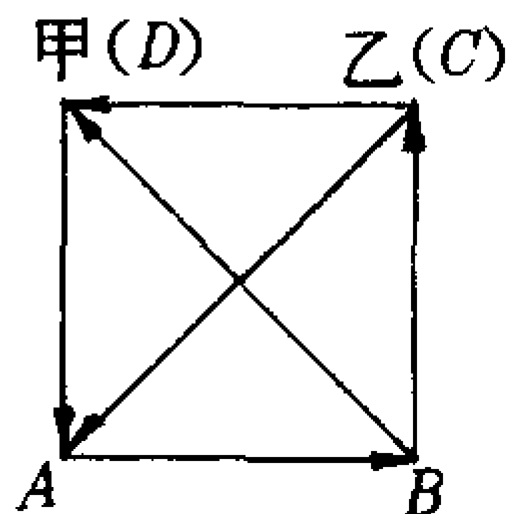
(i)



(ii)



(iii)



(iii′)

(i) 如果存在甲队,甲胜 A,又胜 B,那么对于甲队和 B 队来说,由于甲胜 B,而且有 A,A 胜B 负于甲,所以按假设(2),至少有一队乙,它胜甲负于 B,取乙为 C 队,甲为 D 队,即有 B 胜乙,乙胜甲,甲胜 A. 如图(i).

(ii) 如果存在甲队,甲负于 A 又负于B,那么对 A 队和甲队来说,仿(i) 之推理,至少有一队乙,它胜 A,负于甲,取甲为 C 队,乙为 D 队,即有 B 胜C,C 胜D,D 胜A,如图(ii).

(iii) 如果情形(i) 和情形(ii) 不出现,那么其余 $p-2$ 个队中每一队或者胜 A 负于B,或者胜 B 负于A,由于 $p-2\geqslant 3$,而且由假设(2),胜 A 负于B 的队数不小于胜B 负于A 的队数,所以胜 A 负于B 的队数不小于 2.

由此可见,至少有两队甲,乙都胜 A 负于B,对甲,乙来说,或者甲胜乙,或者乙胜甲. 若甲胜乙,则取甲为C队,乙为D队,如图(iii),若乙胜甲,则取甲为 D 队,乙为 C 队,如图(iii′),两者都合乎要求.

(b) 显然,胜 A 又胜B 的队数 + 胜 A 负于B 的队数 + 负于 A 胜B 的队数 + 负于 A 又负于B 的队数的总和为 $p-2$.

由假设(2) 有:

胜 A 的队数 + 负于 B 的队数

= 胜 A 又胜B 的队数 + 胜 A 负于B 的队数 × 2 + 负于 A 又负于B 的队数

$\geqslant$ 胜 A 又胜B 的队数 + 胜 A 负于B 的队数 + 负于 A 又负于B 的队数 + 负于 A 又胜B 的队数等于 $p-2$.

6·26 运动会连续进行了 n 天,共发了 m 枚奖牌. 第一天发了一

枚及余下的 $m-1$ 枚的$\frac{1}{7}$，第二天发了2枚及余下奖牌数的$\frac{1}{7}$，以后各天均按此规律颁发奖牌，在最后一天即第 n 天发了余下的 n 枚奖牌.求 n 与 m 的值.

（第9届国际数学奥林匹克，1967年）

[解] 设运动会进行了 k 天之后，余下的奖牌数为 a_k.按已知，第 k 天共发出 k 块奖牌及余下奖牌数的$\frac{1}{7}$.换句话说，第 k 天所发的奖牌数等于 $k+\frac{1}{6}a_k$，故有

$$a_{k-1}=k+\frac{1}{6}a_k+a_k=k+\frac{7}{6}a_k. \quad ①$$

注意到 $a_n=0$，由①式递推即得

$$m=1+2\times\frac{7}{6}+3\times\left(\frac{7}{6}\right)^2+\cdots+n\times\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}. \quad ②$$

将②式两端同乘$\frac{7}{6}$，得到

$$\frac{7}{6}m=\frac{7}{6}+2\times\left(\frac{7}{6}\right)^2+3\times\left(\frac{7}{6}\right)^3+\cdots+n\times\left(\frac{7}{6}\right)^n. \quad ③$$

③－②并加以整理，最后得到

$$m=\frac{7^n(n-6)}{6^{n-1}}+36. \quad ④$$

因为 $n>1$，故有 $|n-6|<6^{n-1}$.又因 $(7^n,6^{n-1})=1$ 且 m 为正整数，所以必有 $n-6=0$，即 $n=6$，$m=36$.

6·27 一些人参加一次循环赛，其中每两人都比赛一场，每场比赛都一定决出胜负而没有平局.试证在这些运动员中，必可找到这样的运动员，使得其余的所有运动员都或者是他的手下败将或者负于他的某个手下败将.

（匈牙利数学奥林匹克，1954年）

[证1] 设 A 是胜场次数最多的运动员之一，他共战胜 k 个对手 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 而负于 m 个对手 $C_1,C_2,\cdots,C_m$.若有某个 C_i，他全胜 $B_1,B_2,\cdots,B_k$，因他还战胜 A，故他的胜场次数为 $k+1$，比 A 还多胜一场，

矛盾.故知 C_i 必负于某个 B_j,即他负于 A 的某个手下败将.可见,A 即为所求.

[证 2] 我们用数学归纳法来证明.当参赛人数 $n=2$ 时,结论显然成立.设结论当 $n=k$ 时成立.当 $n=k+1$ 时,任意去掉一名运动员 A 并对其余 k 个人应用归纳假设知存在运动员 B,他战胜了 $C_1,C_2,\cdots,C_m$,而 $C_{m+1},\cdots,C_{k-1}$ 则都至少负于 $C_1,C_2,\cdots,C_m$ 之一.

现在把 A 考虑进来.如果 A 负于 B 或负于 $C_1,C_2,\cdots,C_m$ 之一,则 B 即为所求.否则,A 必全胜 B 及 $C_1,C_2,\cdots,C_m$,从而 A 为所求.

[证 3] 设想在循环赛结束之后,将全体参赛者都集中在礼堂里.首先请其中一位运动员 A_1 出去并带走他战胜的所有运动员.当然,如果 A_1 一场未胜,那么仅只他一人出去.但如果他带走了全部运动员,那么他即为所求.如果 A_1 带走一批人之后礼堂里还有运动员,我们就再请其中一位运动员 A_2 出去并带走他所战胜的所有运动员.这样进行下去,直到最后运动员 A_m 从礼堂出去并带光礼堂中所有运动员为止(当然可能 A_m 出去时只是他自己一人).这样,A_m 即为所求.

事实上,因为 $A_1,A_2,\cdots,A_{m-1}$ 出去时都没有带走 A_m,所以 A_m 战胜 $A_j,j=1,2,\cdots,m-1$.其他被带出去的运动员都负于带他们出去的人.所以,每个运动员都是 A_m 的手下败将或者是负于 A_m 的某个手下败将.

6·28 在某次体育比赛中,每两名选手都进行一场比赛,每场比赛一定决出胜负,通过比赛确定优秀选手.选手 A 被确定为优秀选手的条件是:对任何其他选手 B,或者 A 胜 B,或者存在选手 C,使得 A 胜 C,C 胜 B.如果按上述规则确定的优秀选手只有 1 名,求证这名选手一定全胜所有其他选手.

(第 2 届中国中学生数学冬令营,1987 年)

[证 1] 先证必存在优秀选手.因参赛选手有限,故必存在胜场次数最多的选手.设 A 是胜场次数最多的选手之一.若 A 胜所有其他选手,当然是优秀选手.若不然,设 A 胜 $B_1,B_2,\cdots,B_k$,而负于 $B_{k+1},\cdots,B_n$.任取 $B_j(k+1\leqslant j\leqslant n)$,则他不能全胜 $B_1,\cdots,B_k$,否则他比 A 至少多胜一场.因此必存在 $B_i(1\leqslant i\leqslant k)$,使得 A 胜 B_i,B_i 胜 B_j(以下称之为 A 间接胜 B_j).由 B_j 的任意性即知 A 为优秀选手.

再证优秀选手若惟一,则他必全胜所有其他选手.设 A 是惟一优

秀选手.若 A 不全胜所有其他选手,设 A 胜 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 而负于 $B_{k+1},\cdots,B_n,k<n$.由前段证明知 $B_{k+1},\cdots,B_n$ 中有局部优秀选手,即这组选手中的优秀选手,设为 B_m.对任何 $B_i(1\leqslant i\leqslant k)$,都有 B_m 胜 A,A 胜 B_i,即 B_m 间接胜 B_i.从而 B_m 也是优秀选手,矛盾.由此可知,A 必全胜所有其他选手.

[**证 2**] 设想比赛结束后所有选手齐聚体育馆,并让惟一的优秀选手 A 领着他的手下败将一起退场.我们证明,这时场内不再有任何选手.若不然,则场内还剩有一些选手.按已知,这些选手都胜 A.于是可以断言,这些选手中无该范围内的全胜者(仅剩 1 名选手时也把他视为全胜者).否则该全胜者也是一名优秀选手.在场内任取选手 B 并让他领着他的所有手下败将一起退场,于是场内必还剩有选手.同理可知,场内余下的选手中仍无该范围内的全胜者.于是又可让一名选手 C 领着他的所有手下败将一起退场,且场内仍然剩有选手.不难看出,这样的程序可以无限进行下去,此与参赛选手仅有有限多人矛盾.这就证明了优秀选手 A 退场时一定领走了所有选手,即它战胜了所有其他选手.

6·29 在一个有 n 名选手参加的循环赛(每一对选手赛一场,胜者得 1 分,负者得 0 分)中,没有平局,由各选手赢得的分数分别是 $s_1,s_2,\cdots,s_n$.求证有某三名选手 A,B,C,使得 A 胜 B,B 胜 C,C 胜 A 的情况存在的充要条件是

$$s_1^2+s_2^2+\cdots+s_n^2<\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

(第 18 届美国普特南数学竞赛,1958 年)

[**证**] 对任意一次竞赛的结局 T,令

$$U(T)=s_1^2+s_2^2+\cdots+s_n^2.$$

(1) 如果在整个比赛过程中不出现三个选手 A 胜 B,B 胜 C,C 胜 A 这样的情况,这种比赛的结局我们称之为可以传递的.

在这种情况下,我们可以给选手编号为

$$P_1,P_2,\cdots,P_n,$$

并且当且仅当 $i>j$ 时,P_i 胜 P_j.于是这 n 名选手的得分分别是

$$0,1,2,\cdots,n-1.$$

因而在这种传递的情况下有

$$\begin{aligned}U(T) &= s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_n^2 \\ &= 0^2 + 1^2 + \cdots + (n-1)^2 \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.\end{aligned}$$

因此给定的条件是充分的.

(2) 现在考虑竞赛的一个非传递性结局,即存在三个选手 A,B,C 使得 A 胜 B, B 胜 C, C 胜 A.

我们假定 A 在 A,B,C 中得分最少,即

$$s_A = \min\{s_A, s_B, s_C\}.$$

由 $s_A \leqslant s_B$,我们可以颠倒 A 与 B 之间的比赛的胜负,这样就得到一个新的结局,这时 A 的得分为 $s_A - 1$, B 的得分为 $s_B + 1$,其他选手的得分不变. 从

$$\begin{aligned}&(s_A - 1)^2 - s_A^2 + (s_B + 1)^2 - s_B^2 \\ =& 2(s_B - s_A) + 2 \\ >& 0\end{aligned}$$

可以看出, $U(T)$ 增加了,于是任意非传递性的结局能使得 $U(T)$ 增加,但这不能永远改变下去,因为可能结局的数目是有限的,所以从一个非传递性结局开始,经过有限次改变之后,结局成为传递性的,此时 $U(T)$ 增加到 $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

于是对于一个非传递性结局有

$$U(T) < \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

因而给定的条件是必要的.

6·30 有一种体育竞赛共含 M 个项目,有运动员 A,B,C 参加,在每一项目中,第一、二、三名分别得 p_1,p_2,p_3 分,其中 p_1,p_2,p_3 为正整数,且 $p_1 > p_2 > p_3$. 最后 A 得 22 分, B 与 C 均得 9 分, B 在百米赛中取得第一.

求 M 的值,并问在跳高中谁得第二名?

(第 18 届加拿大数学奥林匹克,1986 年)

[解] 考虑到每个人所得的总分数,可有

$$M(p_1 + p_2 + p_3) = 22 + 9 + 9 = 40.$$

由 p_1, p_2, p_3 为正整数，且 $p_1 > p_2 > p_3$ 可得

$$p_1 + p_2 + p_3 \geqslant 1 + 2 + 3 = 6,$$

从而有

$$6M \leqslant 40,$$

$$M \leqslant 6.$$

又由题设可知，至少有百米赛和跳高这两个项目，从而又有

$$M \geqslant 2.$$

此外，M 也应是 40 的约数.

于是，M 只可能取 2,4,5 三个值.

(1) 当 $M = 2$ 时，我们看 B 的总分 9，则

$$9 \geqslant p_1 + p_3,$$

从而

$$p_1 \leqslant 8.$$

因此，如果 A 拿两个第 1，则 A 的总分将不大于 16，不可能到 22 分，因此 $M \neq 2$.

(2) 当 $M = 4$ 时，我们仍看 B 的总分 9，则

$$9 \geqslant p_1 + 3p_3,$$

鉴于 $p_3 \geqslant 1$，所以 $p_1 \leqslant 6$.

若 $p_1 \leqslant 5$，那么四项比赛都得第一也至多得 20 分，与 A 得 22 分矛盾.

所以 $p_1 = 6$，此时有

$$4(6 + p_2 + p_3) = 40,$$

$$p_2 + p_3 = 4.$$

又因为 $p_2 \neq p_3$，所以 $p_2 = 3, p_3 = 1$.

由于 B 已取得百米赛第一，所以 A 至多得 3 个项目的第一，此时 A 最多得分

$$3p_1 + p_2 = 18 + 3 = 21 < 22,$$

出现矛盾.

因此 $M \neq 4$.

(3) 当 $M = 5$ 时，这时由

$$5(p_1 + p_2 + p_3) = 40,$$

可得

$$p_1 + p_2 + p_3 = 8.$$

若 $p_3 \geqslant 2$，则由 $p_1 > p_2 > p_3$ 可得

$$p_1 + p_2 + p_3 \geqslant 4 + 3 + 2 = 9.$$

与 $p_1 + p_2 + p_3 = 8$ 矛盾.

于是只能有 $p_3 = 1$.

此外 p_1 不能小于或等于 4，否则五场比赛至多得 20 分，与 A 得 22 分矛盾.

于是 $p_1 \geqslant 5$.

如果 $p_1 \geqslant 6$，那么 $p_2 + p_3 \leqslant 2$，由 $p_2 \neq p_3$ 可知，这是不可能的.

所以 $p_2 + p_3 \geqslant 2 + 1 = 3$，

于是只能有 $p_1 = 5$，此时只有 $p_2 = 2, p_3 = 1$.

由此可见，A 一定得了四项第一，一项第二，此时

$$4p_1 + p_2 = 4 \times 5 + 2 = 22.$$

B 有一项第一，为使 B 得 9 分，则有四项第三，此时 $p_1 + 4p_3 = 5 + 4 \times 1 = 9$.

于是 C 有四项第二，一项第三，此时 $4p_2 + p_3 = 9$.

由此可知 A 的百米第二，C 的百米第三，在其余的项目中，C 是第二. 因此在跳高比赛中 C 得第二名.

6·31 甲乙两队各出 7 名队员按事先排好的顺序出场参加围棋擂台赛. 双方先由 1 号队员比赛，负者被淘汰，胜者再与负方 2 号队员比赛，…，直到有一方队员全被淘汰为止，另一方获胜，形成一种比赛过程. 问所有可能出现的比赛过程的种数是多少？

（中国高中数学联赛，1988 年）

[解] 按题意，一次擂台赛最多可赛 13 盘，若甲队胜，必胜 7 盘，故一切可能出现的过程共有 C_{13}^7 种. 若乙队胜亦然. 所以，总共有

$$2C_{13}^7 = 3432$$

种.

6·32 5 个人玩扑克牌，每次总是两人对两人，每个人都想和其他 4 人中的每个人合作玩一轮，即打对家两次. 试问他们共需玩多少轮？试排出一种方案来.

（第 18 届莫斯科数学奥林匹克，1955 年）

[解] 每个人都与另外 4 人各合作玩一轮，共玩 4 轮. 5 个人共玩 20 轮，打对家 40 次（包括重复计数）. 每次都有 4 人参加，即每次都被计

数 4 次,故共需玩 10 次,即 5 轮.

5 人的玩牌程序可以安排如下:

m_1m_2 对 m_4m_5,m_1m_2 对 m_3m_5,m_2m_4 对 m_3m_5,
m_1m_3 对 m_2m_4,m_1m_3 对 m_4m_5,m_1m_4 对 m_2m_5,
m_1m_4 对 m_2m_3,m_1m_5 对 m_2m_3,m_1m_5 对 m_3m_4,
m_2m_5 对 m_3m_4.

6·33 8 个人参加象棋循环赛,规定胜者得 1 分,平者得 0.5 分,负者得 0 分.已知 8 人的得分互不相同且第二名棋手的得分是后 4 名棋手得分的总和.问第三名棋手和第七名棋手之间的比赛结果如何?

(第 3 届全俄数学奥林匹克,1963 年)

[解] 因为后 4 名棋手之间共进行 6 场比赛,所以他们得分之和不少于 6 分,从而第二名得分不少于 6 分.另一方面,如果第一名得 7 分,则他战胜了第二名,于是第二名只能得 6 分;如果第一名得 6.5 分,则因得分互不相同,故第二名也只能得 6 分,从而后 4 名棋手得分之和也是 6 分,这意味着他们在与前 4 名的比赛中场场皆负.特别地,第七名负于第三名.

6·34 某次象棋比赛有两名七年级学生和一些八年级学生参加.每两名参赛者都比赛一局,胜者得 1 分,负者得 0 分.若为和局,则各得半分.现知两名七年级学生共得 8 分,而所有八年级学生所得的分数都彼此相同.求参加象棋比赛的八年级学生的人数.

(第 9 届莫斯科数学奥林匹克,1946 年)

[解] 显然,参赛者的得分都是整数或半整数(即都是 0.5 的整数倍).八年级学生自己之间进行比赛所得分数的平均值当然是整数或半整数,故他们与两名七年级学生比赛所得分数的平均值亦应如此.

两名七年级学生共得 8 分,二人之间的比赛共得 1 分,故二人在与八年级学生的比赛中共得 7 分.

设八年级共有 n 名学生参赛,于是他们在与两名七年级学生的比赛中共得 $2n-7$ 分,平均值为

$$\sigma=\frac{2n-7}{n}=2-\frac{7}{n}.$$

为使 σ 为整数或半整数,$\frac{7}{n}$ 应为整数或半整数,而这又当且仅当 $n=7$

或14时才如此.当 $n=7$ 时八年级学生平均每人得4分;当 $n=14$ 时,八年级学生平均每人得8分.容易举例说明,两种情形都可以存在,故知参赛的八年级学生人数为7或14.

6·35　设有5位象棋选手参加一次比赛,已知任何两人都比赛一局,5人得分互不相同,并且

(1) 第1名没有和局;

(2) 第2名没有负局;

(3) 第4名没有胜局.

试写出所有对局的结果.

(基辅数学奥林匹克,1969年)

[解]　设比赛结束时五人 A,B,C,D,E 的得分分别为 $a>b>c>d>e$(胜1局得1分,和1局得0.5分,负1局得0分).显然,每位棋手共弈4局,整个比赛共10局,5人得分之和为10分.

因为 A 没有和局,B 没有负局,所以 B 胜 A.因此 $a\leqslant 3$.由于 B 已胜1局,而其他3局中没有负局,故 $b\geqslant 2.5$.又因 $a>b$,故 $a=3,b=2.5$,且 B 与 C,D,E 都是和局.

再考察 C,D,E 的对局结果.由(3)知 D 没有胜局且已负于 A 1局,故 $d\leqslant 1.5$.若 $d=1.5$,则由 $d<c<b$ 可知 $c=2$.这样,$e=1$.对弈的结果是 C 胜 E,D 与 C,E 都是和局.若 $d<1.5$,因 $d>e\geqslant 0.5$,故 $d=1$.从而由 $e<d=1$ 便知 $e=0.5$.故知 $c=10-a-b-d-e=3>b$,矛盾.

综上可知,对局结果是 A 战胜 C,D,E,B 胜 A,C 胜 E,其余5局均为和局.

6·36　象棋比赛中每两名选手都比赛一场.试证可将所有选手编号,使得每人都未曾败于他下面一号的选手.

(第25届莫斯科数学奥林匹克,1962年)

[证]　我们对人数 n 进行归纳.当 $n=2$ 时,结论显然成立.

设当 $n=k$ 时结论成立.当 $n=k+1$ 时,从选手中先去掉1人,于是按归纳假设可将其余 k 人按要求排好次序.然后,把方才去掉的1人请回,并把他排在队伍中战胜他的最后一名选手的后面.当然,如果他一场未负,就把他排在最前面.这种编号法显然满足题中要求.

6·37　有 n 位选手参加象棋比赛,计分方法是:每局比赛胜者得2

分,负者得0分,平局各得1分.比赛中途的积分表上得分最多者得了k分.

证明这时至少有一位选手比赛局数不多于k.

(第6届祖冲之杯初中数学邀请赛,1993年)

[证] 设这时所有选手得分之和为S.由题意知$S \leqslant kn$.

假设这时比赛局数最少的人赛过的局数为m.这时赛过的总局数应不少于$\frac{mn}{2}$.

由于每赛一局总分增加2分,所以

$$S \geqslant 2 \cdot \frac{mn}{2} = mn.$$

从而
$$kn \geqslant S \geqslant mn.$$

即
$$m \leqslant k.$$

即至少有一位选手比赛局数不多于k.

6·38 25名棋手参加一次象棋比赛,他们的实力各不相同,每次对弈都是强者取胜.问最少需要比赛多少场,才能从中确定出两名实力最强的选手来?

(第18届莫斯科数学奥林匹克,1955年)

[解] 既然25名选手实力各不相同且每场对弈都是强者取胜,所以凡在比赛过程中负一场者,都不是最强的选手.为使比赛场数尽可能少,比赛应按淘汰制进行.于是在赛了24场之后,就确定出实力最强的选手A.

25名选手进行淘汰赛,共要进行5轮.选手A至多出场5次,战胜了5名选手.实力居第二位的选手必在这5人之中.这5名选手再进行淘汰赛来选出最强选手,共需赛4场.所以,确定两名实力最强的选手最少要赛28场.

6·39 象棋比赛中,每两名选手之间都恰好比赛一局,胜者得1分,负者得0分,平局时各得$\frac{1}{2}$分.比赛结束后发现,每位选手所得的分数中恰好有一半是在他同10名得分最低的选手的对局中得到的(10名得分最低的选手所得分数的一半是在他们彼此对局中得到的),求参加比赛的选手总数.

(第3届美国数学邀请赛,1985年)

［解］ 设共有 n 名选手参加比赛.我们把 10 名得分最低的选手称为“败者”,其余的 $n-10$ 名选手称为“胜者”.

按已知,n 名选手之间共赛 $C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$ 局,所以 n 名选手得分之和为 $\frac{1}{2}n(n-1)$.

再分别计算败者与胜者的得分之和.10 名败者彼此对局共得 $C_{10}^2=45$ 分.因为这是他们所得分数的一半,所以他们得分总数为 90.

$n-10$ 名胜者彼此之间的对局共得分数为

$$C_{n-10}^2=\frac{1}{2}(n-10)(n-11),$$

这也是他们得分之半,所以他们得分总数为 $(n-10)(n-11)$.于是有

$$\frac{1}{2}n(n-1)=90+(n-10)(n-11),$$

$$n^2-41n+400=0.$$

解得 $n_1=25,n_2=16$.

如果共有 16 名选手参赛,则共有 6 名胜者.他们的得分总数为 $2C_6^2=30$,平均每人得 5 分.而 10 位败者却平均每人得 9 分,此不可能.所以,参加比赛的选手总数为 25 名.

6·40 一批象棋选手共 n 个人($n\geqslant3$),欲将他们分成三组进行比赛,同一组中的选手都不比赛,不同组的每两名选手都要比赛一盘.

试证要想总的比赛盘数最多,分组时应使任何两组间的人数至多相差一人.

（中国北京市数学竞赛,1984 年）

［证］ 设比赛盘数最多的分组法是三个组的人数分别为 r 人,s 人和 t 人.

$$r+s+t=n.$$

此时比赛的总盘数是

$$rs+st+tr \text{ 盘}.$$

假设比赛盘数最多的分组法,任何两组人数至多相差 1 人不成立,则至少能找到某两个组,这两组的人数之差不小于 2,不妨设

$$r-t\geqslant2.$$

我们将人数为 r 的组取出 1 人放到人数为 t 的组中,这样三组人数

分别为

$$r-1, s, t+1.$$

这时总共比赛盘数为

$$\begin{aligned}&(r-1)s+s(t+1)+(r-1)(t+1)\\=&rs+st+tr+r-t-1\\\geqslant&rs+st+tr+2-1\\>&rs+st+tr.\end{aligned}$$

这与按 r,s,t 分组比赛盘数最多的假设矛盾.

6·41　在某次象棋比赛中,每位选手所得的分数的一半都是在与最后 3 名选手对弈时取得的.问共有多少人参加了这次比赛?

（第 23 届莫斯科数学奥林匹克,1960 年）

[解]　最后 3 名选手之间比赛 3 场,共得 3 分.因为这是他们所得总分的一半,所以他们 3 人在与前几名比赛时还要得 3 分.

设共有 n 名选手参赛.于是前 $n-3$ 名选手之间共赛 C_{n-3}^2 场,共得 C_{n-3}^2 分.按已知,这是前 $n-3$ 名选手得分的一半.另一半是从与后 3 名的比赛中得到的.

前 $n-3$ 人与后 3 人之间共赛 $3(n-3)$ 场,共得 $3(n-3)$ 分,故有

$$3(n-3)-3=C_{n-3}^2=\frac{1}{2}(n-3)(n-4).$$

解得 $n=9$.

当有 9 个人参加比赛时,可使前 6 人中任何两人都战平,后 3 人中也是 3 场皆平.在前 6 人与后 3 人的比赛中,1,2 两人胜 7,8 平 9,3,4 两人胜 8,9 平 7,5,6 两人胜 9,7 平 8.于是前 6 人每人各得 5 分,后 3 人各得 2 分,且每人得分的一半是在与后 3 人对弈时取得的.

综上可知,共有 9 名选手参加比赛.

6·42　12 名选手参加一次象棋比赛,赛后每人都开列了 12 份清单.在第 1 份清单上都只写出他本人的名字;在第 2 份清单上则都写出本人和他所战胜过的所有对手的名字;在第 3 份清单上则都写出第 2 份清单上的所有名字及这些人所战胜过的所有对手的名字;如此继续下去,直到在第 12 份清单上,都写出了第 11 份清单上的所有名字及他们所战胜过的所有对手的名字.已知对于每一名参赛选手,在他的第 12 份清单上都有他的第 11 份清单上所没有出现过的名字.问比赛中一共

有多少场平局?

（第 31 届莫斯科数学奥林匹克，1968 年）

[解] 因为每人的第 12 份清单上都有他的第 11 份清单上所没有的新名字，故知每人的 12 份清单都各不相同. 事实上，若某人的 12 份清单中有某两份相同，则从这两份中较前的一份开始往后的清单全都相同，特别地有第 11 份与第 12 份相同，矛盾.

既然 12 份清单互不相同，故从第 2 份起，每份清单上的名字都至少比前一份清单多 1 个. 于是第 12 份清单上至少有 12 人. 但总共只有 12 人，故每人的每份清单都恰比他自己的前一份清单多 1 人. 不难看出，每份清单所多的 1 人恰是上一份清单中所多的 1 人战胜的对手. 由此可知，12 名选手每人恰胜 1 场. 因而比赛中的平局数为 $C_{12}^2 - 12 = 66 - 12 = 54$ 场.

6·43 在一次有 $n \geqslant 5$ 名选手参加的象棋循环赛中已赛过 $\left[\frac{n^2}{4}\right] + 2$ 盘.

(1) 求证其中有 5 名选手 a, b, c, d, e，他们之间已赛过如下 6 盘：ab, ac, bc, ad, ae, de.

(2) 若仅赛过 $\left[\frac{n^2}{4}\right] + 1$ 盘，上述结论是否仍然成立?

（第 28 届国际数学奥林匹克候选题，1987 年）

[解] 用 n 个点来代表 n 名选手，且当两人已赛一场时，就在相应两点间连一条线，于是得到一个有 n 个顶点和 $\left[\frac{n^2}{4}\right] + 2$ 条边的图. 问题化为图中存在两个三角形恰有 1 个公共顶点.

(1) 当 $n = 5$ 时，$\left[\frac{n^2}{4}\right] + 2 = 8$. 8 条边有 16 个端点，故由抽屉原理知必有 1 点 A 引出 4 条线，即它与另外 4 点均有线相连. 这时，另外 4 点之间还有 4 条边，其中必有两条边没有公共顶点. 设这两条边是 BC 和 DE，则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 即为所求.

设命题对 $n-1$ 成立. 考察 n 个顶点的情形. 若有 1 点 A 引出的边数不超过 $\left[\frac{n}{2}\right]$，则去掉这点后，其余 $n-1$ 个顶点间的边数不少于

$$\left[\frac{n^2}{4}\right] + 2 - \left[\frac{n}{2}\right] = 2 + \left[\frac{(n-1)^2}{4}\right],$$

于是由归纳假设知命题成立.以下设每点引出的边数都不小于$\left[\frac{n}{2}\right]+1$.当 $n=2k$ 时,图中的总边数

$$S \geqslant k(k+1) > k^2+2=\left[\frac{n^2}{4}\right]+2,$$

矛盾.当 $n=2k+1$ 时,

$$S \geqslant \frac{1}{2}(2k+1)(k+1)=k(k+1)+\frac{1}{2}(k+1) \geqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]+2,$$

其中等号仅当 $k=3$ 时成立.这时 $n=7$,每个顶点恰好都引出 4 条边,共 14 条边.下面就这种情形给出证明.

从图中任取一条线段 AB.因为点 A 和 B 各向另外 5 点引出 3 条边,故存在点 C,使边 AC,BC 都存在,即存在 $\triangle ABC$.因每点都引出 4 条边,故 A,B,C 3 点中每点都向另 4 点引出 2 条边.由此可知,另 4 点 D,E,F,G 之间恰有 5 条边,它们当然构成两个三角形,记为 $\triangle DEF$ 和 $\triangle DEG$.这样一来,点 G 向前 3 点引出两条边,不妨设为 GA 和 GB.于是 $\triangle DEG$ 与 $\triangle ABG$ 即为所求.这就完成了(1)的证明.

(2) 当图中边数为$\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$时,结论不再成立.这时,将 n 个点分成两个子集 M_1 和 M_2,点数分别为$\left[\frac{n+1}{2}\right]$和$\left[\frac{n}{2}\right]$.将异组的每两点间都连一条线,则共有$\left[\frac{n^2}{4}\right]$条边.然后取 $A,B \in M_1$ 并连结 AB,则图中共有$\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$条边和$\left[\frac{n}{2}\right]$个三角形,但任何两个三角形都以 AB 为公共边.可见,(1)中结论不再成立.

6·44 A,B,C 三国进行围棋擂台赛,每队 9 人.规则如下:每场由两队各出 1 人比赛,胜者守擂,负者被淘汰,并由另一队派 1 人攻擂.首先由 A,B 两队各派 1 人开始比赛并依次进行下去,若有某队 9 人已全部被淘汰,则剩下的两队继续比赛,直到又有一队全部被淘汰为止.最后一场比赛的胜者所在队为冠军队.回答以下问题并说明理由:

(1) 冠军队最少胜多少场?

(2) 如果比赛结束时,冠军队胜了 11 场,那么整个比赛最少要进行多少场?

(中国国家集训队选拔考试,1996 年)

[**解**] (1) 由于 A,B 两队先进行比赛,然后是胜者与 C 队比赛,故只须考虑 C 队为冠军队的情形.这样一来,到比赛结束时,A,B 两队各负 9 场而 C 队至多负 8 场.

我们称 A 队与 B 队各 1 人的对局为 AB 对局而称 A 或 B 队与 C 队各 1 人比赛并以 C 队负的对局为 C 对局.按比赛规则,除第 1 场的 AB 局外,其他每场 AB 局的前一场必为 C 局.因为 C 局至多 8 场,故 AB 局至多 9 场,即 A 负于 B 及 B 负于 A 的场次至多 9 场.因 A 和 B 两队共负 18 场,所以 C 队至少胜 9 场.

如果比赛的前 17 场都是 A_1 胜,则 B 队 9 人全负而 C 队前 8 人全负.从第 18 场起 C_9 连胜 A 队 9 人,则 C 队为冠军且共胜 9 场.

综上可知,冠军队最少胜 9 场.

(2) 与前一样,只须考虑 C 为冠军队的情形.因为 A,B 两队共负 18 场,其中有 11 场是负于 C 队,所以 AB 局共有 7 场.从而 C 局至少 6 场,即 C 队至少负 6 场.比赛至少要进行 24 场.

如果比赛的前 13 场是 A_1 连胜,则 $B_1,B_2,\cdots,B_7$ 和 $C_1,C_2,\cdots,C_6$ 全负.从第 14 场 A_1 与 C_7 对局开始 C_7 连胜 A 队 9 人及 B_8,B_9 共 11 人而结束,易见共赛 24 场且 C 队胜 11 场而获冠军.

综上可知,冠军队共胜 11 场时,比赛最少要进行 24 场.

6·45 来自 5 个年级的 30 名学生参加抢答 40 个问题,每名学生都至少答出 1 道题,每两个同年级的学生都答出了同样数目的问题,而每两个不同年级的学生所答出的问题数都不相同.问有多少人只解答出 1 个问题?

(第 23 届莫斯科数学奥林匹克,1960 年)

[**解**] 30 名学生每人答出 1 道题,共 30 题.5 个年级的学生,年级不同答出的问题数也不相同,他们答出问题数至少为 5,4,3,2,1.但当解出 5,4,3,2 题的人各有 1 人时,共已解出 14 题.所以,有 26 人只解答出 1 个问题.

6·46 某区学生若干人参加数学竞赛,每个学生的得分都是整数,总分为 8250,前三名的分数分别为 88,85,80,最低是 30 分,得同一分数的学生不超过 3 人.问最少有多少学生得分不低于 60 分(包括前三名)?

(中国全国数学竞赛,1979 年)

[解] 除了前三名之外，得分均在30—79之间，总分为$8250-(88+85+80)=7997$. 为使及格人数最少，应使不及格的人数最多，以便在总分中占去最多的分数. 因已知得同一分数的学生至多3人，故可使得30，31，…，59分的人数各有3人. 这些人所得的总分为

$$3\times(30+31+\cdots+59)=4005,$$

余下的总分为$7997-4005=3992$，这些分数应分配给得60—80分的人. 假定得80分的除一个第三名外还有两人，得60—79分的各有3人，总分应为

$$2\times80+3\times(60+61+\cdots+79)=4330.$$

而$4330-3992=338$. 为使人数最少，应使去掉的人数最多，他们的总分为338. 首先去掉三个60分，还余158分，这时只能再去掉两人，不妨设去掉两个79分. 最后得到，最少有60人得分不低于60分(其中包括前三名).

6·47 数学奥林匹克评判委员会决定，让每一位参赛者都按竞赛结果对应1个自然数，使得只要根据这个自然数即可知道他各题所得的分数，且总分高的人所对应的自然数也大. 试帮助评判委员会解决这个问题(即给出具体的对应办法).

(第47届莫斯科数学奥林匹克，1984年)

[解] 假设有6道试题，每道题8级计分：0，1，2，…，7. 使每位参赛者对应于1个8位数(首位可能为0)：前两位为总得分，后6位数依次为从1题到6题的得分. 这样的自然数显然满足题中要求.

6·48 学校中有$2n$门课程，所有学生的成绩都是优或良. 任何两名学生的成绩都不全相同且无法说一名比另一名好(所谓一名学生的成绩比另一名好是指任何一门成绩都不比另一人差而且至少有一门成绩比后者好)，求证该校中的学生人数不超过C_{2n}^{n}.

(第21届莫斯科数学奥林匹克，1958年)

[证] 显然，一名学生的成绩被他在哪些门课程得优所惟一确定，因为其余成绩都是良.

设有一个$2n$元的集合M. 对任何一名学生，若他的第i门课为优，就把M中第i个元素取出来，于是每个学生的成绩都对应于M的一个子集. 任何两名学生的成绩都不全相同且无法说一名比另一名成绩好就意味着二人所对应的子集不同且互不包含. 于是问题化为集合M的

这样一组子集的个数不超过 C_{2n}^{n}.

设 S 是集 M 的互不包含的子集的个数最多的集合. S_i 是 S 中恰含 i 个元素的集合,使 S_i 非空的 i 的最小值为 r,最大值为 t.

若 $t > n$,设 L 是由 S_t 中的子集去掉一个元素后所能得到的一切子集的集合,则 L 中的子集都是 $t-1$ 元的. S_t 中的每个子集恰含 L 中的 t 个子集(即依次去掉 t 元子集中一个元素所得到的 t 个子集),而 L 中的每个子集,至多包含于 S_t 中的 $2n+1-t$ 个子集中.因此有

$$(2n+1-t)|L| \geqslant t|S_t|.$$

由此可得

$$|L| \geqslant \frac{t}{2n+1-t}|S_t| \geqslant \frac{n+1}{n}|S_t| > |S_t|.$$

此外,我们指出 $L \cap (S - S_t) = \varnothing$.事实上,若有 $S_i(i < t)$ 中的某子集含于 L 中某子集中,则 M_i 中的这一子集必含于 S_t 中的某子集中,此与已知矛盾.

这样一来,若令

$$S' = (S - S_t) \cup L,$$

则 S' 中的诸子集也互不包含且 $|S'| > |S|$,此与 $|S|$ 最大相矛盾,故必有 $t \leqslant n$.

类似地可以证明, $r \geqslant n$.从而知 S 中的所有子集都是 n 元子集.又因 $|S|$ 最大,故 $|S| = C_{2n}^{n}$.

6·49 五名学生 A, B, C, D, E 参加一次竞赛,甲乙二人在场外猜测比赛的结果.甲猜测比赛结果的名次顺序是 $ABCDE$.但他既未猜对任何一名参赛者的名次,也未猜对任何一对相邻的参赛者的顺序(相邻指名次紧挨着).乙猜测比赛结果的顺序是 $DAECB$.这一猜测要准确得多,他不但猜对了两个参赛者的名次,而且还猜对了两对相邻的参赛者的顺序.问比赛结果的名次顺序如何?

(第 5 届国际数学奥林匹克,1963 年)

[解] 容易看出,应从乙猜测的结果入手.对此,我们证明一个更一般的结果:

引理 如果5个元素的两个排列 $ABCDE$ 和 $FGHIJ$ 中恰有两个元素处于相同位置且恰有两对相邻元素具有相同的顺序,则两个相同位置的元素必在一端,即或者 $A=F, B=G$,或者 $D=I, E=J$.

若不然,则或者位置相同的两个元素相邻而不在一端,或者二者不相邻.若出现前一种情形,不妨设 $B=G,C=H$,则另一对顺序不变的相邻元素无论是 AB,CD 还是 DE,都导致至少有3个元素位置相同,矛盾.若位置相同的两个元素不相邻,则二者至少有一个是两对顺序不变的相邻元素中的一个元素,从而至少有 3 个元素位置相同,矛盾.

让我们回到题目的求解上来.由乙的猜测结果及上述引理知,比赛的结果必为下列 4 种情形之一:

$$DACBE, DABEC, EDACB, AEDCB.$$

因为 $DACBE$ 与 $ABCDE$ 有 C,E 相同,$AEDCB$ 与 $ABCDE$ 有 A 相同,故都不可能是比赛的结果.而 $DABEC$ 与 $ABCDE$ 有一对元素 AB 有相同顺序,所以也不可能是比赛结果.从而知比赛的结果的名次顺序是 $EDACB$.

6·50 一次考试中共有 4 道选择题,每题都有 3 个选择支.一群学生参加考试,结果是对于其中任何3个人,都有1道题,使他们的答案互不相同.问最多有多少名学生参加考试?

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)

[解] 首先考虑如下的问题:若这群学生中必有 3 名学生,使对每道试题,3 人中都至少有 2 人答案相同,至少应有多少名学生参加考试?

显然,只要有 4 人参加考试,便可确保有两人对第1题的答案相同.其次,只要有 5 人参加,便可保证有 4 人对第 2 题的答案只有两种不同,从而可选出 3 人,使他们对第 1,2 两题的答案都至多有两种不同.再次,由抽屉原理知,只要有 7 人参加,便可保证其中有 5 人对第 3 题的答案只有两种不同.最后,由抽屉原理知,只要有 10 人参加考试,便可确保有 7 人对第 4 题的答案只有两种不同.从而从中必可选出 3 人,对每道题的答案都至多有两种.这表明参加考试的人数至多 9 人.

对于 9 人参加考试的情形,下表给出满足要求的答卷方案:

题＼人	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	2	2	2	3	3	3
2	1	2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	2	3	1	3	1	2
4	1	2	3	3	1	2	2	3	1

综上可知,最多有 9 人参加考试.

6·51　一次考试中共有 49 名学生解答 3 道题，每题的得分都是从 0 到 7 的整数. 求证必有两名学生 A 和 B，使对每道题目，A 的得分都不少于 B 的得分.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题，1988 年）

［证］　将每个学生对应于平面上的一个整点 (i,j)，其中 i 和 j 分别为该生在前两题的得分，于是 $0\leqslant i,j\leqslant 7$. 若存在两名学生对应于同一个整点，则问题就解决了，故以下设 49 名学生所对应的整点互不相同.

令

$$M_1=\{(i,j)\mid 0\leqslant i\leqslant 7, j=0 \text{ 或 } i=7, 1\leqslant j\leqslant 7\},$$
$$M_2=\{(i,j)\mid 0\leqslant i\leqslant 6, j=1 \text{ 或 } i=6, 2\leqslant j\leqslant 7\},$$
$$M_3=\{(i,j)\mid 0\leqslant i\leqslant 5, j=2 \text{ 或 } i=5, 3\leqslant j\leqslant 7\},$$
$$M_4=\{(i,j)\mid 0\leqslant i\leqslant 4, j=3 \text{ 或 } i=4, 4\leqslant j\leqslant 7\},$$
$$M_5=\{(i,j)\mid i=0,1; 4\leqslant j\leqslant 7\},$$
$$M_6=\{(i,j)\mid i=2,3; 4\leqslant j\leqslant 7\}.$$

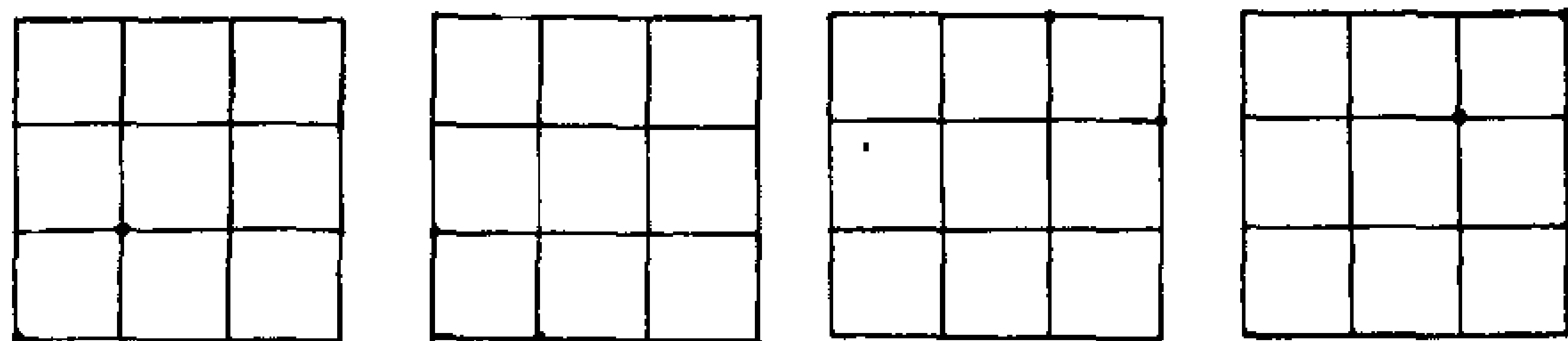
49 个整点分别属于上述 6 个集合，由抽屉原理知其中必有一个集合中含有 9 个整点. 因为 $|M_5|=|M_6|=8$，所以含有 9 个整点的集合必为前 4 个之一，记为 M.

因为 M 中包含有 9 名学生所对应的整点而每名学生在第 3 题的得分仅有 8 种不同情形，故由抽屉原理又知必有两名学生在第 3 题得分相同. 显然，这两名学生的得分情形便满足题中的要求.

6·52　某班学生一次考试，共有 3 道选择题，每题都有 4 个选择支. 已知一组学生的答案具有性质 P：任何两人的答案都至多有 1 题答案相同. 而且只要将这组学生再外加 1 人，无论这名学生答案如何，性质 P 都不再成立. 问这组学生最少有多少人？

（中国天津市代表队测验题，1991 年）

［解］　将每题的 4 个选择支编号为 0、1, 2, 3. 每人的答案写成三元数组 (i,j,k)，$i,j,k=0,1,2,3$. 于是全部 64 个可能的答案组恰为一个 $3\times3\times3$ 的正方体划分成 27 个单位正方体时的全部 64 个结点(包括顶点). 将正方体的 4 个有结点的平面(按第 3 分量的不同) 分别画出，并在其上标出所选结点如下：



易见,任何两个黑点都不在一条网格线上,但对任何另外1个结点,都有1个黑点和它在同一条网格线上.这就表明,当有8名学生,他们的答案分别为(0,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(3,2,2),(2,3,2),(2,2,3),(3,3,3)时,满足题中的全部要求.

另一方面,对于7名学生来说,他们的答案数组对应于立方体的7个结点.称之为黑点.由抽屉原理知,上图所示的4个平面中,总有1个平面上至多有1个黑点.这个平面上除黑点所在的两条网格线外(如果存在的话),至少还有9个结点.其他平面上的黑点至多7个,而每个黑点所在的网格线上至多有上述9点中的1点.从而还可从9点中选出1点,使第8名学生以它代表的答案加入前7人一起时,性质 P 照样成立.这意味着任何7人组都不满足题中全部要求.

综上可知,满足题中要求的这组学生最少有8人.

6·53　16名学生参加一次数学竞赛.考题全是选择题,每题有4个选择支.考完后发现任何两名学生的答案都至多有1道题相同,问最多有多少道考题?说明理由.

(中国国家集训队选拔试题,1992年)

[解1]　用16个点代表16名学生且当两名学生有1题的答案相同时将相应两点间连1条线.于是两点间至多有1条线且图中至多共有 $C_{16}^2=120$ 条线.

另一方面,对于第 i 题,设答案分别为1,2,3,4的人数依次为 m_1,m_2,m_3,m_4,则 $m_1+m_2+m_3+m_4=16$.于是由第 i 题答案相同而导致的连线条数为

$$C_{m_1}^2+C_{m_2}^2+C_{m_3}^2+C_{m_4}^2=\frac{1}{2}(m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2)-8$$

$$\geqslant\frac{1}{8}(m_1+m_2+m_3+m_4)^2-8=24.$$

因而当共有 n 题时,连线数至少为 $24n$,故有

$$24n \leqslant 120.$$

由此即知至多有 5 道考题.

当考题为 5 道时,下面表中的答案即满足题中的要求.这组答案是按字典排列法写出.

题＼人	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
2	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	1	2	3	4	2	1	4	3	3	4	1	2	4	3	2	1
4	1	2	3	4	3	4	1	2	4	3	2	1	2	1	4	3
5	1	2	3	4	4	3	2	1	2	1	4	3	3	4	1	2

综上可知,最多有 5 道考题.

[解 2] 由解 1 中所给出的表可知,试题可以有 5 道.

另一方面,由于对某题选相同答案的学生在其他题中均应选相异的答案,而每道题可供选择的答案只有 4 个,所以在每道题中选相同答案的学生都不能超过4人.又已知有16人,所以每道题的每个选择支都恰有 4 人选取.

因此,对于每个学生,每道题都有 3 人与其答案相同,且这些三人组互相间没有公共成员.这样,当有 n 道题时,就有 $3n$ 个人各有一题与其答案相同.由于 $3n \leqslant 15$,所以 $n \leqslant 5$.

综上可知,最多有 5 道考题.

6·54 一次数学竞赛分一试和二试两部分进行,两试共有28道试题.每一参赛者都恰好解出7道题,而且这28道题中的每两道题都恰好有两人都解出.试证必有一个参赛者,他在第一试中 1 道题也没有解出或者至少解出 4 道题.

(第 13 届美国数学奥林匹克,1984 年)

[证] 28 道试题可以组成 $C_{28}^2 = 14 \times 27$ 个不同的两题组.按已知,每个两题组恰有两人解出,于是共有28×27个人各解出1个两题组(包括重复计数).另一方面,设共有 n 个人参赛.由已知,每人解出 7 题,恰好解出 $C_7^2 = 21$ 个两题组.因而共有$21n$个人各解出1个两题组.从而有 $21n = 28 \times 27$,解得 $n = 36$,即共有 36 人参加此次竞赛.

若结论不成立,则每个参赛者在第一试中都解出 1 题,2 题或 3 题.

设第一试中共有 m 道题,解出其中1,2,3题的人数分别为 x,y,z,于是

$$x + y + z = 36. \quad ①$$

其次,每道题恰好出现在27个不同的两题组中,每组恰有两人解出,共有54人解出(包括重复计数).又因解出此题的人共解出7题,除此题之外还解出6题,所以每个人恰为6个含有此题的两题组的解题人,即在上述计数过程中每人恰被计数6次,故得知解出每道题的人数都恰好是9.从而又有

$$x + 2y + 3z = 9m. \quad ②$$

第一试的 m 道题中的每两题都恰被两人解出,这两人只能是在第一试中解出2题或3题之人,故又有关系式

$$y + 3z = 2C_m^2 = m(m-1). \quad ③$$

将①—③联立,并且[② - ①] × 3 - ③ × 2,得到

$$y = -2m^2 + 29m - 108 = -\left(m - \frac{29}{4}\right)^2 - \frac{23}{8} < 0,$$

此不可能,这就完成了全部证明.

6·55 21人参加一次考试,试卷共有15道是非题.已知每两人答对的题中至少有1道是相同的.问答对人数最多的题最少有多少人答对?说明理由.

(中国国家集训队选拔考试,1995年)

[解] 我们把答对同一道题目的两人称为一个"共题组".因为任何两人都至少共同答对1个题目,故至少有 $C_{21}^2 = 210$ 个共题组.

如果每题至多有5人答对,则每题至多导致10个共题组,从而共题组的总数不超过150个,矛盾.如果每题至多有6人答对,则至多可产生225个共题组.由此可知,所求的最小值不小于6.

若某人 A 至多答对3题,则因其余20人都至少要答对这3题中的1题,故由抽屉原理知,答对人数最多的题至少有8人答对.

若每人至少答对4题,则21人至少答对84题.若每题至多有6人答对,则15题共有90人次答对.由于 $90 = 21 \times 4 + 6$,所以答对4题的人数至少为15,答对至少5题的人数至多为6.

设 A 答对4题,为 a_1, a_2, a_3, a_4.按已知,其余20人中每人至少答对这4题之一.又因每题至多有6人答对,故知其余20人可均分成4组,第 i 组的5人答对 a_i 题而未答对另外3题,$i = 1,2,3,4$.这样一来,a_1,

a_2,a_3,a_4 都恰有 6 人答对.

由于至多有 6 人各答对至少 5 题,故由抽屉原理知上述 4 组中总有 1 组,它的 6 人中至多有 1 人答对至少 5 题,连同 A 在内的至少 5 人都各答对 4 题.由前段推导知,这 5 人除了共同答对的 1 题之外,每人答对的另 3 题,共 15 题互不相同.这导致至少共有 16 道不同题目,此不可能.故知所求的最小值至少为 7.

下表列出了 21 人答对题目的方案

(1,2,3,4)	(3,5,9,13)	(2,7,10,13)
(1,5,6,7)	(3,6,10,11)	(3,5,9,13)
(1,8,9,10)	(3,7,8,12)	(3,6,10,11)
(1,11,12,13)	(4,5,10,12)	(3,7,8,12)
(2,5,8,11)	(4,6,8,13)	(4,5,10,12)
(2,6,9,12)	(4,7,9,11)	(4,6,8,13)
(2,7,10,13)	(2,6,9,12)	(4,7,9,11)

易见,每两人都至少共同答对 1 道题且每题至多有 7 人答对.

综上可知,答对人数最多的题最少有 7 人答对.

6·56 在某项竞赛中,共有 a 名参赛选手与 b 位裁判员,其中 $b\geqslant 3$ 为奇数、每位裁判对每名选手的评分都只有"合格"与"不合格"两种,设 $k\in N$,任何两位裁判至多可对 k 名选手有完全相同的评分,求证 $\frac{k}{a}\geqslant\frac{b-1}{2b}$.

(第 39 届国际数学奥林匹克,1998 年)

[证] 当两位裁判对一名选手的评分相同时,称之为一个"相同评分对".下面对相同评分对的个数进行换序求和.

一方面,每名运动员都获得 b 位裁判的各一个评分.设第 i 名选手获得 x_i 个合格与 $b-x_i$ 个不合格,于是由第 i 名选手产生的相同评分对的个数为 $C_{x_i}^2+C_{b-x_i}^2$, $i=1,2,\cdots,a$.从而所有相同评分对的个数为

$$\sum_{i=1}^{a}(C_{x_i}^2+C_{b-x_i}^2)\geqslant a(C_{m+1}^2+C_m^2)$$

$$=\frac{a}{2}(m(m+1)+m(m-1))=am^2,$$

其中 $b=2m+1, m\in N$.

另一方面,任何两位裁判所产生的相同评分对至多 k 对,故所有相同评分对的个数不超过 kC_b^2.

结合起来,得到

$$kC_b^2 \geqslant \sum_{i=1}^{a}(C_{x_i}^2 + C_{b-x_i}^2) \geqslant am^2,$$

$$k \cdot \frac{1}{2}b(b-1) \geqslant am^2,$$

$$kb \geqslant am = a \cdot \frac{b-1}{2},$$

$$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}.$$

6·57 n 支足球队进行比赛,每两支队都赛一场,胜队得 3 分,负队得 0 分,平局各得 1 分.问一支队最少要得多少分,才能保证得分不少于该队的至多有 $k-1$ 支队,其中 $2 \leqslant k \leqslant n-1$?

(中国国家集训队选拔试题,1997 年)

[解] 考察有 $k+1$ 支足球队得分相同且均得最高分的情形.

(1)设 k 为偶数,记 $k=2m, m \in N$,将 $2m+1$ 支球队用圆周上的 $2m+1$ 个等分点来表示.每个队都战胜按顺时针方向由他所对应的点算起接下去的 m 支球队而负于另外的 m 支球队,并且这 $k+1$ 支球队中每队都全胜另外的 $n-k-1$ 支球队,于是这 $k+1$ 支球队中每队的得分都是 $3(n-k-1)+3m=3n-3k-3+\frac{3}{2}k=3n-\frac{3}{2}k-3$.

(2)设 k 为奇数,记 $k=2m+1, m \in N$,仍将 $2m+2$ 支球队用圆周上的 $2m+2$ 个等分点来表示.与(1)中一样,每队都战胜按顺时针方向由他所对应的点算起接下去的 m 支球队,战平第 $m+1$ 支队而负于另外的 m 支球队,并且这 $k+1$ 支球队中的每队都全胜另外的 $n-k-1$ 支球队.于是这 $k+1$ 支球队中每队的得分都是

$$\begin{aligned}3(n-k-1)+3m+1 &= 3n-3k-3+\frac{3}{2}(k-1)+1 \\ &= 3n-\frac{3k+1}{2}-3.\end{aligned}$$

将(1)与(2)中的结果结合起来,这 $k+1$ 支球队中每队的得分都是 $3n-\left[\frac{3k+1}{2}\right]-3$.由此可知,为保证得分不少于该队的至多有 $k-$

1 支球队,该队至少要得 $3n-\left[\frac{3k+1}{2}\right]-2$ 分.

(3)再证当一支球队得分不少于 $3n-\left[\frac{3k+1}{2}\right]-2$ 时,得分不少于他的球队至多有 $k-1$ 支.

若不然,设另有 k 支球队得分都不少于该队,于是这 $k+1$ 支球队的得分之和数不少于 $(k+1)\left(3n-\left[\frac{3k+1}{2}\right]-2\right)$.

记这 $k+1$ 支球队为 A 组,另外的 $n-k-1$ 支球队为 B 组. 易见,A 组队与 B 组队比赛的得分数至多为 $3(k+1)(n-k-1)$,A 组队之间比赛的得分至多为 $3C_{k+1}^2=\frac{3}{2}k(k+1)$. 所以 A 组队得分之和数不多于

$$
\begin{aligned}
&3(k+1)(n-k-1)+\frac{3}{2}k(k+1)\\
=&(k+1)(3n-3k-3+\frac{3}{2}k)\\
=&(k+1)\left(3n-\frac{3}{2}k-3\right)<(k+1)\left(3n-\left[\frac{3k+1}{2}\right]-2\right),
\end{aligned}
$$

矛盾.

综上可知,所求的得分最小值为 $3n-\left[\frac{3k+1}{2}\right]-2$.

6·58　$n(\geqslant a)$ 支足球队进行单循环赛,结果倒数第 3 名的队的得分比他前面的队都少,比后两队都多,胜场数比他前面的队都多却比后两队都少,求队数 n 的最小值.

(中国国家集训队选拔试题,1998 年)

[解]　设 n 支球队依次是 $A_1,A_2,\cdots,A_{n-3},B,C_1,C_2$,其中 B 队是倒数第 3 名,$C_1$ 和 C_2 是最后两名.

首先注意,A 组每队得分都多于 B 队,而 B 队得分又多于 C 组每队;A 组每队胜场数都少于 B 队,而 B 队胜场数又少于 C 组每队. 所以,A 组每队至少比 C 组任何一队多得 2 分且少胜两场,从而 A 组每队至少 8 平,C 组每队至少 6 负,B 队至少 3 负 4 平 1 胜. 这样,后 3 队至少共 15 负. 后 3 队之间共赛 3 场,至多有 3 负,所以 A 组队至少有 12 胜. 若 $n\leqslant14$,则 A 组队数 $n-3\leqslant11$,于是由抽屉原理知有 A 组某队至少 2 胜 8 平,故知 $n\geqslant11$.

设 $n=11$,于是 A 组共有 8 队,A 组 8 队之间共赛 $C_8^2=28$ 场. 即使

都是平局,组内也只有 56 平. 然而前已指出,A 组每队至少 8 平,A 组 8 队至少共 64 平. A 组 8 队与后 3 队之间至少平 8 场. 再由抽屉原理又知,或者 B 队 6 平或者 C 组某队 2 平,这又导致 A 组某队 2 胜 10 平,此与 $n=11$ 矛盾.

设 $n=12$,于是 A 组共有 9 队. 由第 1 段论证知 A 组某队 2 胜. 于是 A 组每队都 2 胜. 否则 A 组 1 胜的队必多 3 平,立即导致矛盾. 若 A 组每队 2 胜 8 平,B 队 3 胜 4 平 3 负,C 组每队 4 胜 6 负,则共胜 29 场,负 15 场. 这时每队赛 11 场,C 组每队至多 7 负,B 队至多 4 负,后 3 队至多 18 负. 于是 A 组队至少共负 11 场. 由抽屉原理知 A 组某队 2 负. 从而该队至少 2 胜 8 平 2 负共赛 12 场,此不可能.

当 $n=13$ 时,A 组共有 10 队. 若 A 组每队 2 胜 9 平 1 负,B 队 3 胜 4 平 5 负,C 组每队 4 胜 8 负,则恰好满足要求. 具体情况见下表:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	B	C_1	C_2	得分
A_1											0	3	3	15
A_2				0							1	3	3	15
A_3					0						1	3	3	15
A_4		3									1	0	3	15
A_5			3								1	0	3	15
A_6											3	0	3	15
A_7											3	3	0	15
A_8											3	3	0	15
A_9											3	3	0	15
A_{10}											3	3	0	15
B	3	1	1	1	1	0	0	0	0	0		3	3	13
C_1	0	0	0	3	3	3	0	0	0	0	0		3	12
C_2	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	0	0		12

其中空格中都填 1. 易见,表中所示的结果完全满足题中要求.

综上可知,所求队数 n 的最小值为 13.

6·59 某次考试共有5 道选择题,每题都有 4 个不同答案供选择. 每人每题恰选 1 个答案. 在 2000 份答卷中发现存在一个 n,使得任何 n 份答卷中都存在 4 份,其中每两份的答案都至多 3 题相同. 求 n 的最小可能值.

(第 15 届中国数学奥林匹克,2000 年)

[解 1] 由抽屉原理知,2000 份考卷中总有 500 份第 1 题答案相同. 而在第 1 题答案相同的 500 份考卷中,总有 125 份第 2 题答案也相同. 在第 1,2 两题答案都相同的 125 份答卷中,总有 32 份答卷的第 3 题答案相同,在第 1,2,3 题答案都相同的 32 份答卷中,第 4 题的 4 种不同答案中,总有 1 种答案至多被 8 人选用. 去掉这一种答案、至少余下 24 份答卷,其上的答案中前 3 题都相同而第 4 题的答案只有 3 种不同.

对于这 24 份答卷中的任何 4 份,由抽屉原理知其中必有两份答卷的第 4 题答案相同,从而这两份答卷的前 4 题答案都相同,不满足题中要求. 这表明 n 的最小可能值不小于 25.

另一方面,可能出现的所有不同答案共有 $4^5=1024$ 种,选择其中的 1000 种各重复 1 次,共得 2000 份答卷. 显然,其中的任何 25 份答卷中,总有 13 份互不相同.

用 0,1,2,3 来分别代表每题的 4 个不同答案并将每张考卷的答案记为 (g,h,i,j,k), $g,h,i,j,k\in\{0,1,2,3\}$. 将答卷上的所有不同答案分成如下 4 组

$$S_m=\{(g,h,i,j,k)\mid g+h+i+j+k\equiv m(\bmod\ 4)\},$$
$$m=0,1,2,3.$$

易见,属于同组的两个不同答案都至多有 3 题答案不同. 由抽屉原理知,上述 13 份不同答案至少有 4 份属于这 4 组中的同一组,当然满足题中要求. 这表明 $n=25$ 可以满足题中要求.

综上可知,所求的 n 的最小可能值为 25.

[解 2] 像解 1 中一样,用 (g,h,i,j,k) 来表示一份答卷上的答案,其中 $g,h,i,j,k\in\{0,1,2,3\}$. 将下列 4 个答案分成一组

$$\{(g,h,i,j,0),(g,h,i,j,1),(g,h,i,j,2),(g,h,i,j,3)\},$$

于是将全部 1024 个不同答案分成了 256 个这样的四元组. 对于任何 2000 份答卷,它们分属于这 256 个四元组. 因为 $2000=256\times7+208$, 故由抽屉原理知可先后取出 3 组各 8 份答卷,使得每组的 8 份答卷都属于同一个四元组. 这 3 组共 24 份答卷中,任何 4 份中总有两份属于同一个四元组,从而不能满足题中要求,这表明 n 的最小可能值不小于 25.

另一方面,令

$$S=\{(g,h,i,j,k)\mid g+h+i+j+k\equiv0(\bmod\ 4)\},$$

易见,$|S|=256$ 且 S 中任何两个不同答案都至多 3 题相同. 从 S 中取出 250 种不同答案并使每种答案恰有 8 人选用,共得到 2000 份答卷. 其中的任何 25 份答卷中,总有 4 份互不相同,当然满足题中要求. 这就证明了 $n=25$ 可以满足题中要求.

综上可知,所求的 n 的最小可能值为 25.

6·60 某乒乓球俱乐部组织交流活动,安排符合以下规则的双打赛程表,规则为

(i)每名参加者至多属于两个对子;

(ii)任意两个不同对子之间至多进行一次双打;

(iii)凡表中同属一对的两人就不在任何双打中作为对手相遇.

统计各人参加的双打场次数,约定将所有不同的次数组成的集合称为"赛次集". 给定由不同的正整数组成的集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$, 其中每个数都能被 6 整除. 试问最少必须有多少人参加活动,才可以安排符合上述规则的赛程表,使得相应的赛次集恰为 A. 证明你的结论.

(第 15 届中国数学奥林匹克,2000 年)

[解] 不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_k$. 按赛次集 A 的定义,至少有 1 名参赛者 α 的比赛场次为 a_k.

若 α 仅属于一个对子,则这个对子应与另外的 a_k 个对子各进行一场双打. 这 a_k 个对子共有 $2a_k$ 个人,而每个人至多属于两个对子,从而这 a_k 个对子中至少有 a_k 个不同的人. 所以总人数不少于 a_k+2.

若 α 属于两个不同对子,则至少另有 $\frac{a_k}{2}$ 对与这两对进行双打. 因而至少另有 $\frac{a_k}{2}$ 个人,所以总人数不少于 $\frac{a_k}{2}+3$.

下面证明对于$\frac{a_k}{2}+3$名参加者，可以安排符合规则的赛程表，使得相应的赛次集恰为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，并且每名参加者都恰属于两个不同对子. 对 k 使用数学归纳法.

(1)当 $k=1$ 时，将$\frac{a_1}{2}+3$个人分成$\frac{a_1}{6}+1$个三人组，每组中的 3 个人两两结成对子，于是每人恰属于两个不同对子，所有不同组的两个对子各进行一场双打，于是每人的赛次都是

$$\frac{a_1}{2}\times 2=a_1.$$

(2)当 $k=2$ 时，将$\frac{a_2}{2}+3$个人分成两大组 S 和 T，使得 $|S|=\frac{a_1}{2}$，$|T|=\frac{a_2-a_1}{2}+3$. 然后将 S 和 T 分别分成三人组，每个三人组中的 3 个人两两结成对子.

安排 S 中的每个对子与该三人组以外的所有其他对子各进行一场双打，安排 T 中的每个对子只与 S 中的所有对子各进行一场双打. 于是 S 中每人的赛次都是

$$\left(\frac{a_1}{2}-3+\frac{a_2-a_1}{2}+3\right)\times 2=a_2;$$

T 中每人的赛次都是

$$\frac{a_1}{2}\times 2=a_1.$$

这表明 $k=1,2$ 时结论成立.

(3)设当 $k\leqslant h$ 时结论成立. 考察 $k=h+1$ 的情形. 这时 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_h,a_{h+1}\}$，其中 $a_1<a_2<\cdots<a_h<a_{h+1}$. 将$\frac{a_{h+1}}{2}+3$名参加者分成 S,T 和 U3 个大组，使得 $|S|=\frac{a_1}{2}$，$|T|=\frac{a_h-a_1}{2}+3$，$|U|=\frac{a_{h+1}-a_h}{2}$. 然后将 S,T,U 分别分成三人组，每个三人组中的 3 个人两两结成对子.

安排 S 中的每个三人组中的每个对子都与所有其他三人组中的每个对子各进行一场双打，安排 T 中每个三人组中的每个对子都与 S 中的所有对子各进行一场双打，安排 U 中每个三人组的每个对子都只

与 S 中的每个对子各进行一场双打. 于是 S 中每个人的赛次都是

$$\left.\frac{a_1}{2}-3+\frac{a_h-a_1}{2}+3+\frac{a_{h+1}-a_h}{2}\right)\times 2=a_{h+1},$$

T 和 U 中每个参加者的赛次都是 a_1. 至此,赛次 a_1 和 a_{h+1} 都已产生. 余下的诸 a_i 将由 T 中的三人组的对子之间的双打来完成.

令

$$B=\{a_2-a_1,a_3-a_1,\cdots,a_h-a_1\},$$

于是诸 a_i-a_1 都能被 6 整除且 $a_2-a_1<a_3-a_1<\cdots<a_h-a_1$, $|T|=\frac{a_h-a_1}{2}+3$. 由归纳假设知可安排 T 中的双打比赛,使相应的赛次集恰为 B.

结合起来即知,最终产生的赛次集恰为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_h,a_{h+1}\}$,这就完成了归纳证明.

综上可知,最少应有 $\frac{a_k}{2}+3$ 个人参加活动.

第七章　最值问题

7·1　已知平面上的 n 个点，其中任何 3 点都是直角三角形的 3 个顶点，求 n 的最大值.

（第 23 届莫斯科数学奥林匹克，1960 年）

[解]　显然，矩形的 4 个顶点中的任何 3 点都是一个直角三角形的 3 个顶点. 故知所求 n 的最大值不小于 4.

若有 5 点满足要求，设 5 点中两两之间距离最大的两点是 A 和 B，则其余 3 点都在以 AB 为直径的圆上. 由抽屉原理知，3 点中总有两点在同一半圆上，设为 C 和 D，于是 $\triangle ACD$ 不能是直角三角形，矛盾.

综上可知，所求 n 的最大值为 4.

7·2　在单位球面上放置若干个点，使得其中任意两点的距离

(1) 至少为 $\sqrt{2}$.

(2) 大于 $\sqrt{2}$.

试求点的个数的最大值，并证明你的结论.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1991 年）

[解]　(1) 点数的最大值为 6.

若 A 为其中一点，设 A 在球面的位置为北极，则剩下的点必须全部在赤道或南半球上.

若南极也有点 B，则其余的点全在赤道上，此时至多有 $2+4=6$ 个点.

若没有点在南极，可以证明此时点的个数不超过 5.

若不然，则至少有 5 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_5$ 在南半球上（包括赤道）. 设 A' 为南极，圆弧 $\overset{\frown}{A'A_i}$ $(i=1,2,3,4,5)$ 交赤道于 A'_i，则 $\angle A_iA'A_j$ (1

$\leqslant i \neq j \leqslant 5)$ 中，至少有一个角不大于 72°.

不妨设 $\angle A_1A'A_2 \leqslant 72°$，则在球面 $\triangle A_1A'A_2$ 中任意两点的距离小于$\sqrt{2}$. 出现矛盾.

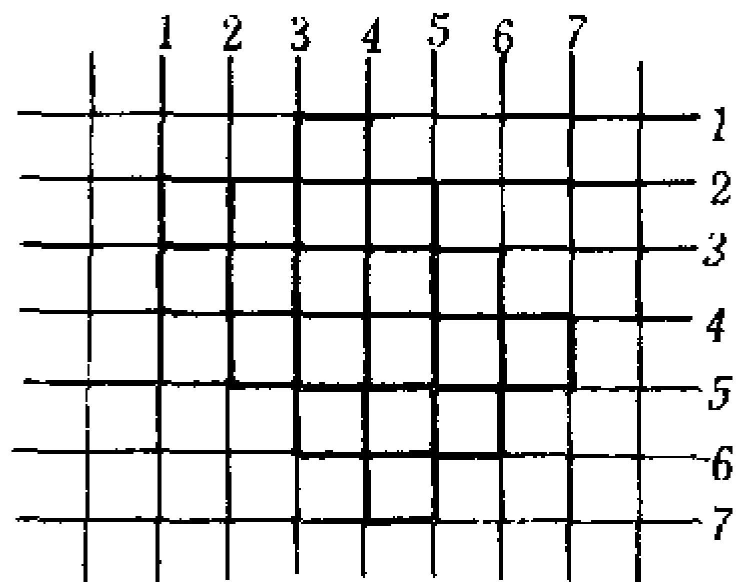
所以球面上至多有 6 个点.

(2) 点的个数的最大值为 4. 证明参照(1).

7·3　已知一条闭折线是沿着方格纸上的网格线绘制的，共由 14 段组成且每条网格线上至多有折线的 1 条边，问这条折线最多有多少个自交点？

(第 26 届莫斯科数学奥林匹克，1963 年)

[解]　因为折线是沿着网格线绘制的，所以它的横边和竖边是交替排列的，故 14 条边中必有 7 条水平边和 7 条竖直边. 将水平边从上到下自 1 到 7 编号. 容易看出，第 1 条水平边上没有自交点，第 2 条水平边上至多有两个自交点，第 3 条水平边上至多有 4 个自交点. 同理，第 7，6，5 号水平边上也分别至多有 0，2，4 个自交点. 对于第 4 条水平边，两端各连有一条竖直边，故至多有 5 个自交点. 从而整条折线至多有 17 个自交点.



另一方面，右图中的折线共有 14 条边，每边各在一条网格线上且共有 17 个自交点.

综上可知，这条折线最多有 17 个自交点.

7·4　R^n 为 n 维欧几里得空间，如果 R^n 中的一个点集使 R^n 中的每一点至少与这集中一个点的距离为无理数. 试求这个点集中点数的最小值 $g(n)$.

(第 14 届加拿大数学奥林匹克，1982 年)

[解]　若 $n = 1$，显然 $g(1) = 2$.

若 $n \geqslant 2$，我们来证明 $g(n) = 3$.

首先证明 $g(n) > 2$.

对于 R^n 空间内任意两点 A，B. 则可作 AB 的垂直平分线(面)π，显然总存在有理数 $r > \frac{1}{2}AB$，以 A 为圆心，以 r 为半径作圆弧(球面)与 π 总有交点，取一交点 P，则

$$PA = PB = r$$

是有理数.

在 R^n 空间内取同在一条直线上的三点 A,B,C. 且使 $AB=1,BC=\sqrt[3]{2}$,现在来证明,对 R^n 空间上的任一点 P,PA,PB,PC 的长至少有一个无理数.

若 PB 为无理数,命题显然.

若 PB 为有理数,记 $PB=r$,设 $\angle PBC=\alpha$.

由余弦定理

$$PA^2=PB^2+AB^2-2PB\cdot AB\quad\cos(\pi-\alpha)$$
$$=r^2+1+2r\cos\alpha.$$
$$PC^2=PB^2+BC^2-2PB\cdot BC\quad\cos\alpha$$
$$=r^2+\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}r\cos\alpha.$$

如果 $\cos\alpha=\frac{\sqrt[3]{2}}{2r}-\frac{k}{\sqrt[3]{2}}$(其中 k 为有理数),则 PA 是无理数.

如果 $\cos\alpha\neq\frac{\sqrt[3]{2}}{2r}-\frac{k}{\sqrt[3]{2}}$(其中 k 为有理数),则 PC 是无理数.

综上可证得,当 $n\geqslant 2$ 时,$g(n)=3$.

7·5　在直线上分布着 100 个点,我们来标出以这些点为端点的一切可能的线段的中点.问最少可以得到多少个这样的中点?

(第 37 届莫斯科数学奥林匹克,1974 年)

[解]　考察左边第 1 点依次和左数第 2,3,…,100 点所成的 99 条线段的 99 个中点,显然它们互不相同.同理,从右边考虑也可得到 99 个互不相同的中点.显然,这两组中点中恰有 1 个是重复的,即左边第 1 点与右边第 1 点所成线段的中点.故知至少有 197 个中点.

另一方面,当这 100 个点中每相邻两点间的距离都彼此相等时,任何一条以这些点为端点的线段的中点都或者是这 100 点中的点,或者是某相邻两点间的小线段的中点.所以这样的中点至多有 197 个.综上可知,这样线段的中点最少有 197 个.

7·6　在周长为 1956 的圆周上最少应选取多少个点,才能使得对其中的每一个点,都恰有 1 个距离为 1 的点,也恰好有 1 个距离为 2 的点(两点间的距离按弧长计算)?

(第 19 届莫斯科数学奥林匹克,1956 年)

[解]　将圆周用 1956 个分点等分为 1956 段,则每两个相邻分点

间的距离为1.将这些分点按逆时针顺序依次编号为1,2,…,1956.然后把号码为3的倍数的点擦去,则余下1304个点,它们显然满足题中要求.故知所求的最少点数不超过1304.

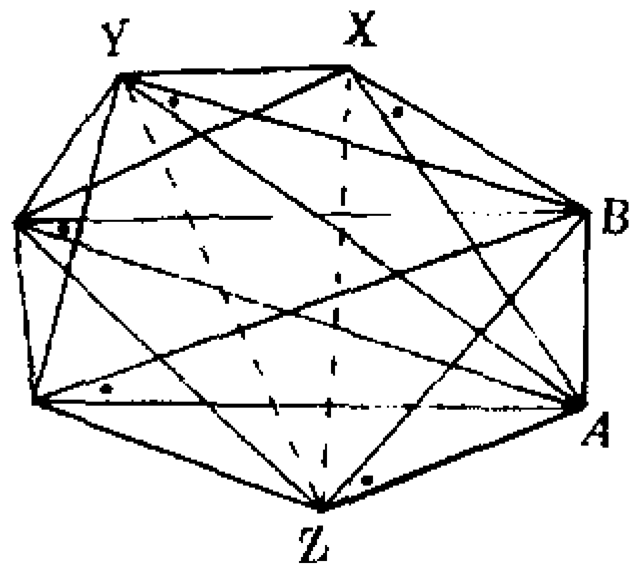
另一方面,设S是任一满足要求的点集,点$A\in S$,则存在点$B,C\in S$,使$\overset{\frown}{AB}$长为1,$\overset{\frown}{AC}$长为2.易证B,C两点在点A的异侧,否则将导致B与A,C两点的距离都为1,矛盾.不妨设点B在前,点C在后.对于点$B\in S$,已有点A与它距离为1,故在前方又有点$D\in S$,使$\overset{\frown}{DB}$长为2.如此继续下去,我们找出一串点都属于S且相邻两点间的距离交替地为1和2,并直到取得一点在C后面且与C距离为1为止.这样共得到S中的1304个点.这意味着满足要求的集合至少有1304个点.

综上可知,满足要求的点集最少有1304个点.

7·7　在n边形内分布着k个点,使得在由n边形的任意3个顶点所构成的三角形内都至少有1个点,求k的最小值.

(第41届莫斯科数学奥林匹克,1978年)

[**解**]　由n边形的顶点A引出所有对角线,它们把n边形分成$n-2$个互不相交的三角形.每个三角形内至少1个点,总共至少有$n-2$个点.



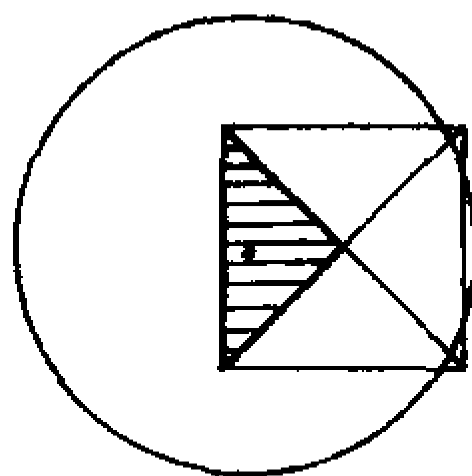
另一方面,取定n边形的一条边AB,并考察以n边形的3个顶点为顶点,以AB为一边的所有三角形.显然,这样的三角形共有$n-2$个.每个这样的三角形被其他对角线分成若干部分,我们在包含第3个顶点的部分中取1点,共得到$n-2$个点.对于任一个以n边形的3个顶点为顶点的三角形XYZ,$\angle AXB$,$\angle AYB$,$\angle AZB$中总有1个含于$\triangle XYZ$的内角中.例如图中的$\angle AYB$含于$\angle XYZ$之中.从而含于$\angle AYB$中的点将含于$\triangle XYZ$之中.可见,这$n-2$个点满足题中要求.

综上可知,所求的k的最小值为$n-2$.

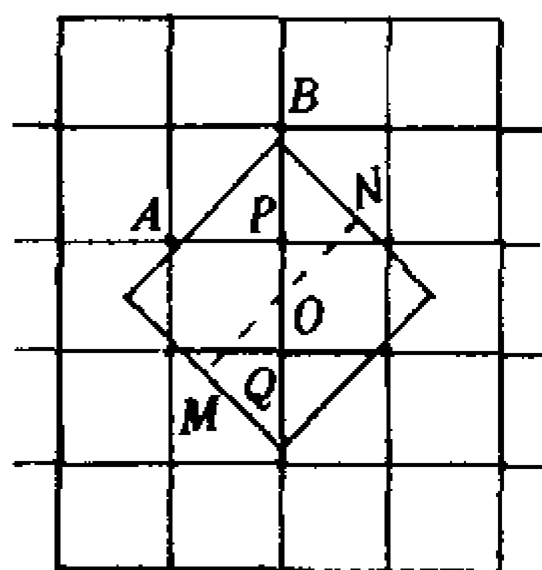
7·8　在方格纸上放置一张正方形纸片,纸片的面积是一个方格面积的4倍.问这张纸片最少能盖住方格纸上的多少个结点(如果结点落在正方形纸片的边界上,也认为是盖住了)?

(第48届莫斯科数学奥林匹克,1985年)

[解] 首先注意,正方形纸片的内接圆至少盖住两个结点.设内接圆的圆心落在某方格被它自己的两条对角线所分成的4个三角形之一中(包括边界和顶点).因圆的半径为1,故它必盖住作为这个三角形顶点的两个结点.可见,正方形纸片所盖住的结点数至少为2.



另一方面,我们将正方形中心放在方格1边的中点上,并使正方形纸片的边平行于方格的对角线.显然,正方形纸片盖住了两个结点 P 和 Q.设 MN 是正方形纸片的一条中位线(见右图).易见,结点 A 与 MN 的距离为 $\frac{3}{4}\sqrt{2}>1$,故知结点 A 未被盖住.结点 B 未被盖住是显然的,故这时纸片恰好盖住两个结点.

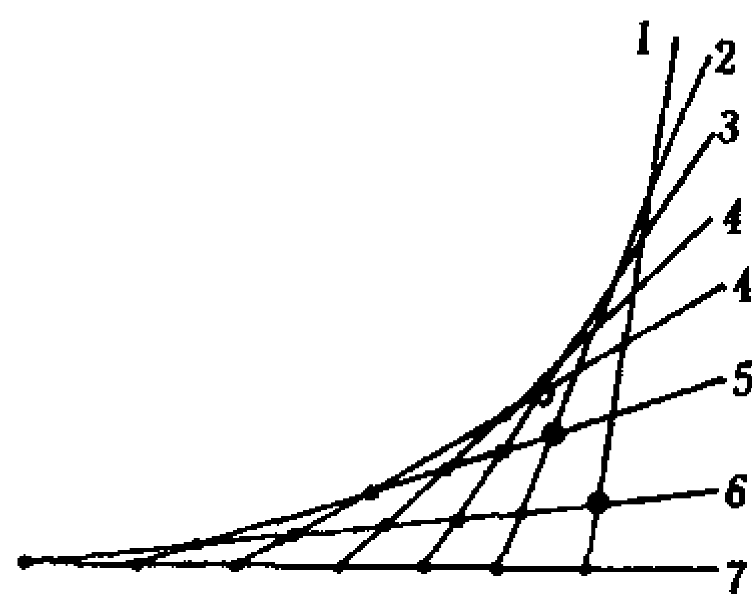


综上可知,正方形纸片最少盖住两个结点.

7·9 用 $A(n)$ 表示具有如下性质的平面点集 S 的最少点数:对于每个 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$,至少存在一条直线,它恰好包含 S 的 k 个点.求证 $A(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+2}{2}\right]$.

(独联体冬令营选拔试题,1992年)

[证] 右图所示为 $n=7$ 的情形.若把最下面一排7个黑点擦掉,并加上画有"○"号的3点,则变为 $n=6$ 的情形,二者可分别代表 n 为奇数与偶数的情形.显然,图中所示的点集满足题中要求且当 $n=2m-1$ 时,点数为 $(2m-1)+\cdots+m-C_m^2=m^2$,当 $n=2m$ 时,点数为 $2m+\cdots+(m+1)-C_m^2=m(m+1)$.这意味着 $A(n)\leqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+2}{2}\right]$.



另一方面,对于满足要求的任一点集 S,按已知,必有 m 条直线,其上分别有 $n,n-1,\cdots,n-m+1$ 个点,而且它们中任何两条线至多有一个交点,故又有 $A(n)\geqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+2}{2}\right]$.综上便知本题结论成立.

7·10　设 $k\in N, S_k=\{(a,b)\mid a,b=1,2,\cdots,k\}$. 对于 S_k 中两个元素 (a,b) 和 (c,d)，如果

$$a-c\equiv 0 \text{ 或 } \pm 1, b-d\equiv 0 \text{ 或 } \pm 1 \pmod k,$$

则称 (a,b) 与 (c,d) 在 S_k 中是不可分辨的（例如，$(1,1)$ 与 $(2,5)$ 在 S_5 中是不可分辨的）. 否则就称为可分辨的.

考虑 S_k 的具有下列性质的子集 A：A 中所有元素在 S_k 中两两可分辨. 这种子集的元数的最大值记为 r_k.

(1) 求 r_5 并说明理由；

(2) 求 r_7 并说明理由；

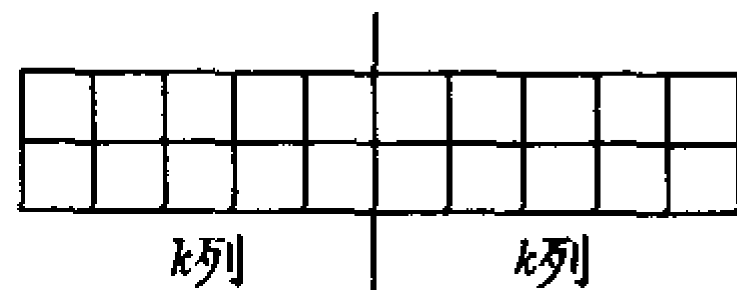
(3) 对一般的 k，r_k 是多少（不必说明理由）？

（中国国家集训队选拔试题，1988 年）

[解]　我们用 $k\times k$ 个方格来代表 S_k 中的 k^2 个元素，自然以第 i 行 j 列的方格代表 (i,j). 这样，S_k 中两元素 (a,b)，(c,d) 不可分辨相当于它们所对应的两个方格相邻（包括有公共边的相邻或有公共顶点的相邻），这里的相邻是广义的，即第一行（列）与第 k 行（列）相邻. 显然，每一个方格恰与周围 8 个方格相邻（$k\geqslant 3$）.

对于任何 2×2 方格，其中 4 个方格两两都相邻，从而它们对应的 S_k 中的 4 个元素是两两不可分辨的. 所以，任何 2×2 的 4 个方格中至多包含 A 中一个元素.

考察方格表中任何相邻的两行. 我们在 $2\times k$ 方格表旁再接上一个 $2\times k$ 方格表，这样得到一个 $2\times 2k$ 的方格表，其中有 k 个互不相重的 2×2 正方形：



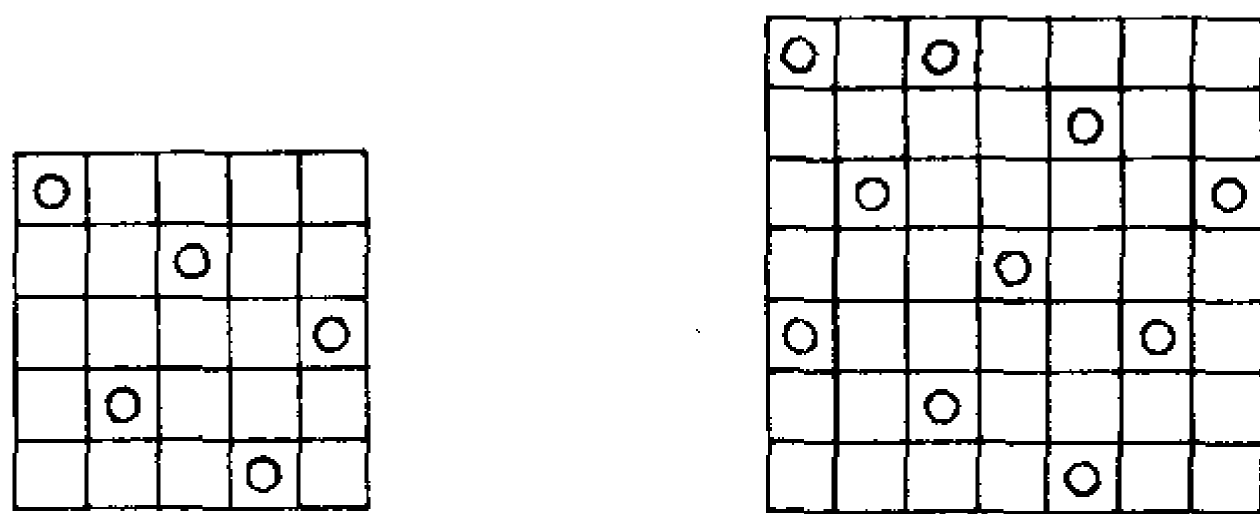
既然任何 2×2 个方格中至多有一个在 A 中，所以 $2\times 2k$ 个方格中至多有 k 个在 A 中（注意广义相邻）. 但对原来的 $2\times k$ 个方格，每个方格在 $2\times 2k$ 个方格中都恰好被用了两次，从而 $2\times k$ 个方格中至多有 $\left[\frac{k}{2}\right]$ 个在 A 中，即任何相邻两行中至多有 $\left[\frac{k}{2}\right]$ 个方格在 A 中.

利用同样的技巧，我们可以证明在 k 行中至多有 $\left[\frac{k}{2}\left[\frac{k}{2}\right]\right]$ 个方

格在 A 中,所以有

$$r_k \leqslant \left[\frac{k}{2}\left[\frac{k}{2}\right]\right].$$

下面我们来证明上式中等号成立.按题中要求,我们只就 $k=5$ 和 $k=7$ 的情形来举例说明.为此,我们只须给出一个互不相邻的方格集,使其恰有 r_k 个元素.注意 $r_5=5$, $r_7=10$,所选的方格集如下:

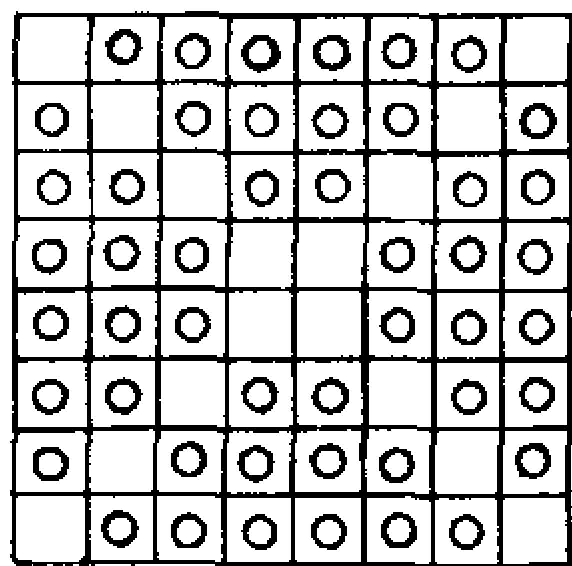


对于一般的 k,也有 $r_k=\left[\frac{k}{2}\left[\frac{k}{2}\right]\right]$.

7·11　把棋子放在国际象棋棋盘的方格上,要求在每一行,每一列以及每一斜线上都刚好有偶数枚棋子,试问最多可以放置多少枚棋子?

(第19届全俄数学奥林匹克,1993年)

[解]　最多可以放置48枚棋子.



由于国际象棋棋盘上一共有16条包含有奇数个方格的对角线而它们之间又没有公共的方格.从而棋子的枚数不能多于

$$64-16=48$$

个.

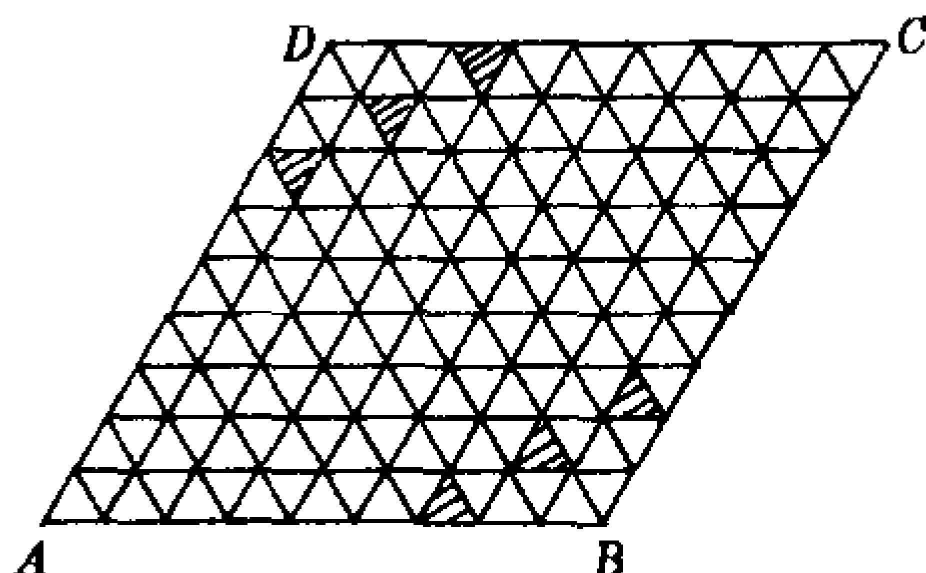
事实上只要在除去两条主对角线上的16个小方格之外的每一个方格各放上一枚棋子(如图)就得到满足条件的48枚棋子的一种放法.

7·12　游戏盘的形状是一个含有60°角的菱形.将它的每条边都9等分,并过每个分点都分别作平行于边和较短对角线的两条直线,将菱形分成许多正三角形的小格.如果在某个小格中放上一枚棋子,则过该小格中心引3条分别平行于三角形3边的直线,并称这3条直线穿过的

所有小格都已被棋子所控制.问为了控制游戏盘上的所有小格,最少要放多少枚棋子?

(第21届莫斯科数学奥林匹克,1958年)

[解] 在右图中阴影线所示的6个小格中各放1枚棋子时,整个游戏盘上的所有小格都被控制,故知所求的最小值不大于6.



另一方面,设游戏盘上所放的棋子至多5枚,不妨设恰放5枚.这时,在被平行于AB的8条直线把游戏盘分成的9个带状平行四边形中,至少有4个中没有棋子.同理,在被平行于AD的8条直线所分成的9个带状平行四边形中,也至少有4个中没有棋子.考察这两组没有棋子的各4个平行四边形的点.易见,其中的三角形小格分别属于8个被平行于短对角线的直线所分成的带状梯形.注意,每枚棋子只能控制1个带状梯形,从而至少有3个小格未被控制.

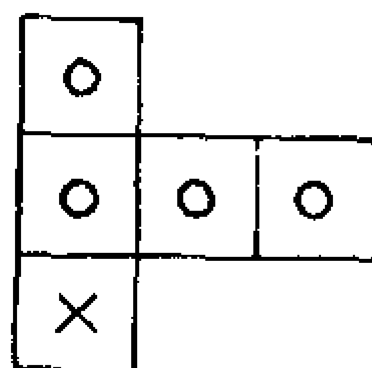
综上可知,最少要放6枚棋子.

7·13 在方格棋盘上有若干枚棋子.规定每一步可将某枚棋子跳过位于邻格(指有公共边的方格)中的棋子而进入随后的空格中,同时将被其他棋子跳过的棋子从棋盘上拿掉.如果最初棋子摆成$m\times n$矩形的形状,且在此矩形的周围都是空格,那么最后在棋盘上最少可剩几枚棋子?

(第26届独联体数学奥林匹克,1992年)

[解] 不妨设$m\geqslant n$.若$n=1$,则每一步都只能往这一行的两端空格中跳,且跳过1步之后的棋子不再相邻.因此棋盘上最少要剩下$m-\left[\frac{m}{2}\right]$枚棋子.以下设$n\geqslant 2$.

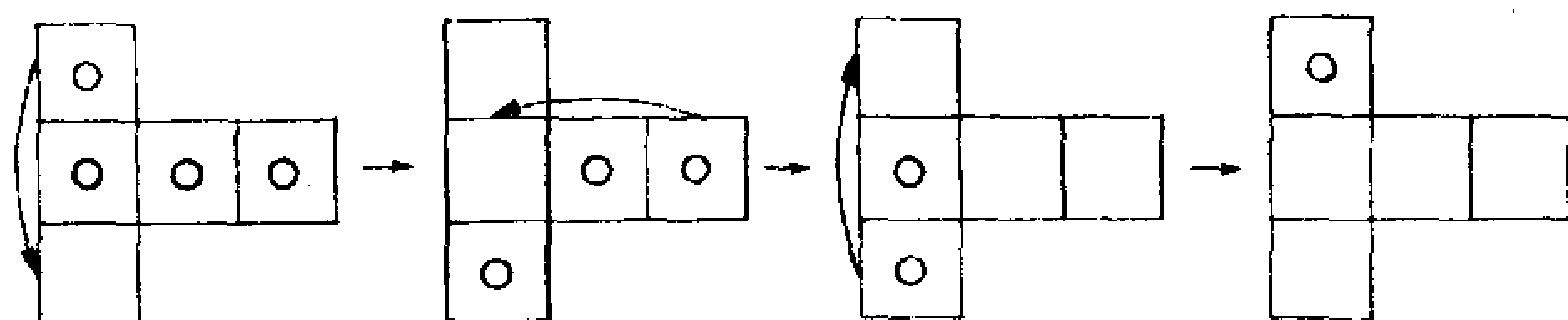
若$3\mid mn$,则最少剩下2枚棋子;否则最少剩下1枚棋子.为证此,首先证明如下引理:



(a)

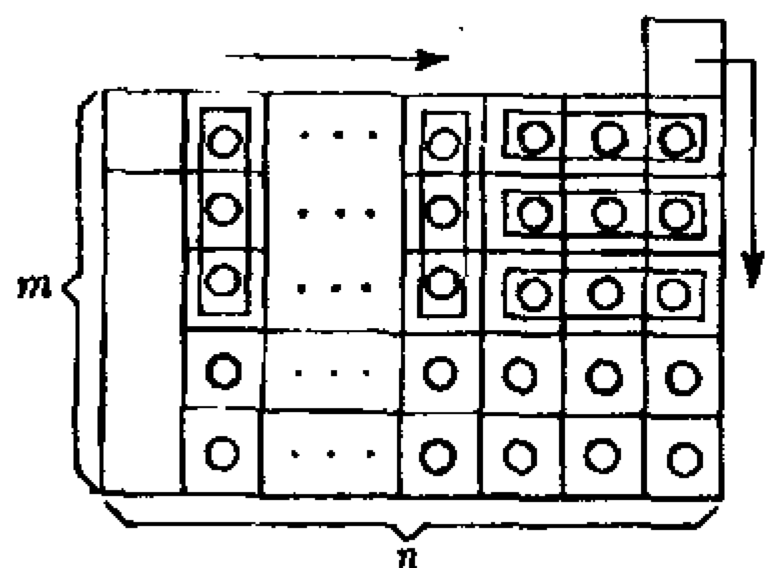
引理 若在右图所示的5个方格中,画"×"的方格是空格而其他4个格中各放1枚棋子,则可经过3次操作而使得连成一排的3枚棋子全部拿掉,另1枚棋子恰好回到原处.

只要按图(b)所示的操作即可实现引理的要求:

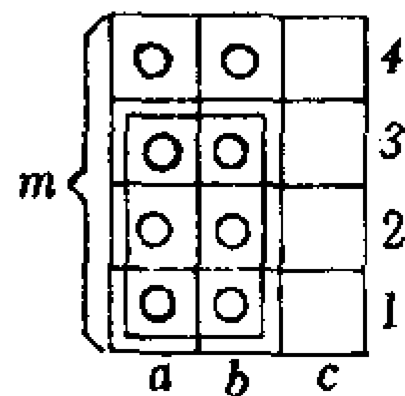


(b)

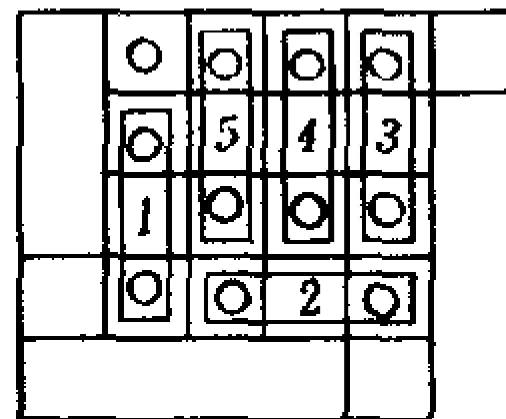
利用引理,可以把由 $m\times n(m\geqslant 4,n\geqslant 2)$ 枚棋子排成的矩形化为 $(m-3)\times n$ 的矩形.事实上,当 $n\geqslant 3$ 时,可如图(c)中所示,按箭头所示的次序去掉 n 个 3×1 矩形中的棋子.当 $n=2$ 时,可用下述操作来去掉6枚棋子(见图(d)):$a1:b1,a2:b2,c1:c2,a4:a3,c3:b3,a2:a3$(其中的 $a1:b1$ 表示将方格 $a1$ 中的棋子跳过方格 $b1$ 中的棋子而落入方格 $c1$ 的操作,其余类同).



(c)

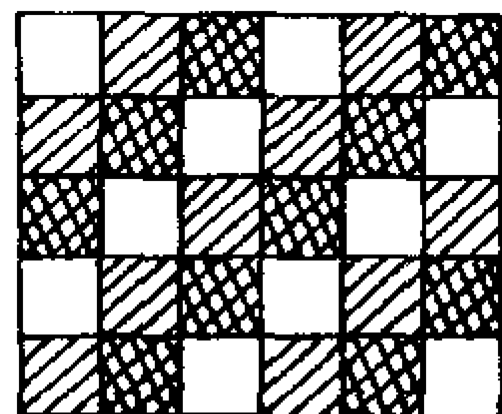


(d)



(e)

这样一来,任何 $m\times n(m\geqslant 2,n\geqslant 2)$ 的矩形都可化为下列6种情形之一:$1\times 2,2\times 2,4\times 4,1\times 3,2\times 3,3\times 3$.易见,对于前两种矩形,可化为只剩1枚棋子的情形;对于后3种矩形,由引理知可化为只余2枚棋子的情形;对于 4×4 的矩形,可按图(e)中 3×1 矩形中所标的号码顺序依次用引理操作,最后只余1枚棋子.这就证明了当 $m\geqslant n\geqslant 2$ 时,棋盘上最后所剩棋子的最少枚数不多于2,且当 $3\nmid mn$ 时,所余棋子的最少枚数为1.



(f)

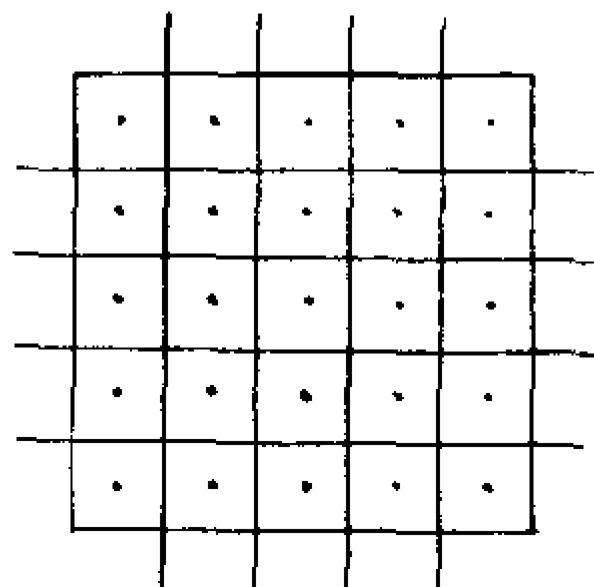
下面证明,当 $3\mid mn$ 时,棋盘上至少剩下两枚棋子.将棋盘上的每个方格都按图(f)所示的方式涂上红,黄,蓝三色之一.由于 $3\mid mn$,故开始时3种颜色

的方格中的棋子数相同，当然具有相同的奇偶性．又因任何 3×1 矩形中的3个方格的颜色都各不相同，而在每一步操作中，都有两种颜色方格的棋子各减少1枚而第3种颜色格子中的棋子数增加1，所以若操作前3种棋子数的奇偶性相同，则操作后亦然．因而在连续操作的过程中，3种棋子数的奇偶性始终相同．如果棋盘上只剩1枚棋子，则这一性质不再成立，所以至少剩下两枚棋子．

7·14　有 5×5 的正方形方格棋盘，共由25个 1×1 的单位正方形方格组成，在每个单位正方形方格的中心处染上一个红点，请在棋盘上找出若干条不通过红点的直线，分棋盘为若干块(形状，大小未必一样)，使得每一小块中至多有一个红点，问你最少要画几条直线？试举出一种画法，并证明你的结论．

(中国北京市初中数学竞赛，1987年)

[解]　如图所画的8条直线分棋盘为若干块后，每一小块中至少有一个红点．



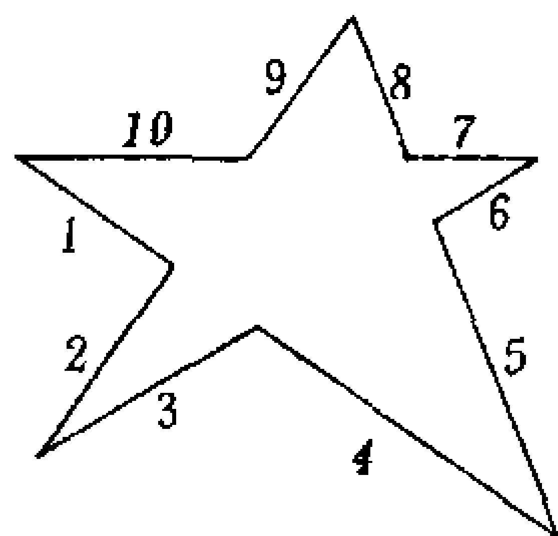
下面用反证法证明不可能有更少的直线满足题中要求．

假设所画直线不超过7条，并且满足题中要求．

这时，我们把边缘的16个红点依次用单位长的线段连结成一个边长为4的正方形．由于所画7条直线至多与14条小线段相交，即至少有两条单位长的小线段不与这7条直线中的一条相交，它必定整个落入被这些直线分划成的某个小区域内，它的两个端点(红点)也包括在内，与题设要求矛盾．

所以最少有8条直线．

7·15　在平面上依次画出首尾相接的 n 条线段，其中第 n 号线段的终端恰与第1号线段的始端重合，其中每一条线段都叫一个“线节”，若一个线节的始端恰是另一个线节的终端，称这两个线节是相邻的．我们规定：相邻的两个线节不能画在同一直线上，不相邻的任两个线节都不相交．满足上述条件的图形我们称作“简单折线圈”，如图，我们画的简单折线圈的十个线节恰分布在五条直线上．

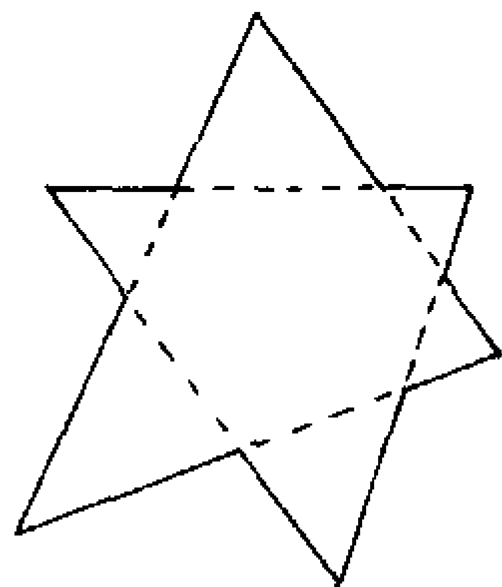


若一个简单折线圈的全部 n 个线节恰分布在六条直线上，试求 n 的最大值，并说明理由.

（中国北京市数学竞赛，1989 年）

[解] 我们证明 n 的最大值为 12.

首先可以画一个 $n = 12$ 的满足要求的简单折线圈（如图）.



若 $n > 12$，因为 n 个线节分布在 6 条直线上，按抽屉原理，至少有一条直线 l 含有至少三个线节. 这至少三个线节按规定彼此不相邻，所以至少有 6 个端点在这条直线 l 上，这 6 个端点是至少 6 个不同的线节与直线 l 的交点，这至少 6 条不同直线，连同 l 至少有 7 条直线，引出矛盾.

所以 n 的最大值为 12.

7·16 设在空间中给定 n 条线段，其中任何 3 条都不平行于同一平面，而且其中任何两条线段的中点连线都是这两条线段的公垂线. 求线段条数 n 的最大可能值.

（第 40 届莫斯科数学奥林匹克，1977 年）

[解] n 的最大可能值为 2.

若有 3 条线段满足题中要求，设三者的中点分别为 M_1, M_2, M_3，并设 M_1, M_2, M_3 所决定的平面为 $\sum$. 这时，3 条线段中的每条都垂直于 3 条直线 M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1 中的两条，从而都垂直于平面 $\sum$. 这导致 3 条线段平行于同一平面，矛盾. 这表明线段条数 n 至多为 2. 而 $n = 2$ 当然是可以实现的，故知所求的 n 的最大值为 2.

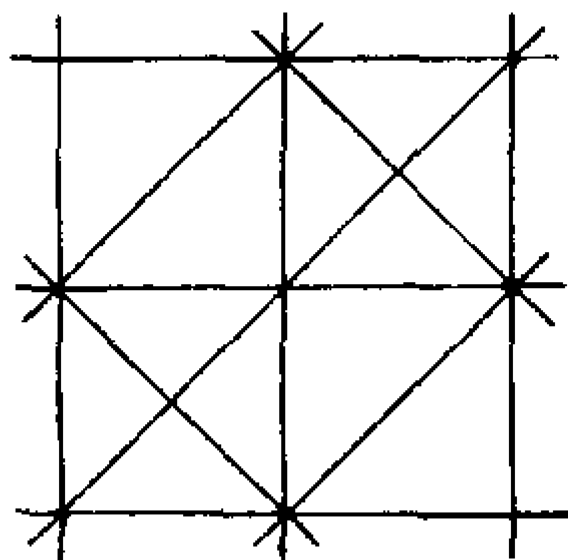
7·17 平面上平行于 x 轴，y 轴或象限角的平分线的直线称为规则直线. 连结平面上 6 点的所有直线中，最多有多少条规则直线？

（基辅数学奥林匹克，1982 年）

[解] 因为规则直线只有 4 种：水平，竖直，左斜，右斜，所以过每个点至多有 4 条规则直线. 因而，过 6 个给定点的规则直线至多 24 条. 但在这个计数过程中，每条直线至少被计数两次，所以至多有 12 条不同的规则直线. 如果恰有 12 条规则直线，则过每点都恰有 4 条，每条规则直线上都恰有两个给定点.

考察 6 个给定点的凸包多边形 M. 显然，过两个给定点的每条规则

直线都过 M 的内部或 M 的一条边. 这样一来,在 M 的每个顶点处的内角都不小于 135°. 另一方面,凸六边形的内角和为 720°,凸五边形的内角和为 540°,凸四边形的内角和为 360°,三角形内角和为 180°,无论哪种情形,其最小内角都小于 135°,矛盾. 由此可知,连结六点间的直线中,至多有 11 条规则直线.

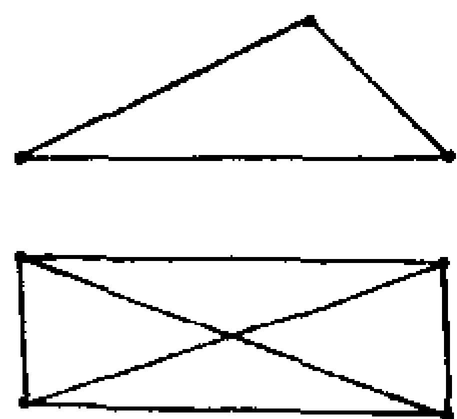


右图所示的 6 点间共连有 11 条规则直线,所以,6 点间最多可以连出 11 条规则直线.

7·18　在平面上给定 7 点,问最少要在它们之间连结多少条线段,才能使得任意 3 点之中都有两点间连有一条线?试给出一个符合要求的连线图.

（第 30 届国际数学奥林匹克预选题,1989 年）

［解 1］　右图 7 点间连有 9 条线段且满足题中要求,故知所求的最小值不大于 9.



下面证明在满足要求的连线图中,至少要 9 条线段.

(1) 如果存在一点 A 至多引出 1 条线段,则不与 A 相连的 5 点中,每两点之间都有连线,共有 10 条线.

(2) 如果每点至少引出两条线段且点 A 恰引出两条线段 AB, AC,则不与 A 相连的 4 点之间应有 6 条连线. 点 B 至少要另外引出 1 条线,总共至少有 9 条线.

(3) 若每点至少有 3 条线,则 7 点共引出至少 21 条线. 这时每条线段恰被计数两次,所以连线图中至少有 11 条线.

综上可知,最少要连 9 条线段.

［解 2］　只证任何满足要求的连线图中至少有 9 条线.

设点 A 与 B 之间无线,则 C, D, E, F, G　5 点中每点都至少与 A, B 之一有连线,至少有 5 条线. 后 5 点共可组成 10 个不同的三点组,每组 3 点之间至少有 1 条线,至少共有 10 条线. 在这个计数过程中,每条线恰被计数 3 次,故知 5 点间至少有 4 条不同线段. 从而图中至少共有 9 条线段.

［解 3］　设 7 点中点 A 引出线段条数最少,共引出 k 条线段 AB_j, $j = 1, 2, \cdots, k$. 则其余 $6 - k$ 个点与 A 均无连线,故其中每两点之间都

有连线.从而图中连线总数

$$S \geqslant \frac{1}{2}\left\{k(k+1)+(6-k)(5-k)\right\} = \frac{1}{2}(2k^2-10k+30)$$

$$= k^2-5k+15 = \left(k-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{35}{4} \geqslant 8\frac{3}{4},$$

即至少有 9 条连线.

另一方面,解 1 中给出的连线图表明 9 条线是可以达到的,故知所求的连线条数的最小值为 9.

7·19　设空间中给定 3 条直线,其中任何两条都既不平行也不重合,问这个图形中最多能有多少条对称轴?

（第 21 届莫斯科数学奥林匹克,1958 年）

[解]　最多有 9 条对称轴.

考察空间直角坐标系中 3 轴的 3 条直线.这时,每条直线本身都是 1 条对称轴.此外,每两条直线的交角的两条平分线也都是对称轴,故知共有 9 条对称轴.

另一方面,设 3 条给定直线为 l_1,l_2,l_3,则图形的对称轴可分为下列两类:

(1) 有两条直线关于对称轴互相对称,而第 3 条直线关于对称轴与自身对称.因为空间中既不平行也不重合的两条直线的对称轴只有两条,故这一类对称轴至多有 6 条.

(2) 3 条直线都关于对称轴与自身对称.因为一条直线关于对称轴与自身对称时,它必与对称轴垂直或重合,而任两条不平行直线恰有 1 条公垂线,所以这类对称轴至多 3 条.这时,每条直线都是另两条直线的公垂线.

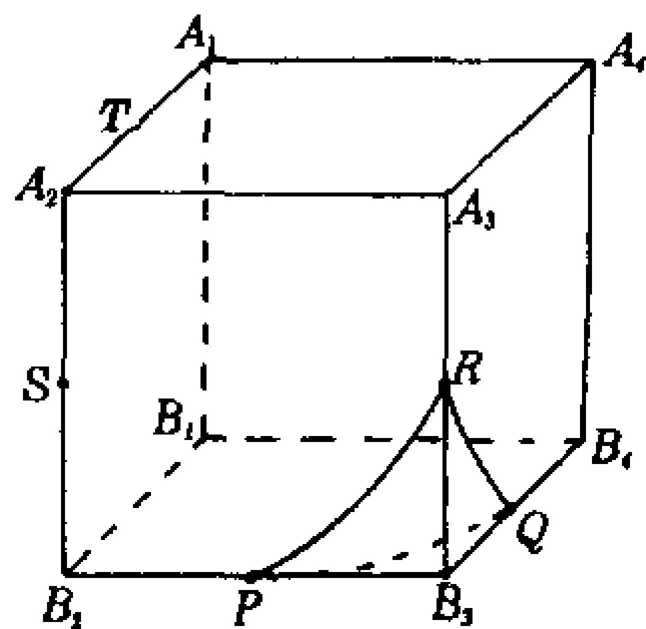
若 3 条直线有 1 条公垂线,则这 3 条直线不可能再有其他的对称轴.

综上可知,这个空间图形最多有 9 条对称轴.

7·20　已知一条折线的所有顶点全都位于某个棱长为 2 的正方体的表面上,它的每条边的长度都是 3,且两个端点刚好是该正方体的两个距离最远的顶点.问这条折线最少有多少条边?

（第 22 届全苏数学奥林匹克,1988 年）

[解]　设 P,Q,R 分别为由点 B_3 发出的三条棱的中点.显然,$A_1P=A_1Q=A_1R=3$.于是在正方体表面上与 A_1 距离为 3 的点的



集合是以 B_3 为顶点的 3 个侧面上分别过 P,Q,R 的三条弧(见右图). 由对称性知我们只须讨论弧$\overset{\frown}{PR}$ 的情形.

容易看出,除端点 P,Q 之外,弧$\overset{\frown}{PR}$ 上的其余各点除与 A_1 距离为 3 之外,与正方体表面上的其余点的距离均小于 3. 因此,若 A_1 为折线的起点,且第一条边的另一个端点在$\overset{\frown}{PR}$ 上时,只能为 P,R 两点之一(否则,无法画出长为 3 且端点在正方体表面的第二条边). 不妨设第一条边为 A_1P. 于是第二条边只能是 PA_4. 这表明折线经过两条线段后,恰由一条棱的一个端点走到另一个端点. 由于从 A_1 到 B_3 要经过三条棱,故折线至少要有 6 条边.

将前图中的点 A_1,P,A_4,S,B_4,T,B_3 依次连结起来,便得到一条有 6 条边且满足题中要求的折线. 所以,满足要求的折线最少有 6 条线段.

7·21　在凸十三边形中作出所有对角线,它们将十三边形划分为一些多边形. 问其中边数最多的多边形最多能有多少条边?

(第 13 届莫斯科数学奥林匹克,1950 年)

[解]　设多边形 M 是边数最多的一个. 对于凸十三边形的每一个顶点,多边形 M 的所有边中至多有两条位于从该顶点所引出的边或对角线上,故多边形 M 的边不多于26个(包括重复计数). 但 M 的每条边所在的多边形的边或对角线都恰被重两个端点计数两次,所以多边形 M 至多有 13 条边.

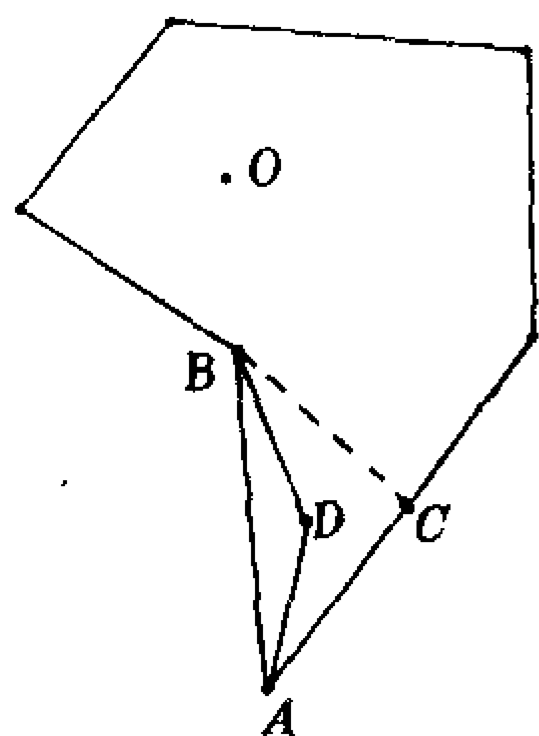
当凸十三边形为正十三边形时,被它的所有对角线分成的小多边形中,包含正多边形中心的小多边形有 13 条边. 故知边数最多的小多边形最多能有 13 条边.

7·22　平面上有 $n+4$ 个标定点,其中 4 点是一个正方形的顶点,其余 n 个点都在这个正方形的内部. 任何两个标定点之间都可以连一条线段,但是已连结的线段除端点外不含其他标定点,且任何两条已连结的线段除端点外没有公共点. 求这样所能连结的线段条数的最大值.

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1975 年)

[解]　设对给定的 $n+4$ 个点已经连结出某个线段网络 Q,它满

足题中要求且不能再添加一条线段而使题中的要求仍被满足(这样的网络称为极大的.因为所有可能的连线数不超过 C_{n+4}^{2},所以这样的极大网络一定存在).如果一个多边形的顶点都是给定点,边都是网络中的线段(允许两条边的夹角是平角),则称它为网式多边形.按已知,正方形 K 的 4 个顶点都是标定点,其他 n 个标定点都在 K 的内部.显然,正方形 K 的 4 条边属于任何一个极大网络.因此 K 是网式四边形.我们断言,极大网络 Q 把正方形 K 分成若干个网式三角形且每个标定点都是网络 Q 的结点.为证此,考察正方形 K 中任意一点 O.设 m 边形 M 是所有包含点 O 的网式多边形中面积最小的一个(允许点 O 在多边形边上).因为多边形 M 的内角和为 $(m-2)180°$,故它必有一个内角小于 $180°$,设这个内角顶点为 A.在 $\angle A$ 的两边上各取最接近点 A 的标定点,得到点 B 和 C(见图).如果在 $\triangle ABC$ 内还有标定点,则在其内的标定点中选取一点 D,使 $\angle ABD$ 最小(如果这样的点多于 1 个,则取离点 B 最近的一点).于是在 $\triangle ABD$ 中(包括周界)除 3 个顶点外不含标定点.从而由网络 Q 的极大性知 BD,AD 都属于网络 Q.于是 $\triangle ABD$ 是网式的.如果 $\triangle ABC$ 内没有标定点,则 $\triangle ABC$ 就相当于上面的 $\triangle ABD$.如果 $\triangle ABD$ 不与 M 重合,则它把多边形 M 分成 $\triangle ABD$ 及另一个网式多边形.这两个网式多边形中至少有 1 个含有点 O 且它的面积显然小于 M 的面积,矛盾.故知 M 为三角形,且其中除 3 个顶点外没有其他标定点.



下面计算极大网络中线段的条数 k.设网络 Q 将正方形 K 分成 l 个三角形,则所有三角形的内角和为 $l\cdot 180°$.另一方面,正方形的每个顶点对内角和的贡献是 $90°$;内部每个标定点对内角和的贡献是 $360°$.从而 l 个三角形的内角和又应为 $(n+1)\cdot 360°$.于是有

$$l\cdot 180° = (n+1)\cdot 360°$$

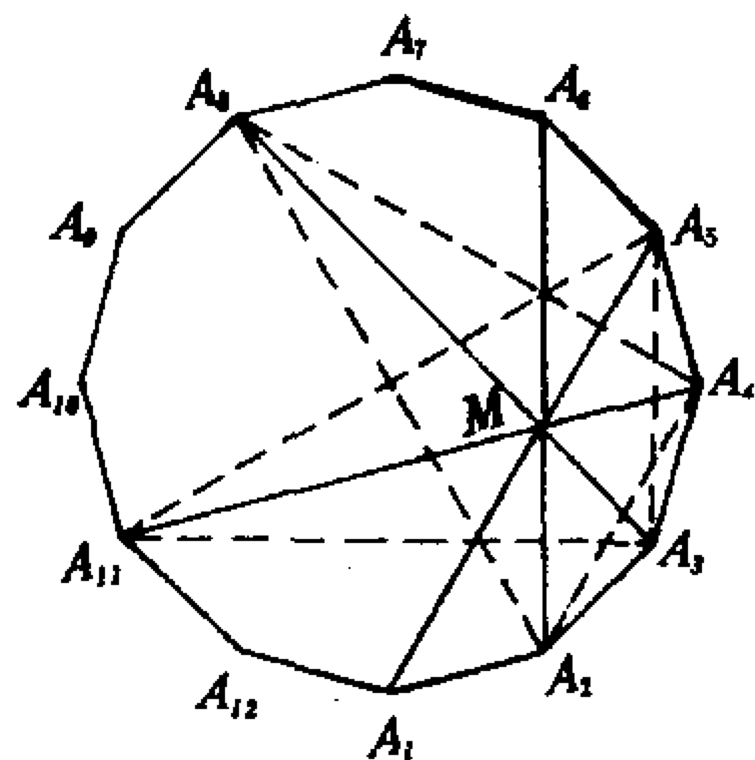
由此解得 $l=2(n+1)$.最后,因为正方形的每条边都是某个三角形的一条边,而正方形内的每条网络线段都是两个三角形的公共边,故知网络中线段条数的最大值为

$$4+\frac{1}{2}(3l-4)=\frac{3}{2}l+2=3n+5.$$

7·23　过正12边形内部一个非中心点，最多能作几条不同的对角线？

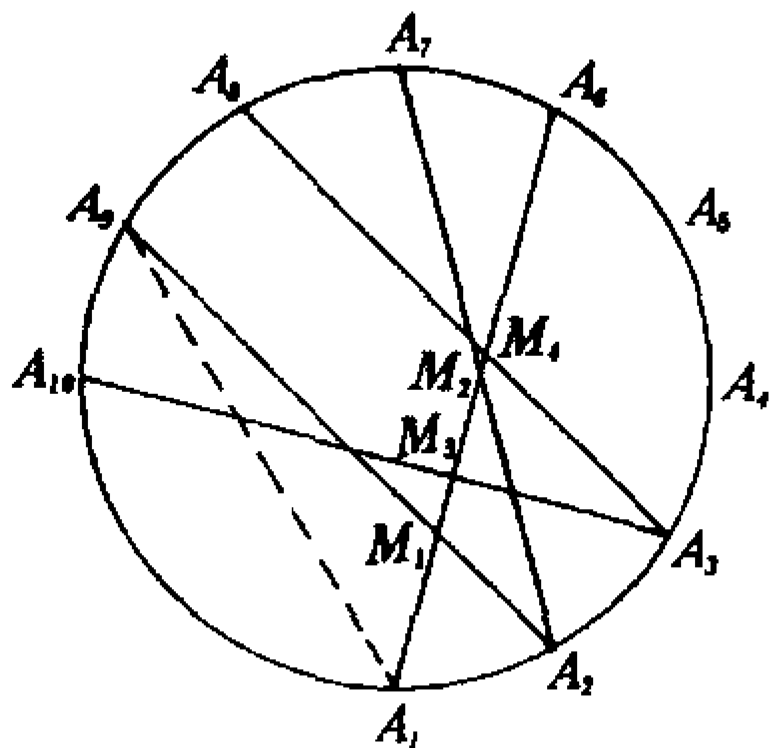
（中国国家集训队测验题，1994年）

［解］　在右图中，点 M 既是 $\triangle A_5A_{11}A_3$ 的内心，又是 $\triangle A_2A_4A_8$ 的内心，所以4条对角线 $A_1A_5,A_2A_6,A_3A_8,A_4A_{11}$ 交于点 M. 这表明所求的最大值不小于4.



为方便计，我们用弧长来表示弧所对的弦长，且当弧长为圆周长的 $\frac{k}{12}$ 时，称弦长为 $k,k\leqslant 6$. 如果有5条对角线交于多边形内一个非中心点，则每条弦长都不小于5，且其中至多有1条长度为6. 因为长为6的弦就是直径，若有两条长为6的对角线交于一点，交点即为圆心. 由此可知，交于一点的5条对角线中至少有4条长为5. 为证不可能有5条对角线交于形内非中心点，只须再证如下的引理.

引理　任何3条长为5的对角线不能交于同一点.



引理的证明　显然，两条长为5的弦相交，只有如下4种不同情形：$\{A_1A_6,A_2A_9\}$，$\{A_1A_6,A_2A_7\}$，$\{A_1A_6,A_3A_{10}\}$，$\{A_1A_6,A_3A_8\}$，记它们的交点分别为 M_1,M_2,M_3,M_4，则这4点既不相同，也不关于线段 A_1A_6 的中点对称.

事实上，由正弦定理知，$A_1M_1:M_1A_6=A_1M_1:M_1A_9=\sin A_9:\sin A_1=\sin\alpha:\sin 3\alpha$，其中 $\alpha=15°$. 同理，$A_1M_2:M_2A_6=\sin 6\alpha:\sin 4\alpha$，$A_1M_3:M_3A_6=\sin 2\alpha:\sin 4\alpha$，$A_1M_4:M_4A_6=\sin 5\alpha:\sin 3\alpha$. 不难验证，这4个比值中的任何两个都不相等，也没有任何一个与另一个的倒数相等. 这就证明了引理.

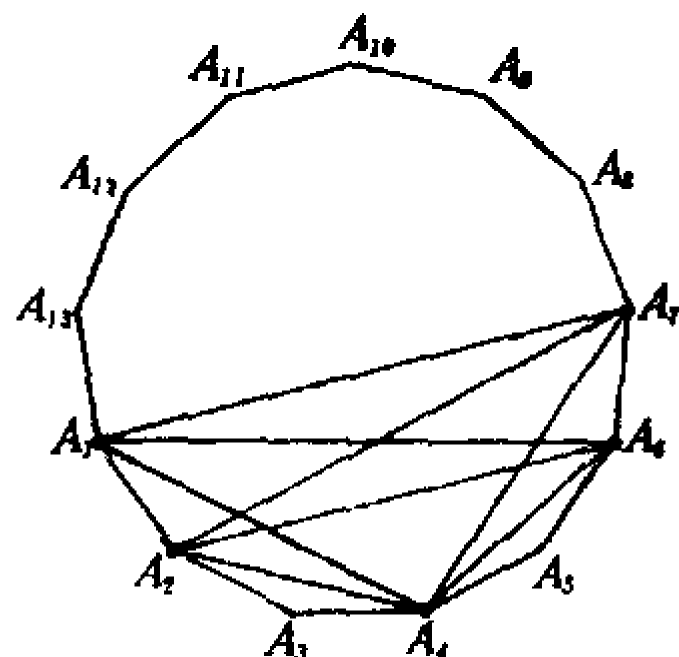
综上可知，题中所求的最大值为4.

7·24　求具有如下性质的最小自然数 n：把正 n 边形 S 的任何5个顶点涂成红色时，总有 S 的一条对称轴 l，使每个红点关于 l 的对称点

都不是红点.

（中国国家集训队选拔试题,1994 年）

［解 1］ 对于正 13 边形,当将 A_1,A_2,A_4,A_6,A_7 这 5 个顶点涂红时,13 条对称轴中的任何 1 条都不满足题中要求(见图). 对于正 12,11,10 边形,当取上述 5 个顶点为红点时,题中的结论也不成立. 而当边数不大于 9 时,结论显然不成立. 可见,所求的最小自然数 $n \geqslant 14$.



画出一个正 14 边形及其所有对角线,则这些线段可以分成 14 组,每组中的所有线段互相平行且各有 1 条对称轴. 这 14 条对称轴中有 7 条各过正 14 边形的一组相对顶点,另 7 条中的每条都平分正 14 边形的一组对边. 前 7 组平行线中每组有 6 条线,另有两个顶点在对称轴上,可视为退化平行线段,称为该组平行线的奇点. 后 7 组平行线中每组有 7 条线段,没有奇点. 5 个红顶点间可以连 10 条线,称之为红线段. 于是问题归结为能否找出一组平行线,其中既无红线也无红奇点. 将红奇点和红线统称为红元素,于是问题在于能否证明这 15 个红元素至多落于 13 组平行线中.

在正 14 边形中,所有边和对角线只有 7 种不同长度. 于是由抽屉原理知至少有两条红线长度相等.

(1) 设有 3 条红线长度相等,则 3 条中总有两条没有公共端点,从而以它们的 4 个端点为顶点的四边形是等腰梯形或矩形. 若为矩形,则两组对边各属于一组平行线,因此有一组平行线中没有红元素. 若为等腰梯形,则上下两底的红线属于同一组平行线. 此外,3 条等长线段有 6 个端点,而红点只有 5 个,故必有两条等长红线有 1 个公共端点. 显然,这个公共端点恰为另两个端点连线所在的一组平行线的奇点. 这又导致有一组平行线中没有红元素.

(2) 设 10 条红线中长度相等的线段至多两条,于是至少有 3 对红线分别等长.

(a) 设有一对等长红线没有公共端点,则二者的 4 个端点构成矩形或等腰梯形. 两种情形在(1) 中都已讨论过. 这里只须指出,当为等腰梯形时,梯形的两腰和两条对角线各为 1 组等长线段. 由于至少有 3 对等长红线,故还有一组等长红线,其 4 个端点异于梯形的 4 个顶点. 由

此还可得出两个红元素属于同一组平行线.

(b) 任何一对等长红线都有公共端点,则每点至多引出一对等长红线,否则能找到一组没公共端点的等长红线.每对有公共端点的等长线段都导致两个红元素属于同一组平行线.

综上可知,无论哪种情形,都有一组平行线中没有红元素.故知所求的最小自然数 $n = 14$.

[**解 2**] 对于 $n \leqslant 13$ 的正 n 边形都不满足题中要求的证明同解1.下面证明正14边形具有题中所要求的性质.

正14边形 $A_1A_2\cdots A_{14}$ 中有7条对称轴是不通过顶点而各平分一组对边的.我们按 A_i 的下标 i 的奇偶性而把 A_i 称为奇顶点或偶顶点.显然,在以上述7条对称轴之一为对称轴时,每组对称顶点的奇偶性互异.

设5个红顶点中有 m 个奇顶点,$0 \leqslant m \leqslant 5$,于是有 $5 - m$ 个偶顶点.于是染红色的奇顶点与染红色的偶顶点间的连线条数为

$$m(5 - m) \leqslant 6.$$

从而这些连线的中垂线至多6条.因此上述7条对称轴中至少有1条不垂直平分这6条连线中的任何1条,这条对称轴即为所求.

综上可知,所求的边数 n 的最小值为14.

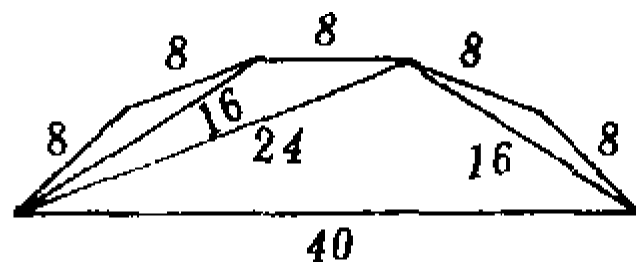
7·25 用互不相交的对角线将正1000边形剖分成若干个三角形,问图形中最少有多少种长度互不相同的对角线?说明理由.

(中国国家集训队测验题,1995年)

[**解**] 将正1000边形的外接圆作出来,相邻两个顶点间的弧长记为1,并用弦所对的弧的长度来表示弦长.于是正1000边形的边长为1而圆的直径为500.

将正1000边形中每相邻两个奇数号顶点间连一条对角线,得到正500边形.再于正500边形的每相邻两个奇数号顶点间连一条对角线,得到正250边形.再用长为8的对角线连成正125边形.然后每隔4点连一条长为40的对角线,得到正25边形.再于其中连5条长为200的对角线得到正五边形.最后从正五边形的一个顶点引出两条长为400的对角线,将正五边形分成3个三角形.对于由1条长为40,5条长为8的对角线围成的凸六边形,像图中所示那样分成4个三角形.对于由1条长为200,5条长为40的对角线围成的凸六边形也照此办理.至此,就将正

1000 边形剖分成了 998 个三角形. 其中所有对角线只有 10 种不同长度:2,4,8,16,24,40,80,120,200 和 400. 由此可见,所求的最小值不超过 10.



下面我们来证明,在任何三角剖分中,所用到的长度不同的对角线至少有 10 种. 若不然,设有某种剖分中至多用到 9 种长度不同的对角线. 为导出矛盾,我们先来给出两个引理:

引理 1　若剖分中有一条对角线的长度 $d > 2^k$,则存在 k 条长度互不相同的对角线,长度为 $l_k, l_{k-1}, \cdots, l_1$,使得 $d > l_k > l_{k-1} > \cdots > l_1 \geqslant 2$.

这个引理很容易用数学归纳法来证明,这里从略.

引理 2　若有一条对角线 $d > 5$ 和一个以 d 为最大边的不等边三角形,则又存在两条对角线 d_1 和 d_2,使得 $d > d_1 > d_2 \geqslant \frac{d}{3}$.

引理的证明　设不等边三角形的另两边为 d_1 和 b, $d_1 > b$. 若 $b \geqslant \frac{d}{3}$,则取 $d_2 = b$;若 $b < \frac{d}{3}$,则 $d_1 > \frac{2d}{3}$. 从而以 d_1 为最长边的三角形中第 2 长边的长度 $d_2 \geqslant \frac{d}{3}$,即为所求.

回到原题的证明. 考察外接圆圆心所在的三角形. 显然,它的最长边 l_1 满足不等式 $334 \leqslant l_1 \leqslant 500$. 若 $l_1 \leqslant 400$,则此三角形的最短边 $l_2 \geqslant 200$;若 $l_1 > 400$,则以 l_1 为一边且不含圆心的三角形中,第 2 长边的长度 $l_2 > 200$(若圆心在 l_1 上,结论也成立),即总有 $499 \geqslant l_2 \geqslant 200$.

若 $l_2 \geqslant 257$,则由引理 1 知这时有 10 条长度互不相同的对角线,矛盾. 故有 $200 \leqslant l_2 \leqslant 256$. 若 $l_2 \leqslant 255$,则考察以 l_2 为最长边的三角形. 若它为不等边三角形,则由引理 2 知存在 $l_3 > l_4 \geqslant 67$,再由引理 1 又知必有 10 条长度互不相同的对角线,矛盾. 若为等腰三角形,则有 $100 \leqslant l_3 \leqslant 127$. 类似地推理可得, $50 \leqslant l_4 \leqslant 63$, $25 \leqslant l_5 \leqslant 31$, $13 \leqslant l_6 \leqslant 15$, $l_7 = 7$. 再由引理 2 得 $l_7 > l_8 > l_9 \geqslant 3$. 从而又可得 $l_{10} \geqslant 2$,矛盾.

设 $l_2 = 256$. 由前段论证知,若某一步出现不等边三角形,立即可导出矛盾. 故在推导中用到的三角形均为等腰三角形. 于是有 $l_3 = 128$, $l_4 = 64$, $l_5 = 32$, $l_6 = 16$, $l_7 = 8$, $l_8 = 4$, $l_9 = 2$.

考察含有中心的三角形,它的周长为 1000. 因为 $256 + 128 < 500$,

所以这个三角形不能是不等边三角形.从而必为等腰三角形.若底大于腰,则腰为 $l_2 = 256$,底为 $l_1 = 488$;若底为 $l_2 = 256$,则 $l_1 = 372$;若底为 $l_3,\cdots,l_9$ 之一,则 $500 > l_1 \geqslant 436$.无论哪种情形,以 l_1 为一边且不含中心的三角形中都必有一条边的长度与 $l_1,l_2,\cdots,l_9$ 都不相同,矛盾.

综上可知,图形中最少有 10 种长度互不相同的对角线.

7·26　在平面上的不自交的 n 边形的所有内角中,最多有多少个锐角?

(匈牙利数学奥林匹克,1970 年)

[解]　设 n 边形中共有 k 个锐角,于是有

$$k \times 90^\circ + (n-k)360^\circ > (n-2) \times 180^\circ.$$

化简得到不等式

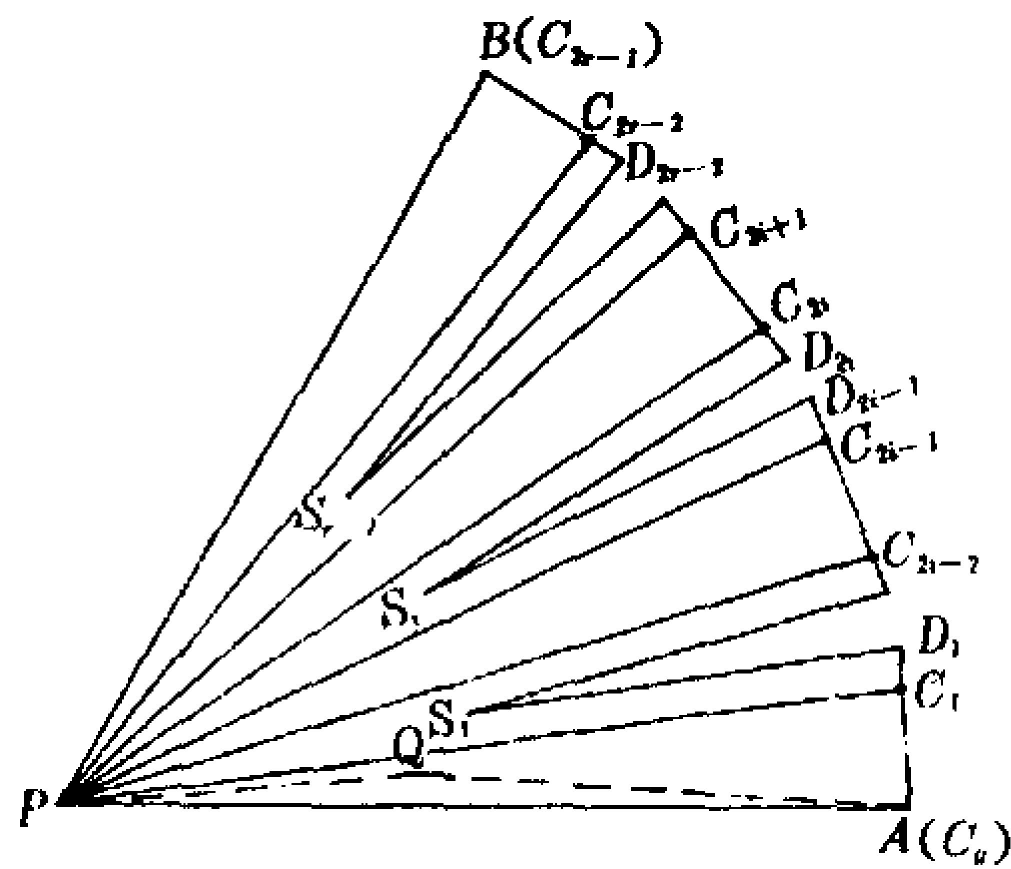
$$3k < 2n + 4.$$

因为上式两端都是整数,故有

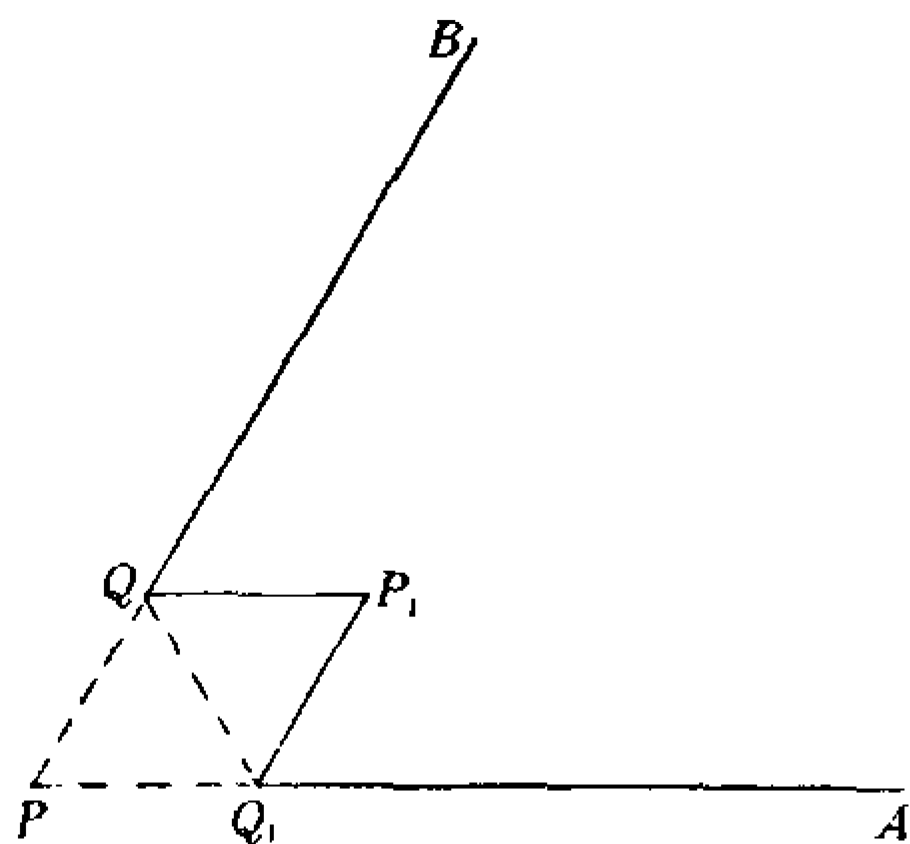
$$3k \leqslant 2n + 3.$$

由此可见,n 边形的内角中锐角的个数不多于 $\left[\frac{2n}{3}\right] + 1$.

下面我们用构造法来说明 $\left[\frac{2n}{3}\right] + 1$ 是可以达到的.首先看 n 是 3 的倍数的情形:$n = 3r$,于是 $\left[\frac{2n}{3}\right] + 1 = 2r + 1$.取一个顶角为 60° 的扇形,记其顶点为 P,弧的两个端点分别为 A 和 B.用分点 $C_1, C_2, \cdots, C_{2r-2}$ 将弧 AB 分成 $2r-1$ 等分.用 S_i 来记 $\triangle C_{2i-1}PC_{2i}$ 的重心,$i = 1,2,\cdots,r-1$.过每个点 S_i 分别作半径 PC_{2i-1} 和 PC_{2i} 的平行线,分别交弦 $C_{2i-2}C_{2i-1}$ 和弦 $C_{2i+1}C_{2i}$ 的延长线于点 D_{2i-1} 和 D_{2i}.这样,我们得到 n 边形 $\sum = PAD_1S_1D_2D_3\cdots D_{2i-1}S_iD_{2i}\cdots D_{2r-2}B$(见图).这个 n 边形中有 $2r+1$ 个锐角,它们的顶点分别为 $P, A, D_1, D_2, \cdots, D_{2r-2}, B$.



当 n 被 3 除余 1 时: $n=3r+1$, $\left[\frac{2n}{3}\right]+1=2r+1$. 这时,只要将上图中的多边形 $\sum$ 的边 PA 改用折线 PQA 来代替就可以了(如上图中虚线所示).



当 $n=3r+2$ 时,只要于上图中以点 P 为顶点在扇形内作一个边长为半径的 $\frac{1}{4}$ 的正三角形 PQ_1Q_2. 然后以边 Q_1Q_2 为轴,作 $\triangle PQ_1Q_2$ 的对称图形 $\triangle P_1Q_1Q_2$. 将多边形 $\sum$ 的边 BP, AP 上的线段 Q_2P 和 Q_1P 去掉并代之以线段 Q_2P_1, Q_1P_1,则得到一个 $3r+2$ 边形且它的内角中有 $2r+2=\left[\frac{2n}{3}\right]+1$ 个锐角.

综上可知, n 边形的内角中最多有 $\left[\frac{2n}{3}\right]+1$ 个锐角.

7·27　在 $m\times n$ 个方格的矩形方格纸上作 1 条直线,求与这条直线相交的方格数的最大值.

(第 26 届莫斯科数学奥林匹克,1963 年)

[解]　这张方格纸除了周界之外,内部有 $m+n-2$ 条网格线. 在方格纸上任作一条直线,至多与每条内部网格线交于 1 点,至多被这些网格线分成 $m+n-1$ 段. 由于每个相交方格中恰有直线的一段,故一条直线至多与 $m+n-1$ 个方格相交.

另一方面,矩形的对角线(当 $m=n$ 时,可将对角线略动一点)恰与 $m+n-1$ 个方格相交. 故知与一条直线相交的方格数的最大值为 $m+n-1$.

7·28　有一个大矩形由 8×9 个相等的小正方形组成,要把它沿着图中实线剪成若干个小矩形,使得组成每个矩形的小正方形都是完整的,分别将每个小矩形中的所有小正方形涂上蓝色或白色,使其中两种颜色的小正方形数正好相等. 设这些小矩形中蓝色的小正方形数分别是 $a_1,a_2,\cdots,a_p$,且 $0<a_1<a_2<\cdots<a_p$. 试求 p 的最大值,并在图中画出 p 为最大值的一种剪法.

(中国湖北省数学竞赛,1979 年)

［解］ 因为每个矩形中两种颜色的小正方形的个数相等，所以在任何一种剪法中，蓝色的小正方形数总共有 36 个，即

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_p = 36.$$

由于 $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_p$，则

$$a_1 \geqslant 1, a_2 \geqslant 2, \cdots, a_p \geqslant p.$$

于是有

$$\begin{aligned} 36 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_p \\ &\geqslant 1 + 2 + \cdots + p \\ &= \frac{p(p+1)}{2}. \end{aligned}$$

解得 $\qquad p \leqslant 8.$

如图可以得到 $p = 8$ 的一种剪法.

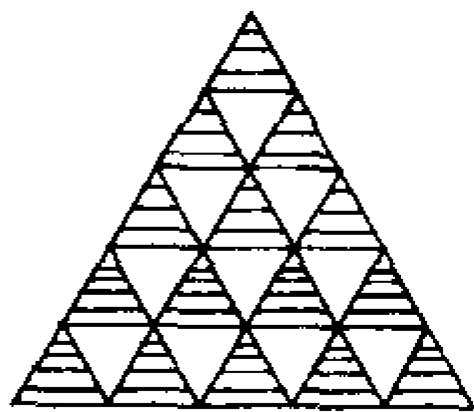
所以 p 的最大值是 8.

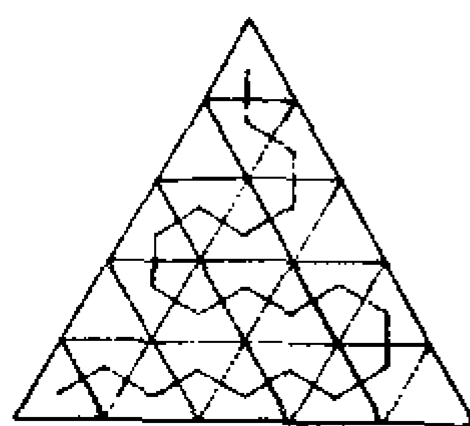
7·29 (1) 一座城堡设计成边长为 100 米的等边三角形，它被分成 100 个等边三角形的厅，厅的每面墙长 10 米，且在厅之间的每面墙的中部都装了门. 试证如果一个人想尽量参观整个城堡但进入每个厅至多一次，那么它能参观到的厅不多于 91 个.

(2) 把正三角形的每边都 k 等分，经过分点分别作平行于另两边的直线，结果三角形被分成 k^2 个小三角形. 把一串小三角形称为"链"，如果每一个小三角形与它前面的小三角形都有公共边，而且每个小三角形不出现两次. 问一条链中最多能有多少个小三角形?

(第 4 届全苏数学奥林匹克，1970 年)

［解］ 我们把每个小三角形都涂上黑白两色之一，如下图所示. 结果是黑三角形比白三角形多 k 个. 因此，所有白三角形和黑三角形的





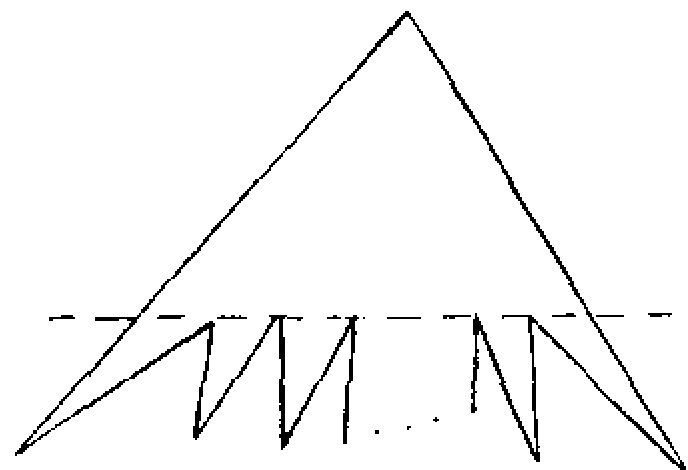
个数分别为 $\frac{1}{2}(k^2 - k)$ 和 $\frac{1}{2}(k^2 + k)$. 显然，在三角形链中，黑白三角形相间排列，因此黑三角形至多比白三角形多一个. 故知所有三角形的个数至多为 $k^2 - k + 1$ 个. 上面右图所示即为一个恰有 $k^2 - k + 1$ 个三角形的链. 综上可知，三角形链中最多有 $k^2 - k + 1$ 个三角形. 特别当 k

$= 10$ 时，$k^2 - k + 1 = 91$.

7·30　沿某条直线将一块 1000 边形(不一定是凸的)的厚纸板切割一次，将它分成了若干个新多边形，问其中最多有多少个三角形？

(第 34 届莫斯科数学奥林匹克，1971 年)

[解]　将右图所示的 1000 边形沿虚线切开，可得 501 个三角形.



注意，在切得的每个三角形中，有一边是切口，另两边是从原多边形的相邻两边上切下来的. 而且位于切口同侧的所有三角形，它们的边除切口外，都来自原多边形的不同的边；位于切口两侧的两个三角形，仅当它们同为最左或最右的三角形时，才可能各有 1 条边原是多边形的同一条边切成的. 因此，多边形至多能被切出 501 个三角形.

综上可知，1000 边形最多可切出 501 个三角形.

7·31　在正方形中分布着 k 个点($k > 2$). 试问最少应当将正方形划分为多少个三角形，才能使每个三角形中至多有 1 个给定点？

(第 30 届莫斯科数学奥林匹克，1967 年)

[解]　我们先来证明如下的命题：如果在一个三角形中给定 k 个点，则总可以把这个三角形划分为 k 个三角形，使每个三角形中恰有一个给定点.

当 $k = 1$ 时命题显然成立. 对于 $h \geqslant 2$，设当 $k < h$ 时命题成立. 当 $k = h$ 时，总可以经三角形的某顶点引一条线直到对边，将三角形一分为二，且使分成的两个三角形中，每个内部都有给定点. 于是由归纳假设即得所欲证.

对于正方形，如果有一条对角线上没有给定点，则可用这条对角线把它分成两个三角形. 如果两条对角线上都有给定点，则可在某条边上选一点，使它与不在它所在边上的两个顶点的连线上没有给定点且所分成的 3 个三角形中至少有两个中含有给定点. 由上述命题即知，至多把正方形分成 $k + 1$ 个三角形即可使得每个三角形中至多有 1 个给定点.

另一方面，当 k 个给定点都位于从中心开始的某半条对角线上时，无论怎样划分，至少有一个三角形中没有给定点，故至少要划分成 $k +$

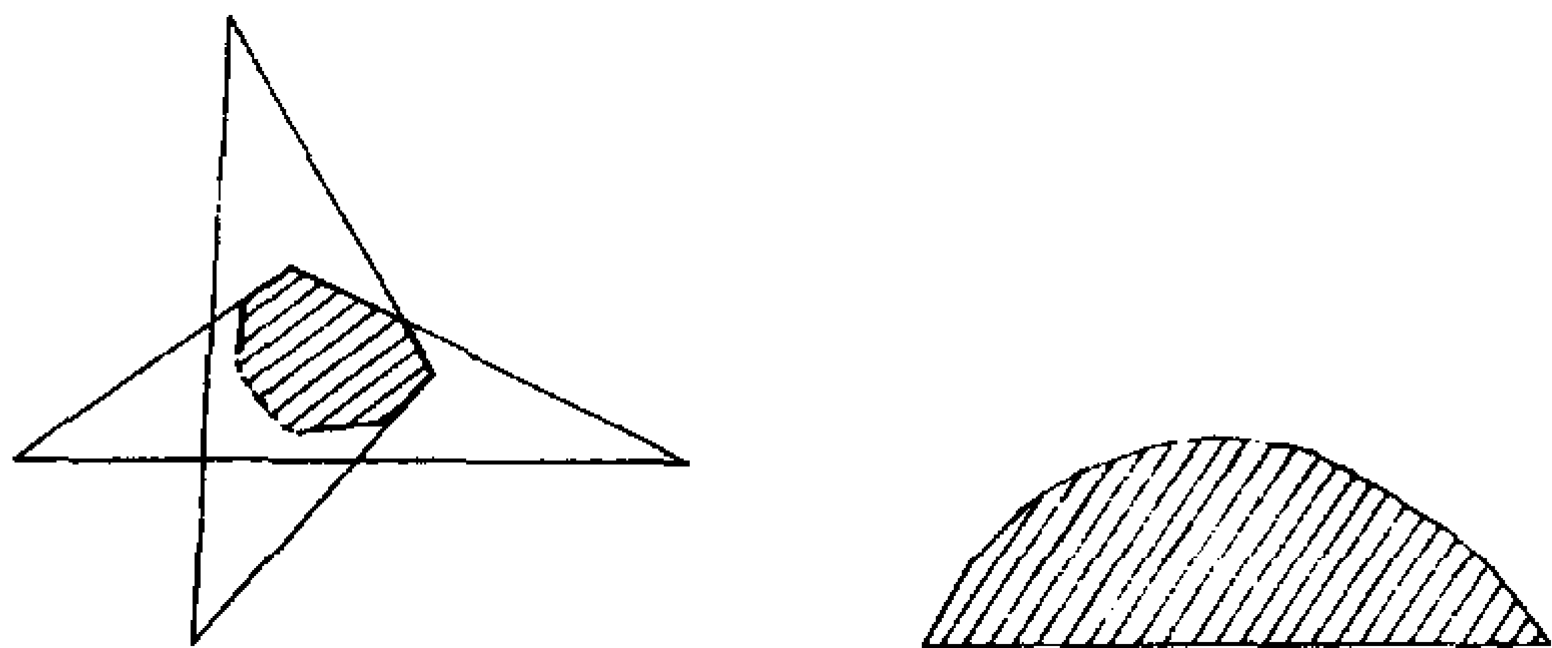
1 个三角形才能满足要求.

综上可知,最少应将正方形划分为 $k+1$ 个三角形.

7·32　求最小自然数 n,使得每个凸 100 边形都可以表成 n 个三角形的交.

(第 40 届莫斯科数学奥林匹克,1977 年)

[解]　从凸 100 边形的顶点中每隔 1 点选出 1 点,共选定 50 个顶点.以这些顶点中的每点作为三角形的 1 个顶点,以由这个顶点引出的凸 100 边形的相邻两边所在的直线作为三角形两边所在的直线,并在两条直线上各取 1 点作为三角形的另两个顶点,使三角形包含凸多边形在自己的内部或边上.显然,凸 100 边形恰为这 50 个三角形的交(见下左图).



另一方面,当凸 100 边形中有 1 条边很长而其他边都很短时,例如取弓形的内接100边形,使其他99边都相等时,将它表为若干个三角形之交时,任何一个三角形都至多截出多边形的两条短边.从而至少需要 50 个三角形才能截出凸 100 边形.

综上可知,所求的最小自然数 $n=50$.

7·33　空间中有 1989 个点,其中任何 3 点都不共线.把它们分成点数各不相同的 30 组,在任何 3 个不同的组中各取一点为顶点作三角形.试问为使这种三角形的总数最大,各组的点数应分别为多少?

(第 4 届中国中学生数学冬令营,1989 年)

[解]　当把这 1989 个给定点分成 30 组,点数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_{30}$ 时,满足题中要求的三角形总数为

$$S=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 30} n_i n_j n_k. \qquad ①$$

由于把1989个点分成30组的不同分法只有有限多种,故必有一种分法

使 S 达到最大值.

设 $n_1 < n_2 < \cdots < n_{30}$ 为使 S 达到最大值的分法的各组点数,于是有 $n_1 + n_2 + \cdots + n_{30} = 1989$,且它们具有如下特点:

(1) $n_{i+1} - n_i \leqslant 2, i = 1,2,\cdots,29$. 若不然,必有某个 i,使得 $n_{i+1} - n_i \geqslant 3$. 不妨设 $i = 1$. 这时我们将 ① 式改写为

$$S = n_1 n_2 \sum_{k=3}^{30} n_k + (n_1 + n_2) \sum_{3 \leqslant j < k \leqslant 30} n_j n_k + \sum_{3 \leqslant i < j < k \leqslant 30} n_i n_j n_k. \qquad ②$$

令 $n'_1 = n_1 + 1, n'_2 = n_2 - 1$,于是 $n'_1 + n'_2 = n_1 + n_2, n'_1 < n'_2$, $n'_1 n'_2 > n_1 n_2$. 由 ② 式不难看出,当用 n'_1, n'_2 代替 n_1, n_2 时,S 的值变大,矛盾.

(2) 使 $n_{i+1} - n_i = 2$ 的 i 值不能多于 1 个. 若有 i 和 j, $1 \leqslant i < j \leqslant 29$,使得 $n_{i+1} - n_i = 2, n_{j+1} - n_j = 2$,则当用 $n'_i = n_i + 1, n'_{j+1} = n_{j+1} - 1$ 代替 n_i 和 n_{j+1} 时,S 的值将变大,矛盾.

(3) 若 30 组的点数从小到大每相邻两组都差 1,则可设它们分别为 $k - 14, k - 13, \cdots, k, k + 1, \cdots, k + 15$. 这时有

$(k - 14) + (k - 13) + \cdots + k + (k + 1) + \cdots + (k + 15) = 30k + 15$,即点数之和为 5 的倍数,不可能是 1989. 由此及(2)便知,相邻两组点数之差恰有 1 个为 2,其余的都是 1.

(4) 由(3)知可设

$$\begin{cases} n_j = m + j - 1, & j = 1,\cdots,i, \\ n_j = m + j, & j = i + 1,\cdots,30. \end{cases}$$

于是有

$$\sum_{j=1}^{i} (m + j - 1) + \sum_{j=i+1}^{30} (m + j) = 1989,$$

$$30m - i = 1524, \qquad ③$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant 29$. 由 ③ 解得 $m = 51, i = 6$. 由此可知使 S 取得最大值的 30 组的点数分别为 $51, 52, \cdots, 57, 58, 59, \cdots, 81$.

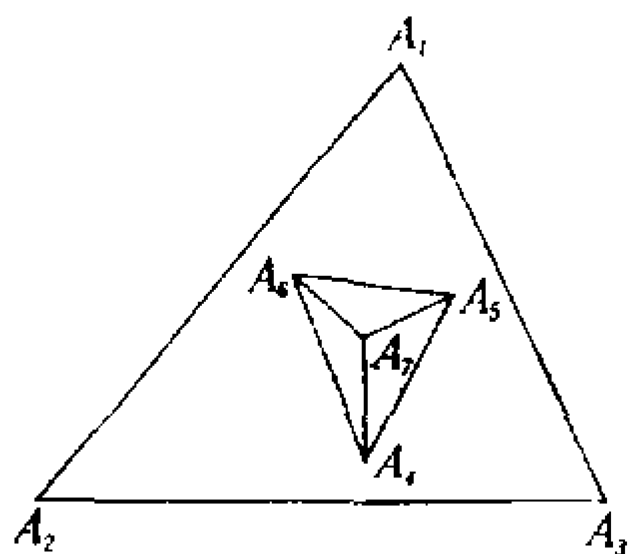
7·34 在平面上给定 7 点 $A_1, A_2, \cdots, A_7$,其中任何 3 点都不共线且它们的凸包是 $\triangle A_1A_2A_3$. 问以它们中的 4 个点为顶点构造凸四边形,最多能构造多少个?

(中国代表队模拟考试题,1991 年)

[解] 我们按$\{A_4,A_5,A_6,A_7\}$的凸包为三角形还是四边形，分两种情形来讨论.为方便计，我们把前3点称为外点，后4点称为内点.

(1) 设4个内点的凸包是$\triangle A_4A_5A_6$.这时，4个内点可以组成6个不同的两点组，每组两点决定一条直线，它恰与$\triangle A_1A_2A_3$的两条边相交.于是直线上的两个内点及与直线不交的边的两个端点合起来，4点就构成一个凸四边形.由此可知，两个内点和两个外点构成的凸四边形共有6个.

下面来统计由3个内点和1个外点构成的凸四边形的个数.为此，我们引入“角的容量”的概念.将三角形一个内角的两条边延长，如果在由两边的延长线和三角形第3边所界的区域F中有一个给定点，则这点和三角形的3个顶点一起可作为凸四边形的4个顶点.所以，我们把区域F内给定点的个数称为该角的容量.这样一来，每个角的容量恰为三角形的3个顶点和这个角内，三角形之外的点构成的凸四边形的个数.



4个内点构成4个三角形，共有12个内角.容易验证，它们的容量之和至多为9，所以由3个内点和1个外点构成的凸四边形至多9个.故当4个内点凸包为三角形时，至多有15个凸四边形.

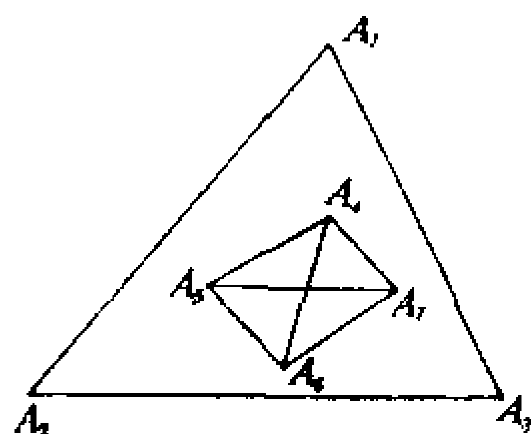
(2) 设四边形$A_4A_5A_6A_7$为凸四边形.我们先给出一个引理：

引理　在四边形$A_4A_5A_6A_7$中，

(i) 若有一对邻角的容量同时为2，则另两角的容量均为零；

(ii) 对角的容量不能同时为2.

引理的证明很容易，这里略去.根据这个引理可知，四边形$A_4A_5A_6A_7$的4个内角的容量之和不大于5.在下图所示的图中，四边形$A_4A_5A_6A_7$的4个内角的容量之和恰好为5.所以，由3个内点和1个外点构成的凸四边形最多10个.像(1)中一样地可知，由两个内点和两个外点构成的凸四边形总是6个，再加上四边形$A_4A_5A_6A_7$，共有17个凸四边形.



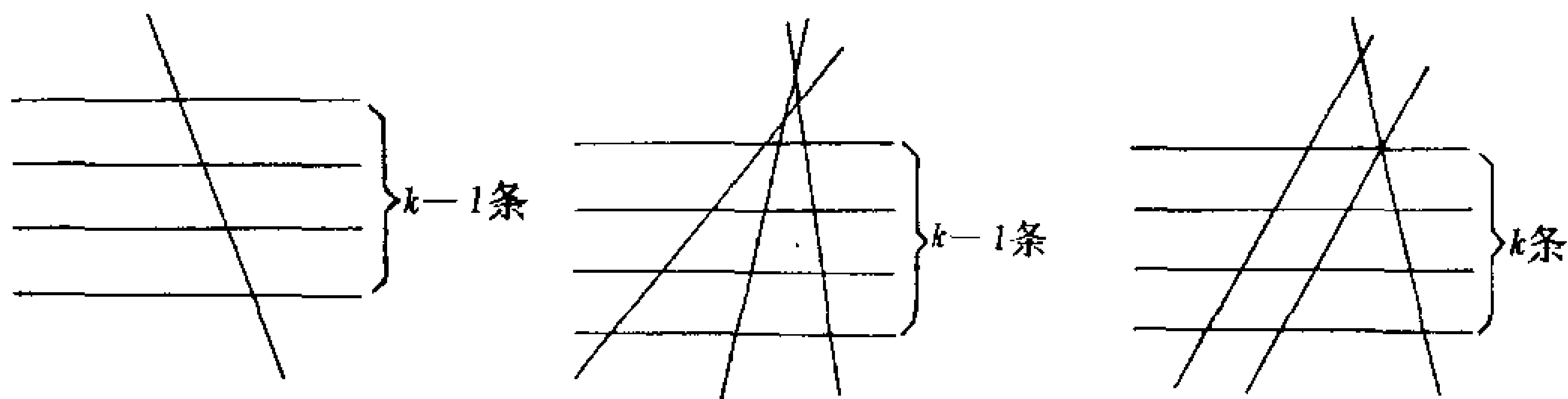
综上可知，最多有17个凸四边形.

7·35　试证对任意一个大于某个数 n_0 的 $n \in N$，都可以用一些直线将平面分成 n 个区域，而且这些直线中一定有相交的，并求最小的 n_0.

（第 21 届国际数学奥林匹克候选题，1979 年）

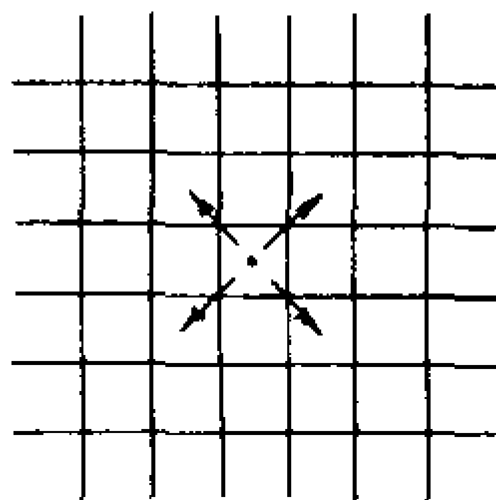
[解]　按已知，使用的直线中至少有两条相交，它们把平面分成 4 个区域. 再任作 1 条直线，至少还要增加 2 个区域，所以恰有 5 个区域的分法是不可能的. 因此有 $n_0 \geqslant 5$.

另一方面，任意 $n > 5$ 个区域的分法都是可以实现的. 对于 $n = 2k, 4k+3, 4k+5$ 的情形，可按下图所示的方法来划分：



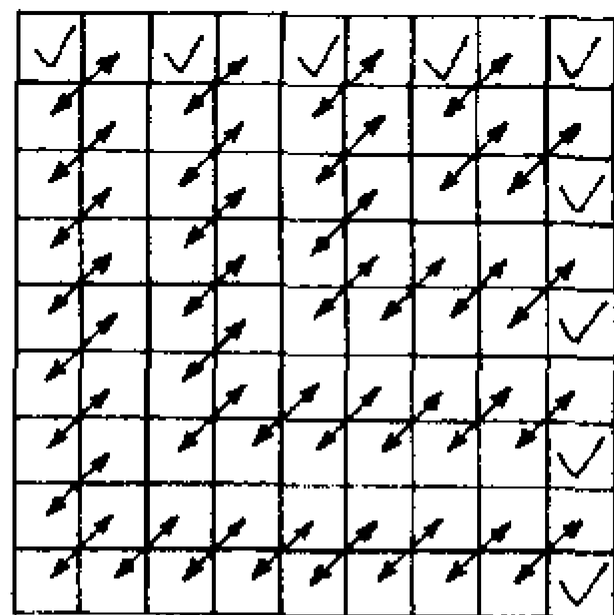
可见，最小的 $n_0 = 5$.

7·36　在 9×9 的方格表的每个小方格中都有 1 只甲虫. 听到哨声后，每一只甲虫都沿对角线方向迁移到一个相邻方格中（如图所示）. 这样一来，有些方格中就可能有好几只甲虫，而另一些方格中则没有甲虫. 求没有甲虫的空格的最小可能个数.



（第 15 届全俄数学奥林匹克，1989 年）

[解]　将 9 列方格交替地涂上黑色与白色，使得每列方格同色，每相邻两列方格异色. 于是在迁移过程中，白格中的甲虫进入黑格，而黑格中的甲虫进入白格. 但表格上有 36 个白格和 45 个黑格，故知迁移之后至少有 9 个黑格中没有甲虫，即至少有 9 个空格.



另一方面，若甲虫的迁移按图中所示的情形进行. 显然，表格中恰有 9 个空格，即画有对号的 9 个方格.

综上可知，表格中最少有 9 个空格.

7·37　用规格为 $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3$ 的正方形

拼成一个 23×23 的正方形,最少需用多少个 1×1 的正方形?

(第 23 届全苏数学奥林匹克,1989 年)

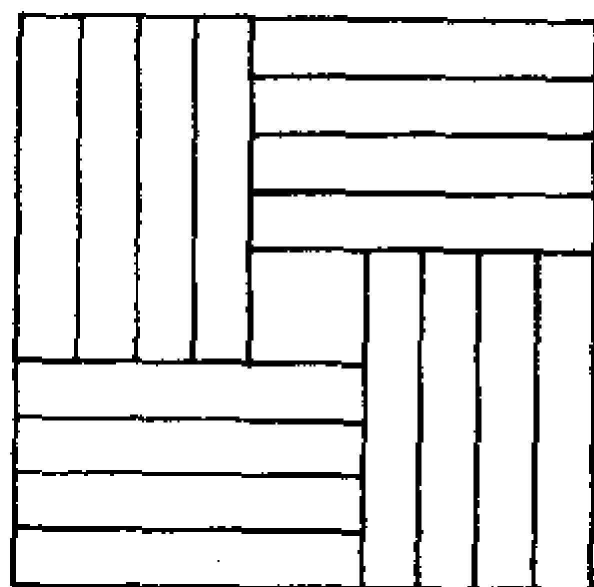
[解] 规格为 23×23 的正方形除去中央的一个方格后可对称地分成 4 个 11×12 的矩形.每一个矩形又可分成 8×12 和 3×12 的两个矩形,前者可用 24 个 2×2 的正方形拼成,后者可用 4 个 3×3 的正方形拼成.可见,只用 1 个 1×1 的正方形,其余的均用 2×2 和 3×3 的正方形即可拼成 23×23 的正方形.

将 23×23 的正方形的行从上到下编号并将号码为 $1,4,7,\cdots,22$ 的 8 行方格染成黑色,而其余方格染成白色.于是任何一个 2×2 或 3×3 的正方形中都有偶数个白格,但白格总数为奇数,故全用 $2\times2,3\times3$ 的正方形拼成 23×23 的正方形是不可能的.所以,最少需用一个 1×1 的正方形.

7·38 欲从规格为 $2n\times2n$ 的正方形中剪出规格为 $1\times(n+1)$ 的矩形,问最多能剪出多少个?

(第 50 届莫斯科数学奥林匹克,1987 年)

[解] 像右图所示那样来剪出 $1\times(n+1)$ 的矩形,每组都有 $n-1$ 个矩形,共有 $4(n-1)$ 个矩形.余下的部分面积为 4,当 $n\geqslant4$ 时,已不够一个矩形的面积.故当 $n\geqslant4$ 时,最多能剪出 $4n-4$ 个矩形.



当 $n=1$ 时,最多剪出 2 个;当 $n=2$ 时,最多剪出 5 个.

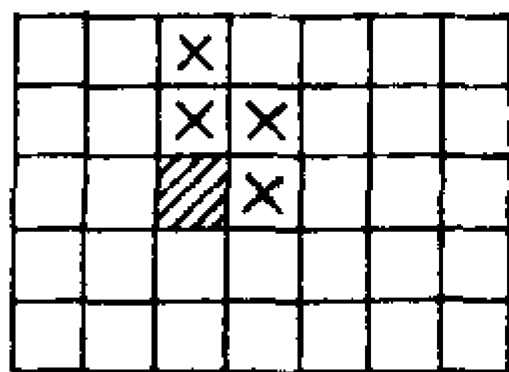
当 $n=3$ 时,将 6×6 的正方形分成 36 个方格,并像右图所示那样填人数字 1,2,3,4.则剪出的每个 1×4 的矩形中,都恰有 1,2,3,4 各 1 个.但是,表中共有 9 个 1,10 个 2,9 个 3 和 8 个 4,故不可能剪成 9 个矩形.从而知这时最多能剪出 8 个矩形.

1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3

综上可知,当 $n=1$ 时,最多可剪出 2 个矩形;当 $n=2$ 时,最多可剪出 5 个矩形;当 $n\geqslant3$ 时,最多可剪出 $4n-4$ 个矩形.

7·39 在一个游戏中,甲乙二人轮流从一个 5×7 的方格棋盘中移"吃格".为了吃格,游戏者选定一个没被吃掉的格子,然后移子到该格

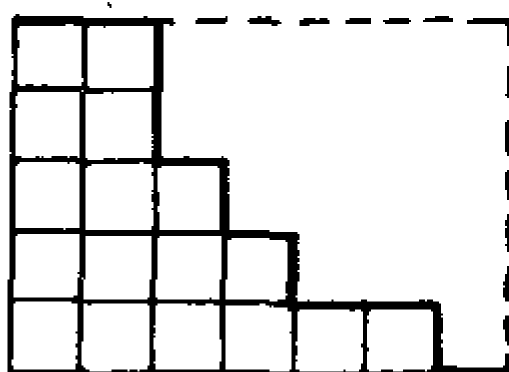
之中，于是由这个格建立的“第1象限”(由这个方格的左下角顶点向上和向右分别引射线所构成的直角形区域)中的所有格子都被吃掉. 例如，右图中是把子移到阴影格中，于是4个画×的方格和阴影方格都被吃掉，其中虚线表示的方格是在此之前吃掉的. 游戏的目的是让对手吃最后1格. 上图是游戏过程中出现的一种情况. 问游戏过程中最多可能出现多少种不同的情况?



(第10届美国数学邀请赛，1992年)

[解] 按规定，如果在游戏过程中棋盘上的某个方格被吃掉了，那么位于它上方，右方以及右上方的所有方格也都被吃掉了. 所以，对于每一个可能出现的图形，从左往右看时，图形的高度是不增的. 反之，对于任何一个满足这一条件的图形，都可对棋盘经若干次吃格而得到. 因此，我们只须计算所有这种图形的数目.

对于每个这样的图形，它的形状被作为它的尚存部分和吃掉部分的边界折线所惟一确定(即图中粗实线所示的折线). 这条折线由12段组成，每段恰为某方格的一条边，其中恰有7个是水平段，5个是竖直段. 显然，这条折线又被它的7个水平段的位置所惟一确定. 因为7个水平段的位置共有 $C_{12}^{7} = C_{12}^{5} = 792$ 种不同情形，所以在游戏过程中最多可能出现792种不同情况.



7·40 把一块8×8个方格的国际象棋棋盘划分成 p 个矩形，使所分成的矩形满足下列条件:

(1) 每个矩形的边都是棋盘的网格线;

(2) 每个矩形中，白格与黑格个数相等;

(3) 如果第 i 个矩形中白格数为 a_i，则有 $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$.

试在所有可能的分法中，求出 p 的最大值，并且对这个最大值 p，列出所有可能的数列 $a_1, a_2, \cdots, a_p$.

(第16届国际数学奥林匹克，1974年)

[解] 由已知有

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_p = 32. \quad ①$$

由(3)又有 $a_i \geqslant i, i = 1,2,\cdots,p$，于是由①有

$$1 + 2 + \cdots + p \leqslant 32. \quad ②$$

由②解得 $p \leqslant 7$.

因为 $1+2+3+4+5+6+7=28$,与 32 之差为 4,故只须将 4 分配到各项中去且保持数列的递增性.因而得到所有可能的数列为

(i)1,2,3,4,5,6,11;

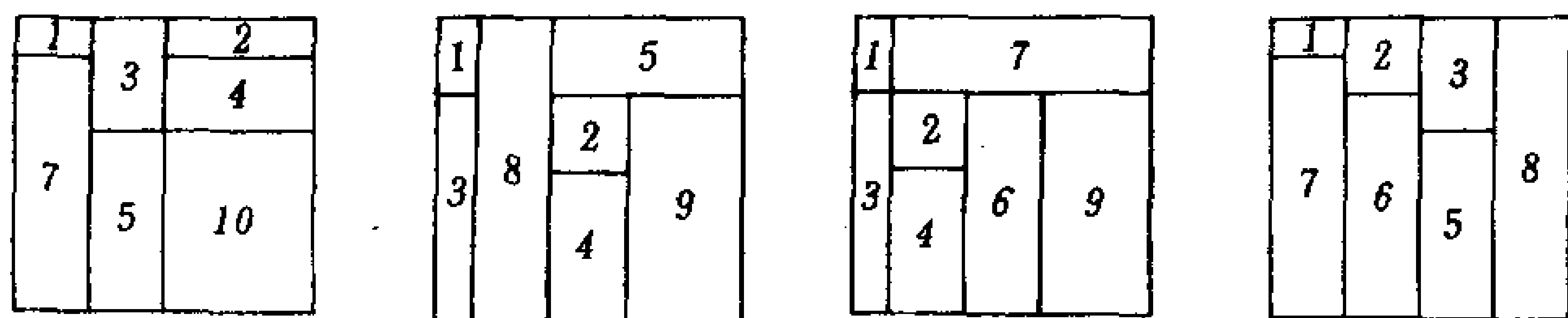
(ii)1,2,3,4,5,7,10;

(iii)1,2,3,4,5,8,9;

(iv)1,2,3,4,6,7,9;

(v)1,2,3,5,6,7,8.

因划分成的 7 个矩形中不会出现有 22 个格子的矩形,故(i)不能实现.其他四种情形均可实现,见下图.



故知 7 是 p 的最大值,(ii)—(v)是满足题中要求的所有可能的数列.

7·41　n 个圆周最多能把球面分割成多少部分?

(基辅数学奥林匹克,1949 年)

[解]　显然,当这 n 个圆两两相交且任何 3 个圆不共点时,它们把球面分成的部分数最多.下面我们用递推法来计算这个最大值.

设球面被 k 个圆分成诸部分的最大块数为 m_k.考察第 $k+1$ 个圆 C_{k+1},它与前 k 个圆中的每一个都交于两点,共有 $2k$ 个交点.这些交点将圆周 C_{k+1} 分成 $2k$ 段弧,而这些弧中的每一段都恰好将它所穿过的那个部分区域一分为二.所以,圆 C_{k+1} 的加入使得球面被分成的诸部分总数增加了 $2k$,因而有

$$m_{k+1}=m_k+2k.$$

注意 $m_1=2$,由上式递推便得

$$m_n=2(n-1)+2(n-2)+\cdots+4+2+2=n^2-n+2,$$

即 n 个圆最多能把球面分成 n^2-n+2 个部分.

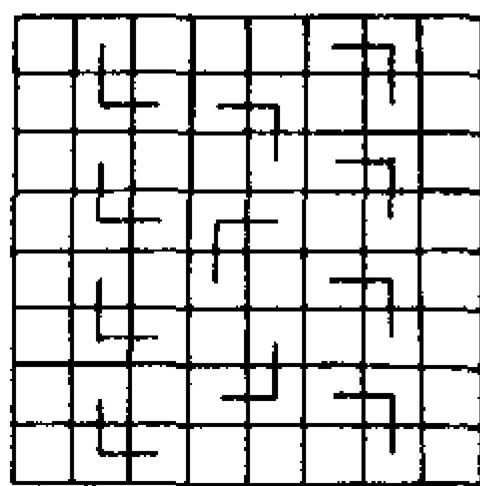
7·42　(1)在 8×8 个方格的正方形方格板上,最少要放置多少块

形如 ⊟ 的“角形”，使得再放上一个角形时，必然产生重叠？

(2) 在 1987×1987 个方格的正方形纸板上，随意剪去一个方格，求证余下部分总可以完全分割成若干个角形 ⊟ .

(第 21 届全苏数学奥林匹克，1987 年)

[解] (1) 为了满足要求，每个 2×2 的正方形至少要被盖住两个方格，从而整个方格板至少要被盖住 32 个方格，故知至少要用 11 个角形.



右图所示的方格板上放了 11 个角形且如再放角形必产生重叠. 故知所求的最小值为 11.

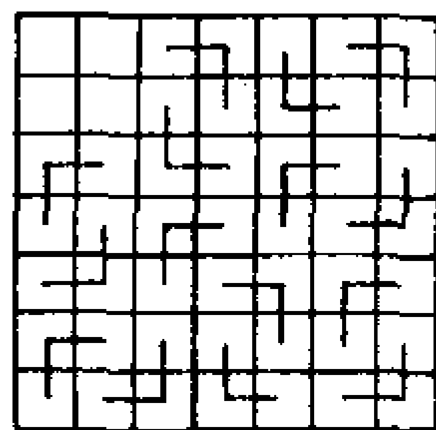
(2) 我们用数学归纳法来证明结论对 $(6n+1)\times(6n+1)$ 的正方形方格板成立.

首先，对于 $n=1$，即 7×7 的正方形，由对称性知可设去掉的一个方格位于左上角及对角线及其上方的 10 个方格中，于是只须分别考察下列三种情形：

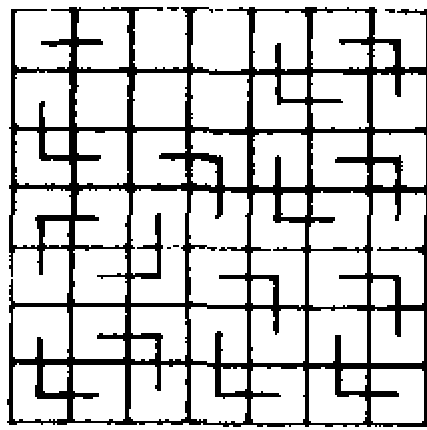
(i) 设去掉的方格在左上角的 2×2 正方形中，这时可分割如图(a)所示.

(ii) 设去掉的方格在上方左数第 2 个 2×2 的正方形中，这时可分割如图(b) 所示.

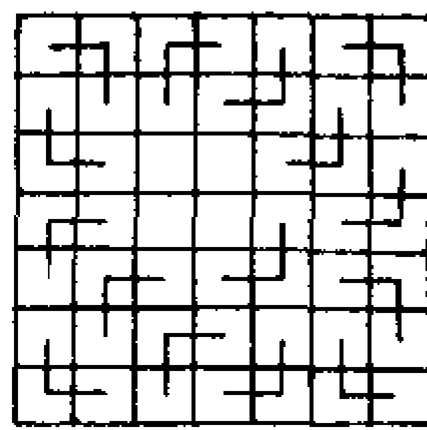
(iii) 设去掉的方格位于第 3,4 行与第 3,4 列相交的 2×2 的正方形中，这时可分割如图(c) 所示.



(a)



(b)



(c)

综上可知，当 $n=1$ 时结论成立.

设当 $n=k$ 时成立，则当 $n=k+1$ 时，$(6k+7)\times(6k+7)$ 的正方形可以分解为 4 块：$(6k+1)\times(6k+1)$ 的正方形. 两块 $6k\times6$ 的矩形及一块 7×7 但少去角上一格的缺角正方形. 由对称性知可设去掉的

一格在第一块之中，于是由归纳假设便知结论成立.

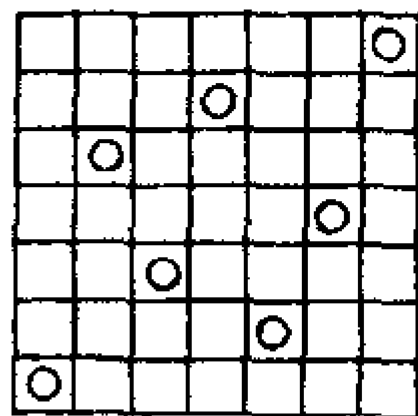
特别地，当 $n = 331$ 时，$6n + 1 = 1987$. 故知原题中结论成立.

7·43 用水平和竖直的直线网把一块正方形黑板分成边长为1的 n^2 个小方格，试问对于怎样的最大自然数 n，一定可以选出 n 个小方格，使得任意面积不小于 n 的矩形中都至少包含有上面选出的一个小方格(矩形的边都在网格线上)？

(第19届全俄数学奥林匹克，1993年)

[解] $n = 7$.

显然，如果选出 n 个小方格满足问题的条件，那么在每一行和每一列都恰有一个选定的小方格(我们规定 $n \geqslant 3$，显然 $n = 2$ 不会是最大的).



我们取定 A 行，其中第一个方格是选定的. 和 A 相邻的 B 行，另外再取 C 行(C 行的选取满足它或者与 A 相邻但不与 B 重合，或者与 B 相邻但不与 A 重合).

假设 b 是 B 行中的选定方格的位置(即第 b 个方格是选定的).

如果 $b \leqslant n - \left[\frac{n}{2}\right]$ 或 $b > \left[\frac{n}{2}\right] + 1$，则在 A，B 两行中就可以找到一个面积不小于 n，但其中已不包含选定小方格的矩形. 所以必定有

$$n - \left[\frac{n}{2}\right] < b < \left[\frac{n}{2}\right] + 2.$$

我们考虑 A，B，C 三行与第 $2, 3, \cdots, n - \left[\frac{n}{2}\right]$ 列，以及第 $\left[\frac{n}{2}\right] + 2, \cdots, n$ 列所构成的两个矩形. 在这两个矩形中都不含有 A，B 两行中已选定的小方格.

这时，如果 $n > 7$，则两个矩形的面积都不小于 n，但是 C 行中只能有一个选定的小方格，即这两个矩形中必定有一个是不包含有选定的小方格的，与题设要求矛盾.

因而 $n \leqslant 7$.

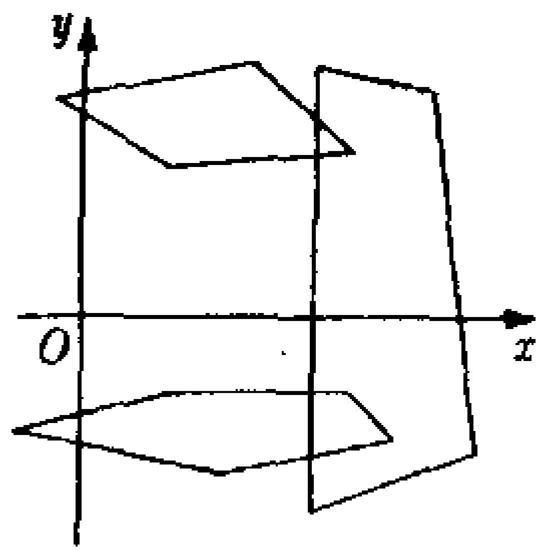
图中给出了 $n = 7$ 且满足题设要求的例子.

7·44 平面上一组有限多个多边形，如果对其中的任何两个，都有一条过原点的直线与二者相交，则称这组多边形是恰当放置的.

求最小自然数 m，使得对任意一组恰当放置的多边形，均可作 m 条过原点的直线，使得这组多边形中的任何一个都至少与这 m 条直线中的一条相交.

（中国国家集训队选拔试题，1990 年）

［解］ 在右图所示的有 3 个多边形的情况下，任何一条过原点的直线都至多与其中的两个多边形相交，故知 $m \geqslant 2$.



因为多边形只有有限多个，故其中必有一个多边形对原点的张角最小，记这个多边形为 M 并记 M 对原点张角 α 的两边所在的两条直线分别为 l_1 和 l_2，则组中任一多边形都至少与这两条直线中的一条相交.事实上，设 M' 是异于 M 的任一多边形.由已知，应有一条过原点的直线 l 与 M，M' 都相交.从而直线 l 在 l_1 与 l_2 之间（即 l 与 $\angle\alpha$ 内部相交）或与 l_1，l_2 之一重合.若为后者，则问题已经解决.若 l 确在 l_1 与 l_2 之间，则由于多边形 M' 对原点的张角 β 不小于 α，故必有一条过原点的直线 l' 与 M' 相交，但不与 $\angle\alpha$ 的内部相交.若 l' 与 l_1，l_2 之一重合，则问题解决.若 l' 在 $\angle\alpha$ 之外，这恰好意味着 l_1，l_2 中至少有一条在 l 与 l' 之间的 $\angle\beta$ 内，不妨设为 l_1.于是多边形 M 和 M' 都与直线 l_1 相交.所以，所求的最小自然数 $m = 2$.

7·45 对于两个凸多边形 S 和 T，如果 S 的顶点都是 T 的顶点，则称 S 是 T 的子凸多边形.

(1) 求证当 n 是奇数时（$n \geqslant 5$），对于凸 n 边形，存在 m 个无公共边的子凸多边形，使得原多边形的每条边及每条对角线都是这 m 个子凸多边形的边.

(2) 求出上述 m 的最小值，并给出证明.

（中国国家集训队选拔试题，1994 年）

［解］ (1) 设 $n = 2k + 1$ 而多边形为 $A_0A_1\cdots A_{2k}$.用顶点的下标集合 $(i, j, \cdots, k)$ 来记以 $(A_i, A_j, \cdots, A_k)$ 为顶点的凸子多边形.考察下列一组子多边形：

$$(o, i, k+i), i = 1, 2, \cdots, k,$$

$$(i, i+j, i+k, i+j+k), j = 1, 2, \cdots, k-1, i = 1, 2, \cdots, k-j.$$

显然,这一组子多边形共有 $k+\frac{1}{2}k(k-1)=\frac{1}{2}k(k+1)$ 个.前 k 个三角形的边或者是从点 A_0 引出的,或者是形如 A_iA_{k+i},而后者恰为后面的四边形的对角线,因而与四边形的边不同.另一方面,后面的 $\frac{1}{2}k(k-1)$ 个四边形中的任何两个不同的四边形,二者所对应的数对 $(i_1,j_1),(i_2,j_2)$ 不同.因此不等式 $i_1\neq i_2,j_1\neq j_2$ 至少有一个成立.但不论哪个成立,都导致两个四边形有一组相对顶点不同,从而两个四边形没有公共边.这样一来,组中的 $\frac{1}{2}k(k+1)$ 个子多边形中的任何两个都没有公共边.这些子多边形的边数之和为

$$3k+4\times\frac{1}{2}k(k-1)=3k+2k^2-2k$$
$$=k(2k+1)=C_{2k+1}^2,$$

即等于凸 n 边形的边和对角线的总数.从而知每条边和对角线都是这些凸子多边形的边.

(2) 由(1)知所求的 m 的最小值不超过 $\frac{1}{2}k(k+1)$.另一方面,用一条直线把凸 n 边形分成两半,使得直线两侧的凸 n 边形的顶点数分别为 k 和 $k+1$.于是凸 n 边形的边和对角线中共有 $k(k+1)$ 条线段与此直线相交.但因每个凸子多边形至多有两条边与这条直线相交,故任何一组满足(1)中要求的凸子多边形的个数都不少于 $\frac{1}{2}k(k+1)$.所以,所求的 m 的最小值即为 $\frac{1}{2}k(k+1)$.

7·46 棱长为 n 的正方体分成 n^3 个(边长为 1 的)单位正方体.挑选若干个小正方体并经过每一个选中的小正方体的中心作平行于棱的 3 条直线.问最少要挑选多少个小正方体,才能用通过它们中心所作的直线勾掉所有的小正方体?

(1) 对于 $n=2,3,4$,回答上述问题.

(2) 试求 $n=10$ 的答案.

(3) 解一般问题.如果不能找出准确的答案,可以对小正方体的个数给出一个估计不等式,并加以证明.

(第 5 届全苏数学奥林匹克,1971 年)

[解]　右图画出了四种规格的正方体的底面，其中所填的数字指出了该方格上方所选小正方体所在层的号码．这就意味着

	2
1	

	3	2
	2	3
1		

		4	3
		3	4
2	1		
1	2		

		5	4	3
		4	3	5
		3	5	4
2	1			
1	2			

对于棱长为2,3,4,5的正方体，分别选取2,5,8,13个小正方体就够了．而且可以证明，上述个数不能再减少．因而我们可以猜测，对一般的 n，挑选小正方体个数的最小值为

$$A_n = \begin{cases} \dfrac{n^2}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \\ \dfrac{n^2+1}{2}, & \text{当 } n \text{ 为奇数.} \end{cases} \tag{①}$$

为了证明这个结论，我们先来给出下面的引理

引理　在 $n \times n$ 方格表的每格都填写一个非负整数，对于表格中的任意一个数0，如果它所在的那一行一列中其余 $2n-2$ 个数之和不小于 n，则表格中所有数之和不小于$\dfrac{n^2}{2}$．

引理的证明　对数表中每行与每列数求和，并记这 $2n$ 个和数的最小值为m．若 $m \geqslant \dfrac{n}{2}$，则数表中所有数之和 $S \geqslant \dfrac{n^2}{2}$．以下设 $m < \dfrac{n}{2}$．

这时，不妨设第1行数之和为 m，且其中前面 q 个元素异于o，后面 $n-q$ 个元素为o．易见 $q \leqslant m < \dfrac{n}{2}$．按已知，表中后 $n-q$ 列中每列数之和都不小于 $n-m$，而前 q 列中每列数之和都不小于m，故有

$$\begin{aligned} S &\geqslant qm + (n-q)(n-m) = \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}(n-2q)(n-2m) \\ &\geqslant \frac{n^2}{2}. \end{aligned}$$

下面我们就来证明结论①．设满足题中要求的一组正方体已经选好，现在将大正方体的底面的 $n \times n$ 方格表的每个方格中都填写一个非负整数，它的值表示这个方格上方的 n 个小正方体中被选中的个数．这时，如果有某个方格中的数是0，意味着此格上方的 n 个正方体一个

也未选中.因此它们中的每一个都要靠同层中与它同行或同列的某个小正方体被选中而勾掉.由此可知,在底面的 $n \times n$ 数表中,写有0的方格所在的一行一列中其余的 $2n-2$ 个数之和不小于 n.于是由引理便知,数表中所有数之和不小于 $\frac{n^2}{2}$,亦即所选的这组小正方体的个数不小于 A_n.

对于一般的 n,也可与开头所举的例子一样地构造选取 A_n 个小立方体且满足要求的例子.

综上可知,对于每个 $n \geqslant 2$,最少要挑选 A_n 个小正方体才能满足题中要求,这里的 A_n 由 ① 式给出.

特别地有 $A_2 = 2, A_3 = 5, A_4 = 8, A_{10} = 50$.

7·47　n 个平面最多可以将空间分成多少个部分区域?

(第 4 届莫斯科数学奥林匹克,1938 年)

[解]　为求这个最大值,我们先证如下的

引理　平面上的 n 条直线,最多可以把平面分成 $C_{n+1}^2 + 1$ 个部分.

显然,当这 n 条直线两两相交且任何三条都不共点时,把平面分成的部分最多.

设平面被 k 条直线分成的部分数的最大值为 m_k.然后加入第 $k+1$ 条直线,它与前 k 条直线中的每一条都相交,共得到 k 个交点,这 k 个点将第 $k+1$ 条直线分成 $k+1$ 段,其中每一段都把它所穿过的区域一分为二.故知由于第 $k+1$ 条直线的加入而新增加的小区域数与第 $k+1$ 条直线被交点分成的小段数相同,即为 $k+1$.这样,我们得到递推公式

$$m_{k+1} = m_k + k + 1.$$

由此递推即得

$$\begin{aligned} m_n &= m_{n-1} + n = n + n - 1 + m_{n-2} = \cdots = \\ &= n + n - 1 + \cdots + 2 + m_1 = n + n - 1 + \cdots + 2 + 1 + 1 \\ &= C_{n+1}^2 + 1. \end{aligned}$$

这就完成了引理的证明.下面利用引理来解原题.

设空间中的 k 个平面最多能把空间分成 v_k 个区域,然后考察当第 $k+1$ 个平面加入时,新增加的小区域的个数.这时,第 $k+1$ 个平面与

前 k 个平面中的每个平面都交于 1 条直线，在第 $k+1$ 号平面上共得到 k 条直线. 由引理知，这 k 条直线最多能把平面分成C_{k+1}^2+1 个部分. 其中每部分都把它所穿过的区域一分为二. 故得递推关系式

$$v_{k+1}=v_k+m_k.$$

由此递推即得

$$\begin{aligned} v_n &= m_{n-1}+m_{n-2}+\cdots+m_1+v_1 \\ &= C_n^2+C_{n-1}^2+\cdots+C_2^2+(n-1)+2 \\ &= C_{n+1}^3+n+1, \end{aligned}$$

即空间中的 n 个平面最多可以把空间分成C_{n+1}^3+n+1个部分，这个最大值当任何 3 个平面都共点，任何四个平面都不共点时取得.

7·48　n 个通过一定点的平面，最多能将空间分成多少个区域？

（加拿大数学奥林匹克训练题，1989 年）

［解］　设 $M_0,M_1,\cdots,M_{n-1}$ 为过定点 A 的平面.

作平面 $N\,/\!/\,M_0$，由于平面 $M_1,M_2,\cdots,M_{n-1}$ 均与 M_0 相交，因而也与 N 相交，在 N 上截得$n-1$条直线，这 $n-1$ 条直线将平面 N 至多分为

$$1+1+2+\cdots+(n-1)=1+\frac{n(n-1)}{2}.$$

个区域，以 A 为顶点，以这些区域为底的锥体如果将各母线无限延长便将空间分成

$$2\times\left[1+\frac{n(n-1)}{2}\right]=2+n(n-1)$$

个区域. 其中一半在 M_0 的上方，一半在 M_0 的下方.

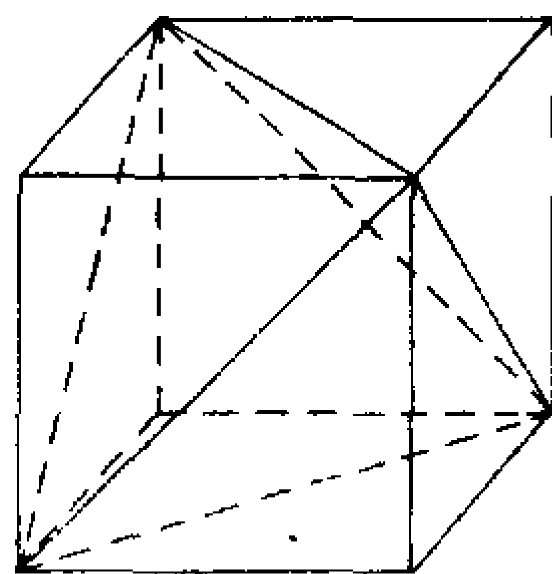
7·49　将一个正方体剖分成互不重叠的四面体，问最少要分成多少个四面体？

（第 27 届莫斯科数学奥林匹克，1964 年）

［解］　四面体的每个面都是三角形，而正方体的 6 个面都是正方形，每个正方形至少分成两个三角形，至少共分成 12 个三角形. 所分成的四面体的 4 个面中至多有 3 面是在正方体表面，亦即每个 4 面体至多用到正方体的至少 12 个三角形中的 3 个，故至少要有 4 个这样的四面体.

若记正方体棱长为 a，则正方体表面每个三角形的面积都不超过

$\frac{1}{2}a^2$,所以每个四面体的体积不大于$\frac{1}{6}a^3$.因而 4 个四面体不能充满正方体.可见,正方体至少要分成 5 个四面体.



如图所示就是将正方体分成 5 个四面体的例子.从而知正方体最少分成 5 个四面体.

7·50 已知 n 个平面将一个正方体划分为300部分,求 n 的最小值.

(英国数学奥林匹克,1970 年)

[解] 首先注意,容易用数学归纳法证明,n 条直线至多把平面分成

$$p_n = \frac{1}{2}n(n+1)+1 \quad ①$$

个部分,当且仅当 n 条直线处于正常位置,即其中任意两条不平行,任意 3 条不共点时,n 条直线恰好将平面分成 p_n 个部分.

其次,用数学归纳法来证明,n 个平面至多能把空间分为

$$q_n = \frac{1}{6}(n^3+5n+6) \quad ②$$

个部分,当且仅当 n 个平面处于正常位置,即其中任何两个平面与第 3 个平面的两条交线不平行,任何 4 个平面不共点时,恰好将空间分成 q_n 个部分.

当 $n=0$ 时,$q(0)=1$,即命题于 $n=0$ 时成立.设命题于 $n=k$ 时成立.当 $n=k+1$ 时,由归纳假设知前 k 个平面至多把空间分成 q_k 部分且仅当 k 个平面处于正常位置时,恰将空间分成 q_k 个部分.现在添加 1 个平面,它与前 k 个平面有 k 条交线.这 k 条交线把第 $k+1$ 个平面至多分成 p_k 个部分,当且仅当 k 条直线处于正常位置时,恰好分成 p_k 个部分.这至多 p_k 个平面区域中的每一个都把它所在的立体区域一分为二,即使所分成的立体个数至多增加 p_k 个,于是有

$$q_{k+1} \leqslant q_k + p_k = \frac{1}{6}(k^3+5k+6)+\frac{1}{2}k(k+1)+1$$
$$= \frac{1}{6}\left[(k+1)^3+5(k+1)+6\right].$$

当且仅当 $k+1$ 个平面处于正常位置时上式中等号成立,这就完成了归纳证明.

由②有

$$q_{12}=299<300<378=q_{13},$$

故知要把正方体分成300部分,用12个平面是不够的,至少要用13个平面.

用12个处于正常位置的平面将空间分成299个部分,然后取一个足够大的正方体,使它将 C_{12}^3 个3个平面的交点全都包含于正方体之内,且使正方体的顶点 A 不在这12个平面的任何1个之上.于是这12个平面将正方体分成299个部分.设在顶点 A 所在的多面体部分中,由点 A 沿正方体的棱截取得到的3条棱中最短的1条长度为 α.在正方体的从点 A 发出的3条棱上分别取点 P,Q,R,使 $AP=AQ=AR=\frac{\alpha}{2}$,则平面 PQR 把点 A 所在的多面体部分一分为二而与其他部分均不相交.从而这13个平面恰好将正方体分成300部分.

综上可知,所求的平面数 n 的最小值为13.

7·51　有1988个相同的单位正方体,用它们(全部或一部分)拼成边长分别为 $a,b,c(a\leqslant b\leqslant c)$ 的3个"正方形" A,B,C(即尺寸为 $a\times a\times 1,b\times b\times 1,c\times c\times 1$ 的3个一层高的长方体),现将正方形 C 摆在平面上,然后将 B 摆在 C 的上面,使 B 的每个小块都恰好位于 C 的某个小块上,但 B 的周界的每个面都不与 C 的侧面对齐.最后将 A 按同样原则摆在 B 上,于是得到一个"三层楼".问当 a,b,c 取何值时,能使摆出这样的不同"三层楼"的个数最多?

(奥地利-波兰数学奥林匹克,1988年)

[解]　因为当 $a\leqslant b-2$ 时,A 放在 B 上且周界不对齐的不同放法共有 $(b-a-1)^2$ 种,故本题等价于在条件

$$1\leqslant a\leqslant b-2\leqslant c-4,a,b,c\in N,a^2+b^2+c^2\leqslant 1988$$

之下求 $(b-a-1)^2\cdot(c-b-1)^2$ 的最大值.显然,这个最大值在 $a=1$ 时达到,故又只要在条件

$$3\leqslant b\leqslant c-2,b,c\in N,b^2+c^2\leqslant 1987$$

之下求 $(b-2)(c-b-1)$ 的最大值.

对每个固定的 c,两个因子之和一定,故 b 的值使两个因子 $b-2$ 和 $c-b-1$ 的差越小时乘积越大.由于 $c^2\leqslant 1987-3^2=1978$,故知 $c\leqslant 44$.

(1) $c=44, b^2\leqslant 1987-44^2=51$, $3\leqslant b\leqslant 7$. $(43-b)\cdot(b-2)$ 在 $b=7$ 时取最大值 180;

(2) $c=43, b^2\leqslant 1987-43^2=138$, $3\leqslant b\leqslant 11$, $(42-b)\cdot(b-2)$ 在 $b=11$ 时取最大值 279;

(3) $c=42, b\leqslant 14, (41-b)(b-2)$ 在 $b=14$ 时取最大值 324;

(4) $c=41, b\leqslant 17, (40-b)(b-2)$ 在 $b=17$ 时取最大值 345;

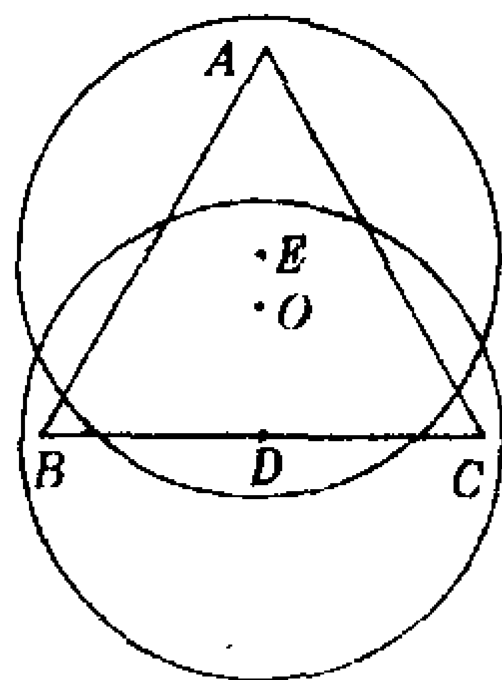
(5) $c=40, b\leqslant 19, (39-b)(b-2)$ 在 $b=19$ 时达到最大值 340;

(6) $c\leqslant 39, (b-2)(c-b-1)\leqslant\left(\frac{c-3}{2}\right)^2\leqslant 18^2=324$. 由此可见,当 $a=1, b=17, c=41$ 时拼成的"三层楼"的个数最多(共有 345^2 种).

7·52 将可以把给定的多边形 M 完全盖住的半径为 1 的圆的最少个数记作 n,将圆心在多边形 M 内部的互不相交的半径为 1 的圆的最多个数记为 m. 问 n 和 m 哪一个大?

(第 21 届莫斯科数学奥林匹克,1958 年)

[解] 因为两类圆半径相同,故每个第一类圆的内部,至多有一个第二类圆的圆心. 另一方面,每个第二类圆的圆心都在多边形 M 的内部,从而也都在某个第一类圆的内部. 由此可知,$n\geqslant m$.



考察外接圆半径为 1.1 的正三角形. 显然,用 1 个半径为 1 的圆无法盖住它. 而如图所示的两个半径为 1 的圆 D 和 E 则可将它盖住,故知 $n=2$. 此外,$\triangle ABC$ 中两点间的距离不超过三角形的边长,而边长 $AB=1.1\times\sqrt{3}<1.1\times 1.8=1.98<2$. 故知以 $\triangle ABC$ 中任何两点为心所作的两个半径为 1 的圆必相交,故得 $m=1<n$. 另一方面,当 M 为边长为 1 的正方形时,$m=n=1$.

综上可知,$n\geqslant m$ 且等号和大于号都能成立.

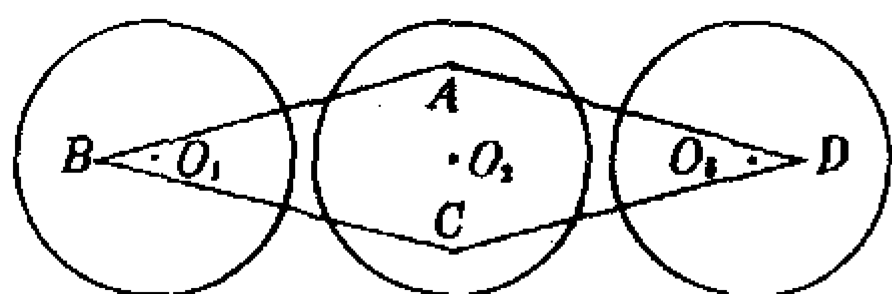
7·53 将圆心在多边形 M 内部的互不相交的直径为 1 的圆的最多个数记为 n,将能够盖住整个多边形 M 的半径为 1 的圆的最少个数记为 m,问 n 和 m 哪一个大?

(第 21 届莫斯科数学奥林匹克,1958 年)

[解] 设有 n 个直径均为 1 的互不相交的圆,其圆心 $O_1, O_2, \cdots$,

O_n 均在多边形 M 的内部. 分别以 $O_1, O_2, \cdots, O_n$ 为心，作半径为 1 的圆，则这 n 个圆必能盖住整个多边形 M.

若不然，则必有 M 的一个内点 A，没有被这 n 个半径为 1 的圆盖住. 于是以 A 为心，以 1 为直径的圆与原来的 n 个直径为 1 的圆互不相交，此与 n 的最大性矛盾. 这就证明了 $m \leqslant n$.



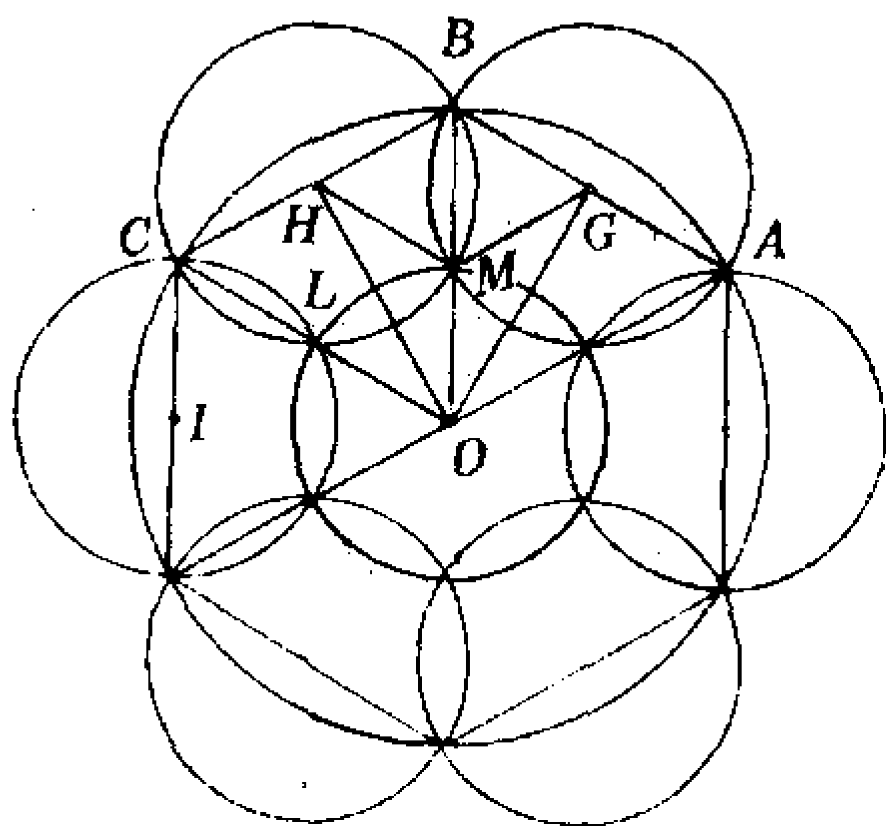
在右图所示的多边形中，可取 O_1, O_2, O_3 3 点并分别作以它们为心，以 1 为直径的 3 个圆互不相交，故知 $n \geqslant 3$. 但 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的外接圆半径都小于 1，从而 $m \leqslant 2 < n$. 再看对角线小于 1 的正方形，显然，这时 $m = n = 1$.

综上可知，$m \leqslant n$ 且等号和小于号都能实现.

7·54　设小圆半径为 $\frac{r}{2}$，大圆半径为 r，问最少要用多少个小圆片才能将大圆面完全盖住？

（匈牙利数学奥林匹克，1947 年）

［解］ (1) 半径为 r 的圆面可用半径为 $\frac{r}{2}$ 的 7 个小圆片盖住. 作大圆 O 的内接正六边形，并分别以正六边形每边中点及点 O 为心，$\frac{r}{2}$ 为半径作 7 个小圆，则它们就盖住了大圆面(见下图).



实际上，连结 OA, OB, OC. 并记 OB, OC 的中点为 M, L，则 $OB = OC = r, OM = MB = OL = LC = \frac{r}{2}$. 连结 HM, MG，则 $\triangle BHM, \triangle BMG$ 都是正三角形，所以 $HM = MG = \frac{r}{2}$，即点 M 恰是圆 H, G 和小圆 O 的交点. 同理，点 L 为圆 H, I 和小圆 O 的交点. 由此可见，扇形 OBC 被圆片 H 和 O 盖住. 从而大圆面被 7 个小圆片所完全盖住.

(2) 下面证明，任何 6 个半径为 $\frac{r}{2}$ 的小圆片都无法完全盖住半径

为 r 的大圆面.

将大圆的圆周分成48等分,得到48个分点.考虑这48个分点及圆心 O 共49个点.显然,当两个分点间夹有8段弧时,两点间距离为 r.因此,用一个半径为 $\frac{r}{2}$ 的小圆片至多能盖住48个分点中的9个分点.此外,圆心 O 与分点距离为 r,故盖住点 O 的小圆片至多能盖住1个分点.由此可见,无论将半径为 $\frac{r}{2}$ 的6个小圆片如何摆放,都无法将49个点全部盖住.

综上可知,最少要用7个小圆片方能将大圆面完全盖住.

7·55　平面上任意7点,过其中共圆的4点作圆,问最多能作出几个不同的圆?

(中国国家集训队选拔试题,1990年)

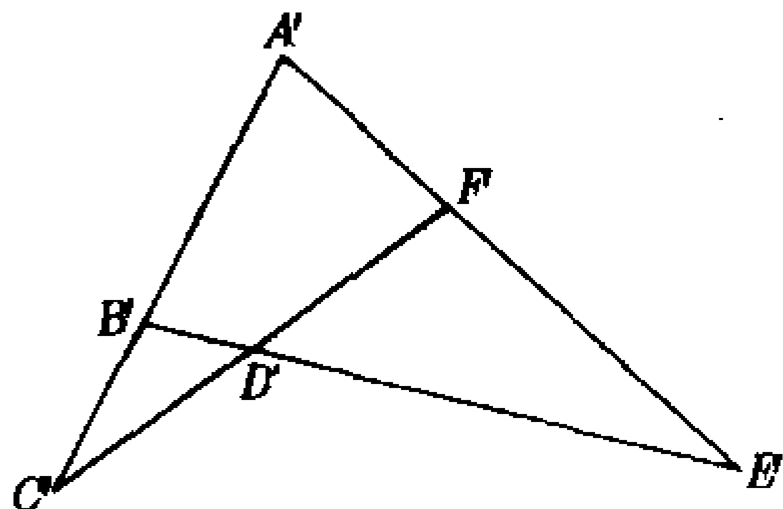
[解]　设 AD,BE,CF 为锐角 ΔABC 的三条高,H 为垂心,则过 A,B,C,D,E,F,H　7点中的4点作圆,共可作出6个不同的圆:(A,F,H,E),(B,D,H,F),(C,E,H,D),(A,B,D,E),(B,C,E,F),(C,A,F,D).

下面用反证法证明所求的最大值就是6.如果能作出7个不同的圆,则7点中的每点都恰在4个圆上.理由如下:

(1) 过两个固定点的圆至多两个.若有3个,则两两之间没有其他公共点.但除了两个公共点外每个圆上还有两个已知点,这样一来,就有8个不同的已知点了.

(2) 过一个固定点的圆至多4个.若有5个,则因每两圆至多还有一个交点,且由(1)知5圆中的任何3圆不能再交于另一点.这样,至少有9个不同的已知点.

(3) 每个圆上有4个已知点,7个圆上共有28个已知点(包括重复计数).但由(2)知每点至多在4个圆上,从而7点中每点都恰在4个圆上.



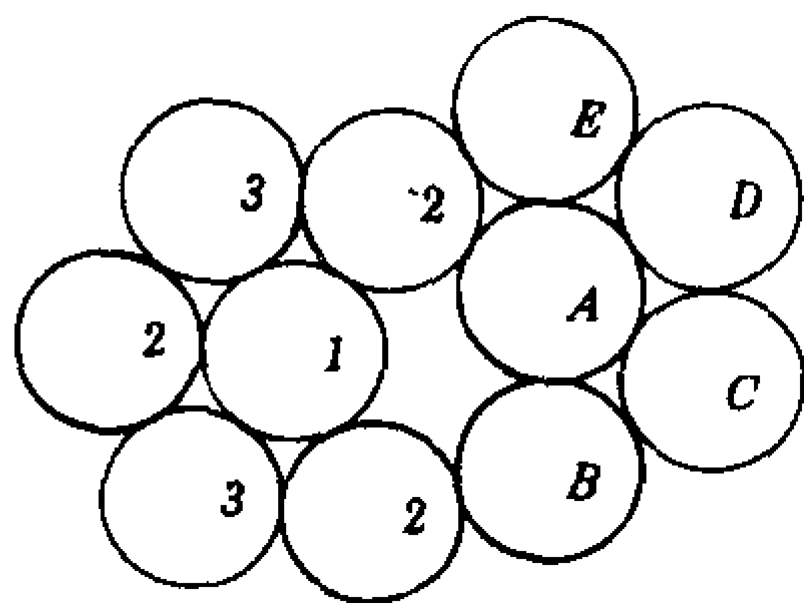
设7点为 A,B,C,D,E,F,G,并以 G 为中心进行反演变换,则过 G 点的4个圆变为4条彼此相交的直线,另外3个圆仍然变为圆.设象点依次为 A',B',C',D',E',F'.显然,这6点中的某4点要共圆,则其中任何

3点不能共线. 因而其中的3个四点圆只能是(A',B',D',F'),(B',C',E',F'),(A',C',D',E'). 但因D'在$\triangle A'C'E'$之内,这4点当然不能共圆,矛盾. 从而证明了所求的最大值为6.

7·56 桌上互不重叠地放有1989个大小相等的圆形纸片. 问最少要用几种不同颜色,才能保证无论这些纸片位置如何,总能给每张纸片涂上一种颜色,使得任何两个相切的圆形纸片都涂有不同的颜色?

(中国国家集训队选拔试题,1989年)

[解] 考察下图中的11个圆形纸片的情形. 设其中左边6个圆片已涂好颜色. 显然,A,B,E 3个圆片只能涂1或3这两种颜色,而且A为一种,B和E为另一种颜色. 若只有3种颜色,则C和D无论涂上何种颜色都无法满足要求. 所以,为了给这11个圆片涂色并使之满足题中要求,至少要有4种不同颜色.



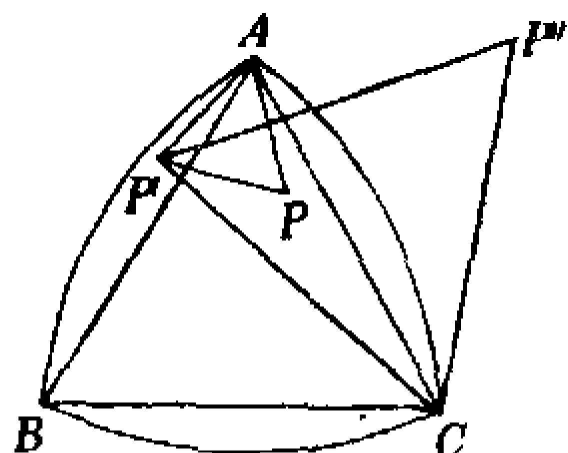
下面用数学归纳法证明,只要有4种不同颜色,就可以按题中要求进行涂色.

设当$n=k$时结论成立. 当$n=k+1$时,考虑这$k+1$个圆片的圆心的凸包. 设A是此凸多边形的一个顶点. 显然,以A为心的圆至多与另外3个圆相切. 按归纳假设,除以A为心的圆片之外的其余k个圆片可用4种颜色按要求涂色. 涂好之后,与圆片A相切的圆片至多3个,当然至多涂有3种不同颜色. 于是只要给圆片A涂上第4种颜色就行了.

7·57 设M为平面上的有限点集,对于M中的任意两点A和B,都存在第3点C,使$\triangle ABC$为正三角形,求M中元素数的最大值.

(德国数学奥林匹克,1993年)

[解] 考虑M中每两点的距离,记AB为距离最大的两点间的连线.



由题设,存在点C,使$\triangle ABC$为正三角形.

分别以A,B,C为圆心,AB为半径作弧,则得图中的曲边三角形,M中的点都在这个曲边三角形中.

第七章 最值问题

如果 M 还有不同于 A,B,C 的点 P.

考虑 P 的位置.

(1) 如果 P 在 $\triangle ABC$ 的内部或边界上,则对 A,P 还有第三点 P',使 $\triangle APP'$ 为正三角形.此时 P' 不可能在 $\triangle ABC$ 的内部,P' 只能在某一个弓形弧的内部或边界上.

连结 CP',则还存在第三点 P'',使 $\triangle CP'P''$ 是正三角形.

若 P'' 与 A 均在直线 CP' 的同侧,则由

$$\angle P''AC = \angle P'BC > 60°,$$

此时 P'' 在曲边三角形的外部.

若 P'' 与 B 均在直线 CP' 的同侧,则同理可证 P'' 在曲边三角形之外.

从而引出矛盾.

(2) 若 P 在弓形弧的内部或边界上,由(1)知,P' 即在曲边三角形之外,也可引出矛盾.

由(1),(2),M 中元素个数的最大值是 3.

7·58 对集合 $S = \{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) \mid a_i = 0$或$1, i = 1,2,3,4,5\}$ 中的任意两个元素$(\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3,\overline{a}_4,\overline{a}_5)$ 和$(\overline{b}_1,\overline{b}_2,\overline{b}_3,\overline{b}_4,\overline{b}_5)$,定义它们之间的距离为 $|\overline{a}_1 - \overline{b}_1| + |\overline{a}_2 - \overline{b}_2| + |\overline{a}_3 - \overline{b}_3| + |\overline{a}_4 - \overline{b}_4| + |\overline{a}_5 - \overline{b}_5|$,取 S 的一个子集,使此子集中任意两个元素之间的距离大于 2,这个子集中最多含有多少个元素?证明你的结论.

(中国上海市数学竞赛,1988 年)

[解] 这个子集最多含有 4 个元素.

为方便计,在集合 S 中,我们称 $a_i(i = 1,2,3,4,5)$ 为元素 $A(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$ 的第 i 个分量.显然,集合 S 中任意两个距离大于 2 的元素,至多有 2 个同序号的分量相同.

首先,我们可以构造一个 S 的 4 个元素的子集 $S' = \{A_1,A_2,A_3,A_4\}$.其中 $A_1 = (1,1,0,0,0)$,$A_2 = (0,0,0,1,1)$,$A_3 = (1,0,1,0,1)$,$A_4 = (0,1,1,1,0)$.

显然 S' 中任意两个元素间的距离大于 2.

下面我们证明:在 S 的子集中,欲使任意两个元素间的距离都大于 2,所含元素不得超过 4 个.

假设有 S 的5元子集$\{B_1,B_2,B_3,B_4,B_5\}$,使得任意两个元素间的距离大于2.

由于有5个元素,而每个分量只能是0或1,由抽屉原理,至少有三个元素的第一分量相同,不妨设 B_1,B_2,B_3 的第一分量都是1.

又因为 B_1,B_2,B_3 中至少有两个元素的第二分量相同,不妨设 B_1,B_2 的第二个分量都是1.

此时对 B_1,B_2 若还有一个分量相同,则与至多有2个同序号分量相同的结论矛盾.于是必然有

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
B_1	1	1	1	0	1
B_2	1	1	0	1	0
B_3	1				

此时考虑 B_3,B_3 的第3,4,5分量必然与 B_1 或 B_2 有两对同序号分量相同,这就导致至少有三个同序号分量相同,从而导致矛盾.

因此,在 S 的子集中,欲使任意两个元素间的距离大于2,所含元素不得超过4个.

7·59 设

$$S=\{A=(a_1,a_2,\cdots,a_8)\mid a_i=0\text{或}1,i=1,2,\cdots,8\}.$$

对于 S 中任何两个元素 A 和 B,定义

$$d(A,B)=\sum_{i=1}^{8}|a_i-b_i|,$$

并称之为 A 与 B 之间的距离.问 S 中最多能取出多少个元素,使它们之中任何两个的距离都不小于5?

(中国国家集训队选拔考试,1995年)

[解1] 下列4个8项数列

(0,0,0,0,0,0,0,0),(0,0,0,1,1,1,1,1),

(1,1,1,1,1,0,0,0),(1,1,1,0,0,1,1,1)

满足题中要求,故知所求的元素数的最大值不小于4.

另一方面,若有5个数列 A,B,C,D,E 两两之间的距离均不小于5,则不妨设 A 的8项均为0,从而 B,C,D,E 中每个数列都至少有5项为1.

若 B,C,D,E 中有两个数列与 A 的距离都不小于 6，即 8 项中至少有 6 项为 1，则二者之间的距离不大于 4，矛盾.

若 B,C,D,E 中有两个数列与 A 的距离都是 5，则二者之间的距离必为 6. 不妨设为

$$B=(1,1,1,1,1,0,0,0),$$
$$C=(1,1,0,0,0,1,1,1).$$

因为 B 与 C 的后 6 项均不同，故任何 8 项数列的后 6 项总与 B,C 中至少 1 个数列的后 6 项至多 3 项不同. 所以前两项必须为 0，即 D 和 E 的前两项都是 0. 为使与 A 的距离不小于 5，D 和 E 的后 6 项至少有 5 个 1. 从而 $d(D,E)\leqslant 2$，矛盾.

综上可知，最多可取出 4 个数列使它们两两之间的距离都不小于 5.

[解 2] 由解 1 开头的例子知所求的元素数的最大值不小于 4.

若有 5 个数列，使它们两两之间的距离都不小于 5，则由抽屉原理知，其中总有 3 个数列的第 8 项相同. 不妨设 A,B,C 的第 8 项都是 0. 由对称性知可设 $A=(0,0,0,0,0,0,0,0)$. 于是 B 和 C 的前 7 项中都至少有 5 项为 1. 从而有 $d(B,C)\leqslant 4$，矛盾.

综上可知，最多可取出 4 个数列使它们两两之间的距离都不小于 5.

[解 3] 由解 1 开头的例子知所求的元素数的最大值不小于 4.

若有 5 个数列，两两之间的距离都不小于 5，则将它们写成 5×8 的数阵

$$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8$$
$$b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7,b_8$$
$$c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7,c_8$$
$$d_1,d_2,d_3,d_4,d_5,d_6,d_7,d_8$$
$$e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8$$

表中每列的 5 个数 a_i,b_i,c_i,d_i,e_i 共可组成 10 个数对. 因为每个数都是 0 或 1，故 10 个数对中至多有 6 个互异数对，即为 $(0,1)$ 或 $(1,0)$. 所以，8 列数中至多共有 48 个互异数对.

另一方面，由于任何两个数列的距离都不小于 5，所以任何两个数列的对应项所成的数对中至少有 5 个互异对. 于是 5 个数列共可构成至

少 50 个互异数对,矛盾.

综上可知,最多可取出 4 个数列,使它们两两之间的距离都不小于 5.

7·60　给定自然数 $n \geqslant 2$.设 M 是集合 $\{(i,k) \mid i,k \in N, i < k \leqslant n\}$ 的一个子集.已知若数对 (i,k),$i < k$,属于集合 M,则任何数对 (k,m),$k < m$,都不属于 M.求集合 M 中元素数的最大值.

(第 21 届国际数学奥林匹克候选题,1979 年)

[解]　令

$$A = \{i \mid (i,k) \in M\}, B = \{k \mid (i,k) \in M\}.$$

按已知,B 中的任何元素都不在 A 中,即 $A \cap B = \varnothing$.记 $|A| = a$,$|B| = b$,于是有 $a + b \leqslant n$,并且集合 M 的数对中较小数共有 a 种不同取法,较大数共有 b 种不同取法.因此,M 中元素的个数至多为

$$ab \leqslant a(n-a) \leqslant \left(\frac{a+n-a}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}.$$

因为 $ab \in N$,故有 $ab \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]$.

另一方面,当 n 为偶数时,令

$$M_0 = \{(i,j) \mid i \leqslant \frac{n}{2} < j \leqslant n\},$$

则 $|M_0| = \frac{n^2}{4}$ 且 M_0 满足题中要求;当 n 为奇数时,令

$$M_0 = \{(i,j) \mid i < \frac{n}{2} < j \leqslant n\},$$

则 $|M_0| = \left[\frac{n^2}{4}\right]$ 且 M_0 满足题中要求.

综上可知,M 中元素数的最大值为 $\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

7·61　设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是以不超过 n 的正整数为项的有限数列,其中任一项的两个相邻项都不同且不存在任何四个指标 $p < q < r < s$,使得

$$a_p = a_r \neq a_q = a_s.$$

求项数 k 的最大值.

(捷克和斯洛伐克数学奥林匹克,1989 年)

[解] 容易看出，下面的数列

$n,n,n-1,n-1,\cdots,2,2,1,1,2,2,\cdots,n-1,n-1,n,n$ 满足题目要求.

这个数列有项数 $k=4n-2$，所以所求项数 k 的最大值不小于 $4n-2$.

显然，在满足要求的任一数列中，任何连续三项不能为同一个数，而且若某一项的两个邻项(或首项，末项的一个邻项)都与该项的数不同，则当在该项之旁添加一个数值相同的项时，新数列仍然满足要求，但项数增加 1.

因此，我们求项数最大值时，只须考虑这种连续两项为同一数值的数列的项数.

为此，我们又只须考虑任何连续两项都不同的数列的项数.因为后者项数的 2 倍即为前者的项数.

下面我们用数学归纳法证明：如果数列 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 中任何连续两项的值都不同，且

$$a_j\in\{1,2,\cdots,n\},j=1,2,\cdots,k.$$

同时不存在这样的四个指标 $p<q<r<s$，使得 $a_p=a_r\neq a_q=a_s$，则 $k\leqslant 2n-1$.

$n=2$ 时，命题显然成立.

设当 $n\leqslant m$ 时，命题成立.

当 $n=m+1$ 时，$a_k\in\{1,2,\cdots,m+1\}$.

记 $a_k=l,1\leqslant l\leqslant m+1$.

若 $a_1,\cdots,a_{k-1}$ 中任何一项的值都不是 l，可在 a_1 之前添加一项 l，于是新数列仍然满足要求且项数增加 1，故只须考虑 $a_1,\cdots,a_{k-1}$ 中还有值为 l 的项的情形，令

$$v=\max\{j\mid a_j=l,j<k\}.$$

于是 $v<k-1$.所以连续两项之值不同，若 $v=1$，则 $a_2,\cdots,a_{k-1}$ 中没有值为 l 的项，当将 a_1 和 a_k 去掉时，数列 $a_2,\cdots,a_{k-1}$ 中每一项都取值于 $\{1,2,\cdots,m+1\}-\{l\}$，且满足命题的要求，故由归纳假设知 $k-2\leqslant 2m-1$，即 $k\leqslant 2(m+1)-1$.

若 $v>1$，则两组项

$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_v\}$,

$B=\{a_{v+1},\cdots,a_{k-1}\}$

中没有数相同的项，因此若记 A 中的项的所有不同值的数目为 s，B 中的项所有不同值的数目为 t，则有

$$s+t\leqslant m+1.$$

这样，由 A，B 两组分别排成两个数列都满足题目要求，且

$$s\leqslant m, t\leqslant m.$$

于是由归纳假设知，这两个数列的项数

$$v\leqslant 2s-1,$$
$$k-v-1\leqslant 2t-1.$$

从而有

$$\begin{aligned}k&\leqslant 2t+v\leqslant 2t+2s-1\\&=2(t+s)-1\leqslant 2(m+1)-1.\end{aligned}$$

从而完成了归纳证明.

综上可知，所求的项数 k 的最大值为 $4n-2$.

7·62　从 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中选出三元数组 (a,b,c)，$a<b<c$ 并且选出的每两个三元数组 (a,b,c) 与 (a',b',c') 中，等式 $a=a'$，$b=b'$，$c=c'$ 至多有 1 个成立. 最多能选出多少个满足条件的三元数组？

（中国国家集训队训练题，1990 年）

[解]　设 H 为满足条件的三元数组的集合. 对于每个 $1<k<n$，令 H_k 为 H 的子集，其中的每个三元数组的中间数为 k，即 $b=k$. 显然，

$$|H_k|\leqslant \min\{k-1,n-k\}.$$

求和便得

$$\begin{aligned}|H|&=\sum_{k=2}^{n-1}|H_k|\leqslant\sum_{k=2}^{n-1}\min\{k-1,n-k\}\\&=\begin{cases}\dfrac{n(n-2)}{4}, & n\text{ 为偶数},\\[2ex]\left(\dfrac{n-1}{2}\right)^2, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}\end{aligned}$$

当取 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中的所有成等差数列的三元数组时，个数恰为上式右端的数. 所以它就是所求的个数的最大值.

7·63　设集合 $A=\{0,1,2,\cdots,9\}$，$\{B_1,B_2,\cdots,B_k\}$ 是 A 的一族非空子集，当 $i\neq j$ 时，$B_i\cap B_j$ 至多有两个元素，求 k 的最大值.

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题，1985 年）

[解]　首先，易见 A 的至多含 3 个元素的所有子集所构成的子集

族满足题中要求,其中子集的个数为

$$C_{10}^1+C_{10}^2+C_{10}^3=175.$$

由此可知,k 的最大值不小于 175.

另一方面,设有一个子集族 C 满足题中要求且有 A 的子集 $B\in C$, B 中至少有 4 个元素. 设 $a\in B$ 并令 $B'=B-\{a\}$. 因为 $B\cap B'$ 至少有 3 个元素,故 $B'\notin C$. 于是当用 B' 代替 C 中的 B 时, C 中的子集数不减且仍然满足题中要求. 重复这个过程,总可使 C 中每个子集的元数都不多于 3 个而且 C 中子集数没有减少. 由此可见, C 中的子集数不多于 175.

综上可知,k 的最大值为 175.

7·64　从 1955 个给定点中最多可以选出多少个三点组,使得每两个三点组都有 1 个公共点?

(第 18 届莫斯科数学奥林匹克,1955 年)

[解]　设点 A 是给定点并考察所有含点 A 的三点组的集合 M. 因为 M 中任何两个三点组都有公共点 A,故集 M 满足题中要求且 $|M|=C_{1954}^2$. 由此可知,所求的最大值不小于 C_{1954}^2.

另一方面,设有三点组的集合 S 满足题中要求且 $|S|>C_{1954}^2$. 设三点组 $\{A,B,C\}\in S$,于是 S 中任一个三点组都至少含有 A,B,C 3 点之一. 不妨设含有点 A 的三点组最多. 记 S 中所有含点 A 的三点组所构成的子集为 S_A,则

$$|S_A|\geqslant\frac{1}{3}C_{1954}^2=977\times651>325\times1953.$$

在 S_A 中,含有 A,B 两点的三点组的个数不超过 1953. 含有 A,C 两点的三点组的个数也不超过 1953. 从而 S_A 中还有不含 B,C 的三点组,不妨设 $\{A,D,E\}$ 是其中之一. 用类似的计数法可以证明, S_A 中还存在着不含 B,C,D,E 的三点组 $\{A,F,G\}$ 和 $\{A,H,I\}$ 且 $\{F,G\}\cap\{H,I\}=\varnothing$. 这样一来,我们得到了 4 个三点组:

$\{A,B,C\},\{A,D,E\},\{A,F,G\},\{A,H,I\}$,

且 B,C,D,E,F,G,H,I 互不相同. 若有三点组 $\{X,Y,Z\}\in S-S_A$,则三点组 $\{X,Y,Z\}$ 与 4 对点 $\{B,C\},\{D,E\},\{F,G\},\{H,I\}$ 中的每一对都有公共点,此不可能. 这意味着 $S=S_A$,即 S 中所有三点组中都有点 A. 从而 $S\subset M$, $|S|<C_{1954}^2$,此与反证假设矛盾.

综上可知，最多可以选出 C_{1954}^2 个三点组满足题中要求.

7·65 集合 S 由 n 个元素组成. 问 S 最多有多少个这样的三元子集，使得其中任何两个三元子集都恰有 1 个公共元素？

（第 21 届国际数学奥林匹克候选题，1979 年）

[解] 将所求的三元子集数的最大值记为 k_n. 设有 S 的 k_n 个三元子集，其中每两个三元子集都恰有 1 个公共元素. 考察属于这些子集中的子集数最多的元素 $a \in S$.

(1) a 属于两个三元子集而 $\{a,b,c\}$ 是其中之一. 于是 a,b,c 至多还各属于另一个三元子集，从而有 $k_n \leqslant 4$.

(2) a 属于 3 个三元子集且 $\{a,b,c\}$ 是其中之一. 于是 b 和 c 至多各属于 3 个三元子集，从而有 $k_n \leqslant 7$.

(3) a 属于 4 个三元子集：$\{a,b,c\},\{a,d,e\},\{a,f,g\},\{a,h,i\}$，则除 a 之外的另 8 个元素互不相同. 当 $k_n \geqslant 5$ 时，另外的任何一个三元子集要和前 4 个三元子集各恰有 1 个公共元素，必须包含 a. 因此有 $2k_n + 1 \leqslant n, k_n \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]$.

当 $n = 1,2,3,4,5$ 时，显然有 $k_1 = k_2 = 0, k_3 = k_4 = 1, k_5 = 2$. 当 $n = 6$ 时，集合 S 中的每个元素至多属于两个三元子集，否则 S 中至少有 7 个元素. 于是由(1)知 $k_6 \leqslant 4$. 另一方面，4 个三元子集 $\{a,b,c\}$，$\{a,d,e\},\{b,d,f\},\{c,e,f\}$ 满足题中要求，故知 $k_6 = 4$.

当 $7 \leqslant n \leqslant 16$ 时，可出现上述的情形(2)和(3)，但两种情形均导致 $k_n \leqslant 7$. 另一方面，当 $n = 7$ 时，7 个三元子集 $\{a,b,c\},\{a,d,e\},\{a,f,g\},\{b,d,f\},\{b,e,g\},\{c,d,g\},\{c,e,f\}$ 满足题中要求. 因此有 $k_n = 7$.

当 $n \geqslant 17$ 时，由(1)—(3)知 $k_n \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]$. 设 S 的 n 个元素为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，则如下的 $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ 个三元子集

$$\{a_n,a_i,a_{n-i}\}, i = 1,2,\cdots,\left[\frac{n-1}{2}\right]$$

满足题中要求，故知 $k_n = \left[\frac{n-1}{2}\right]$.

7·66 已知一族集合 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 满足下列条件：

(1) 每个集合 A_i 都恰含 30 个元素；

(2) 对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $A_i \cap A_j$ 都恰含 1 个元素;

(3) $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \varnothing$.

求这族集合个数 n 的最大值.

（第 30 届国际数学奥林匹克候选题, 1989 年）

[解] 记 $A_1 = \{a_1, a_2, \cdots, a_{30}\}$. 我们指出, 每个 a_i 至多属于这族集合中的 30 个. 若不然, 不妨设 $a_1 \in A_j$, $j = 1, 2, \cdots, 31$. 由(2) 知, 31 个集合

$$A_j - \{a_1\}, j = 1, 2, \cdots, 31 \qquad ①$$

中所含的 29×31 个元素互不相同. 由(3) 又知存在集合 B, 使 $a_1 \notin B$. 于是由(2) 知 B 与(1) 中的 31 个集合各有 1 个公共元素, 从而 $|B| = 31$, 矛盾. 这样, 每个 a_i 都至多属于 30 个集合, 除了 A_1 还有 29 个集合. 所以这族集合的个数不超过 $30 \times 29 + 1 = 871$.

另一方面, 我们来构造 871 个集合满足题中要求. 令

$A = \{a_0, a_1, \cdots, a_{29}\}$,

$B_i = \{a_0, a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{i29}\}, 1 \leqslant i \leqslant 29$,

$C_{ij} = \{a_i\} \cup \{a_{kj+(k-1)(i-1)} \mid k = 1, 2, \cdots, 29\}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 29$,

其中的不同记号代表不同元素, 但 $a_{k,h}$ 与 $a_{k,s+29}$ 为同一元素. 这 871 个集合即满足题中要求.

事实上, 我们有

$A \cap B_i = B_i \cap B_j = \{a_0\}, 1 \leqslant i < j \leqslant 29$,

$A \cap C_{ij} = \{a_i\}, 1 \leqslant i, j \leqslant 29$,

$B_s \cap C_{ij} = \{a_{sj+(s-1)(i-1)}\}, 1 \leqslant s, i, j \leqslant 29$,

$C_{ij} \cap C_{ik} = \{a_i\}, 1 \leqslant i, j, k \leqslant 29, j \neq k$,

$C_{ij} \cap C_{kj} = \{a_{1j}\}, 1 \leqslant i, j, k \leqslant 29, i \neq k$,

$C_{ij} \cap C_{kh} = \{a_{sj+(s-1)(i-1)}\}, i \neq k, j \neq h$,

其中下标 s 为同余方程 $(s-1)(k-i) \equiv j-h \pmod{29}$ 的惟一解.

7·67 给定 11 个集合 $M_1, M_2, \cdots, M_{11}$, 其中每个集合都恰有 5 个元素且对所有 $i, j, 1 \leqslant i < j \leqslant 11$, 均有 $M_i \cap M_j \neq \varnothing$, 求这些集合中交集非空的最大集合数的最小可能值.

（罗马尼亚数学奥林匹克, 1994 年）

（中国国家集训队测验题, 1996 年）

[解] 考察如下 11 个集合

$\{1,2,3,4,5\}$, $\{1,6,7,8,9\}$,

$\{2,6,10,11,12\}$, $\{3,7,10,13,14\}$,

$\{4,8,11,13,15\}$, $\{5,9,12,14,15\}$,

$\{1,10,15,16,17\}$, $\{2,8,14,16,18\}$,

$\{3,9,11,17,18\}$, $\{4,7,12,16,18\}$,

$\{5,6,13,17,18\}$,

可知它们满足题中的要求且除 18 出现 4 次之外,每个数都恰好出现 3 次,故知所求的最小可能值不大于 4.

另一方面,11 个集合共有 55 个元素.若其中不同元素的个数不大于 18,则由抽屉原理知必有一个元素至少属于 4 个集合,从而所求的最小可能值至少为 4.若 11 个集合中所含不同元素的个数至少为 19,则由抽屉原理又知必有一个元素至多属于两个集合.不妨设为 $\{1,2,3,4,5\}$ 和 $\{1,\times,\times,\times,\times\}$ 而其他集合均不含 1.于是另 9 个集合都必须至少含 $\{2,3,4,5\}$ 之一.从而由抽屉原理又知至少有 3 个集合含有 $\{2,3,4,5\}$ 的同一个元素,而这又导致所求的最小可能值至少为 4.

综上可知,所求的交集非空的最大集合数的最小可能值为 4.

7·68 设 $S=\{1,2,\cdots,10\}$, $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 都是 S 的子集且满足

(1) $|A_i|=5, i=1,2,\cdots,k$;

(2) $|A_i\cap A_j|\leqslant 2, 1\leqslant i<j\leqslant k$.

求 k 的最大值.

(中国国家集训队测验题,1994 年)

[解 1] 下列 6 个子集

$\{1,2,3,4,5\}$, $\{1,2,6,7,8\}$, $\{1,3,6,9,10\}$,

$\{2,4,7,9,10\}$, $\{3,5,7,8,9\}$, $\{4,5,6,8,10\}$

满足条件(1) 和(2),故知所求的 k 的最大值不小于 6.

若有 7 个子集 $A_1,A_2,\cdots,A_7$ 满足条件(1) 和(2),则 7 个子集中共有 35 个元素.由抽屉原理知有 S 中的一个元素至少属于上述 7 个子集中的 4 个,不妨设 $1\in A_i, i=1,2,3,4$.这时令

$$A_i^*=A_i-\{1\}, i=1,2,3,4,$$

于是 $|A_i^*|=4$ 且 $|A_i^*\cap A_j^*|\leqslant 1, 1\leqslant i<j\leqslant 4$.这表明 A_1^*, A_2^*,

A_3^*, A_4^* 中的共 16 个元素中至多有 6 对重复,从而其中至少有 10 个不同元素.再加上 1,至少有 11 个不同元素,此不可能.

综上可知,所求的子集数 k 的最大值为 6.

[**解 2**] 设有 k 个子集满足题中条件(1)和(2),并设 i 属于这 k 个子集中的 x_i 个集合,$i=1,2,\cdots,10$.若 $i\in A_j, i\in A_k, j\neq k$,则称 i 为一个重复数对.于是由数 i 导致的重复数对有 $C_{x_i}^2$ 个.由 S 中的 10 个元素所导致的重复数对的总数为 $C_{x_1}^2+C_{x_2}^2+\cdots+C_{x_{10}}^2$,$x_1+x_2+\cdots+x_{10}=5k$.

另一方面,每两个子集间至多有两个重复数对,所以 k 个子集之间至多有 $2C_k^2$ 个重复数对.因而有

$$C_{x_1}^2+C_{x_2}^2+\cdots+C_{x_{10}}^2\leqslant 2C_k^2. \quad ①$$

由柯西不等式有

$$\begin{aligned}
&C_{x_1}^2+C_{x_2}^2+\cdots+C_{x_{10}}^2\\
=&\frac{1}{2}\{x_1(x_1-1)+x_2(x_2-1)+\cdots+x_{10}(x_{10}-1)\}\\
=&\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2)-\frac{1}{2}(x_1+x_2+\cdots+x_{10})\\
=&\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2)-\frac{5}{2}k\\
\geqslant&\frac{1}{20}(5k)^2-\frac{5}{2}k=\frac{5}{4}k(k-2). \quad ②
\end{aligned}$$

由 ① 和 ② 得到

$$\frac{5}{4}(k-2)\leqslant k-1. \quad ③$$

由 ③ 解得 $k\leqslant 6$.这表明至多有 6 个子集.

解 1 开头的例子说明可以有 6 个子集满足题中要求.所以,所求的 k 的最大值为 6.

7·69 设集合 M 是由整个平面去掉 3 个不同的点 A,B,C 后的所有点构成,求凸集的最小个数,使得它们的并集等于 M.

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1980 年)

[**解**] 先设点 A,B,C 共线 l,则它们把直线 l 分成 4 个区间,并且不同区间中的点不能属于同一个凸集,故至少要有 4 个凸集.另一方面,当取 l 为 x 轴且 A,B,C 的坐标分别为 $(x_1,0),(x_2,0),(x_3,0)(x_1$

$< x_2 < x_3$)时,令

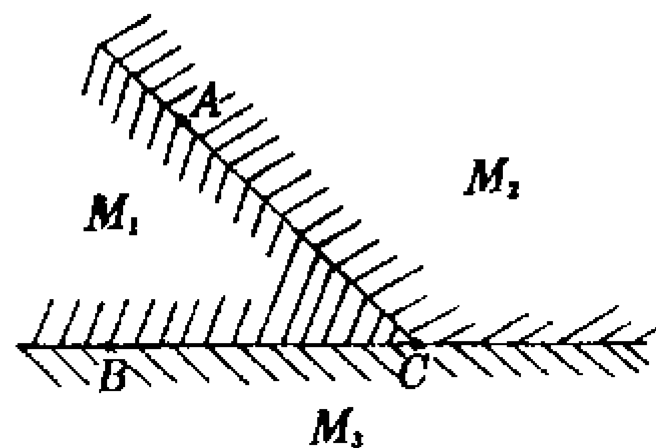
$$M_1 = \{(x,y) \mid y > 0\} \cup \{(x,0) \mid x < x_1\},$$

$$M_2 = \{(x,y) \mid y < 0\} \cup \{(x,0) \mid x > x_3\},$$

$$M_3 = \{(x,0) \mid x_1 < x < x_2\}, M_4 = \{(x,0) \mid x_2 < x < x_3\},$$

容易验证,它们都是凸集且并集为 M. 所以这时所求凸集个数的最小值为 4.

再设 A,B,C 3 点不共线,则点 B 和 C 把直线 BC 分成 3 个区间,并且不同区间中的点应该属于不同的凸集. 因此至少要有 3 个凸集. 另一方面,将 M 分成右图所示的 3 个凸集 M_1, M_2, M_3 时便满足要求,其中 M_1 包含不带端点的线段 AC, BC, M_2 包含它的除了线段 AC 的所有边界点,M_3 是包含从点 B 向左发出的射线(不含点 B)的下半平面. 可见,这时所求的凸集个数的最小值为 3.



7·70　阿丽丝和鲍勃来到一家五金店,店里出售带色穗带,可以把它们系在钥匙上,将不同的钥匙区别开. 下面是他们二人的一段对话:

阿丽丝:你打算买一些彩色穗带系在你的钥匙上吗?

鲍勃:我很想这样做,但穗带只有7种不同的颜色,而我却有8把钥匙.

阿丽丝:这没有关系,因为即使有两把钥匙都系上红色穗带,但你只要注意它们是与系绿色穗带的钥匙相邻,还是与系蓝色穗带相邻,就可以把它们区分开.

鲍勃:你当然知道我的全部钥匙都套在一个钥匙圈上,而钥匙圈是可以翻来翻去,转来转去的,所以在说到"相邻"或者"前面有三把钥匙"这一类话时一定要注意.

阿丽丝:即使是这样,你也不需要 8 种颜色的穗带.

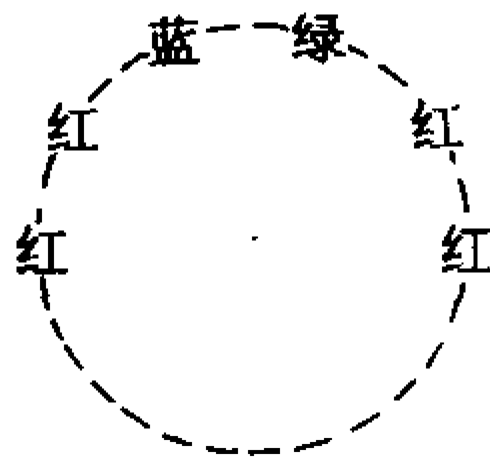
试问:为了区分 n 把套在同一个钥匙圈上的钥匙,最少需要多少种颜色的穗带?

(第 16 届加拿大数学奥林匹克,1984 年)

[解]　(1)　$n = 1$ 时,需要 1 种颜色的穗带.

(2) $n=2$ 时，需要 2 种颜色的穗带.

(3) $n\geqslant 3$ 时，只需要 3 种颜色的穗带即可. 如图，使系上蓝色和系上绿色穗带的钥匙相邻，其余均系上红色穗带，我们只要记住按顺时针方向距绿色穗带第几把或按逆时针距蓝色穗带第几把钥匙即可.

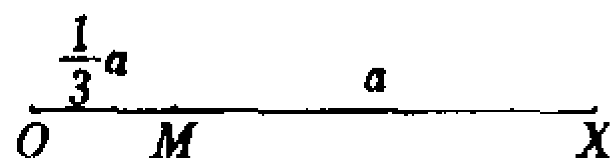


7·71 某卡车只能带 L 升汽油，用这些油可以行驶 a 千米，现在要行驶 $d=\frac{4}{3}a$ 千米到某地，途中没有加油的地方，但可以运送汽油到路旁任何地点存储起来，准备后来之用. 假定只有这一辆卡车，问应如何行驶，才能到达目的地，并且最省汽油？如果到达目的地的距离是 $d=\frac{23}{15}a$ 千米，又应如何？

（中国北京市数学竞赛，1962 年）

［解］ 我们运用下面的带一般性的原则：若 P 是途中任何一点，那么，汽车一次或多次运送过点 P 的汽油总量决不能少于点 P 以后汽车行驶的总耗油量.

如图，设 O 为出发点，X 为目的地，而 OX 的长为 $\frac{4}{3}a=a+\frac{1}{3}a$ 千米.



考虑途中距 X 为 a 千米的点 M. 汽车在 MX 之间至少行驶一次，因此至少耗油 L 升. 根据上述原则，至少要运送 L 升汽油到 M 点.

要运送 L 升汽油到点 M，只从点 O 取油一次是不够的，因为在路上要消耗一部分. 因此至少要取油两次，即汽车至少在 OM 之间往返三次.

由于 $OM=\frac{1}{3}a$，因此在 OM 之间往返三次恰好为 a 千米，耗油 L 升，于是汽车从 O 出发带 L 升汽油到点 M，在 M 处存下 $\frac{1}{3}L$ 升汽油，再返回点 O，再带 L 升汽油，从 O 到 M 消耗 $\frac{1}{3}L$ 升，还剩 $\frac{2}{3}L$ 升，再加上点 M 存下的 $\frac{1}{3}L$ 升汽油恰为 L 升，可到达点 X.

因此共需 $2L$ 升汽油，显然这是最少耗油量.

若 $OX=\frac{23}{15}a$ 千米,由于

$$\frac{23}{15}a=a+\frac{1}{3}a+\frac{1}{5}a.$$

可在 OX 上取一点 M_1,使 $M_1X=\frac{4}{3}a$ 千米,根据上面的讨论,从 M_1 到 X 至少要耗油 $2L$ 升.因此,至少要运送 $2L$ 升汽油到 M_1.显然,从 O 取油两次是不够的,必须在 OM_1 之间往返 5 次,因为 $OM_1=\frac{1}{5}a$ 千米,往返 5 次共耗油 L 升,因此,从 O 到 X 至少耗油 $3L$ 升.

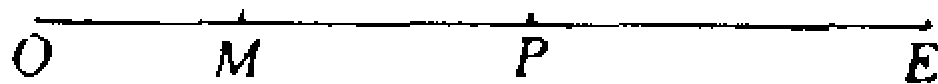
为此,可在 M_1 设第一存油站,在距离 X 为 a 千米的 M 设第二存油站.三次从 O 出发,共取油 $3L$ 升,在 OM_1 之间往返 5 次共耗油 L 升,因此在 M_1 处可存油 $2L$ 升,恰好够从 M_1 到 X 使用.

7·72　一辆汽车只能带 L 升汽油,用这些汽油可以行驶 a 千米.现在要行驶 $d(>a)$ 千米的路程到某地,途中没有加油的地方,但可以先运些汽油到途中任何地点储存起来,以备后来之用.假定共有 k 辆汽车,都是同一型号,问应如何行驶,才能全部到达目的地,并且最省汽油?

(中国北京市数学竞赛,1994 年)

[**解**]　令 $d_0=a,d_n=a\left(1+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+4}+\cdots+\frac{1}{k+2n}\right)$.首先用数学归纳法证明,当 $d=d_n$ 时,至少要耗油 $(k+n)L$ 升.

如下图,其中点 O 为出发点,E 为目的地.在下面的证明过程中,要用到如下的事实:若 P 是途中任意一点,则为到达目的地,汽车一次或多次运过点 P 的汽油总量不能少于汽车驶过 PE 的总耗油量.



当 $n=0$ 时,命题显然成立.设命题于 $n=m-1$ 时成立.当 $n=m$ 时,取点 M,使得 $ME=d_{m-1}$.于是由归纳假设知,从点 M 驶到点 E,k 辆汽车至少要耗油 $(k+m-1)L$ 升.所以至少要运送这些数量的汽油到点 M.因此,至少要从点 O 发车 $k+m$ 次,这里规定一辆汽车从某点出发行驶一趟称为一次.其中的 m 次要返回点 O,故知 k 辆汽车在点 O 与 M 之间往返至少共行驶 $k+2m$ 次.因此,在 OM 区间内,k 辆汽车共行驶

$$(k+2m)OM=(k+2m)(d_m-d_{m-1})=a(\text{千米}),$$

共耗油 L 升. 从而从点 O 到 E 至少要耗油 $(k+m)L$ 升. 这就完成了命题的归纳证明.

当 $d_{n-1}<d<d_n$ 时,仍取点 M,使 $ME=d_{n-1}$. 于是 $OM<\frac{a}{k+2n}$. 由于 $ME=d_{n-1}$,所以仍需运送 $(k+n-1)L$ 升汽油到点 M. 故仍需在点 O 与 M 之间往返行驶至少 $k+2n$ 次. 不过因为路近耗油较少,即至少耗油 $(k+2n)\frac{d-d_{n-1}}{a}L$ 升. 在 OE 上的总耗油量至少为

$$\begin{aligned}&(k+n-1)L+(k+2n)\frac{d-d_{n-1}}{a}L\\=&(k+n)L-(k+2n)\frac{d_n-d}{a}L\quad(\text{升}).\end{aligned}$$

下面给出当 $d_{n-1}<d\leqslant d_n$ 时,耗油量达到最小值 $(k+n)L-(k+2n)\frac{d_n-d}{a}L$ 升的行驶方案.

在 EO 上依次取点 $M_0,M_1,\cdots,M_{n-1}$,使得 $M_jE=d_j$, $j=0,1,\cdots,n-1$. 见下图

$O\quad M_{n-1}\quad\quad M_2\quad M_1\quad M_0\quad E$

首先让一辆汽车每趟带 L 升汽油在点 O 与 M_{n-1} 之间往返行驶共 $2n$ 次,其中 n 次是由点 O 驶抵点 M_{n-1},每次存放汽油 $\left(1-\frac{2}{k+2n}\right)L$ 升,共存放汽油 $n\left(1-\frac{2}{k+2n}\right)L$ 升. 然后 k 辆汽车中的每辆汽车都带 $\left(1-\frac{d_n-d}{a}\right)L$ 升汽油,一起从点 O 行驶到点 M_{n-1}. 这一段共耗油 $\frac{d-d_{n-1}}{a}kL$,于是在点 M_{n-1} 处,k 辆汽车所剩的总油量加上存放在 M_{n-1} 的汽油量之和为

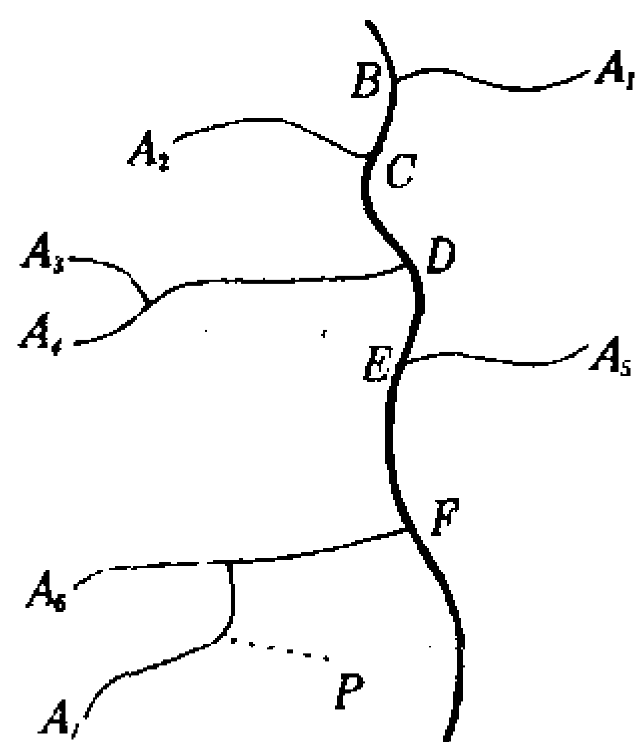
$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{d_n-d}{a}\right)kL-\frac{d-d_{n-1}}{a}kL+n\left(1-\frac{2}{k+2n}\right)L\\=&(k+n-1)L.\end{aligned}$$

然后在点 $M_{n-2},\cdots,M_1,M_0$ 先后存放汽油,并归纳地安排行驶方案. 设当 k 辆汽车均驶至 M_j 处时,k 辆汽车中所余的汽油总量与点 M_j 处存放的汽油量之和为 $(k+j)L$ 升. 这时先安排一辆汽车每次带 L 升

汽油往返 j 次，在点 M_{j-1} 处共存放汽油 $\left(1-\frac{2}{k+2j}\right)jL$ 升.然后每辆汽车都带上 L 升汽油，k 辆汽车恰好把点 M_j 处的汽油全部带走. k 辆车一起从 M_j 驶到点 M_{j-1}. 这一过程中，$k+2j$ 次共行驶 a 千米，耗油 L 升. 于是，k 辆汽车到达点 M_{j-1} 时，所余汽油总量恰为 $(k+j-1)L$ 升. 由归纳法知，k 辆汽车都到达点 M_0 时，所余汽油总量为 kL 升. 恰好可以使 k 辆车驶抵点 E.

综上可知，按上面安排的行驶方案行驶时，可使 k 辆汽车都从点 O 驶抵点 E，且耗油量最小.

7·73　如图是一个工厂区的地图，一条公路(粗线) 通过这个地区七个工厂 $A_1, A_2, \cdots, A_7$，分布在公路两侧，由一些小路(细线) 与公路相连，现在要在公路上设一个长途汽车站，车站到各工厂(沿公路小路连) 的距离总和越小越好.



(1) 这个车站设在什么地方最好?

(2) 证明你所作的结论.

(3) 如果在 P 的地方又建立了一个工厂，并且沿着图上的虚线修了一条小路，那么这时车站设在什么地方好?

(北京市数学竞赛，1978 年)

[解 1]　设 B, C, D, E, F 是各小路连通公路的道口.

(1) 车站设在 D 点最好.

(2) 如果车站设在公路上的 D 以北的某个 S 点. 用 $u_1, u_2, \cdots, u_7$ 表示 S 到各工厂的路程，

$$w = u_1 + u_2 + \cdots + u_7.$$

当 S 向 C 移动一段路程时，u_1, u_2 各减少 d，所以 w 就增加 $5d - 2d = 3d$.

当 S 自 C 再向 B 移动一段路程 d'，u_1 就减少 d'，$u_2, \cdots, u_7$ 各增加 d'，则 w 就增加 $6d' - d' = 5d'$.

如果 S 自 B 向北再移动 d'' 时，w 就再增加 $7d''$，这说明 S 在 D 点以北的任何地方都不如 D 点好，同样可以证明 S 在 D 点以南的任何地方都不如在 D 点好.

(3) 设在 D,E 或 D 与 E 之间的任何地方都可以.

[解 2] 首先,车站不该在 B 点以北,否则,每个工厂的人都必须多走 B 点以北这段路.同理车站不该设在 F 点之南,所以车站应设在 B 与 F 之间.

第二,车站不论设在 B,F 之间的哪一点,A_1 与 A_7 两厂的人在公路上所走的距离之和是常数,等于从 B 到 F 的路程,既然 A_1 和 A_7 两厂合在一起一定要走这样一段路,就可以不考虑 A_1 和 A_7,于是车站应设在 C,F 之间.

第三,和前边一样,不论车站设在 C,F 之间的这段路的什么地方,A_2,A_6 两厂合起来一定要走 C 与 F 之间的这段路,所以又可以去掉 A_2,A_6.而只考虑 A_3,A_4,A_5 的人在 DE 之间所走的路.

第四,只要车站在 D 点之南,比如说距 D 为 d(比 DE 短),A_3,A_4,A_5 就必须是 $DE+d$ 那样长的路,所以 $d=0$ 时,即车站设在 D 点最好.

对于增加了工厂 P,结论同解 1.

7·74 有锁若干把,现有六个人各掌握一部分钥匙,已知任意两个人同时去开锁,有且恰有一把锁打不开,而任何三个人都可以把全部锁打开,问最少有多少把锁?

(中国安徽省数学竞赛,1980 年)

[解 1] 因为每一个两人组都有一把锁打不开,把所有这些锁的总数记为 k,则

$$k \leqslant C_6^2 = 15.$$

但 $k < C_6^2$ 不可能,因为若 $k < C_6^2$,则必有两个不同的两人组打不开同一把锁,而两个不同的两人组至少有三人,这与任意三人都能打开全部的锁,矛盾.

所以 $k = C_6^2 = 15$.

即最少有 15 把锁.

[解 2] 把任意两人组记作 (i,j)(将 6 人编号为 1,2,3,4,5,6),其中 $i \neq j$.

显然 $(i,j)=(j,i)$.

这样的两人组共有 $C_6^2 = 15$ 个.

把(i,j)打不开的锁记作a_{ij}.

下面我们证明,当$(i,j)\neq(k,l)$时,a_{ij}与a_{kl}不同.

若不然,则两人组(i,j)和(k,l)有同一把锁打不开,而(i,j)和(k,l)至少有三个人,这与任意三人都能把全部锁打开矛盾.

所以两人组打不开的锁的个数与两人组的组数相同,因此$C_6^2=15$是锁的最少数目.

7·75　某州颁布由6个数字组成的车牌号(由0—9的数字组成),且规定任何两个车牌号至少有两个数字不同(因此牌号027592和020592不能同时使用),试求车牌号最多有多少个?

(第19届美国数学奥林匹克,1990年)

[解]　我们取所有不同的5位数(包括首位为0的在内),共有10^5个.然后每个牌号的第6位数字是前5位数字之和的个位数字.容易验证,这10^5个号码满足题中要求.

另一方面,任何10^5+1个车牌号中,必有两个牌号的前5位数字相同,当然不符合题中要求.所以,车牌号最多有10^5个.

7·76　一条公路,沿途有10个汽车站$A_0,A_1,A_2,\cdots,A_9$.相邻两站间的距离都是a千米,有一汽车从A_0站出发,跑遍各站,运送货物.汽车在各站只停留一次,最后返回始发站A_0.由于货运需要,汽车不一定顺次在$A_1,A_2,A_3,\cdots$各站停留(比如,可以由$A_3\to A_5\to A_7\to\cdots$).问该汽车可能行驶的最大里程是多少千米?最小里程又是多少千米?说明理由.

(中国陕西省数学竞赛,1979年)

[解]　由已知,$A_0,A_1,A_2,\cdots,A_9$各站与A_0的距离分别为$0,a,2a,\cdots,9a$.

设汽车运行中,第n次停车时与A_0站的距离为$x_n(x_n\geqslant0)$,则汽车行驶的总里程是:

$$S=|x_0-x_1|+|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\cdots+|x_9-x_0|.$$

如果把上式中的绝对值符号去掉,就得到S是由10个带正号的数与10个带负号的数的代数和,显然这个和不大于

$$2(9a+8a+7a+6a+5a)-2(4a+3a+2a+a+0)$$
$$=50a(千米)$$

故汽车行驶的里程不超过$50a$千米.

当汽车行驶的路线如下时：

$A_0 \to A_9 \to A_1 \to A_8 \to A_2 \to A_7 \to A_3 \to A_6 \to A_4 \to A_5 \to A_0$

$$\begin{aligned} S &= |0-9a|+|9a-a|+|a-8a|+|8a-2a| \\ &\quad +|2a-7a|+|7a-3a|+|3a-6a|+|6a-4a| \\ &\quad +|4a-5a|+|5a-0| \\ &= +9a+8a+7a+6a+5a+4a+3a+2a+a+5a \\ &= 50a(\text{千米}). \end{aligned}$$

因此，行驶的最大里程是 $50a$ 千米.

又汽车在 A_0 与 A_9 之间往返，行驶里程至少是 A_0 与 A_9 之间距离的二倍，即

$$S \geqslant 2 \times 9a = 18a(\text{千米}).$$

当汽车行驶路线如下时

$A_0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5 \to A_6 \to A_7 \to A_8 \to A_9 \to A_0$

$$\begin{aligned} S &= |0-a|+|a-2a|+|2a-3a|+|3a-4a| \\ &\quad +|4a-5a|+|5a-6a|+|6a-7a|+|7a-8a| \\ &\quad +|8a-9a|+|9a-0| \\ &= 18a(\text{千米}). \end{aligned}$$

因此，汽车行驶的最小路程是 $18a$ 千米.

7·77　三位数共 900 个(100,101,…,999)，在卡片上打印这些三位数，每张卡片上打印一个三位数. 但是，有些卡片上打印的，倒过来看仍为三位数，如 198 倒过来看是 861；有的卡片则不然，如 531 倒过来看没有意义. 因此，有些卡片可以一卡二用，便可少打一些卡片. 问最少可以少打多少种卡片？

(中国高中数学联赛，1993 年)

[解]　将一个数字倒过来看仍有意义的数字共有 5 个：0,1,6,8,9. 一个三位数倒过来看仍为三位数，这样数的十位数字便有 5 种选择. 但因百位和个位都不能为 0，故只有 4 种选择. 从而这样数的总数为 $5 \times 4 \times 4 = 80$.

在上述倒过来看仍为三位数的所有数中，有的数倒过来看是另外一个三位数，还有的数倒过来看仍然是它自己. 显然，只有前者才能使一卡二用，后一种是不行的.

倒过来看仍是自己的数字只有 3 个：0,1,8，故后一种数的十位数

字只有这 3 种选择. 百位数字可以选取 1,6,8,9. 个位数字则相应地取为 1,9,8,6. 易见,这种数共有 12 个.

综上可知,倒过来看仍有意义但又不等于它自己的三位数共有 68 个,打印卡片时可以一卡二用,省去一半,即最多可少打印 34 张卡片.

7·78 在长度为 100 米的走廊内铺设总长为 1000 米的 20 块条形地毯,假设地毯的宽度与走廊的宽度相同,问最多可能有多少块地方未被盖住?

(第 31 届莫斯科数学奥林匹克,1968 年)

[解] 如果走廊的每点都被盖住 10 层,那么 1000 米长的地毯将恰好将走廊盖满 10 层. 因此,要想有的地方未被盖住,至少有一点要被盖住 11 层. 显然,这 11 块地毯盖住了走廊的某个完整地段. 即使另外 9 块地毯互不相重,也至多盖住 10 块地段,从而未被盖住的地块至多有 11 块.

另一方面,设 20 块地毯中有 11 块各长 90.5 米,其余 9 块各长 0.5 米,则共长 1000 米. 将前 11 块完全重叠在一起,后 9 块各自单独铺设,则共盖住了走廊地面 95 米. 因而只要将 10 部分所分的 11 块未被盖住的地块长度一致,均为 $\frac{5}{11}$ 米就可以了.

综上可知,未被盖住的地块最多有 11 块.

7·79 两个油漆工人为围绕别墅的 100 段篱笆刷漆,二人隔日交替工作,每人在每一个工作日中各油漆一段篱笆,可随意涂上红色或绿色. 第一人是色盲,分不清颜色,但他能记住自己已漆过的地方和颜色,也能看出第二人已漆过的地方但不知什么颜色. 第一位工人希望篱笆上的红绿交替之处越多越好,问他最多能得到多少个红绿交替之处(不论第二人怎样工作)?

(第 31 届莫斯科数学奥林匹克,1968 年)

[解] 第一人首先从头开始,把第 1 段篱笆涂成红色. 然后第 3 天来时,如果第二人已涂了第 2 段,则第一人就把第 3 段涂成绿色;如果第二人未涂第 2 段,则他就把第 2 段涂成绿色. 第一人的涂漆原则是从开头不间断地往下涂,遇到第二人涂过的部分,则越过去后接着涂漆,且每次涂漆都与上一次异色. 这样,第一人自己涂的 50 段篱笆改变了 49 次颜色,而在他涂的每两段之间无论第二人涂了几段和涂了什么颜色,

颜色交替的次数绝不会减少,故至少有49次交替之处.

如果第二人每次都紧挨着第一人涂一段相同的颜色,则颜色交替的次数恰为49次,故知第一人最多能得到49处颜色交替之处(这里是理解篱笆的开头和结尾不是接着的,例如可能隔着门.否则答案应为50).

7·80　已知 h 块(国际象棋的)棋盘中的每块上面的64个方格都从1到64编号,使得其中任何两块棋盘的周界以任一种方式重合时,位置相同的任何两个方格的编号都不相同,求棋盘块数 h 的最大值.

(第29届国际数学奥林匹克候选题,1988年)

[解]　将棋盘上的64个方格分成16组如右图所示.将1到64这64个自然数依次每4个数为1组分成16组.将这16组数依次填入第1块棋盘的 $A,B,C,\cdots,P$ 组方格中.对于第2块棋盘,依次将16组数填入 $B,C,\cdots,P,A$ 组方格中.这样轮换下去,最后将这16组数依次填入第16块棋盘的 $P,A,B,\cdots,O$ 组方格中.易见,这16块棋盘的编号满足题中要求,故所求的 h 的最大值不小于16.

J	K	L	M	N	O	P	J
P	E	F	G	H	I	E	K
O	I	B	C	D	B	F	L
N	H	D	A	A	C	G	M
M	G	C	A	A	D	H	N
L	F	B	D	C	B	I	O
K	E	I	H	G	F	E	P
J	P	O	N	M	L	K	J

如果有已编好号码的17块棋盘,则这些棋盘上的 A 组方格共有68个编号.于是由抽屉原理知其中必有两个号码相同,且这两个号码相同的 A 组方格不在一块棋盘上.从而可选择这两块棋盘的位置而使这两个 A 组方格重合.可见,17块棋盘的任何编号方式都不满足要求.所以,所求的 h 的最大值为16.

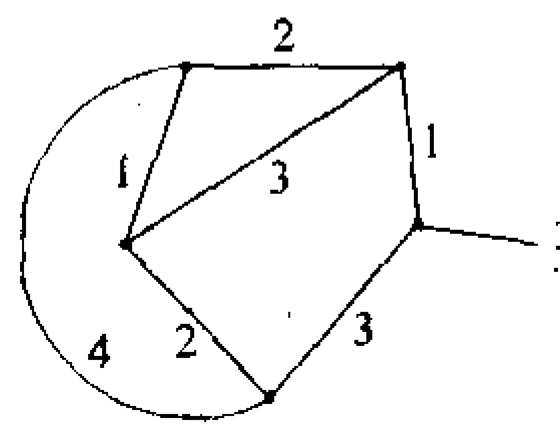
7·81　设20部电话机之间用导线接通,每一根导线连接两部电话机,每一对电话机之间至多连有1根导线;自每一部电话机至多连出3根导线.现要给这些导线中的每根涂上1种颜色,使得从每部电话机所连出的几条导线的颜色互不相同,最少需要几种不同的颜色?

(第51届莫斯科数学奥林匹克,1988年)

[解]　连线如右图所示时,至少要用4种不同的颜色.

下面证明使用4种不同颜色是足够的.将每部电话机用一个点表示,当两部电话机之间有导线连接时,就在相应两点间连一条线段.于是得到一个图,这个图有20个顶点,每个顶点至多连有3条边.图中会有一些圈和一些链,圈和链上所含有的边数叫做它们的长度.先找出图

中最长的圈.如果它含有偶数条边,则用1号和2号色相间地为这些边涂色;如果含有奇数条边,则将其中1条边涂上3号色,其余的仍用1号和2号相间地涂色.涂色后去掉这个圈以及由圈上顶点引出的所有的边(这些边尚未涂色).然后再从余下的图中找出最长的圈,并按同样办法涂色,去掉这个圈及其上顶点引出的所有的边.如此继续下去,一直进行到图中没有圈为止.这时,再找出余下的图中最长的链,并用1号和2号色相间地为链上的边涂色.然后去掉这条链及由链上的顶点所引出的所有的边.接着再在余下的图中找出最长的链,并继续上述过程,直到图中没有链为止.这时,余下的图是一些孤立点.现在,再来考虑上述过程中去掉的尚未涂色的边的涂色问题.对于那些两端点都是已涂色的圈上的顶点或链上的内顶点(非端点)的边,可一律涂上4号色.对于那些有一端为孤立顶点的边,其另一端一定是圈上的顶点或链上的内顶点(否则,该孤立顶点应当连到链上),因此每条这样的边的另一端点处,都连有两条已涂色的边.如果一个孤立顶点连有3条边,而它们的另一端点处所连的另两条边都涂有1号和2号色,那么可将其中一个端点处的一条边改涂为3号色(这样做是可以的,因为每个圈上都至多有一条边涂有3号色),而将孤立顶点与该顶点之间的边涂上这条边原来的颜色(1号或2号),再将由孤立顶点发出的另两边分别涂上3号与4号色即可.如果一个孤立点连有3条边,而它们的另一端点处所连的另两条边都是1号(或2号)和3号色,那么可将一个端点处的3号边与其另一个邻边颜色对调,并将该顶点与孤立顶点间的边涂上3号色,由孤立顶点发出的另两条边分别涂上2号(或1号)和4号色即可.对于其他情况,就更易处理了.对于有一个端点为链的端点的情形,可作类似处理,充其量将链的最后一条边改涂3号色即可.



综上可知,最少需要4种不同的颜色.

7·82　已知155只鸟停在一个圆C上.如果$\overset{\frown}{P_iP_j}\leqslant 10^\circ$,则称鸟$P_i$与$P_j$是互相可见的.求互相可见的鸟对的最小数目(可以假定一个位置同时有多只鸟).

(第30届国际数学奥林匹克预选题,1989年)

[解]　设鸟α和β分别停在圆C的点A和B,且鸟α和β是互相可

见的. 设从点 B 可见而从点 A 不可见的鸟的个数为 k，从点 A 可见而从点 B 不可见的鸟的个数为 h. 不妨设 $k \geqslant h$. 易见，如果把停在点 B 的鸟全都移到点 A，则鸟的可见对的数目不会增加. 但这样一来，停鸟的点处减少 1 个. 重复这个过程，直到凡是可见的鸟都停在同一点为止. 这时，停有鸟的位置至多 35 个. 若不然，至少有 36 个位置停有鸟，则其中必有两点间所夹的弧长不超过 $10°$，从而两点所停的鸟是互相可见的，矛盾. 另一方面，设 $A_1, A_2, \cdots, A_{35}$ 是圆 C 的内接正 35 边形的顶点，则停在 A_i 与 $A_j (i \neq j)$ 的各一只鸟是不可见的. 若上述的停鸟点数 $n \leqslant 34$，则可将 n 个点分别移动 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 由于 $n \leqslant 34$，故点 A_{35} 没有鸟. 若 A_i 至少有两只鸟，则当把其中 1 只移到点 A_{35} 时，可见对减少了. 这样继续下去，总可以使停鸟点处恰为 35 个，且就是 $A_1, A_2, \cdots, A_{35}$.

若存在点 A_i 和 $A_j (i \neq j)$，停鸟数分别为 x_i 和 x_j，且 $x_i \geqslant x_j + 2$，则可将 A_i 处的鸟移到 A_j 1 只，这使鸟的可见对至少减少 1 对. 继续下去，可使 $x_1, x_2, \cdots, x_{35}$ 中任何两数之差都不超过 1. 可见，当这 35 个数中有 20 个 4 和 15 个 5 时，可见鸟对的数目取得最小值 $20C_4^2 + 15C_5^2 = 270$.

7·83　地面上有 10 只小鸟在啄食，其中任何 5 只鸟中至少有 4 只在一个圆上，问有鸟最多的一个圆上最少有几只鸟？

（第 6 届中国中学生数学冬令营，1991 年）

[解 1]　用 10 个点来表示 10 只小鸟. 如果 10 点中的任何 4 点都共圆，则 10 点全在同一个圆上. 以下设 A, B, C, D 这 4 点不共圆. 这时，过 4 点中不共线的 3 点可以作一个圆，最多可作出 4 个不同的圆 S_1, S_2, S_3, S_4，最少可作出 3 个不同的圆. 对于这两种情形，下面的论证完全一致，我们仅就 4 个不同的圆的情形来证明.

从其余 6 点 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ 中任取一点 P_i 与 A, B, C, D 组成五点组，按已知，其中必有 4 点共圆. 所以，点 P_i 必在 S_1, S_2, S_3, S_4 之一上. 由 P_i 的任意性知，后 6 点中每点都必落在 4 圆之一上. 由抽屉原理知其中必有两点落在同一个圆上，即 10 点中必有 5 点共圆.

设 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 在同一个圆 C_1 上，P 和 Q 两点不在 C_1 上.

(1) 考察五点组 $\{A_1, A_2, A_3, P, Q\}$，其中必有 4 点共圆 C_2. C_2 至少含 P 和 Q 中之一，故 $C_2 \neq C_1$，因而 A_1, A_2, A_3 不能全在 C_2 上，否则

C_2 与 C_1 重合.不妨设 $A_1,A_2,P,Q\in C_2$,于是 $A_3,A_4,A_5\notin C_2$.

(2) 考察五点组 $\{A_3,A_4,A_5,P,Q\}$,其中必有 4 点共圆 C_3.显然,$C_3\neq C_1$,因而可设 $A_3,A_4,P,Q\in C_3$,于是 $A_1,A_2,A_5\notin C_3$.可见 $C_3\neq C_2$.

(3) 考察五点组 $\{A_1,A_3,A_5,P,Q\}$,其中必有 4 点共圆 $C_4\neq C_1$.因而 A_1,A_3,A_5 不能全在 C_4 上,故有 $P,Q\in C_4$ 且 A_1 与 A_3 中至少有一点属于 C_4.

若 $A_1\in C_4$,则 C_4 重合于 C_2.但因 $A_3,A_5\notin C_2$ 而二者之一属于 C_4,矛盾.若 $A_3\in C_4$,则 C_4 重合于 C_3.但因 $A_1,A_5\notin C_3$,故亦不属于 C_4,此不可能.

综上,我们证明了圆 C_1 之外至多有10点中的1点,即 C_1 上至少有9点.另一方面,10个已知点中的9点共圆,另1点不在此圆上的情形显然满足题中要求,故知有鸟最多的一个圆上最少有9只鸟.

[**解 2**] 我们用10个点来代表10只鸟并先来证明10点中必有5点共圆.

若不然,则10点中的任何5点都不共圆,但其中必有4点共圆,下面称之为四点圆.10个已知点共可构成 $C_{10}^5=252$ 个五点组,每组都可作出一个四点圆,共有252个四点圆(包括重复计数).每个四点圆恰属于6个不同的五点组,因而共有42个不同的四点圆.

42个四点圆上共有168个已知点,而不同的已知点共有10个,故由抽屉原理知有一点 A,使得过点 A 的四点圆至少有17个.

过点 A 的17个四点圆上,除点 A 之外每圆还有3个已知点,共有51个已知点.这51个点都是除 A 之外的另9个已知点,于是由抽屉原理知又有一点 $B\neq A$,使得上述17个四点圆中至少有6个过点 B.这就是说,过 A,B 两点的四点圆至少有6个.

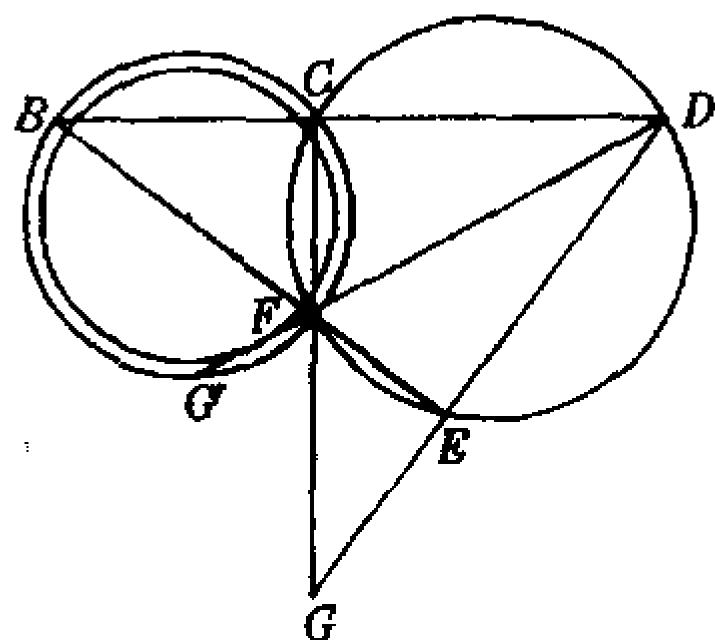
这6个四点圆中的每个圆上除点 A 和 B 之外还有两个已知点,共12个点,它们都是除 A,B 之外的另8点.由抽屉原理知又有一点 C,使上述6圆中至少有两个圆过点 C.于是,这两个不同的四点圆有3个公共点 A,B,C.从而两个圆重合,这导致5点共圆,与反证假设矛盾.这就证明了10点中必有5点共圆.

以下证明同解 1.

[解3] 设10个已知点中的 A,B,C,D 4点共圆.以点 A 为中心进行反演变换,于是 B,C,D 这3点的像点 B',C',D' 在一条直线上且连同其余6点的像点的9点中,任何4点或共圆,或其中有3点共线.

为简单计,我们将 $B,C,D,\cdots,I,J$ 的反演像点仍记为原字母.若有两点 E,F 在直线 BC 之外,则考察3个四点组 $\{E,F,B,C\}$, $\{E,F,B,D\}$, $\{E,F,C,D\}$.显然,其中恰有一组四点共圆.不妨设 E,F,C,D 4点共圆.于是 B,E,F 3点共线.考察 B,C,F 及第7点的像点 G,则点 G 在圆 BCF 上或在 $\triangle BCF$ 的某条边所在的直线上.

(1) 若 G 在直线 BC 上,则 G,D,E,F 4点既不共圆,其中任何3点也不共线,矛盾.故知 G 不在直线 BC 上.同理,G 也不在直线 BF 上.



(2) 若 G 在直线 CF 上,则 G 不在圆 DEF 上,故 G 只能在直线 DE 上,即 G 为直线 CF 与 DE 的交点.显然,这样的交点至多1个(见上图).

(3) 若点 G 在圆 BCF 上,则 G 不在圆 CDF 上,也不在直线 CD 或 CF 上,故 G 必在直线 DF 上.从而 G 为直线 DF 与圆 BCF 的另一个交点,即上图中的 G'.这样的交点也是最多1个.

上面关于点 G 的推导对于后4点的像点 G,H,I,J 完全一样,所以这4点都必须是上述两种交点之一,此不可能.这就证明了直线 BC 之外至多有1个像点.从而知原来的圆 $ABCD$ 上至少有9个已知点.

另一方面,因为10个已知点中9点共圆而第10点不在此圆上的情形显然满足题中要求,所以,有鸟最多的一个圆上最少有9只鸟.

7·84 设 a 和 b 是给定的正整数.现有一个机器人沿着一个共有 n 级的楼梯上下升降.机器人每上升一次,恰好上升 a 级楼梯;每下降一次,恰好下降 b 级楼梯.为使机器人经若干步升降后,可以从地面到达楼梯顶端,然后再返回地面,问 n 的最小值是多少?证明你的结论.

(第31届国际数学奥林匹克预选题,1990年)

[解] 我们称地面为楼梯的0级并从下往上计数楼梯的级数.当我们把上和下颠倒过来看时,a 和 b 互换,故不妨设 $a \geqslant b$.

若 $b \mid a$,则可设 $a = sb, s \in N$.取 $n = a$,则机器人上升1次,再下

降 s 次,就可以从地面上到楼梯顶端再下降而返回地面.显然,若 $n < a$,机器人就无法上升.可见,n 的最小值为 a.

再考虑 $b \nmid a$ 且 $(a,b)=1$ 的情形.为使 n 的值尽可能小,机器人上升 1 次后就应下降.设上升 1 次后再下降,可以达到的最低位置是楼梯的第 r_1 级.显然,r_1 就是 a 除以 b 时的余数:

$$a = bs_1 + r_1, 1 \leqslant r_1 \leqslant b-1. \quad ①$$

因为 $r_1 < b$,所以机器人不能从 r_1 级楼梯再下降,而只能上升到 $a + r_1$ 级的位置.为使上升成为可能,必须有 $n \geqslant a + r_1$.然后,机器人下降后所能到达的最低位置是第 r_2 级,这里 r_2 是 $a + r_1$ 除以 b 时的余数:

$$a + r_1 = bs_2 + r_2, 0 \leqslant r_2 \leqslant b-1.$$

接着机器人继续升降,一般地,对已给的 r_i,存在整数 r_{i+1}, s_{i+1},使得

$$a + r_i = bs_{i+1} + r_{i+1}, 0 \leqslant r_{i+1} \leqslant b-1. \quad ②$$

显然,要使上述升降过程得以进行,必须 $n \geqslant a + r_i$,$i = 1,2,\cdots$,而且每个 r_i 都满足 $0 \leqslant r_i \leqslant b-1$.

由 ① 知 $a \equiv r_1 \pmod b$,再由 ② 又可依次证明 $r_i \equiv ir_1 \pmod b$,$i = 1,2,\cdots$.由于 $(r_1,b) = (a,b) = 1$,故当 i 依次取值 $1,2,\cdots,b$ 时,r_i 将通过模 b 的完全剩余系.注意到 $0 \leqslant r_i \leqslant b-1$,便知 $r_1, r_2, \cdots, r_b$ 是 $0,1,\cdots,b-1$ 的某个排列.特别地,由 $r_b \equiv br_1 \equiv 0 \pmod b$ 可得 $r_b = 0$.此外,存在惟一的整数 $j < b$,使得 $r_j = b-1$.于是得到 $n \geqslant a + r_j = a + b - 1$.

若 $n = a + b - 1$,则由 r_i 的意义可知,机器人在升降过程中,可依次到达第 $r_1, r_2, \cdots, r_b$ 级的位置.特别可以到达 r_j 级的位置,于是再上升 1 次即到达楼梯的顶端.机器人继续下降和上升,又可以到达第 r_b 级的位置.由于 $r_b = 0$ 知机器人这时返回到地面.可见,当 $(a,b) = 1$ 时,n 的最小值是 $a + b - 1$.

对于 $b \nmid a$,$(a,b) = d > 1$ 的情形,可设 $a = a_1 d$,$b = b_1 d$,于是 $(a_1,b_1) = 1$.对 a_1 和 b_1 作与前相同的讨论,即可得知这时 n 的最小值为

$$d(a_1 + b_1 - 1) = a + b - (a,b). \quad ③$$

显然,这一结果与前两种情形的结果是一致的,故知所求的 n 的最小值为 $a + b - (a,b)$.

7·85　已知下列一个 5×5 的数表

$$\begin{pmatrix} 11 & 17 & 25 & 19 & 16 \\ 24 & 10 & 13 & 15 & 3 \\ 12 & 5 & 14 & 2 & 18 \\ 23 & 4 & 1 & 8 & 22 \\ 6 & 20 & 7 & 21 & 9 \end{pmatrix}.$$

试从这个数表中选出 5 个元素，使得它们任何两个都不位于相同的行或列，并使其中最小的一个有尽可能大的值．证明你所选答案的正确性．

（第 20 届美国普特南数学竞赛，1959 年）

［解］　因为这个数表的边线只有 4 条，所以依题意从边界上最多只能选取 4 个元素，所以在除去四边之后，中心的 3×3 数表中还应至少选取一个元素．易见这个元素的最大值是 15．

再从数表的 4 条边上选取比 15 大的四个数 25，18，23，20 即可．

事实上，当 15 选定以后，在第三列必须选取 25，在第三行必须选取 18，在第四行，第五行必须选取 23 与 20，这样选取的 5 个元素是符合本题要求的惟一解．

7·86　设 $S=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列．$f(S)$ 为 S 中每两个相邻元素的差的绝对值的最小值．求 $f(S)$ 的最大值．

（第 30 届国际数学奥林匹克候选题，1989 年）

［解］　$f(S)$ 的最大值为 $\left[\frac{n}{2}\right]$．下面分两种情况来证明．

(1) $n=2k$ 时，k 与其相邻数之差的绝对值不大于 k，所以 $f(S)\leqslant k=\left[\frac{n}{2}\right]$．另一方面，令 $S=(k+1,1,k+2,2,\cdots,2k,k)$，则有 $f(S)=k$．

(2) $n=2k+1$ 时，$k+1$ 与其相邻数之差的绝对值不大于 k，从而 $f(S)\leqslant k=\left[\frac{n}{2}\right]$．而在排列　$S=(k+1,1,k+2,2,\cdots,2k,k,2k+1)$ 中，$f(S)=k$，所以仍有 $f(S)=k=\left[\frac{n}{2}\right]$．

7·87　对右图所示的写有正负号的方格表允许进行如下操作：将某一行或某一列中的符号全都变成与原来相反的符号，且在每次操作

后都记下表格中两种符号的个数之差的绝对值. 试求出所有这样的绝对值中的最小值.

+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	−	+	−	−	−
+	−	+	+	−	+	−	−
+	−	−	+	+	−	+	−
+	−	−	−	+	+	−	+
+	+	+	−	−	+	+	−
+	−	+	−	−	−	+	+
+	+	−	+	−	−	−	+

(原苏联教委推荐试题,1988 年)

[解] 因为在每次操作之下,该行或列中正号的个数都改变偶数个,所以在操作过程中,方格表中的正号个数的奇偶性不变. 又因表中原有 37 个正号,所以表中总是有奇数个正号. 因此,表中两种符号的个数之差为非零偶数,其绝对值当然不小于 2.

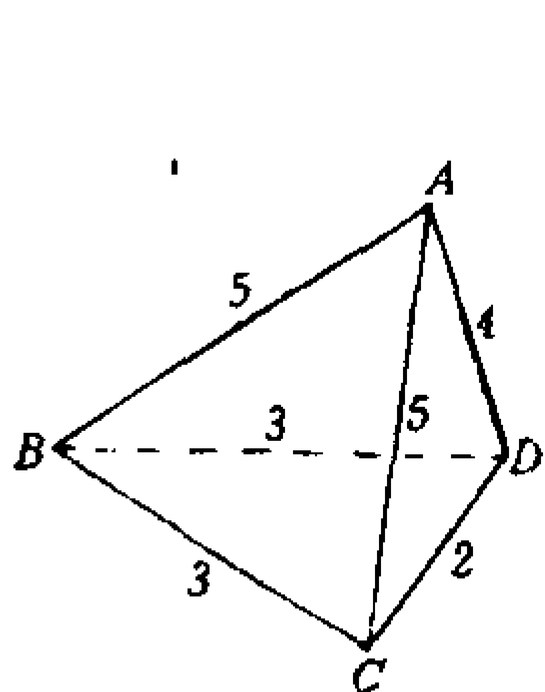
另一方面,当第 1 次操作将上面第 1 行变号,第 2 次操作将右面第 1 列变号后,表中有 31 个正号与 33 个负号,其个数之差的绝对值为 2.

可见,所求的最小值为 2.

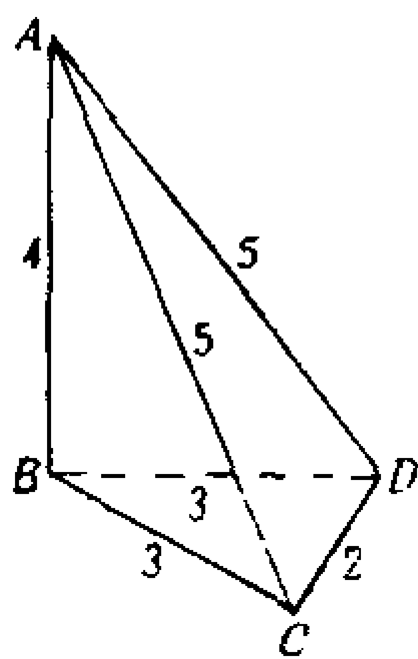
7·88 在 6 条棱长分别为 2,3,3,4,5,5 的所有四面体中,最大的体积是多少?说明理由.

(中国高中数学联赛,1983 年)

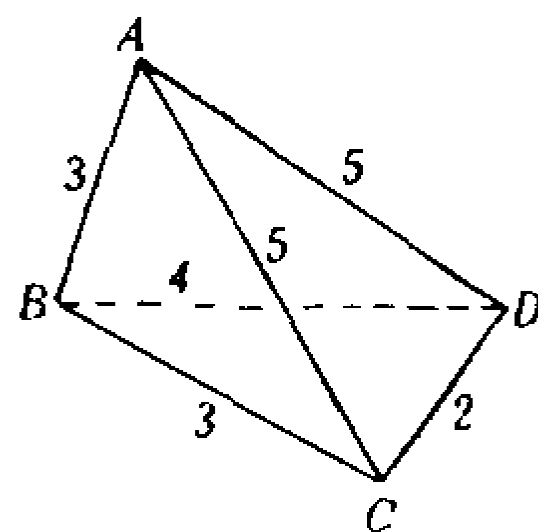
[解] 以 2 为一边长的三角形有四种可能:(1)2,3,3;(2)2,3,4;(3)2,4,5;(4)2,5,5. 在四面体的 4 个面中,恰有两个面以长为 2 的棱为一边. 按这两个面来分类,有三种可能情形:(1) 与(3);(1) 与(4);(2) 与(4). 与第一,第三两种情形对应的图形各有两种,但因两个图体的体积相同,故只须各考虑一种就可以了,见下图



(a)



(b)



(c)

先看图(b). 其中 $\angle ABC = \angle ABD = 90°$,所以,$AB \perp$ 平面 BCD. 故得

$$V_2 = \frac{1}{3} \times 4 \times S_{\triangle BCD} = \frac{8}{3}\sqrt{2}.$$

对于 V_1 和 V_3,我们有

$$V_1 = \frac{1}{3}h_1 \cdot S_{\triangle BCD} < \frac{4}{3}S_{\triangle BCD} = V_2;$$

$$V_3 = \frac{1}{3}h_2 \cdot S_{\triangle ABC} < \frac{2}{3}S_{\triangle ABC} = \frac{2}{3}\sqrt{5.5\times 0.5\times 2.5^2}$$

$$= \frac{5}{6}\sqrt{11} < \frac{8}{3}\sqrt{2} = V_2.$$

故知所求的体积 V 的最大值为 $V = \frac{8}{3}\sqrt{2}$.

7·89　在 400 张卡片上分别写有自然数 1,2,3,…,400. A 和 B 二人进行如下的游戏:第 1 步,A 任取 200 张卡片给自己.B 则从留下的 200 张和 A 手中的 200 张中各取 100 张给自己,余下的 200 张留给 A.下一步时,A 再从两人手中的卡片中各取 100 张给自己,余下的 200 张给 B.这样继续下去,直到 B 进行完第 200 步之后,就分别计算出两人手中的卡片上的数之和 C_A,C_B,然后 A 付给 B 差额 $C_B - C_A$.问在双方都以正确策略游戏时,B 所能得到的最大差数是多少?

(第 35 届莫斯科数学奥林匹克,1972 年)

[解]　设在最后一次 B 选取卡片前,A 手中的 200 张卡片上的数为 $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x_{200}$,$B$ 手中的 200 张卡片上的数为 $y_1 > y_2 > y_3 > \cdots > y_{200}$,于是 B 执步时可以选取 $x_1, x_2, \cdots, x_{100}$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_{100}$,于是

$$C_B - C_A = \sum_{i=1}^{100}[(x_i - x_{100+i}) + (y_i - y_{100+i})] \geqslant 20000.$$

另一方面,A 在第 1 步选取数 1,2,…,200 给自己,把 201,202,…,400 给 B,并且每次执步时都把这些数选回原样,则 B 执步后所能得到的最大差额恰为 20000.

7·90　在纸上把 1,2,…,20 写成一行.甲乙二人轮流把符号"+"或"-"放到其中一个数之前(不得重复填写).甲力求在放完 20 个符号后使所得和的绝对值尽可能小.求乙能使得到的和的绝对值达到的最大值.

(第 6 届全俄数学奥林匹克,1966 年)

[解]　把 20 个数分成 10 对:(1,2),(3,4),…,(19,20).甲每次填符号之后,如果他是在前 9 对中的某数之前填号,则乙就在同对的另一数前填写相反的符号;如果甲是在最后一对的某数前填号,则乙就在同

对另一数前填写相同的符号.这时,最后所得和的绝对值不小于

$$19+20-1-1-1-1-1-1-1-1-1=30.$$

可见,所能达到的和的绝对值的最大值不小于 30.

另一方面,我们指出,只要甲每次填符号时,总是在剩下诸数中的最大数之前放上与现有之和的符号相反的符号(若和等于 0,则放正号),那么乙就无法得到大于 30 的和.

考察甲乙二人填符号一局的全过程.设甲填符号使和改变符号的最后一次是甲第 k 次填号(包括使和由 0 变为正的情形).显然,甲在第 k 次填符号后(乙已经填了 $k-1$ 次),数 $20,19,18,\cdots,20-(k-1)$ 之前已填了符号,乙第 k 次填写所能用的最大数为 $20-k$.于是此时和的绝对值不超过 $20-(k-1)+20-k=41-2k$.接下去两人还要各填号 $10-k$ 次,由于已不再发生变号,故在两人各填号一次之后,至少要使和的绝对值减少 1.于是和的绝对值不大于

$$41-2k-(10-k)=31-k\leqslant 30.$$

综上可知,乙使和的绝对值所能达到的最大值为 30.

7·91　在一条纸带上印着号码从 000000 到 999999 的公共汽车票,然后把凡是号码的偶位数字之和与奇位数字之和相等的车票涂上蓝色.求两张相邻蓝票的号码差的最大值.

(第 31 届莫斯科数学奥林匹克,1968 年)

[解]　相邻蓝票的号码差的最大值为 990.

首先证明,号码差为 990 的两张蓝票 908919 与 909909 之间没有蓝票.若不然,设有蓝票 $\overline{abcdef}$ 在二者之间,即有

$$908919<\overline{abcdef}<909909, \qquad ①$$

则显然有 $a=9,b=0,8\leqslant c\leqslant 9$,且 $a+c+e=b+d+f$.若 $c=9$,则 $d+f\geqslant 18$.因而有 $\overline{abcdef}=909909$,此与①矛盾;若 $c=8$,则 $d=9$.于是 $f-e=8$.因为 $e>1,f\leqslant 9$,故有 $f-e\leqslant 7$,矛盾.这表明蓝票 908919 与 909909 之间没有蓝票,故所求的最大值不小于 990.

另一方面,考察号码形如 $\overline{abcabc}$ 的所有车票.显然,这样的票都是蓝票且它们构成一个公差为 1001 的等差数列.又因蓝票的号码都是 11 的倍数,故知为证任何两张相邻蓝票的号码差都不超过 990,只须再证下面的引理:

引理　对于任何一张蓝票的号码 $\overline{abcabc}<999999$,在号码 $\overline{abcabc}$

和$\overline{abcabc}+1001$之间都至少有1个号码是蓝票的号码.

引理的证明　分4种情形来分别构造如下:

(1) 若$c\neq9,b\neq9$,则$\overline{abcabc}+11$为蓝票;

(2) 若$c=9,b=9$,则$a\neq9$,从而$\overline{abcabc}+11$为蓝票;

(3) 若$c=9,b\neq9$,则$\overline{abcabc}+110$为蓝票;

(4) 若$c\neq9,b=9$,则$\overline{abcabc}+1001-11$为蓝票.

综上可知,两张相邻蓝票的号码差的最大值为990.

7·92　将一个单位正方形剪裁后,拼成一个对角线长度为100的矩形,试求剪口总长度的最小值,要求误差不超过2.

(第52届莫斯科数学奥林匹克,1989年)

[解]　设剪口总长度的最小值为L,所拼成的矩形的长和宽分别为a和b且$a\geqslant b$.于是有

$$a^2+b^2=100,ab=1.$$

因此有

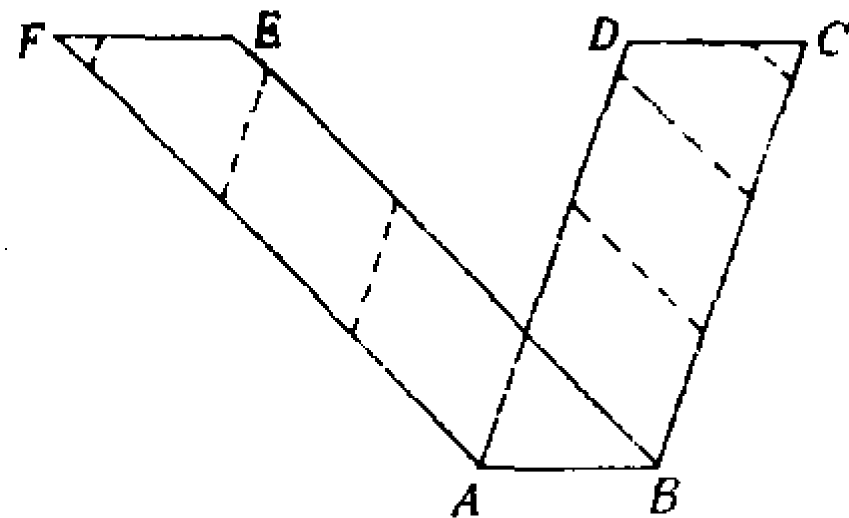
$$a+b=\sqrt{a^2+b^2+2ab}=\sqrt{100^2+2}>100.$$

矩形的周界$2(a+b)$应由原正方形的周界及剪口构成,且每段剪口至多给出本身长度的两倍,从而有

$$2L+4\geqslant2(a+b),$$

$$L\geqslant a+b-2\geqslant98. \quad ①$$

另一方面,任意两个同底等高的平行四边形可按右图所示的方式剪拼.取$ABCD$为单位正方形,$BE=a$,按上述过程可将正方形剪拼为一个边长为a,高为b的平行四边形$ABEF$.然后沿过点E所作FA的垂线再剪一刀,剪口长为b,便可拼得所要求的矩形.这时剪口总长为$a+b$,故有



$$L\leqslant a+b<100.01. \quad ②$$

由①和②即得$L\approx99$,误差不超过1.01.

7·93　为了能从一根无限长的带子上剪出任何面积为1的三角形,带子的宽度最少应该是多少?

(第47届莫斯科数学奥林匹克,1984年)

[解] 首先,面积为 1 的等边三角形的边长 $a=\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$,高 $h=\sqrt[4]{3}$. 显然,它不能从窄于 $h=\sqrt[4]{3}$ 的带子中剪出.故知带子的宽至少应为 h.

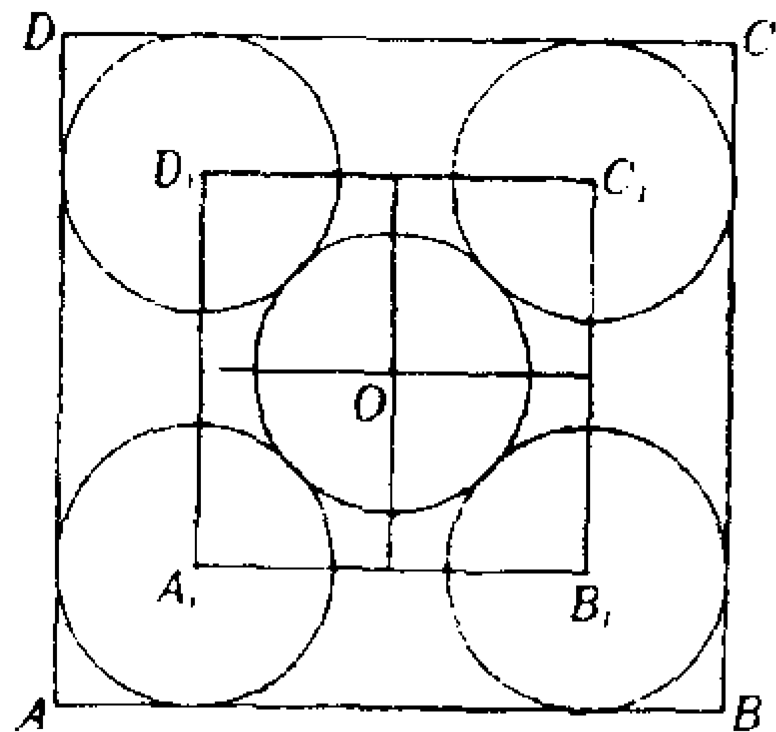
另一方面,我们来证明,任何面积为 1 的其他三角形都可从宽为 h 的带子中剪出.若不然,设有 1 个面积为 1 的三角形不能从中剪出,则它的 3 条高均应大于 h,从而任何一条边都小于 a.于是该三角形的面积应小于 $\frac{1}{2}a^2\sin\alpha$,其中 α 为该三角形的任一内角.但三角形的 3 个内角中总有 1 个不大于 60°,故知三角形的面积小于 1,矛盾.

综上可知,带子宽度的最小值是 $\sqrt[4]{3}$.

7·94 求一个具有最小边长的正方形,使得其中能安放 5 个半径为 1 的圆,并且任何两个圆都没有公共内点.

(保加利亚数学奥林匹克,1983 年)

[解] 设 $ABCD$ 是以点 O 为中心且边长为 a 的正方形,其中含有 5 个互不相交的半径为 1 的圆.则这些圆的圆心落在以 O 为中心且边长为 $a-2$ 的正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 中,其中 $A_1B_1 /\!/ AB$(见右图).连结正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 对边中点的连线把它分为 4 个小正方形.由抽屉原理知 5 个圆心中总有两个含在 1 个小正方形中.二者之间的距离不超过小正方形的对角线长,同时又不小于 2.因此有



$$2\leqslant OA_1=\frac{A_1B_1}{2}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(a-2).$$

由此即得 $a\geqslant 2\sqrt{2}+2$.

另一方面,当 $a=2\sqrt{2}+2$ 时,可安放 5 个半径为 1 的圆的圆心分别位于 O,A_1,B_1,C_1,D_1,则任何两圆都没有公共内点.故知所求的正方形的最小边长为 $2\sqrt{2}+2$.

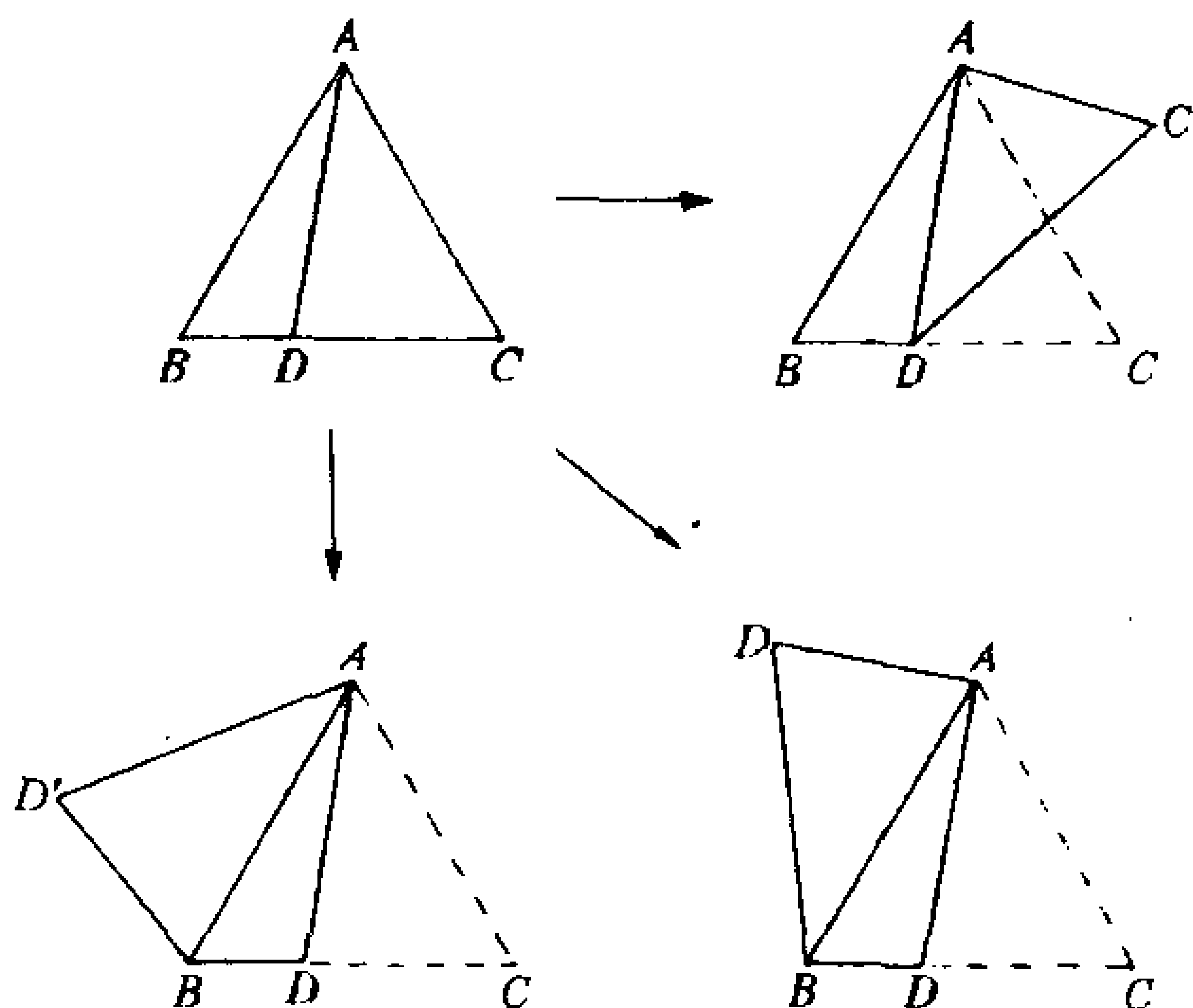
7·95 一个图形的直径是指这个图中任意两点间距离的最大值.给定一个边长为 1 的正三角形,试指出如何用直线把它截成两部分,使得重新把这两部分拼成一个图后具有最大直径.

(1) 如果此图形必须是凸的.

(2) 其他情形.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1991 年)

[解] 直径的最大值为$\frac{\sqrt{13}}{2}$.



若截线过正三角形的一个顶点,并且不过对边中点,则有如图三种情形.

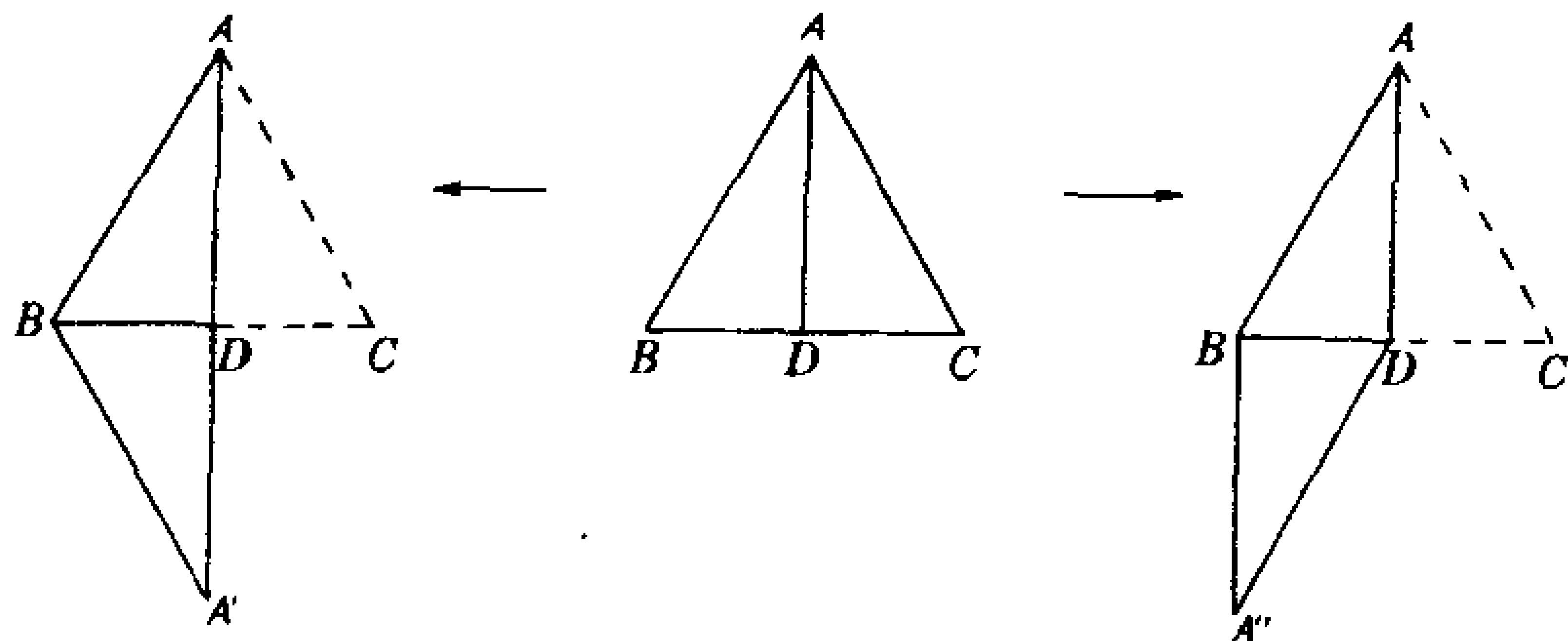
由于直径是由两个端点的距离产生的,所以这三个图形中只有 BC' 和 DD' 是新产生的长度.由于

$$BC' \leqslant \frac{1}{2}(BD + DC' + BA + AC') = \frac{3}{2} < \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

$$DD' \leqslant \frac{1}{2}(AD + BD + AD' + BD') = \frac{3}{2} < \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

若截线过一顶点且过对边中点,则还有如下两种情况:

这时可求得

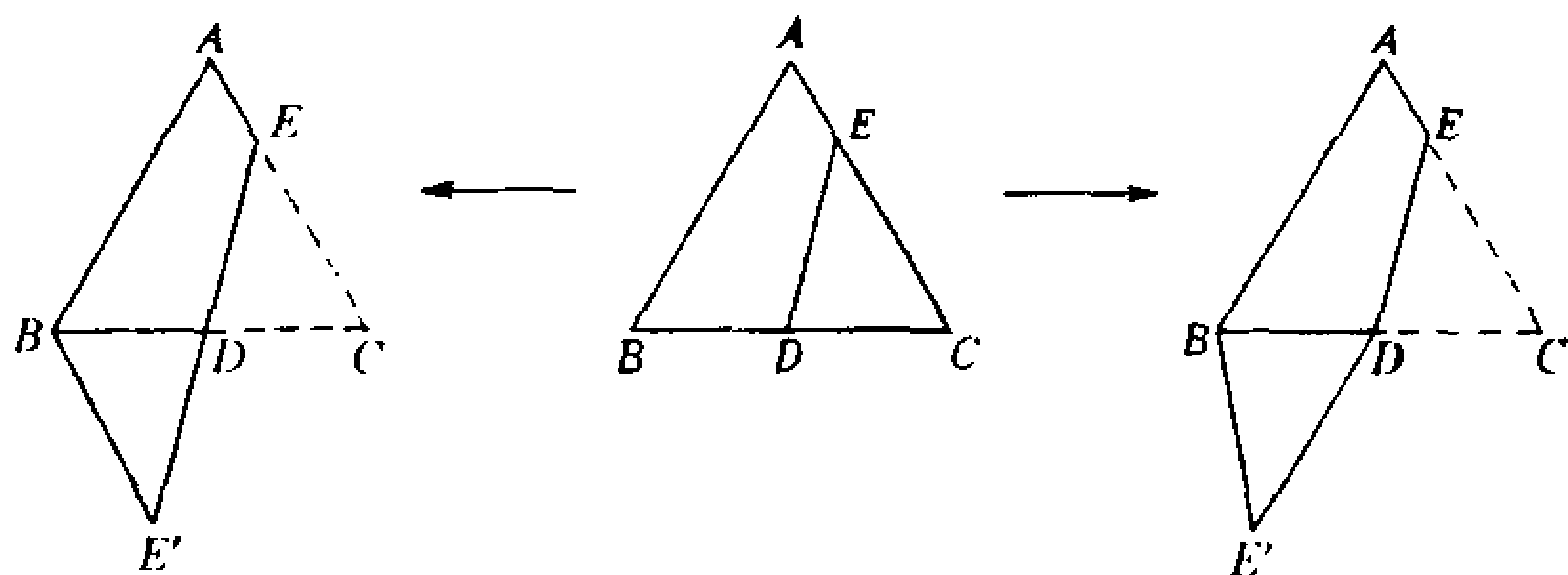


$$AA' = \sqrt{3} < \frac{\sqrt{13}}{2},$$

$$AA'' = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

若截线不过任一顶点，不妨设它与 AC, BC 交于 E, D.

若 D 为 BC 的中点，则有如图两种情形：

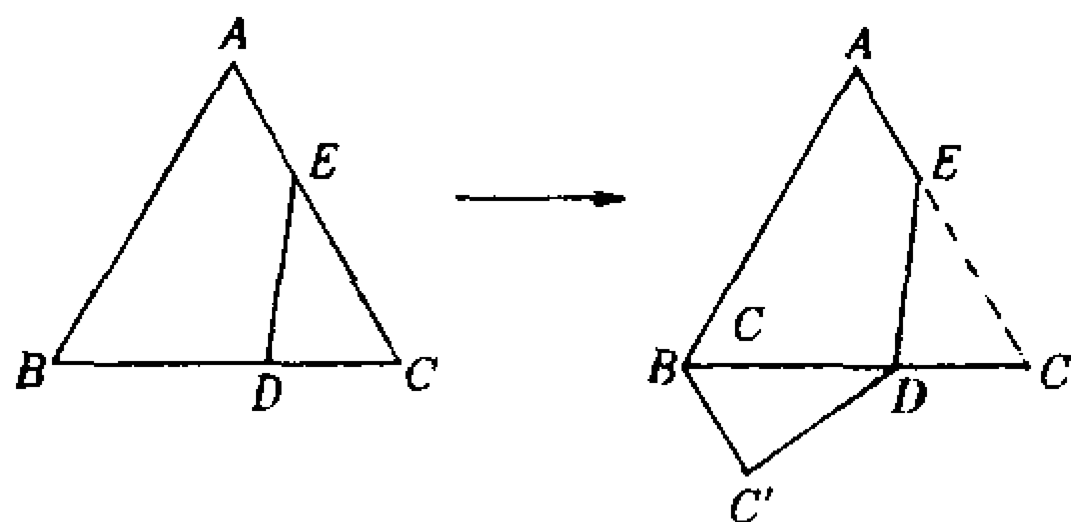


此时有 $\quad AE' \leqslant \frac{\sqrt{13}}{2}.$

若 D, E 不是中点，$AE = DC, BD = EC$，不妨设 $AE < \frac{1}{2}$. 则 $\angle EDC + \angle AED > 180°, \angle ECD + \angle AED > 180°$，则 $\triangle EDC$ 不能接在四边形 $AEBD$ 的 AE 边上，因为此时得到的不是凸图形，所以 $\triangle EDC$ 只能接在 BD 上.

这时有

$$\begin{aligned}\max\{AC', EC'\} &\leqslant \frac{1}{2}(AB + BC' + C'D + DE + AE)\\ &= \frac{1}{2}(AB + BC + CA) = \frac{3}{2} < \frac{\sqrt{13}}{2}.\end{aligned}$$



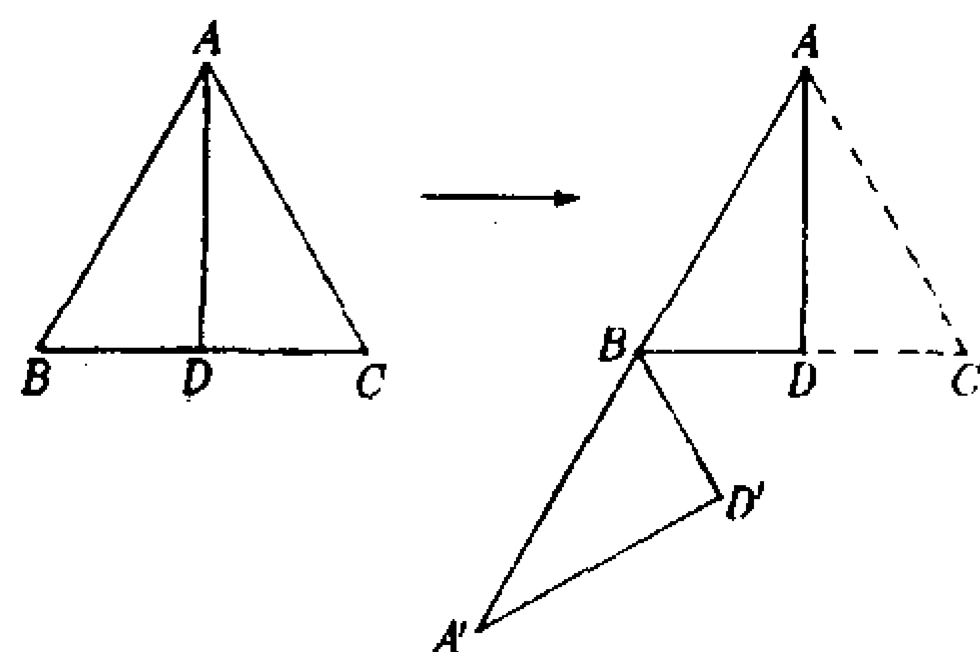
综上所述，拼成的凸图形的直径的最大值为 $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

(2) 直径的最大值是 2.

设一直线把 $\triangle ABC$ 截成两部分 M,N,令 P 是拼接起来之后的两部分的公共点,

对任意的 $X\in M, Y\in M$,有
$XY \leqslant XP + PY \leqslant 1 + 1 = 2$.
所以此时的直径不超过 2.

如图,可以构造出直径为 2 的拼图.

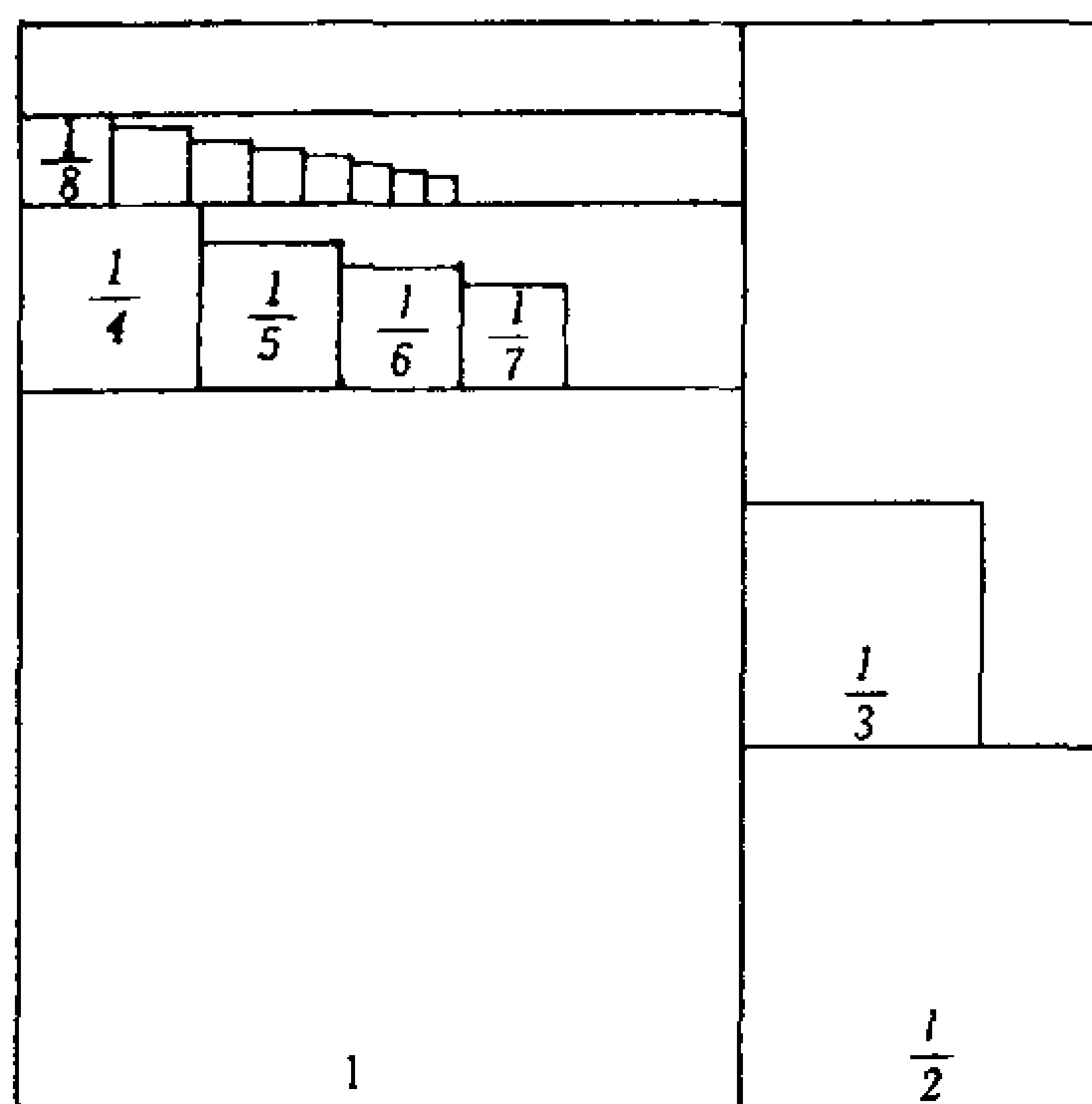


7·96 给定一个边长依次为 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ 的正方形的无穷序列.试证存在一个正方形,使得可以把序列中所有正方形互不重叠地摆放在这个正方形内,并问能将所有正方形容纳下的最小正方形的边长是多少?

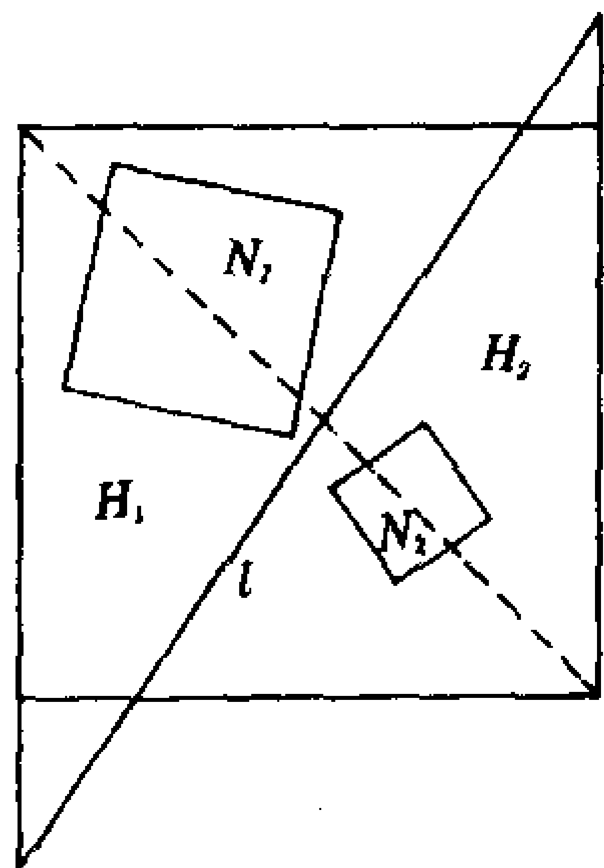
(匈牙利数学奥林匹克,1974 年)

[解] 首先,我们用构造法来证明这些正方形可以互不重叠地摆放在边长 1.5 的正方形内.

先将边长分别为 $1,\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 的前 3 个正方形摆放在大正方形中如图所示.然后注意,对于任何 $n \geqslant 2$,边长依次为 $\frac{1}{2^n}$, $\frac{1}{2^n+1},\cdots,\frac{1}{2^{n+1}-1}$ 的 2^n 个正方形的边长之和小于 1,从而可以互不重叠地摆放在一个 $1\times\frac{1}{2^n}$ 的矩形中.而当 n 从 2 开始一直变到无穷时,所有这些矩形可拼成一个 $1\times\frac{1}{2}$ 的矩形.换句话说,除了前 3 个正方形外的所有其他正方形,可以互不重叠地摆放在 $1\times\frac{1}{2}$ 的矩形中,即摆放在图中左上角的矩形中.



然后我们来证明,任何一个其内能够互不重叠地摆放下边长为 1 和$\frac{1}{2}$ 的两个正方形的大正方形的边长都不小于 1.5.



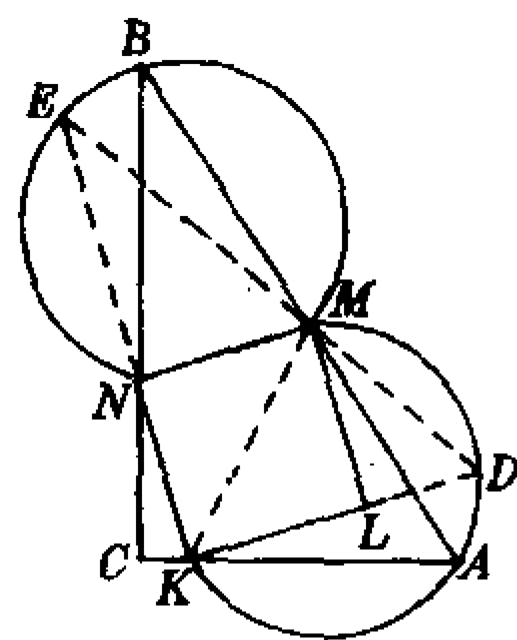
我们把边长为 1 的正方形 N_1 和边长为$\frac{1}{2}$ 的正方形 N_2 放在一个大正方形 N 中,使二者没有公共点.这时,当然可以作一条直线 l 将正方形 N_1 和 N_2 隔开.如果直线 l 平行于正方形N 的一条边,则 l 将正方形N 分成两个矩形,于是正方形 N_1 和 N_2 的边长分别不大于它所在的矩形的短边长,即正方形 N 的边长不小于 1.5.

如果直线 l 与正方形N 的边不平行,则 l 与正方形N 的两条边相交且与另两边的延长线相交,构成两个直角三角形 H_1 和 H_2,二者各含有一个正方形(如图所示).

为完成这种情形下的证明,我们先证如下的引理

引理　含在给定的直角三角形中的所有正方形中,以直角的平分线为对角线的正方形最大.

将正方形平移并在必要时作位似放大,总可以使它的两个顶点分别在两条直角边上而第 3 个顶点在斜边上(见下页图).连结 KM 并分别作 $\triangle AKM$ 和 $\triangle BNM$ 的外接圆.延长 KL 和KN,分别交两圆于点 D 和E,则 D,M,E 三点共线,即连结 DE 过点M.易见 $\triangle DEK \backsim \triangle ABC$.又因 $S_{\triangle DKM} \leqslant S_{\triangle AKM}$,$S_{\triangle EMN} \leqslant S_{\triangle BMN}$,所以有 $S_{\triangle DEK} < S_{\triangle ABC}$.因此,正方形 $KLMN$ 的面积小于以$\triangle ABC$ 中直角平分线为对角线的正方形的面积.这就证明了引理.



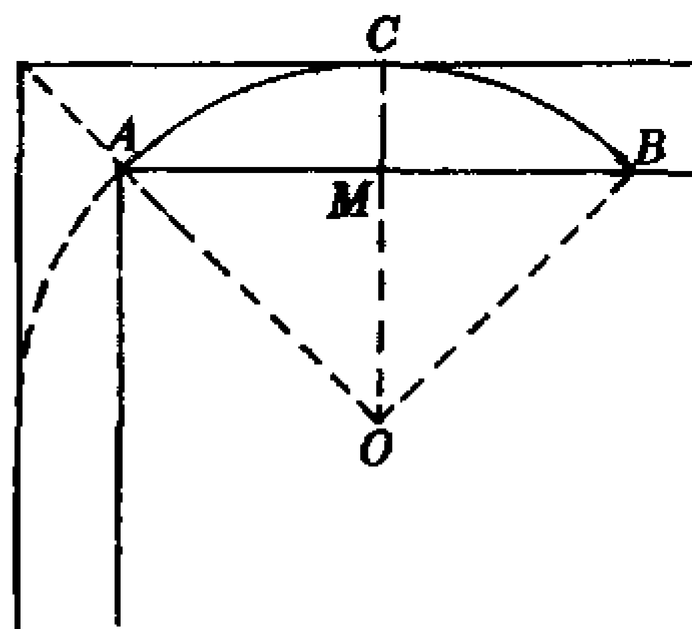
由引理知,正方形 N_1 和 N_2 分别不大于以 H_1 和 H_2 的直角平分线为对角线的正方形,而后两个正方形的对角线长之和恰为正方形 N 的对角线,从而 N 的边长不小于N_1 与 N_2 边长之和 1.5.

7·97　直角形的平坦走廊的宽度为 1 米,且在两边方向上都是无限的.已知一根坚硬的不能弯曲的金属丝(不一定直),它能够被拖拽着

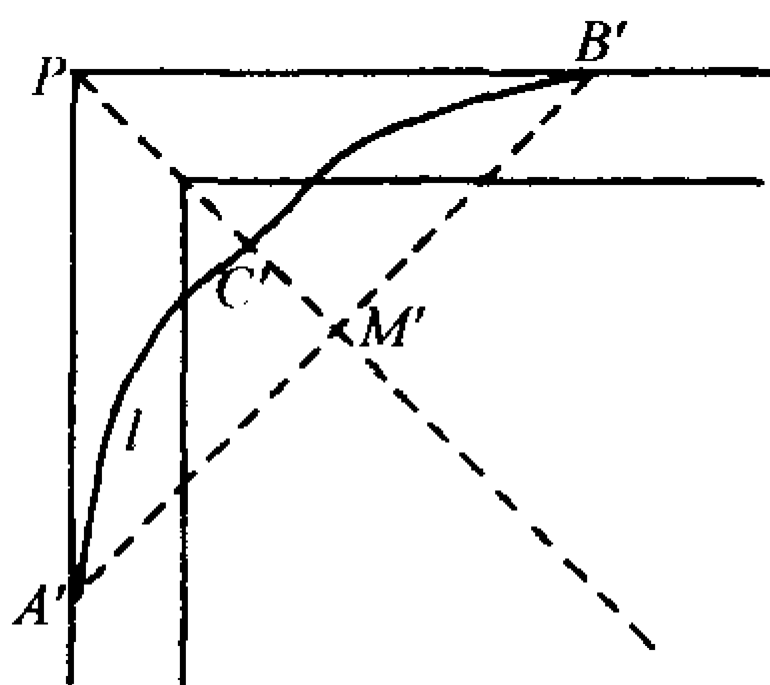
通过整个走廊，问金属丝两个端点之间的最大距离是多少？

（第33届莫斯科数学奥林匹克，1970年）

［解］ 取以 $r=2+\sqrt{2}$ 为半径的圆周的 $\frac{1}{4}$，则以这 90° 弧构成的弓形的高恰好为1.易见，当这段弧到达拐角时，只要沿着右图中圆心 O 转过去，即可顺利通过拐角.这段弧的两个端点间的距离为 $d=2+2\sqrt{2}$，故知所求的最大值不小于 $2+2\sqrt{2}$.



设金属丝 l 的两个端点间的距离大于 $2+2\sqrt{2}$.过连结 l 两端点的线段 $A'B'$ 的中点 M' 作 $M'C'\perp A'B'$ 交 l 于 C'.如果 l 能被拖拽通过整个走廊，则 $C'M'\leqslant 1$.考察 l 通过拐角时 C' 落在分角线上的情形.显然当 A'，B' 分别处于走廊外边上时点 C' 离点 P 最近.这时，$PM'=\frac{1}{2}A'B'>1+\sqrt{2}$，从而 $PC'>\sqrt{2}$.这说明 l 无法通过弯道.



综上可知，所求的最大值为 $2+2\sqrt{2}$.

7·98　两人做数学游戏.甲选出一组1位整数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 作为谜底，这些整数可正可负.乙则可以提问：和数 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ 是多少？其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 可以是任何数组.求乙为了猜出谜底而需要提问的最少次数.

（第24届莫斯科数学奥林匹克，1961年）

［解］ 当取

$$a_j=100^{j-1},j=1,2,\cdots,n$$

时，只要提问一次就可定出 $x_1,x_2,\cdots,x_n$.

7·99　设正八边形的每边都涂有蓝黄两色之一.允许进行如下操作：将各边的着色同时修改，若某边的二邻边异色，则将该边改为蓝色；若同色则将该边涂成黄色.求证经过若干步操作后，8条边都将变成黄色，并问对所有可能的初始染色，达到全部黄色所需要的最少操作次数是多少？

（奥地利—波兰数学奥林匹克，1988年）

[解]　将蓝边和黄边分别对应于数 -1 和 $+1$，于是题中允许的操作就是将每边上的数改为它的两条邻边上的数之积. 设开始时 8 条边上的数依次为 $a_1, a_2, \cdots, a_8$，则操作 1 次后变为

$$a_8a_2, a_1a_3, a_2a_4, a_3a_5, a_4a_6, a_5a_7, a_6a_8, a_7a_1.$$

操作 2 次后变为

$$a_7a_3, a_8a_4, a_1a_5, a_2a_6, a_3a_7, a_4a_8, a_5a_1, a_6a_2.$$

操作 3 次后，奇数号码的边为 $a_2a_4a_6a_8$，偶数号码的边为 $a_1a_3a_5a_7$. 从而第 4 次操作后各边对应的数均为 $+1$，即均为黄色.

如果令 $a_1 = -1, a_2 = a_3 = \cdots = a_8 = 1$，则由上述操作过程可知，第 3 次操作后，8 边对应的数依次为 $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1$. 可见，所求的最少次数为 4.

7·100　一张正方形纸被沿直线切成两部分，其中之一再被沿直线切成两部分，再把 3 块之一切成两部分，如此等等. 为了能得到 73 个 30 边形，最少要切多少次?

(第 33 届莫斯科数学奥林匹克，1970 年)

[解]　每切一次，多边形就增加 1 个. 因此，切 k 次后，就得到 $k + 1$ 个多边形. 另一方面，每切一次，多边形的内角和就增加 2π. 切 k 次后，所得的 $k + 1$ 个多边形的内角和为 $2\pi(k + 1)$.

在所有的 30 边形中，内角和为 73!28π. 其余的多边形的个数为 $k + 1 - 73 = k - 72$，它们的内角和不小于 $(k - 72)\pi$. 由此得到

$$73 \cdot 28\pi + (k - 72)\pi \leqslant (k + 1)2\pi,$$

解得 $k \geqslant 73 \cdot 27 - 1 = 1970$，即至少要切 1970 次.

这 1970 次可以这样来切：先用 72 次把正方形切成 73 个矩形. 然后对每个矩形用切角法切 26 次得到 30 边形，恰好共切 $72 + 73 \times 26 = 1970$ 刀而得到 73 个 30 边形.

综上可知，最少切 1970 次.

7·101　在每张卡片上都写有一个数：1 或 -1. 可以指着 3 张卡片提问题："这 3 张卡片上的数的乘积是多少?"(但不告诉卡片上写的是什么数)

(1) 当共有 30 张卡片时，最少要提多少个问题才能知道所有卡片上的数的乘积?

(2) 对于 31 张卡片，回答与(1)一样的问题.

(3) 对于 32 张卡片,回答与(1) 一样的问题.

(4) 在一个圆周上写着 50 个数:1 或 -1. 如果提一个问题能知道接连摆着的 3 数之积,问最少要提多少个问题才能知道全部 50 个数的乘积?

(第 8 届全苏数学奥林匹克,1974 年)

[解] (1) 把 30 个数分成 10 组,每组 3 个数并对每组的 3 个数问明它们的乘积即可. 提少于 10 个问题是不行的,因为每个数必须在一个三数组中.

(2) 把 $a_1a_2a_3$, $a_1a_4a_5$ 和 $a_1a_6a_7$ 连乘即得前 7 个数的乘积. 然后再把其余 24 个数象(1) 中那样分成 8 个三数组,便知提问 11 个问题就可得到所有数的乘积. 容易看出,只提 10 个问题是不够的.

(3) 把 $a_1a_2a_3$, $a_1a_2a_4$ 和 $a_1a_2a_5$ 连乘即得前 5 个数的乘积. 然后再把其余 27 个数分成 9 个三数组,便知提问 12 个问题便能得到所求的答案.

因为任何数都应在三数组中,故当提 11 个问题时,恰有一个数包含在两个三数组中. 因而当把 11 个 3 数之积连乘时,积中别的数都出现一次,只有这一个数出现两次,所以得不到所要求的乘积.

(4) 用 50 个问题问明 $a_1a_2a_3, a_2a_3a_4, \cdots, a_{50}a_1a_2$ 的乘积,再连乘即得所要求的乘积.

只提少于 50 个的问题是不够的. 这时上面的 50 个乘积至少有一个不知道,不妨设为 $a_1a_2a_3$. 这时,我们可取如下两组数:第一组中,令 $a_1 = a_3 = a_6 = a_9 = \cdots = a_{48} = 1$,其余数都等于 -1;第二组全为 1. 则这两组数中,除 $a_1a_2a_3$ 不同外,其余的 49 个乘积完全相同. 由此可见提 49 个问题是不够的,即最少要提 50 个问题.

7·102　一个凸 n 边形被互不相交的对角线剖分成若干个三角形. 如果两个三角形 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 有一条公共边,则可将它们换成 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ACD$,这种操作称为"重建". 用 $p(n)$ 表示将任一种剖分变为另一种剖分所需要的重建的最小次数,求证

(1) $P(n) \geqslant n-3$;

(2) $P(n) \leqslant 2n-7$;

(3) 若 $n \geqslant 13$,则 $P(n) \leqslant 2n-10$.

(中国国家集训队训练题,1990 年)

[证] (1) 考察将某个在点 A 处没有对角线的剖分变为在点 A 处引出 $n-3$ 条对角线的剖分. 这时,每次重建,都可以将点 A 处的对角线增加 1 条且只能增加 1 条. 因此最少需要 $n-3$ 次重建,所以 $p(n) \geqslant n-3$.

(2) 设要将任一剖分 P 变成另一剖分 Q. 选取多边形的一个顶点 A,使剖分 P 在点 A 至少有 1 条对角线. 于是将剖分 P 化成由点 A 引出 $n-3$ 条对角线的剖分只要 $n-4$ 次重建. 然后再把它变成剖分 Q,至多需要 $n-3$ 次重建. 故知将剖分 P 变成 Q,至多要 $2n-7$ 次重建. 可见 $p(n) \leqslant 2n-7$.

(3) 当 $n \geqslant 13$ 时,由于剖分 P 和 Q 中各有 $n-3$ 条对角线,而 $4(n-3) > 3n$,故由抽屉原理知多边形中必有一个顶点 A 在两次剖分中引出的对角线条数之和不小于 4. 先将剖分 P 变成在点 A 引出 $n-3$ 条对角线的剖分,再将它变成剖分 Q,有 $2n-10$ 次重建就够了.

7·103 现有 1990 堆石头,各堆中石头的块数依次为 1,2,…,1990. 允许进行如下操作:每次可以选定任意多堆并从其中每堆都拿走同样数目的石块. 问要把所有石头都拿走,最少要操作多少次?

(第 24 届全苏数学奥林匹克,1990 年)

[解] 在每步操作之后,我们都把石块数相同的堆结合成一组. 无论何时,当把没有石头的堆也算一组时,总认为是有 n 组. 如果我们在下一次操作中将属于 k 个不同组的所有堆都拿掉同样多块石头,则因原属于不同组的石头堆在操作时拿走石块后堆中的石头数仍然不同,故这些堆仍然属于 k 个不同的组. 其余未动的堆有 $n-k$ 组,当然操作后还是 $n-k$ 个不同的组. 所以,操作之后不同组数至少为 $\max\{k, n-k\}$.

因而,在每次操作之后,互不相同的组数 n 减少的数不超过一半. 由此可知,各次操作之后的组数依次不少于

995,498,249,125,63,32,16,8,4,2,1.

最后剩一堆时,当然是石块数为 0 的一堆,即这时所有石头全部拿光. 这说明至少要操作 11 次方可完成.

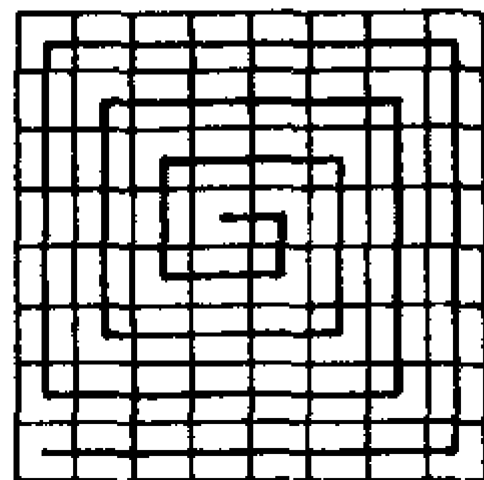
事实上,如果我们依次取上述数列中的数为 k,保持石块数为 $0,1,2,\cdots,k-1$(第 1 次操作例外,应保持石块数为 $1,2,\cdots,995$)的堆不动,而将其余各堆石块中每堆拿走 k 块. 显然,这样只要操作 11 次即可完

成. 所以,最少要操作 11 次.

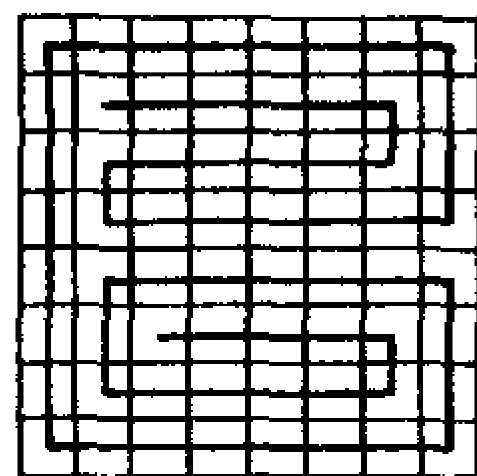
7·104　国际象棋中的车应当怎样在 8×8 的方格棋盘中走动,才能恰好经过每个方格一次,而使转弯的次数最少?

(第 22 届莫斯科数学奥林匹克,1959 年)

[解]　右图所示的两种走法都是恰好经过每个方格一次,且转弯次数都是 14 次.



另一方面,如果车在行进过程中始终未沿第 j 列行走,则第 j 列的 8 个方格都是车在沿行走动时通过的. 换句话说,这种情形下车必在 8 行中的每一行中走过. 这意味着对于任何一种满足要求的走法,车或者在 8 行中的每行都横向走过,或者在 8 列中的每列都竖向走过,或者二者兼有之. 不妨设为前者. 这时,当车从一行走到另一行时,至少要转弯两次,从而在整个过程中,至少转弯 14 次.



综上,我们证明了最少要转弯 14 次. 车行走的原则是:选择行(或列)为基准,使在 8 行中的始行与终行各转弯一次,而中间 6 行各转弯两次,于是共转弯 14 次.

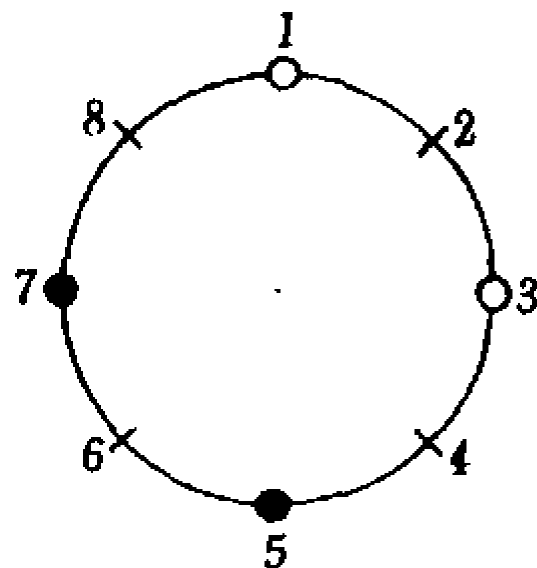
7·105　在 3×3 个方格的国际象棋棋盘的 4 个角格中各放了一枚马,上面两角放的是白马,下面两角放的是黑马. 要求把白马走到下面两角,把黑马走到上面两角. 每一步都可以走任何一枚马,但必须按照国际象棋的规则,且只能走到空格里. 求证为此最少要走 16 步.

1	6	3
4		8
7	2	5

(第 22 届莫斯科数学奥林匹克,1959 年)

[证]　按照马在棋盘上的绕行顺序将棋盘上的方格编号如右上图所示,由于马永远走不到中央方格,故它不必编号. 开始时,白马在 1,3 两格,黑马在 5,7 两格中.

我们将方格按编号排列在一个圆周上,圆圈对应着白马,黑点对应着黑马. 每步只能将一枚棋子移向圆周上的相邻空位. 由于不能有两枚棋子走入同一方格,故圆周上的棋子不能互相越过. 所以要想把处在 1,3 位置的两枚白马走到 5,7 位,而将 5,7



位的两枚黑马走到 1,3 位,只能同向绕圈行走,当然每枚马至少走 4 步方能到位.而且只要按圆周所示的号码在棋盘上每枚马走 4 步,确实能走到所要求的位置,故知最少要走 16 步.

7·106　设在国际象棋棋盘的方格 $h8$(即右上角的方格)中有垒成一摞的 n 枚棋子.允许自摞中依次取出棋子使之沿着棋盘每次向下或向左移动一格,但在到达方格 $a1$(即左下角的方格)之前,任何棋子都不能摞在别的棋子上.求最大自然数 n,使得可以由方格 $h8$ 中的一摞 n 枚棋子出发,而在方格 $a1$ 中可使这 n 枚棋子按任意指定的次序垒成一摞.

(圣彼得堡数学选拔考试,1993 年)

[解]　首先考察方格 $h8$ 中一摞棋子最下面的一枚棋子 A 走到 $a1$ 中仍在最下面的情形.对于棋子 A 行棋过程中的每个位置,我们把以棋子 A 所在方格和 $h8$ 为一对角格的矩形称为 A 的左上矩形.易见,当棋子 A 不动时,左上矩形外的棋子不能走入矩形内,而每当 A 走一步时,A 原来所在的方格就成为空格.因此,A 每走一步,它的左上矩形中的空格就至少增加 1 个.A 由 $h8$ 走到 $a1$,共走 14 步,所以棋盘上至少有 14 个空格,即棋子至多 50 枚.

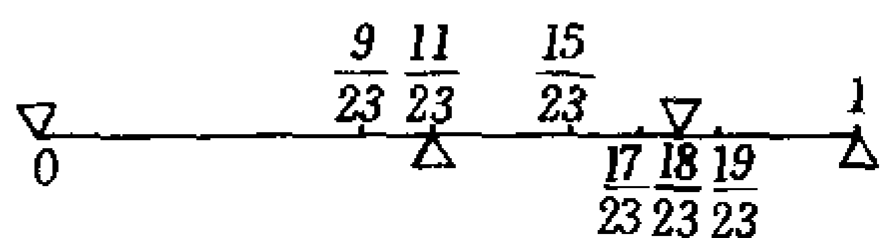
下面证明当 $h8$ 中的一摞棋子枚数不超过 50 枚时,可以按题中要求行棋,使它们在到达方格 $a1$ 时按预先任意指定的顺序垒成一摞.将棋子按照它们在 $a1$ 中的顺序自下而上编号为 $1,2,\cdots,m(m\leqslant 50)$.然后,对除了 1 号棋子之外的其余所有棋子均按如下规则移动:对于第 k 号棋子,取非负整数 m,使 $2+7m\leqslant k\leqslant 8+7m$,并将它先沿着第 h 列(最右面一列)往下走到第 $m+2$ 行,再沿着该行走到该行中最左的空格.将一枚棋子按上述程序走完之后,再从 $h8$ 的摞中走出下一枚棋子.因此,每当从摞中要走出一枚新棋子时,第 h 列方格中除 $h8$ 之外都是空的,而且第 1 行的 8 个方格也都是空的.对于 1 号棋子,无论它何时走出,总可以沿着第 h 列走到 $h1$,然后再沿第 1 行走到 $a1$.全部 m 枚棋子都各就各位之后,第 2 至 8 号棋子按某种顺序排在第 2 行中,第 9—15 号棋子排在第 3 行中,…,第 44—50 号棋子排在第 8 行中.这样一来,可按号将棋子逐一走到第 1 行,再走到方格 $a1$ 中.显然,最后得到的一摞棋子恰好是按指定顺序垒起来的.

综上可知,所求的棋子数的最大值为 50.

7·107　在线段$[0,1]$的两个端点各有一只跳蚤，在线段之内标定某些点．每只跳蚤都可以沿着线段跳过标定点，使得跳跃前后的位置关于该标定点对称，且不得越出线段$[0,1]$的范围．每只跳蚤相互独立地跳一次或是留在原地算作一步．问要使两只跳蚤总能跳到由标定点将$[0,1]$分成的同一小线段之中，最少要跳多少步？

（第24届全苏数学奥林匹克，1990年）

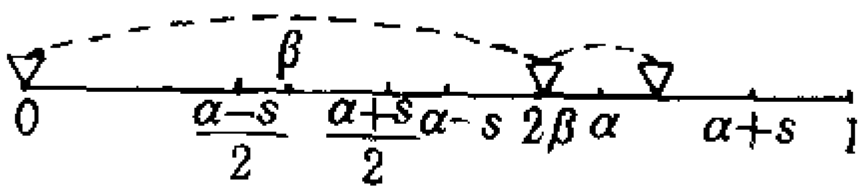
[解]　把线段$[0,1]$被标定点所分成的小线段称为线节．易证，如取3个标定点$\frac{9}{23}$，$\frac{17}{23}$和$\frac{19}{23}$，则两只跳蚤各跳一步后不可能落在同一线节之中（见下图）．由此可知，所求的最少步数必大于1．



下面证明，不论取多少个标定点和怎样将它们放置在线段$[0,1]$上，总可设法使两只跳蚤在跳两步之后，都跳到最长的一个线节之中（如果这样的线节不只一个，则可任选其中之一）．由对称性知，只须对处于0点的一只跳蚤来证明上述论断．

设选定的最长线节的长度为s，其左端点为α．如果$\alpha < s$，则跳蚤越过标定点α跳一步就落到所选线节$[\alpha,\alpha+s]$中了（如果$\alpha=0$，则跳蚤已在所选线节，连一步也不必跳了）．如果$\alpha \geqslant s$，考察区间$\left[\frac{\alpha-s}{2},\frac{\alpha+s}{2}\right]$，其长为$s$．因此这个区间上至少含有一个标定点，记为$\beta$．否则，包含这一区间的线节的长度将大于$s$，此不可能．越过$\beta$跳一步，跳蚤将落在点$2\beta \in [\alpha-s,\alpha+s]$．

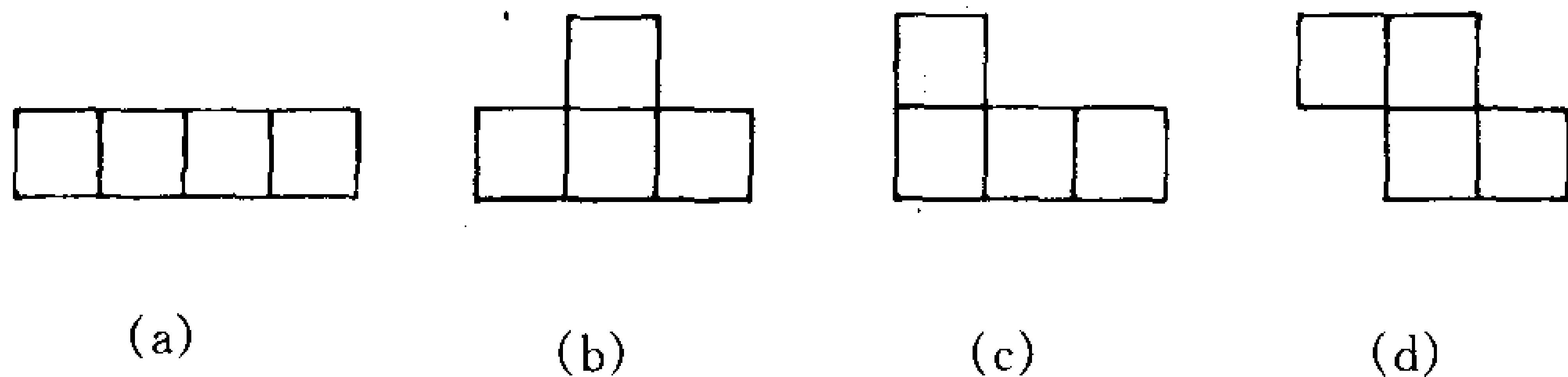
如果$2\beta \notin [\alpha,\alpha+s]$，则越过点$\alpha$再跳一次，跳蚤必落入选定的线节$[\alpha,\alpha+s]$之中．



7·108　《海战》游戏中，敌舰潜伏在有7×7个方格的正方形海域，岸上炮台每射击一次击中一个方格．已知敌舰的形状是

(1)4连格的条形（图(a)）；

(2)非正方形的4连格形（图(a)，(b)，(c)，(d)），



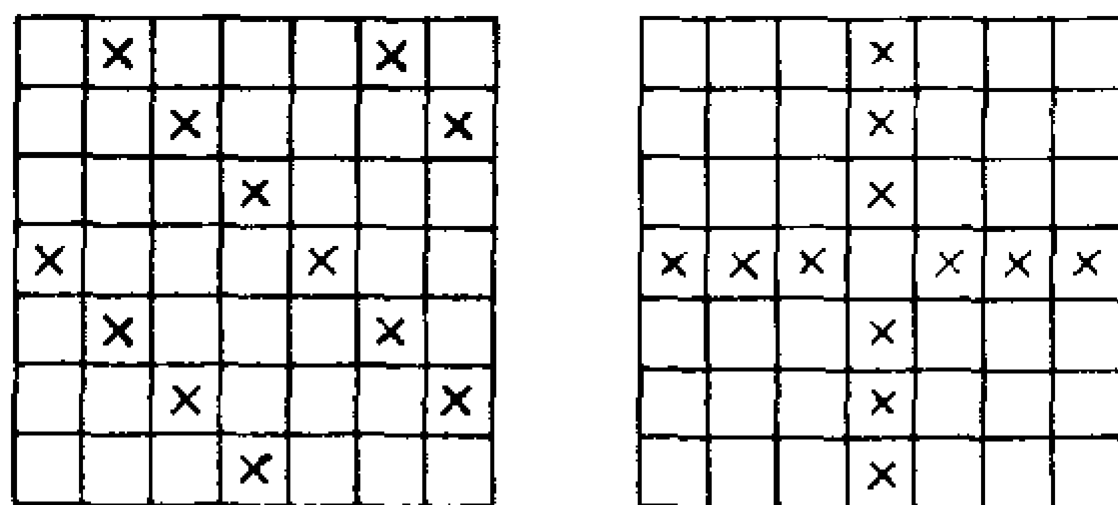
(a) (b) (c) (d)

问为了保证击中敌舰，最少应射击多少次？

（第 21 届全苏数学奥林匹克，1987 年）

[解] (1) 因为 7×7 方格正方形上可以互不重叠地放置 12 个 4×1 的条形，故为了击中敌舰，至少应射击 12 次.

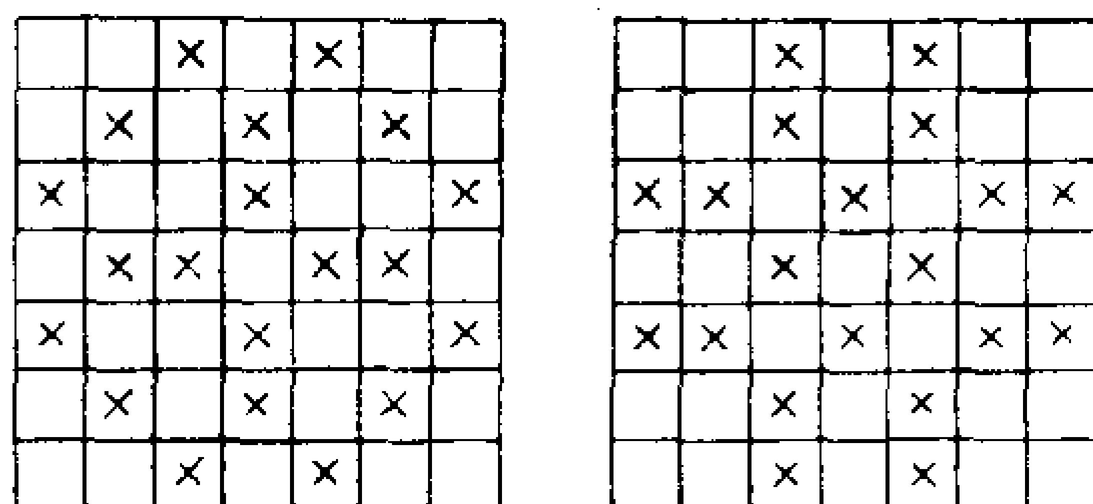
图(e) 或(f) 表明，只要射击 12 次，就一定能击中敌舰. 故知这时射击的最少次数为 12 次.



(e) (f)

(2) 图(g) 或(h) 表明，只要射击 20 次，就一定能击中. 下面证明 20 就是射击的最少次数.

从 7×7 方格板中，可以分划出 4 个互不重叠的 3×4 矩形. 如果射击不超过 19 次，总有一个 3×4 矩形至多被击中 4 次. 为使击中敌舰，每列 3 格应被击中一次. 而任何一行至多被击中两次. 考察上图中的 a 和 b 两个方格. 若 a 没有被击中，则考察以 a 为中心的 3×3 正方形. 其中的 9 个方格被击中 3 个，每行每列各一个. 不妨设为 1,3,6. 但这时 8, 7, a, b 四格可藏敌舰. 故知 a, b 两格必被击中. 这样一来，1,3,4,5,6,7 格未被击中. 但这时 4 个角格总有一个未被击中，比如是 2 格，于是 1,2,3,4 可藏一艘敌舰. 这说明为了保证 3×4 矩形中的敌舰被击中，至少要射击 5 次，从而 7×7 矩形至少要射击



(g) (h)

8	7	6	
1	a	b	5
2	3	4	

20 次. 故知射击的最少次数为 20 次.

7·109　已知一个保险柜上的锁由 3 个旋钮组成,每个旋钮都有 8 种不同的位置. 由于年久失修,现在 3 个旋钮中只要有两个位置正确即可打开柜门,问最少要试验多少种组合,才能保证必能打开柜门?

(第 29 届国际数学奥林匹克预选题,1988 年)

[解]　每个旋钮的 8 种不同位置分别记为 1,2,…,8,每种组合记为(i,j,k),其中 $1\leqslant i,j,k\leqslant 8$. 下面用字典排列法写出 $1\leqslant i,j,k\leqslant 4$ 的任何两个三数组至多有一个数相同的三数组 16 个,将其中每个三数组的分量都同时加上 4 得到另外的 16 个三数组,共 32 个三数组如下:

$$\begin{aligned}&(1,1,1),(2,1,2),(3,1,3),(4,1,4),\\&(1,2,2),(2,2,1),(3,2,4),(4,2,3),\\&(1,3,3),(2,3,4),(3,3,1),(4,3,2),\\&(1,4,4),(2,4,3),(3,4,2),(4,4,1),\\&(5,5,5),(6,5,6),(7,5,7),(8,5,8),\\&(5,6,6),(6,6,5),(7,6,8),(8,6,7),\\&(5,7,7),(6,7,8),(7,7,5),(8,7,6),\\&(5,8,8),(6,8,7),(7,8,6),(8,8,5).\end{aligned}$$

对于 3 个旋钮位置的任一组合(i,j,k),由对称性知可设 $1\leqslant i,j\leqslant 4$. 易见,$(i,j)$必在前 16 个三元组的某一组中的前两个分量中出现,所以只要试验这 32 次必能打开柜门.

另一方面,试验 31 次时,不能保证必能打开柜门.

设 K 为这 31 个三元组所成的集合. 如果两个三元组至少有两个分量相同,我们就说其中一个覆盖了另一个. 试验这 31 次保证打开柜门等价于 K 中的 31 个三元组覆盖了所有可能的三元组.

我们把每个三元组看成三维空间的一个整点,则所有可能的 8^3 个三元组恰对应于一个边长为 7 的正方体内和表面上的所有整点(i,j,k),$1\leqslant i,j,k\leqslant 8$. 显然,每个整点都覆盖与它有两个坐标相同的共 21 个整点,即为过点(a,b,c)所作的分别平行于 3 条坐标轴的 3 条直线上的各 7 个整点.

将 K 中的整点涂成红点,则 31 个红点分布在 8 个平面上:$z=1,2,\cdots,8$. 由抽屉原理知其中必有一个平面,其上至多有 3 个红点. 不妨设

这个平面是 $z=1$ 而3个红点是(1,1,1),(2,2,1)和(3,3,1)(其他情形在平面上覆盖的点都不多于这种情形).于是有 25 个点

$$(i,j,k),4\leqslant i,j\leqslant 8,k=1$$

未被这 3 个红点覆盖.从而这 25 个点都只能用其他平面上的红点来覆盖.由于这时一个红点只能覆盖 25 点中的一点,故需 25 个红点才能把它们全都覆盖.除了这 25 个红点之外 K 中还有 6 个红点,因此,满足条件 $1\leqslant a,b\leqslant 3$ 的红点 (a,b,c) 至多 6 个.从而下列 8 个集合

$$P_k=\left\{(i,j,k)\mid 1\leqslant i,j\leqslant 3\right\},k=1,2,\cdots,8$$

中总有一个集合中不含红点,因而其中的 9 个整点要用 9 个红点来覆盖,此不可能.

综上可知,最少要试验 32 次,才能保证打开柜门.

7·110　城堡里有 3 个分别编号为 1,2,3 的按钮.打开城堡的密码是一个 3 位数.为了一定能够打开城堡,最少需要按多少次按钮?(当且仅当连续地且正确地依次按出密码的 3 位数字,城堡才能被打开.)

(第 49 届莫斯科数学奥林匹克,1986 年)

[解]　因为由 1,2,3 这 3 个数字所组成的不同的 3 位数共有 27 个,故只要按出一长串数字,使其中含有全部27个3位数即可.显然,除了所按的前两个数字之外,从第 3 个数字开始的每 1 个数字都是 1 个 3 位数的个位数字(例如23132中含有3个3位数:231,313和132,它们的个位数字分别是5个数字中的后3个数字).可见,为了按出全部27个3位数,至少要按 29 次按钮.

另一方面,当按 29 次按钮次序如下时:

11123222133313121223113233211,

27 个 3 位数各出现 1 次,故能打开城堡.

综上可知,为了打开城堡,最少要按 29 次按钮.

7·111　设 $S=\{1,2,\cdots,n\},n\geqslant 2,F=\{A_1,A_2,\cdots,A_t\}$,其中 $A_i\subset S,i=1,2,\cdots,t$.如果对任何 $x,y\in S$,都有 $A_i\in F$,使得 $|A_i\cap\{x,y\}|=1$,则称 F 是区分 S 的.如果 $S\subset\bigcup\limits_{i=1}^{t}A_i$,则称 F 是覆盖 S 的.已知 F 既区分又覆盖 S,求 t 的最小值 $f(n)$.

(第 29 届国际数学奥林匹克预选题,1988 年)

[解 1]　设 $n=2^r$ 并令

$A_1=\{1,2,\cdots,2^{r-1}\}$,

$A_2=\{1,2,\cdots,2^{r-2},2^{r-1}+1,2^{r-1}+2,\cdots,2^{r-1}+2^{r-2}\}$,

$A_3=\{1,2,\cdots,2^{r-3},2^{r-2}+1,2^{r-2}+2,\cdots,2^{r-2}+2^{r-3},2^{r-1}+1,2^{r-1}+2,\cdots,2^{r-1}+2^{r-3},2^{r-1}+2^{r-2}+1,2^{r-1}+2^{r-2}+2,\cdots,2^{r-1}+2^{r-2}+2^{r-3}\}$,

$\vdots$

$A_{r-1}=\{1,2,5,6,9,10,\cdots,2^t-3,2^t-2\}$,

$A_r=\{1,3,5,7,\cdots,2^t-3,2^t-1\}$.

易见 $F=\{A_1,A_2,\cdots,A_r\}$ 区分 S 且 $\bigcup\limits_{i=1}^{r}A_i=\{1,2,\cdots,2^r-1\}=\{1,2,\cdots,n-1\}$. 显然,将 F 只要再加 1 个集合 $A_0=\{n\}$ 即可覆盖 S. 从而有

$$f(n)\leqslant r+1=[\log_2 n]+1. \quad ①$$

而当 $2^{r-1}+1\leqslant n\leqslant 2^r-1$ 时, F 本身(必要时与 S 取交)就是既区分又覆盖 S 的,故这时 ① 式仍然成立.

另一方面,我们用数学归纳法来证明 ① 式的反向不等式:

$$f(n)\geqslant r+1,\text{当 } 2^r\leqslant n\leqslant 2^{r+1}-1 \quad ②$$

由 $f(2)=f(3)=2$ 知 $r=1$ 时 ② 式成立. 设当 $r=k$ 时成立. 当 $r=k+1$ 时,设 $F=\{A_0,A_1,\cdots,A_t\}$ 既区分又覆盖 S. 记 $A'_0=S-A_0$, 于是 $|A_0|+|A'_0|=n$, 不妨设 $|A_0|\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]$. 这时 $\{A_1\cap A_0,A_2\cap A_0,\cdots,A_t\cap A_0\}$ 既区分又覆盖 A_0. 于是由归纳假设知 $t\geqslant f\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)\geqslant k+1$. 从而得知 ② 式于 $r=k+1$ 时也成立.

综上可知 $f(n)=[\log_2 n]+1$.

[解 2] 设 $F=\{A_1,A_2,\cdots,A_t\}$ 既区分又覆盖 S. 考察 S 的子集 A_i 与元素的关系表

子集 / 元素	A_1	A_2	$\cdots$	A_t
1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1t}
2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2t}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
n	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{nt}

其中

$$x_{ij}=\begin{cases}1,\text{当 } i\in A_j,\\0,\text{当 } i\notin A_j,\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,t.$$

由于 F 是覆盖的,所以每个元素 i 至少属于1个 A_j,即表中每行数都不全为0;由于 F 是区分的,所以表中每两行数都不完全相同.由于由 t 个分量组成,每个分量都是0或1的不同非0向量共有 2^t-1 个,故得

$$n\leqslant 2^t-1.$$

从而得到

$$f(n)\geqslant[\log_2 n]+1. \qquad ③$$

另一方面,对于 $n\in N$,取 $t\in N$,使得 $2^{t-1}\leqslant n\leqslant 2^t-1$ 并取 n 个不同的非零 t_- 向量:

$$(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{it}),i=1,2,\cdots,n,$$

其中 x_{ij} 都是0或1.定义子集 $A_j\subset S$ 如下:对每个 $i\in S$,当且仅当 $x_{ij}=1$ 时 $i\in A_j,j=1,2,\cdots,t$.容易验证,$F=\{A_1,A_2,\cdots,A_t\}$ 既区分又覆盖 $S=\{1,2,\cdots,n\}$.故得

$$f(n)\leqslant t=[\log_2 n]+1. \qquad ④$$

由③和④即得 $f(n)=[\log_2 n]+1$.

7·112　一套五卷百科全书按递增顺序摆放在书架上,即自左至右由第1卷依次排至第5卷.现想把它们改换为按递降顺序摆放,即改为自左至右由第5卷依次排至第1卷,但每次只许交换相邻摆放的两卷的位置.最少要做多少次这种交换才能达到目的?

(第19届全俄数学奥林匹克,1993年)

[解]　依次将第1卷与第2卷,第3卷,第4卷,第5卷交换位置,可将第1卷调至最右边的位置.再将第2卷依次与第3,4,5卷交换位置,可得到5卷书的排位为(3,4,5,2,1).然后再做下列交换:{3,4},{3,5},{4,5},即得排位为(5,4,3,2,1),共进行了10次交换.

另一方面,将5卷书从排位(1,2,3,4,5)改为(5,4,3,2,1),任何两卷书 A 和 B 的左右顺序都要改变,而这只有在两卷书变为相邻时进行交换才能实现.因此,任何两卷书都至少交换1次,总共至少交换10次.

综上可知,最少要交换10次才能实现题中的要求.

7·113　托尔斯泰全集共100卷杂乱无序地排放在书架上,每次允

许将其中任意具有不同奇偶性卷号的两卷交换位置.问最少要进行多少次这样的交换,才能保证使它们按照卷号的顺序摆放?

(圣彼得堡数学奥林匹克,1990年)

[**解**] 用100个点$x_1,x_2,\cdots,x_{100}$来代表书架上的100个位置.当第i个位置放着第j卷书时($i\neq j$),就在点x_i与x_j间连一条线并标上指向x_j的箭头.全部标好之后,我们得到一个有向图,其中每点的度数都为2或0,而在度数为2的顶点,恰有1个箭头指向它和1个箭头离开它.注意,顶点x_i度数为0意味着第i个位置已经放着第i卷书.

去掉这些度数为0的孤立顶点,便得到一个每点度数皆为2的有向图.由图论定理知,它可分解为若干个两两没有公共顶点的圈.当将两本书进行交换时,如果交换位置的两本书处于两个不同的圈中,则交换后两个圈变为1个圈,我们称之为"接合";如果被交换的两本书处于同一个圈中且对应两点相邻,则一个圈变成了两个圈(当然可能出现退化为孤立点的情形),我们称之为"分解".

现在假定在长度大于1的圈(即至少有两个顶点的圈)中,有a个圈仅由偶数号的顶点组成,有b个圈仅由奇数号的顶点组成.显然有$a\leqslant 25,b\leqslant 25$.不妨设$0<b\leqslant a$.于是,至多经过$a$次"接合",便可使得所有圈中都既有奇数号顶点又有偶数号顶点.这样一来,只要再作"分解"就可以了.实际上,每次分解都可对一对相邻顶点进行,从而使其中至少1点成为孤立点,且当圈中奇(偶)数号顶点多时,就让奇(偶)数号顶点成为孤立点,于是分解可进行到底,即全部化成孤立点.显然,这样的分解至多要99次.从而整个交换过程至多有124次交换.

另一方面,当50个偶数号顶点组成1个圈而50个奇数号顶点每两个组成1个圈共25个圈时,为了消灭奇数号的圈,至少要进行25次接合交换.此外,设在整个交换过程中共有k个既有偶顶点又有奇顶点的圈,则原来惟一的有偶顶点的圈至少要先进行$k-1$次分解.设这k个圈中顶点个数分别为$n_1,n_2,\cdots,n_k$.由于有n_j个顶点的圈要变成n_j个孤立点至少要进行n_j-1次分解,故总共要进行的分解次数至少为

$$(n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_k-1)+(k-1)=99.$$

这表明至少要做$25+99=124$次交换.

综上可知,所求的交换次数的最小值为124.

7·114 在一个有限的实数数列中,任何连续7项之和都是负数而

任何连续 11 项之和都是正数. 试问这样一个数列最多有多少项?

（第 19 届国际数学奥林匹克，1977 年）

[解] 如果数列有 17 项，则可排列如下：

$$\begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}, a_{11}, \\ a_2, a_3, a_4, \cdots, a_{11}, a_{12}, \\ a_3, a_4, a_5, \cdots, a_{12}, a_{13}, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ a_7, a_8, a_9, \cdots, a_{16}, a_{17}. \end{array}$$

由已知，其中每行数之和为正，从而表中所有数之和为正；另一方面，表中每列数之和为负，从而表中所有数之和为负，矛盾. 这说明满足要求的数列至多有 16 项.

考察如下的数列

$$5,5,-13,5,5,5,-13,5,5,-13,5,5,5,-13,5,5.$$

其中任何连续 7 项中都有 5 个 5 和两个 -13，其和为 -1；任何连续 11 项中都有 8 个 5 和 3 个 -13，其和为 1. 可见，这个数列满足题中要求且有 16 项，故知满足题中要求的数列最多有 16 项.

7·115 设 $S=\{1,2,3,4\}$，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是由 S 中的数所组成的数列，且它包含 S 的所有不以 1 结尾的排列，即对于 S 中 4 个数的任何排列 (b_1,b_2,b_3,b_4)，$b_4\neq 1$，都有 i_1,i_2,i_3,i_4，使得

$$a_{i_j}=b_j,\ j=1,2,3,4 \text{ 且 } 1\leqslant i_1<i_2<i_3<i_4\leqslant k.$$

求数列项数 k 的最小值.

（中国代表队模拟考试题，1991 年）

[解] (1) 由 1,2,3 组成的数列，如果包含 $\{1,2,3\}$ 的所有排列，则至少有 7 项.

设在 1,2,3 中 3 最后出现，则第 1 个 3 至少是第 3 项. 为了包含排列 (3,2,1) 和 (3,1,2)，3 的后面应有 2,1,2 或 1,2,1. 如果后面还有一个 3，则共有 7 项；如果后面不再有 3，则惟一的 3 的前面也要有 3 项，共有 7 项.

(2) 由 1,2,3,4 组成的数列，如果包含 $\{1,2,3,4\}$ 的所有排列，则至少有 12 项.

由对称性知可设数列中值为 4 的项最少. 若其中只有 1 项是 4，则

由前段证明知,它的左方和右方至少各有 7 项,从而数列至少有 15 项.设数列中有两个 4,分别记为 $4^{(1)}$,$4^{(2)}$,其中 $4^{(1)}$ 在 $4^{(2)}$ 的左方.于是数列 T 可表示如下:

$$T = a4^{(1)}b4^{(2)}c.$$

其中 a,b,c 是原数列被两个 4 分成的 3 段,记其项数分别为 $l(a)$,$l(b)$,$l(c)$.由(1)知

$$l(a)+l(b)\geqslant 7, l(b)+l(c)\geqslant 7.$$

若 $l(a)\geqslant 3$ 或 $l(c)\geqslant 3$,则显然有 $l(T)\geqslant 12$.若 $l(a)\leqslant 2$,即 $4^{(1)}$ 之前至多有 2 项,不妨设为 1,2,于是排列(2,1,4,3),(3,1,4,2),(3,2,4,1)中的 4 都只能是 $4^{(2)}$,从而 c 中至少有 1,2,3 各 1 个,即 $l(c)\geqslant 3$.这就证明了 $l(T)\geqslant 12$.

(3) 由对称性知可设(2)中的数列的最后 1 项为 1,从而把 1 去掉时,便得到满足题中要求的数列,反之亦然.故知这样的数列至少有 11 项.

数列

$$1,2,3,4,1,3,2,1,4,2,3$$

满足题中要求且恰有 11 项.

综上可知,满足题中要求的数列最少有 11 项.

7·116 给定一个由 n 个数组成的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,然后对它们进行如下的变换,使数列变为

$$|a_1-\alpha|,|a_2-\alpha|,|a_3-\alpha|,\cdots,|a_n-\alpha|,$$

其中 α 为任意取定的一个数.这样的变换可进行多次,每次所取的 α 可互不相同.

(1) 试证可经过若干次这样的变换,使数列中的 n 个数全都变为零;

(2) 求使上述目标对于任何初值都能实现所需要的变换次数的最小值.

(原苏联教委推荐试题,1988 年)

[解] 设 $a_1^{(k)},a_2^{(k)},\cdots,a_n^{(k)}$ 是在对数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 作了 k 次变换之后所得到的数列,而 α_k 是在作第 k 次变换时所取的减数 α 之值.

如果取 $\alpha_1=\frac{1}{2}(a_1+a_2)$,则在作了第 1 次变换后所得到的数列

$a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \cdots, a_n^{(1)}$ 中有

$$a_1^{(1)} = a_2^{(1)} = \frac{1}{2}\left|a_1 - a_2\right|,$$

即前两项相等.如果再取 $\alpha_2 = \frac{1}{2}(a_2^{(1)} + a_3^{(1)})$,则在 $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \cdots, a_n^{(2)}$ 中又有

$$a_1^{(2)} = a_2^{(2)} = a_3^{(2)} = \frac{1}{2}\left|a_2^{(1)} - a_3^{(1)}\right|.$$

依此类推,在第 i 次变换中,令 $\alpha_i = \frac{1}{2}(a_i^{(i-1)} + a_{i+1}^{(i-1)})$,则在数列 $a_1^{(i)}$, $a_2^{(i)}, \cdots, a_n^{(i)}$ 中,前 $i+1$ 项都相等.特别当 $i = n-1$ 时,数列中的 n 项都相等.于是只要再取 $\alpha_n = a_n^{(n-1)}$,则再作一次变换,数列中的 n 项就都变成零了.可见,进行了上述的 n 次变换后,数列中的所有项全都变成零了.

下面来证明,对于数列 $1!, 2!, \cdots, n!$,必须经过 n 次变换,方能使它的所有项全都变为零.

注意,如果在将某个数列变为全零数列的过程中的某一步中所取的减数 α 小于此时数列中各项的最小值,则变换的次数可以减少.因为若下一步减数为 β,则两次变换可以合并为一次来进行,只要取减数为 $\alpha + \beta$ 就可以了.类似地,如果某次变换所取的减数 α 大于数列各项的最大值,则变换的次数也可以减少.由此可知,如果一个数列是在经过了最少次数的变换后变为全零数列的,那么在变换过程的每一步所取的减数都界于当时数列中各项的最小值与最大值之间.

现在用数学归纳法来证明,至少要经过 n 次变换,方能将数列 $1!$, $2!, \cdots, n!$ 变为全零数列.

当 $n=2$ 时命题成立,因为1次变换不可能使两个不等的项同时变为零.设命题于 $n=k$ 时成立.当 $n=k+1$ 时,如果经 k 次变换将数列 $1!, 2!, \cdots, k!, (k+1)!$ 变成了全零数列,当然也将它的前 k 项全变为零.从而由归纳假设及前面的讨论可知,k 次变换中所取的减数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 都满足 $1 \leqslant \alpha_j \leqslant k!$, $j = 1, 2, \cdots, k$.这样一来,在 k 次变换之后必有

$$\begin{aligned} a_{k+1}^{(k)} &\geqslant a_{k+1}^{(k-1)} - k! \geqslant (k+1)! - k \cdot k! \\ &= k! > 0, \end{aligned}$$

此与反证假设矛盾，从而证明了要将数列 $1!,2!,\cdots,n!$ 变为全零数列，至少要经过 n 次变换.

综上可知，所求的变换次数的最小值为 n.

7·117　设 $S=\{1,2,3,4\}$，n 项的数列 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 具有下列性质：对于 S 的任何一个非空子集 B（集 B 的元数记为 $|B|$），在该数列中都有相邻的 $|B|$ 项恰好组成集合 B. 求项数 n 的最小值.

（中国上海市高中数学竞赛，1997 年）

[解]　对于每个 $i\in S$，它都可以与 S 中的另外 3 个元素各组成一个二元子集，即共有 3 个含 i 的二元子集. 若 i 在数列中仅出现 1 次，则含 i 的相邻两项组至多两个. 所以 i 在数列中至少出现两次. 由于 1，2，3，4 都至少出现两次，故数列至少有 8 项，即 $n\geqslant 8$.

另一方面，容易验证，8 项数列 3，1，2，3，4，1，2，4 满足题中条件.

综上可知，数列项数 n 的最小值为 8.

7·118　设 $S=\{1,2,\cdots n\}$，A 是由集 S 的若干个子集所组成的集合，使得 A 中的任何两个元素作为 S 的两个子集都互不包含，求集 A 的元数 $|A|$ 的最大值.

（保加利亚数学奥林匹克，1994 年）

[解]　对于任何一个这样的集 A，设 A 中共有 f_k 个 S 的 k 元子集，$k=1,2,\cdots,n$，于是 f_k 都是非负整数且

$$|A|=\sum_{k=1}^{n}f_k. \qquad ①$$

当 f_k 为正整数时，对于每个属于 A 的 S 的 k 元子集 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，以 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为前 k 个元素的 S 的所有排列的个数为 $k!(n-k)!$. 由于 A 中的任何两个元素作为 S 的子集互不包含，所以由 A 中子集所导出的上述排列互不相同. 于是有

$$\sum_{k=1}^{n}f_k k!(n-k)!\leqslant n!. \qquad ②$$

又因当正整数 n 固定时，组合数 $\{C_n^0,C_n^1,\cdots,C_n^n\}$ 中以 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ 为最大. 因而由 ① 和 ② 有

$$|A|=\sum_{k=1}^{n}f_k\leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k}{C_n^k}$$

$$= C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} f_k k!(n-k)! \leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

另一方面,当 A_0 为 S 的所有 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 元子集所组成的集合时,恰有 $|A_0| = C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

综上可知,满足题中要求的集 A 的元数的最大值为 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

7·119　设 n 为正偶数.考察一块 $n\times n$ 的方格板.如果两个不同方格有 1 条公共边,则称它们是相邻的.在这块方格板上标定 m 个方格,使得板上的每个方格都至少与 1 个标定方格相邻.求标定方格个数 m 的最小值.

(第 40 届国际数学奥林匹克,1999 年)

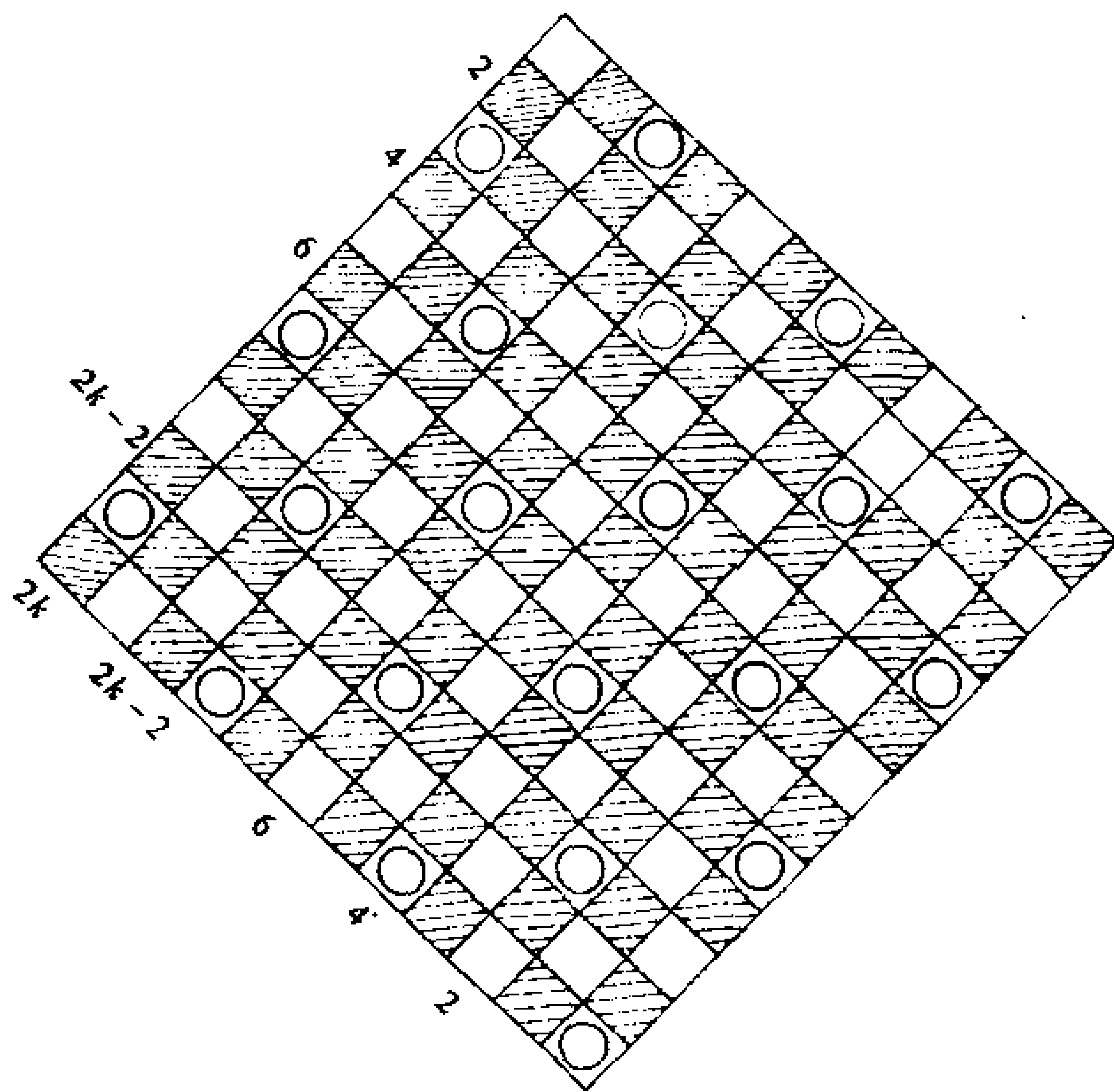
[解]　将方格板像国际象棋棋盘那样黑白相间地染色并考虑所有的黑格.显然,黑格的邻格都是白格.故只须考虑为使每个黑格都至少有 1 个标定方格相邻,最少要标定多少个白格.

设 $n=2k, k\in N$.将方格板斜放着,并取图(a)中画有圆圈的方格为标定方格.易见,方格板上每个黑格都恰与 1 个标定方格相邻.当 k 为偶数时,标定方格的个数为

$$2+4+\cdots+k+(k-1)+\cdots+3+1=\frac{1}{2}k(k+1);$$

当 k 为奇数时,标定方格的个数为

$$2+4+\cdots+(k-1)+k+\cdots+3+1=\frac{1}{2}k(k+1).$$

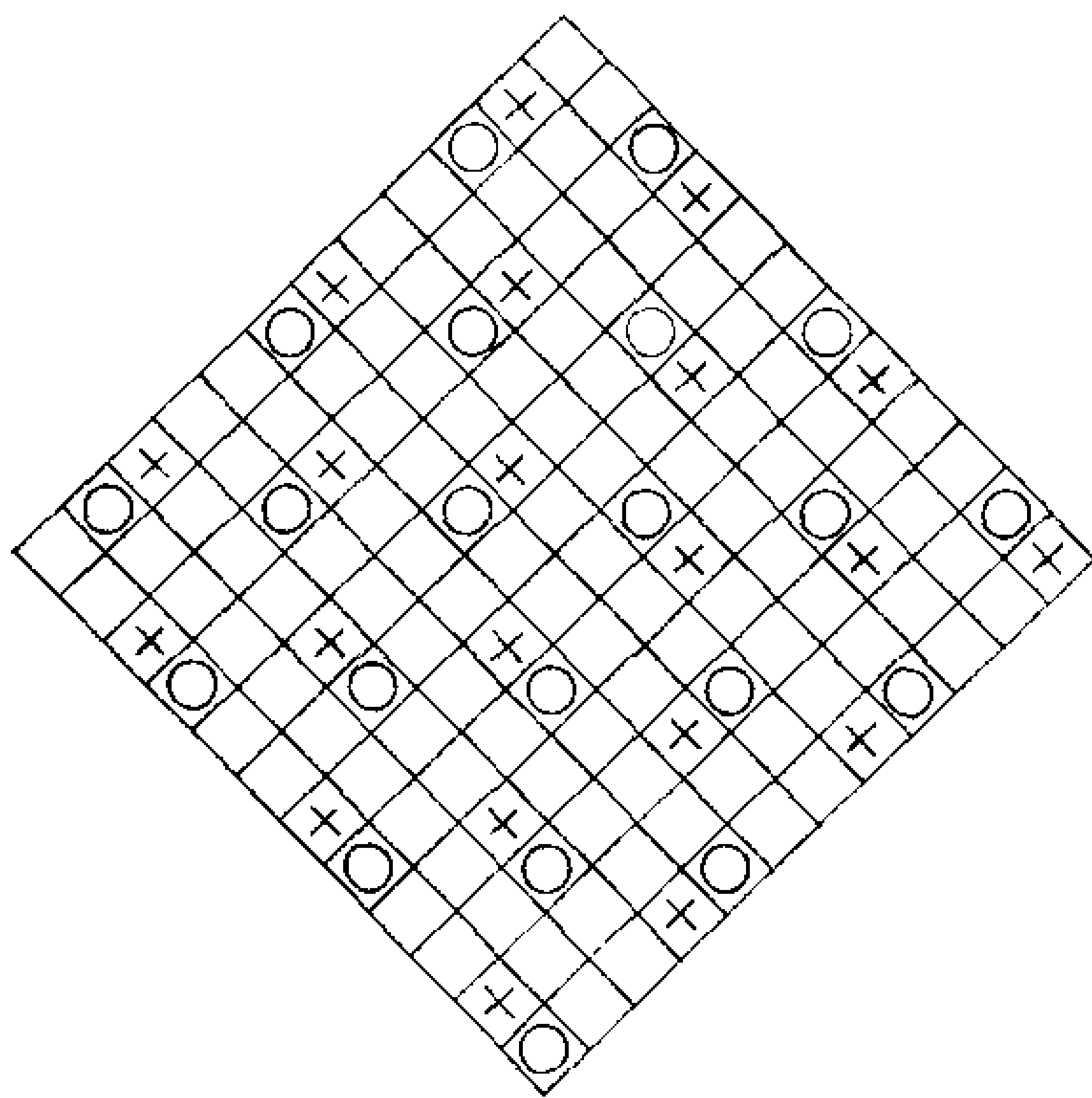


(a)

这表明取 $\frac{1}{2}k(k+1)$ 个标定白格时,可以使每个黑格都至少与 1 个标定方格相邻.同理,取 $\frac{1}{2}k(k+1)$ 个标定黑格时,也可以使每个白格都

至少与 1 个标定方格相邻,故知所求标定方格个数 m 的最小值不大于 $k(k+1)$.

另一方面,考察图(b)中画叉的 $\frac{1}{2}k(k+1)$ 个黑格.易见,它们两两之间没有公共的邻格.换句话说,每个白格只能与这些画叉黑格中的一个相邻.故为满足题中要求,至少应标定 $\frac{1}{2}k(k+1)$ 个白格.同理,也至少要标定 $\frac{1}{2}k(k+1)$ 个黑格.所以,为满足题中要求,至少要标定 $k(k+1)$ 个方格.



(b)

综上可知.标定方格的个数 m 的最小值为 $k(k+1)=\frac{1}{4}n(n+2)$.

7·120 MO 太空城由 99 个空间站组成.任何两个空间站之间都有一条管形通道相连.规定其中 99 条通道为双向通行的主干道,其余通道严格单向通行.如果某 4 个空间站可以经由它们之间的通道从其中任一站走到另外任一站,则称这 4 个站的集合为一个互通四站组.试为 MO 太空城设计一个方案,使得互通四站组的数目最大,具体算出该最大数并证明你的结论.

(第 14 届中国中学生数学冬令营,1999 年)

[解] 将不能互通的四站组称之为坏四站组,于是坏四站组有 3 种可能情形:

(1) 站 A 引出的 3 条通道 AB,AC,AD 全都离开 A;

(2) 站 A 引出的 3 条通道全都走进 A;

(3) 站 A 与 B,C 与 D 之间都是双行干道,但通道 AC,AD 都离开 A,通道 BC,BD 都离开 B.

将第 1 种的所有坏四站组的集合记为 S,其他坏四站组的集合记为 T.让我们来计算 $|S|$.注意,太空城中共有

$$C_{99}^2 - 99 = \frac{1}{2} \times 99 \times 98 - 99 = 99 \times 48$$

条单行通道.设第 i 站走出的通道数为 S_i,于是

$$\sum_{i=1}^{99} S_i = 99 \times 48.$$

这时从站 A_i 引出 3 条走出通道的 1 类坏四站组的个数为 $C_{S_i}^3$.从而有

$$|S| = \sum_{i=1}^{99} C_{S_i}^3 \geqslant 99 \times C_{48}^3 = 99 \times 8 \times 47 \times 46.$$

又因所有四站组的总数为

$$C_{99}^4 = 4 \times 99 \times 98 \times 97,$$

所以互通四站组的个数不多于

$$\begin{aligned} C_{99}^4 - |S| &\leqslant 4 \times 99 \times 98 \times 97 - 8 \times 99 \times 47 \times 46 \\ &= 8 \times 99(49 \times 97 - 47 \times 46) \\ &= 2052072. \end{aligned}$$

下面构造一个例子,使得互通四站组的个数恰为 2052072. 为此,必须使从每个站 A_i 走出的通道的条数都是 48. 从而走入的通道也是 48 条,且每站都恰有两条双行通道,同时要保证只有 S 类坏四站组,没有 T 类坏四站组.

将 99 个空间站写在一个圆内接正 99 边形的 99 个顶点上. 规定正 99 边形的最长的对角线为双行通道. 于是每点都恰有两条双行通道. 对于站 A_i,按顺时针顺序接下去的 48 个站与 A_i 的单行通道都是从 A_i 走出的;按逆时针顺序接下去的 48 个站. 通道都是走向 A_i 的. 下面我们来验证,在此规定之下,只有 S 类坏四站组而没有 T 类坏四站组.

设 $\{A, B, C, D\}$ 为任一四站组.

(i) 若 4 站之间有两条双行道,则显然是互通的;

(ii) 若 4 站之间有惟一的双行道 AC,则站 B 和 D 分别与 A,C 形成一个环路,从而也是互通的.

(iii) 由(i) 和(ii) 可知,坏四站组之间没有双行道,故只能是(1) 和(2) 两种情形之一. 若为(2),不妨设站 A 的 3 条通道全是走向 A 的,于是站 B,C,D 都在从 A 算起,逆时针方向的 48 个站内的. 设其中站 D 离 A 最远,从而通道 AD,BD,CD 都走出站 D. 这表明坏四站组都是 S 类的.

综上可知，互通四站组的个数的最大值为 2052072.

7·121　有 A,B,C 三个药瓶，瓶 A 中装有 1997 片药片，瓶 B 和 C 都是空的，装满时可分别装 97 和 19 片药. 每片药含 100 单位有效成分，每开瓶一次该瓶内每片药都损失 1 个单位有效成分. 某人每天开瓶一次，吃一片药，他可以利用这次开瓶的机会将药片装入别的瓶中以减少以后的损失，处理后将瓶盖都盖好. 问当他将药片全部吃完时，最少要损失多少个单位有效成分？

（中国国家集训队选拔试题，1997 年）

[解]　为了摸清解题思路，先证如下的引理.

引理　当只有 B 和 C 两个瓶且 B 瓶装满药片而 C 瓶空着时，吃完全部药片的最小损失是 903 个单位有效成分.

从简单入手来考察损失最小值的变化规律. 以下用三数组 $(a,b,1)$ 表示为 B 瓶装有 $a+b+1$ 枚药片时，打开瓶吃 1 枚并趁机将 b 枚药片装入 C 瓶中，而三数组括号外，前面的数字是药片总数，后面的数字表示总损失的最小值. 易见，当 B 瓶药片总数依次为 1,2,3,4,5,6 时，情况如下：

1(0,0,1)1,　4(1,2,1)8,

2(0,1,1)3,　5(2,2,1)11,

3(1,1,1)5,　6(3,2,1)14.

当 B 瓶开始时共有 7 片药时，即再增加 1 片药时，增加的 1 枚应放入 B 瓶还是 C 瓶？若放入 C 瓶，则变为(3,3,1)，总损失为 18；若放入 B 瓶，则变为(4,2,1)，总损失也是 18. 故知总损失的最小值为 18，增加的 1 枚放入 B 瓶和放入 C 瓶效果是一样的. 接着，从(3,3,1)出发，再增加 1 片药时，放入 C 瓶损失增加 5 而放入 B 瓶损失增加 4，当然要放在 B 瓶中，当 B 瓶分得的药片数依次为 4,5,6 而 C 瓶药片数不动时，总损失每次都增加 4. 故当药片总数依次为 8,9,10 时，每次增加的 1 枚都应放在 B 瓶中. 若从(4,2,1)开始，则也可依次增加 1 片药，共 3 次，其中有 1 次将药片放在 C 瓶中，而另两次放在 B 瓶中，使得总损失的最小值每次都增加 4. 这就是说，从(3,2,1)出发，C 瓶药片数可从 2 增加到 3，B 瓶药片数可从 3 增加到 6，每增加 1 片药都使损失的最小值增加 4. 于是有

7(3,3,1)18,　9(5,3,1)26,

$8(4,3,1)22$, $10(6,3,1)30$.

当 B 瓶药片总数再增加时，无论将新增加的一枚放入哪个瓶中，都将使损失的最小值至少增加 5 而无法更少，并且为保证每次增加 5，C 瓶药片数可由 3 增加到 4，即只有 1 次增加机会；B 瓶药片数可由 6 增加到 10，即有 4 次增加机会. 共有 5 次，例如可以写成

$11(6,4,1)35$, $14(9,4,1)50$,

$12(7,4,1)40$, $15(10,4,1)55$,

$13(8,4,1)45$.

这样一来，当药片总数从 0 开始每增加 1 片时，损失的最小值增加 1 的有 1 次，增加 2 的有 2 次，增加 3 的有 3 次，增加 4 的有 4 次. 一般地，增加 k 的有 k 次. 因为 $\frac{1}{2}\times 14\times 13 = 91$，所以有

$91(78,12,1)819$, $95(81,13,1)875$,

$92(78,13,1)833$, $96(82,13,1)889$,

$93(79,13,1)847$, $97(83,13,1)903$.

$94(80,13,1)861$,

至此引理得证.

考察 3 个瓶的情形. 这时用四数组来表示第 1 次打开 A 瓶吃 1 片后 3 个瓶中药片的分布状态：括号前的数表示开始时 A 瓶中药片总数，括号中前 3 个数依次表示 A,B,C 瓶中的药片数，括号后的数仍然表示总损失的最小值. 于是有

$1(0,0,0,1)1$, $13(4,5,3,1)37$,

$2(0,0,1,1)3$, $14(4,6,3,1)41$,

$3(0,1,1,1)5$, $15(5,6,3,1)45$,

$4(1,1,1,1)7$, $16(6,6,3,1)49$,

$5(1,1,2,1)10$, $17(7,6,3,1)53$,

$6(1,2,2,1)13$, $18(8,6,3,1)57$,

$7(1,3,2,1)16$, $19(9,6,3,1)61$,

$8(2,3,2,1)19$, $20(10,6,3,1)65$,

$9(3,3,2,1)22$, $21(10,6,4,1)70$,

$10(4,3,2,1)25$, $22(10,7,4,1)75$,

$11(4,3,3,1)29$, $23(10,8,4,1)80$,

12(4,4,3,1)33， 24(10,9,4,1)85.

可见，当 A 瓶中的药片总数从 0 算起每增加 1 片时，损失的最小值增加 1 的有 1 次，增加 2 的有 3 次，增加 3 的有 6 次，增加 4 的有 10 次，而且 B，C 两瓶的变化规律与引理中相同．这样一来．若把损失增加 n 的次数记为a_n，则当增加 n 的a_n 次排完之后，总数每增加 1 片时总损失的最小值都增加 $n+1$．这时，C 瓶中药片数可从$n-1$ 增加到 n，只有 1 次机会，B 瓶中药片数像引理中一样，有 n 次机会；A 瓶中则有 a_n 个增加值，故有

$$a_{n+1}=a_n+n+1.$$

递推可得

$$a_n=n+(n-1)+\cdots+1=\frac{1}{2}n(n+1).$$

但是，当 C 瓶增加到 19 或 B 瓶增加到 97 时，将无法再增加，a_n 的表达式也将随之发生变化．为了搞清这种情形．将引理证明中的变化规律接着开列于下：

98(84,13,1)　　106(91,14,1)
99(85,13,1)　　107(92,14,1)
100(86,13,1)　　108(93,14,1)
101(87,13,1)　　109(94,14,1)
102(88,13,1)　　110(95,14,1)
103(89,13,1)　　111(96,14,1)
104(90,13,1)　　112(97,14,1).
105(91,13,1)

让我们来计算一下，后 3 数为(91,13,1)时，开始时 A 瓶药片总数是多少？注意，第 3 数为 13 时，对应的是 a_{14}，于是有

$$\sum_{n=1}^{14}a_n=\sum_{n=1}^{14}\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{14}n^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{14}n$$
$$=\frac{1}{12}\times14\times15\times29+\frac{1}{4}\times14\times15=560,$$

即 A 瓶药片总数为 560 时，对应的四数组及随后的 9 个四数组为

560(455,91,13,1)　　565(455,95,14,1)
561(455,91,14,1)　　566(455,96,14,1)
562(455,92,14,1)　　567(455,97,14,1)

$$563(455,93,14,1)\qquad 568(456,97,14,1)$$
$$564(455,94,14,1)\qquad 569(457,97,14,1).$$

从而有

$$a_{15}=a_{14}+7=112.$$

接着，C 瓶每次可增加 1 片，B 瓶已经无法增加. 所以有

$a_{16}=a_{15}+1=113$，$a_{17}=a_{16}+1=114$，

$a_{18}=115, a_{19}=116$，$a_{20}=117$.

$a_1+a_2+\cdots+a_{20}=560+687=1247$.

这表明当 A 瓶药片总数为 1247 时，B 和 C 两瓶均满，故当 $n\geqslant 20$ 时，$a_n=117$. 由于 $1997-1247=750=117\times 6+48$，所以 $a_{21}=a_{22}=\cdots=a_{26}=117, a_{27}=48$. 由此即得所求的损失总数的最小值为

$$\sum_{n=1}^{27} na_n=\sum_{n=1}^{14}\frac{1}{2}n^2(n+1)+\sum_{k=1}^{6}(111+k)(14+k)+\sum_{j=1}^{6}117\times(20+j)+48\times 27=35853.$$

7·122　对于1,2,…,10 的每一排列 $\tau=(x_1,x_2,\cdots,x_{10})$，定义

$$S(\tau)=\sum_{k=1}^{10}|2x_k-3x_{k+1}|,\qquad ①$$

并约定 $x_{11}=x_1$. 试求

(1) $S(\tau)$ 的最大值与最小值；

(2) 使 $S(\tau)$ 达到最大值的所有排列 τ 的个数；

(3) 使 $S(\tau)$ 达到最小值的所有排列 τ 的个数.

（中国国家集训队选拔试题，1999 年）

[解]　(1) 将 1,2,…,10 的 2 倍与 3 倍共 20 个数写出如下

$$\begin{aligned}&20,18,16,14,12,10,8,6,4,2,\\&30,27,24,21,18,15,12,9,6,3\end{aligned}\qquad ②$$

其中的较大 10 个数之和与较小 10 个数之和的差为 $203-72=131$. 所以 $S(\tau)\leqslant 131$. 对于排列

$$\tau_0=(1,5,6,7,2,8,3,9,4,10),$$

容易算出 $S(\tau_0)=131$，所以 $S(\tau)$ 的最大值为 131.

为估计 $S(\tau)$ 的最小值，应从 ② 中的20个数中选尽可能大的10个

数作减数. 显然, 30, 27, 24 和 21 无法选入而 3 和 2 又不能不选入. 能选入的最大数为 20 和 18 且两个 18 只能选入 1 个. 随后能选入的最大数为 16, 这又导致 15 不能选入. 依此类推, 可知尽可能大的 10 个减数为 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 3, 2. 由此可知 $S(\tau) \geqslant 57$. 对于排列

$$\tau_1 = (10,9,8,7,6,5,4,3,2,1),$$

容易算出 $S(\tau_1) = 57$. 所以 $S(\tau)$ 的最小值为 57.

(2) 将 $2x_k$ 与 $3x_{k+1}$ 中较小的一个数称为小数, 另一个称为大数. 由于 1, 2, 3, 4 所产生的 8 个数都要做小数而 10, 9, 8, 7 所产生的 8 个数都要做大数, 所以在使 $S(\tau)$ 取最大值的排列中, 1, 2, 3, 4 互不相邻, 7, 8, 9, 10 也互不相邻. 5 和 6 则既不能紧排在 7, 8, 9, 10 之一的后面, 又不能紧排在 1, 2, 3, 4 之一的前面.

设 $x_1 = 1$, 并参照下面的符号排列

$$1\triangle\bigcirc\square\triangle\bigcirc\square\triangle\bigcirc\square\triangle\bigcirc.$$

其中 2, 3, 4 任意填入 3 个 □ 中, 有 6 种不同填法; 7, 8, 9, 10 任意填入 4 个圆圈中, 共有 24 种不同填法; 5 填入 4 个 △ 之一中, 有 4 种不同填法; 6 填入 4 个 △ 之一中, 且当与 5 在同一个 △ 中时, 既可在 5 之前又可在 5 之后, 共有 5 种不同填法. 总结起来, 当 $x_1 = 1$ 时, 使 $S(\tau)$ 取最大值的不同排列的个数为

$$6 \times 24 \times 4 \times 5 = 2880.$$

从而由轮换性知, 使 $S(\tau)$ 取最大值的所有不同排列的个数为 28800.

(3) 在 (1) 的讨论中已知为使 $S(\tau)$ 取最小值, 10 个大数应为 30, 27, 24, 21, 18, 15, 12, 9, 6, 4. 为使 4 为大数, 2 应排在 1 前; 为使 6 为大数, 3 应排在 2 前; 为使 9 为大数, 4 应排在 3 前; 为使 12 为大数, 4 之前只能为 5 或 6, 所以最小排列中, 必有连续 5 项为 5, 4, 3, 2, 1 或 6, 4, 3, 2, 1. 以下称使 $S(\tau)$ 取最小值的排列为最小排列.

设 $x_1 = 10$ 并考察含有连续 5 项为 5, 4, 3, 2, 1 的最小排列. 为使 15 和 18 为大数, 5 和 6 不能紧随在 10 之后, 即 x_2 只能为 7, 8, 9 之一. 6, 7, 8, 9 这 4 个数中有 1 个为 x_2, 另 3 数在 x_2 后可任意排列, 每种情形下都有 6 种, 共有 18 种排列. 这时 5, 4, 3, 2, 1 这连续 5 项可以排在 6 或 7 之后. 于是共得 36 种不同排列.

再考察含有连续 5 项为 6, 4, 3, 2, 1 的最小排列. 这时余下的 4 个数为 5, 7, 8, 9. 它们共有 24 种不同排列, 其中 5 开头的 6 种排列不满足要

求;其中5在9之后与5在8之后的各6种排列中只能将6,4,3,2,1排在5之前而将不能相邻的9,8与5隔开.共得12种排列,余下6种排列都是5在7之后相邻.这时6,4,3,2,1可以排在4数中任何一数之后,共得24种排列.所以,含6,4,3,2,1的最小排列共36种.

总结起来,$x_1=10$的最小排列共72种.再由轮换性知,使$S(\tau)$取最小值的最小排列共有720种.

第八章　操作与游戏

8·1　已知正方体的每个顶点上放着一个非负实数，且所有实数之和为1.甲乙二人做游戏：甲先挑选正方体的任何一面，乙挑选另一面，最后甲再挑第3个面，并约定平行于已选的面不能再选.求证甲总可使所选择的3个面的公共顶点上所放的数不大于$\frac{1}{6}$.

（第16届全苏数学奥林匹克，1982年）

［证］　在8个数中至少有3个数都不大于$\frac{1}{6}$，而三者所在的顶点中总有两个在一个面上且为相对顶点，甲只要先选这一个面就行了.

8·2　甲乙二人进行游戏.在黑板上写着整数2，甲先进行，两人轮流将黑板上所写的整数n改写成$n+d$，其中d为n的任意一个小于n的正约数.谁先写出大于19891989的数，谁就告负.问在正确的玩法之下，谁能取胜？

（圣彼得堡数学奥林匹克，1989年）

［解］　甲能获胜.他每次都将黑板上的数加1，则他写在黑板上的数都是奇数.因为奇数的约数也是奇数，故乙每次所取的d必为奇数，从而他改写的数总为偶数.这样一来，第1个超过19891989的偶数必然是乙所写，所以甲必获胜.

8·3　甲乙二人进行数学游戏，甲先开始且甲乙二人轮流从数列1，2，3，…，27中勾掉1个数，直到只剩下1个数为止.如果所勾去的26个数的和能被5整除，则判甲获胜，否则就判乙胜.问甲乙二人谁有必胜策略？说明理由.

（第32届莫斯科数学奥林匹克，1969年）

[解] 乙有必胜策略.因为这27个数的和为378,除以5的余数为3.所以,勾掉的26个数的和能被5整除的充分必要条件是剩下的1个数除以5时余3.但这27个数中只有5个数除以5时余3,即为3,8,13,18,23.乙只要在开初5次将这5个数依次勾掉,甲就输定了.

8·4 甲乙二人进行如下的游戏,甲先且两人轮流从数列1,2,3,…,100,101中每次任意勾去9个数.经过这样的11次勾掉后,还剩下两个数.这时,所余两数之差即为甲的得分.试证不论乙怎样做,甲至少可得55分.

(第32届莫斯科数学奥林匹克,1969年)

[证] 甲第1次勾掉47,48,…,55这9个数.然后将余下的数分成46组:

$$\{i, i+55\}, i = 1, 2, \cdots, 46.$$

在每次乙勾掉9个数之后,甲的方针是:乙勾掉几个整组,甲也勾掉几个整组;乙从几个组中勾掉各1个,甲就把这几组中余下的各1个数勾掉.这样一来,最后余下的两个数一定是同一组中的两数,当然得55分.

8·5 甲乙二人玩在黑板上写数的游戏,规则是二人轮流在黑板上写一个不超过p的自然数,但禁止再写出黑板上已有数的因数.甲先开始写,轮到谁写而无法写出时就告负.

(1) 当$p = 10$时,游戏者中谁有获胜策略?

(2) 当$p = 1000$时,游戏者中谁有获胜策略?

(第21届全苏数学奥林匹克,1987年)

[解] (1) 甲有获胜策略.他可以先写6,于是按规则不能再写1,2,3.把其余6个数分成3组:(4,5),(7,9),(8,10),无论乙写哪一个,甲就写同组的另一个.

(2) 考察写数原则相同但取数范围不是由1到1000而是由2到1000的这个游戏.如果这个游戏先写者有必胜策略,那么甲对原来游戏只要照搬就行了.因为甲写下一个自然数后,乙是不能写1的.如果新游戏先写数的人没有获胜策略,即他只能告负,那么甲在原游戏中可以先写1,从而将失败留给了乙.可见,甲总有获胜策略.

8·6 甲乙二人进行数学游戏,先写出数0,1,2,…,1024.甲从中勾掉512个数,然后乙从余下数中勾掉256个,然后甲再勾掉128个,如此继续下去.在第10步乙勾掉1个数后,还剩下两个数.此时乙即应付

给甲分数,分数的值等于余下两数之差.试问怎样勾数对甲有利,怎样勾数对乙有利?如果两人都以最佳方式执步,乙将付给甲多少分?

(第 32 届莫斯科数学奥林匹克,1969 年)

[解] 由于最后两数之差越大对甲越有利,因此,甲每次勾掉数时,所余的数中两数之差的最小值越大越有利.乙每次勾数时,所余的数中两数之差的最大值越小越好.

甲第 1 次把 512 个奇数全部勾掉.然后不管乙勾掉哪些数,甲第 2 次先把不是 4 的倍数的偶数都勾掉,若不够,可再随意勾掉一些数,直到够数为止.依此类推,直到第 5 次轮到甲时,把所有不是 32 倍数的数都勾掉.于是所余的数中,任何两数之差都不小于 32,所以他最后至少得 32 分.

第 1 次轮到乙时,甲已经勾掉 512 个数.乙只须认清,前 512 个数和后 512 个数中,哪组余下的数多.乙只须把其中数少的一部分全勾掉即可,数不够时可接着勾下去,只到够数为止.于是所余的数中两数之差的最大值不超过 512.以后每次轮到乙时,都按这个方针办事.每次总可以把两数差的最大值至少缩小到原来的一半,直到第 10 步勾掉 1 个数后,余下的两数之差不超过 32.

可见,二人都正确执步时,乙应付给甲的分数为 32.

8·7 甲乙二人进行如下的游戏:甲先提出一个 1000 位数 A_1,乙在知道此数之后提供一个数 B_1.然后甲根据自己意愿决定对于 A_1 和 B_1 是由大数减小数还是将两数相加,并将运算结果 A_2 告诉乙.接着乙再提供一个数 B_2,而甲则对于 A_2,B_2 按上述程序进行操作而得出 A_3,如此继续下去.如果甲所得的结果中出现形如 $10^k(k=0,1,2,\cdots)$ 的数,则乙就终止游戏.求证乙只须提供不超过 20 个数,必能终止游戏.

(第 34 届莫斯科数学奥林匹克,1971 年)

[证] 按题中要求知,A_i 中末尾的若干个 0 可以不予考虑.因而,乙可以这样来选择 B_i:设 $2A_i$ 的十进表示是 $2A_i=\overline{a_1\cdots a_k\cdots a_n}$,其中 $k=\left[\frac{n}{2}\right]$.令

$$x_i=\overline{a_1\cdots a_k0\cdots0},\quad y_i=\overline{a_{k+1}\cdots a_n},$$

并令 $B_i=\frac{1}{2}(x_i-y_i)$.于是有

$$A_i + B_i = x_i, \quad A_i - B_i = y_i.$$

这意味着 A_{i+1} 或为 x_i 或为 y_i. 因为 $2A_i$ 的位数至多比 A_i 位数多 1,故 A_{i+1} 的位数大致是 A_i 位数的一半. 确切点说,若 A_i 位数为 n,则 A_{i+1} 的位数不超过 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$. 于是甲的前 10 次操作所得的数的位数依次不超过

$$501,251,126,64,33,17,9,5,3,2,$$

即 A_{11} 至多是两位数. 于是 $2A_{11}$ 至多是 3 位数,而当它是 3 位数时,首位为 1. 故若 A_{12} 是两位数时,首位为 1,于是 $2A_{12}$ 也是两位数,从而 A_{13} 是一位数.

下面证明,从任何一个一位数出发,至多经过 5 次操作,即可终止游戏.

首先,当 $A=3,4$ 时,取 $B=4,3$. 甲若取二数之差则为 1,故可设甲取 $A+B=7$. 以下顺序为

$$\left.\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left.\begin{matrix}7\\6\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left.\begin{matrix}13\\14\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left.\begin{matrix}27\\28\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left.\begin{matrix}55\\45\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}100\\10\end{matrix}\right.$$

恰好 5 次终止游戏.

若 $A=9$,则乙取 $B=4$,于是有

$$\left.\begin{matrix}9\\4\end{matrix}\right\} \begin{matrix}\nearrow \left.\begin{matrix}13\\14\end{matrix}\right\} \longrightarrow \text{以下同上}\\ \searrow \left.\begin{matrix}5\\5\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left.\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\} \longrightarrow 1\end{matrix}$$

对于 $A=5,6,7$ 的情形,上面已经解决了. 对于 $A=2,8$ 的情形,可取 $B=8,2$,操作一次后得 10 或 6,后者恰好纳入上面轨道. 这就完成了关于一位数的论断的证明.

综上可知,乙至多提供 17 个数就可以终止游戏了.

8·8　两名学生 A 和 B 做以下游戏:二人各自在一片纸上写一个正整数交给裁判. 然后裁判在黑板上写两个整数,其中之一是 A 和 B 所写整数之和. 然后裁判问 A:"你知道 B 写的是什么数吗?" 如果 A 回答不知道,则裁判向 B 问同样的问题. 如果 B 也回答不知道,裁判再问 A,如此进行下去. 假定两名学生都既聪明又诚实,求证问若干次后必

有一名学生回答知道.

（第 32 届国际数学奥林匹克预选题，1991 年）

［证］ 设 A 和 B 写的数分别为 a 和 b，裁判在黑板上写的两个数是 x 和 y，不妨设 $0 < x < y$. 首先，我们证明如下的引理：

引理 （1）如果 A 和 B 都知道 $\lambda < b < \mu$ 且 A 对裁判问题的回答是"不"，则 A 和 B 都知道 $y - \mu < a < x - \lambda$.

（2）如果 A 和 B 都知道 $\lambda < a < \mu$ 且 B 对裁判问题的回答是"不"，则 A 和 B 都知道 $y - \mu < b < x - \lambda$.

引理的证明 当 $\lambda < b < \mu$ 时，若 $a \leqslant y - \mu$，则 $a + b < y$，从而 $a + b = x$. 于是 A 的回答应是"知道"，矛盾. 若 $a \geqslant x - \lambda$，则 $a + b > x$，从而 $a + b = y$. 这时 A 的回答也应是"知道"，矛盾. 这就证明了（1）. 同理可证（2）也成立.

回到原题的证明. 显然，开始时 A 和 B 均知道 $0 < b < y$. 由引理知，当 A 回答"不"之后，A 和 B 都知道 $0 < a < x$. 当 B 回答"不"之后，由引理中的（2）又知 $y - x < b < y - (y - x)$. 依此类推，当裁判分别向 A 和 B 都问 k 次且二人都回答"不"时，A 和 B 都应知道

$$k(y - x) < b < y - k(y - x).$$

因为 $y - x > 0$，故当 k 足够大时，不等式左端要大于右端了. 这是不可能的，故知经若干次提问后 A 和 B 中必有一人的回答是"知道".

8·9 （1）甲乙二人做游戏：甲写上下两行，每行 10 个数，使它们满足以下规则：如果 b 在 a 下面，d 在 c 下面，那么 $a + d = b + c$. 乙知道这个规则后想确定所有写出的数，他可以向甲提问题："在第一行第三个位置上是什么数？"或者"在第二行第九个位置上是什么数？"等等. 问乙至少要提出多少个这样的问题才能知道所有的数？

（2）在 $m \times n$ 的方格表中写满了数，使得任何两行和任何两列所构成的矩形的两个相对顶点上的数之和等于它的另两个顶点上的数之和. 设在擦去了一部分数之后，可以根据留下来的数复原已擦去的数. 求证留下的数不少于 $m + n - 1$ 个.

（第 5 届全苏数学奥林匹克，1971 年）

［解］ 容易看出，在知道一行中的全部 10 个数以及另一行中的一个数之后，就可以复原其他所有的数. 如果仅仅知道 10 个数，则或者每列中都仅知道一个数，或者有一列中的两个数都不知道. 若为前者，则

可任取数 x 作为每列两数之差并依据已有的数算出每列的另一数;若为后者,则未知列的两数同加任一 x 时仍然满足要求.可见,只提 10 个问题不行,最少要提 11 个问题.

下面用数学归纳法来证明(2).不妨设 $n \geqslant m$,并对 $m+n$ 进行归纳.如果在某一列中不知道任何数,则显然数的复原不惟一.以下设每列中至少有一个数.因为 $m+n-2 \leqslant 2n-2$,故必有一列只有一个已知数.将这一列划去并应用归纳假设便知复原不惟一.这就证明了只有 $m+n-2$ 个已知数是不够的.

8·10　从给定的正整数 n_0 开始,甲乙二人按照如下规则做轮流取整数 $n_1, n_2, \cdots$ 的游戏:当 n_{2k} 被取定后,甲可取满足 $n_{2k} \leqslant n_{2k+1} \leqslant n_{2k}^2$ 的任意一个整数;当 n_{2k+1} 被取定后,乙可取 n_{2k+2},这里 n_{2k+2} 是使得 $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ 恰为一个素数的正整数幂的任意一个整数.约定甲先取得 1990 为胜而乙先取得 1 为胜.试问

(1) 对怎样的 n_0,甲有必胜策略?

(2) 对怎样的 n_0,乙有必胜策略?

(3) 对怎样的 n_0,双方均无必胜策略?

(第 31 届国际数学奥林匹克,1990 年)

[解] (1) 设 W 是使甲有必胜策略的所有正整数 n_0 的集合.因为 $45^2 = 2025 > 1990$,所以

$$\{45, 46, \cdots, 1990\} \subset W.$$

为了进一步寻求 W 的元素,我们给出如下的引理.

引理　设 $\{m, m+1, \cdots, 1990\} \subset W$, $N \ni s \leqslant 1990$ 且 $\frac{s}{p^r} \geqslant m$,其中 p^r 是 s 的最大的素数幂因子.则满足条件 $\sqrt{s} \leqslant n_0 < m$ 的所有正整数 n_0 都属于 W.

引理的证明　从 n_0 出发,甲可取 $n_1 = s$.于是无论乙怎样选取 n_2,总有 $\frac{n_1}{n_2} \leqslant p^r$,从而有

$$m \leqslant \frac{s}{p^r} \leqslant n_2 < s \leqslant 1990.$$

可见 $n_2 \in W$.甲当然有必胜策略.引理证毕.

容易验证,$m = 45$, $s = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$ 满足上述引理的条件

且 $\sqrt{420} < 21 \leqslant 45$,故由引理知$\{21,22,\cdots,44\} \subset W$.对于 $m = 21$, $s = 168 = 2^3 \times 3 \times 7$ 应用引理,又知$\{13,14,\cdots,20\} \subset W$.接着对于 $m = 13$, $s = 105 = 3 \times 5 \times 7$ 应用引理,可得$\{11,12\} \subset W$.最后对 $m = 11$, $s = 60 = 2^2 \times 3 \times 5$ 应用引理得知$\{8,9,10\} \subset W$.综上,我们证明了$\{8,9,\cdots,1990\} \subset W$.

对于 $n_0 > 1990$,甲可以选取正整数 r,使得 $2^r \cdot 3^2 < n_0 \leqslant 2^{r+1} \cdot 3^2 < n_0^2$,然后取 $n_1 = 2^{r+1} \cdot 3^2$.于是无论乙怎样选取 n_2,总有 $8 \leqslant n_2 < n_0$.经有限次交替选取后,乙所选的数 n_{2k} 必然满足 $8 \leqslant n_{2k} \leqslant 1990$,从而甲有必胜策略.这表明$\{1991,1992,\cdots\} \subset W$.

(2) 对于 $n_0 \leqslant 5$,乙有必胜策略.

因为最小的 3 个互异素数之积为 $2 \times 3 \times 5 = 30$,故甲只能取

$$n_1 = p_r q_s, \quad r, s \in N, \qquad ①$$

其中 p 为素数,q 为素数或 1 且 $p^r > q^s$.于是乙可选取

$$n_2 = q^s = \frac{n_1}{p^r} < \sqrt{n_1} \leqslant n_0.$$

经有限步之后,必然有 $n_{2k} = 1$,即乙获胜.从而知当 $n_0 \in \{1,2,3,4,5\}$ 时,乙有必胜策略.

(3) 对于 $n_0 \in \{6,7\}$,甲若选取形如①的 n_1,必然导致失败.因此,甲只能选取 $n_1 = 30 = 2 \times 3 \times 5$ 或 $n_1 = 42 = 2 \times 3 \times 7$.这时,乙若选取 $n_2 = 10,15,14,21$,则导致甲胜,故乙只能取 $n_2 = 6$.接下去甲和乙所选的 $n_3, n_4, n_5, n_6, \cdots$ 将是 $30,6,30,6,\cdots$.可见,对于 $n_0 \in \{6,7\}$,双方均无必胜策略.

8·11 在纸上写有一行若干个"-"号,甲乙二人轮流将其中一个或相邻的两个"-"号改成"+"号.谁能修改到最后一个"-"号,谁就获胜.如果开始时有(1)9 个"-"号;(2)10 个"-"号;(3)n 个"-"号,且规定甲先改,问谁有获胜策略?

(基辅数学奥林匹克,1973 年)

[解] 甲有必胜策略.当共有奇数个"-"号时,甲把中间的一个"-"号改成"+"号;当共有偶数个"-"号时,甲把中间的两个"-"号改成"+"号.于是余下的"-"号被分成两段且关于这行符号的中垂线是对称的.以后,甲只要视乙如何改而总是对称地改动就必然获胜.

8·12 在平面上给定 1992 个向量,甲乙二人轮流各选取 1 个向

量,直到所有向量被取完为止,并规定所取向量之和的长度较小者为负.若甲先取,他能否保证使自己不致于告负?

(第 26 届独联体数学奥林匹克,1992 年)

[解] 设 1992 个给定向量之和为 $\vec{a}$. 在平面上引入直角坐标系,使 x 轴的方向与 $\vec{a}$ 相同(若 $\vec{a}$ 为零向量,则 x 轴方向可任取). 甲在每次选取时都应在当时所剩的所有向量中选取横坐标最大的向量. 这样,选完之后,甲所选的所有向量的横坐标之和不小于乙,而两人所选的向量和的纵坐标的绝对值相等. 可见,甲所选的所有向量之和的长度不小于乙的,即甲不会告负.

8·13 8 个小圆片分别涂有 4 种颜色:红,蓝,白,黑各两个. 甲乙二人轮流把圆片放到正方体的顶点上. 在所有的圆片都放完之后,如果正方体上存在一条棱,其两个端点所放的圆片同色,则甲获胜,否则乙获胜. 问在这个游戏中谁有必胜策略?

(基辅数学奥林匹克,1981 年)

[解] 乙有必胜策略. 每一次,无论甲把何种颜色的圆片放在哪一个顶点,乙总是把相同颜色的圆片放到与此顶点关于正方体中心对称的那个顶点上就可稳操胜券.

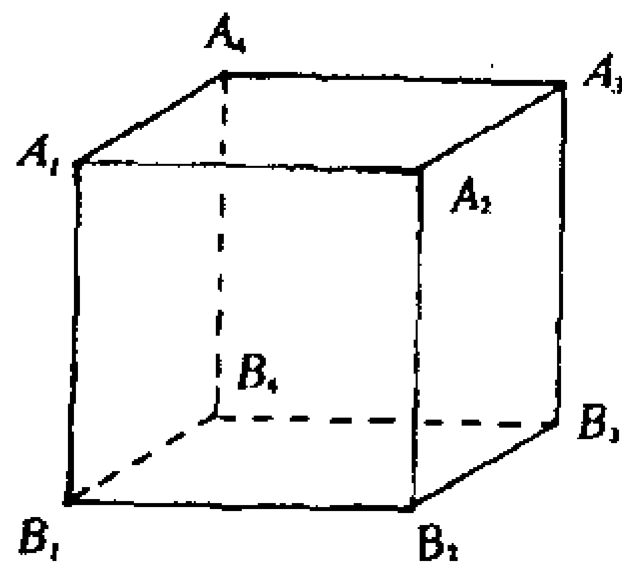
8·14 现有一个正方形和两种颜色:红色和绿色. 甲乙二人做如下的游戏:甲先选取正方体的三条棱,并将它们涂上红色. 乙从尚未涂色的棱中选三条并将它们涂上绿色. 然后甲再从尚未涂色的六条棱中选三条并涂上红色. 最后乙将剩下的三条涂成绿色. 谁能首先把一面的四条棱涂成同一种颜色,谁就获胜. 问甲有必胜策略吗?

(第 18 届全苏数学奥林匹克,1984 年)

[解] 将正方体的 12 条棱分成四组:

$\{A_1A_2, B_2B_3, A_4B_4\}, \{A_2A_3, B_3B_4, A_1B_1\}$,

$\{A_3A_4, B_4B_1, A_2B_2\}, \{A_4A_1, B_1B_2, A_3B_3\}$.



不论甲首先涂红的是哪三条棱,上述四组中总有一组的三条棱尚未涂色. 乙只要把这三条棱涂成绿色,则正方体的六面上每面都有一条绿棱,甲就无法取胜了.

8·15 有一堆火柴共 1 千万根. 甲乙二人进行如下游戏:甲先取

并且两人轮流取火柴，在每一步中，游戏者可从堆中取走 p^n 根火柴，其中 p 为质数，$n = 0,1,2,\cdots$(例如，甲取25根火柴，乙取8根，甲再取1根，乙再取5根，甲取49根等等). 谁取到了最后1根火柴，谁就获胜. 问甲乙二人谁有必胜策略？怎样获胜？

（第34届莫斯科数学奥林匹克，1971年）

[解] 注意，游戏者每一步可取1,2,3,4,5根火柴，但不能取6根，也不能取 $6k$ 根，$k = 1,2,3,\cdots$. 所以，甲只要第1次取走4根，则余下的火柴根数是6的倍数. 乙取走之后，余下的火柴根数一定不是6的倍数. 于是甲又可取走几根使余下的火柴根数又是6的倍数. 甲每次都按这一方针办事，最后必然获胜.

8·16 一游戏开始时有1989粒石子，两人轮流取石子，每一次取走的个数必须等于当时石子的个数的正因数. 取最后一个石子的人输. 问哪一个人可以必胜，必胜的策略是什么？

（加拿大数学奥林匹克训练题，1989年）

[解] 我们用数学归纳法证明：在石子数 n 为奇数时，先取者输，在 n 为偶数时，先取者胜.

当 $n = 1$ 时，结论显然成立.

假设对于 $n \leqslant 2k - 1$，结论仍然成立.

对于 $2k$ 个石子，先取者第一次取1个就化成有 $2k - 1$ 个石子的情况.

对于 $2k + 1$ 个石子，先取者所取的石子数必为奇数，剩下偶数个石子，由归纳假设可知结论成立.

8·17 甲乙二人就两小堆糖果进行游戏. 甲先开始并且二人轮流执步. 执步者可取走其中一堆而把另一堆分成两小堆(可相等也可以不相等). 如果另一堆中总共只有一块糖而无法再分了，那么执步者就可以把这一块也取走而获胜. 已知开始时两堆糖果数分别为33和35，问甲乙二人谁有必胜策略？为了取胜，他应当怎样执步？

（第31届莫斯科数学奥林匹克，1968年）

[解] 甲有必胜策略. 首先，甲取走33块的一堆而把另一堆分成17块和18块的两堆. 在以后的过程中，甲每次都留给对方数目为 $5k + 2$ 或 $5k + 3$ 的两堆. 这样一来，乙最终将遇到每堆块数都是2或3的两堆，他无论取走哪一堆，另一堆分出的两小堆中必有一堆块数为1. 从

而甲必获胜.

下面我们来证明甲的策略是可以实现的. 轮到乙时，他总要将 $5k+2$ 或 $5k+3$ 的一堆分成两堆，当 $k \neq 0$ 时，乙总是只有 3 种分法：$\{5h+1, 5l+1\}$，$\{5h, 5l+2\}$，$\{5h+4, 5l+3\}$ 和 $\{5h+1, 5l+2\}$，$\{5h, 5l+3\}$，$\{5h+4, 5l+4\}$. 再轮到甲时，在每种情形下他都取走后一堆而将前一堆的 $5h+1, 5h, 5h+4$ 分别分成 $\{5h'+3, 5h''+3\}$，$\{5h'+2, 5h''+3\}$，$\{5h'+2, 5h''+2\}$，这便实现了甲的策略.

8·18　甲乙二人进行如下的游戏：在桌子上放着一堆石子，共计(1)31 颗，(2)100 颗. 二人轮流执步，甲先行. 执步者每步将每堆颗数多于 1 颗的石子都分成两个较小的堆. 如果谁在执步之后使得每堆石子都仅有 1 颗，谁就获胜. 问甲有必胜策略吗？说明理由.

（第 38 届莫斯科数学奥林匹克，1975 年）

[解]　(1) 乙胜；(2) 甲胜.

首先，当石子为 31 颗时，无论甲怎样分，其中总有 1 堆的石子数不小于 16. 于是乙可以从中分出 1 堆为 15(指石子数)，其他可随意分，且每堆都小于 15. 接着由甲来分，结果中石子数最多的一堆不少于 8. 轮到乙时，从中分出一堆为 7，并使其他堆均小于 7. 只要乙每次都使石子最多的一堆为 $2^k-1(k \in N)$，则他定能取得最后胜利.

当石子数为 100 颗时，甲先执步时将抢先实行方才乙实行的方针，将石子分为 63 和 37 的两堆. 所以，这时甲有必胜策略.

8·19　黑板上写着整数 1000 并在桌子上放有 1000 根火柴. 甲乙二人进行游戏：甲先开始并轮流进行，轮到的人可从堆中取出不多于 5 根火柴，也可往堆中放入不多于 5 根火柴(但开始时两人手中均无火柴，往回放时只能放自己先前取出的火柴)，并在黑板上写下此时堆中的火柴数目. 如果某人所写下的整数是黑板上已有的，他就告负. 试问在双方都采用正确策略的前提下，谁将获胜？

（圣彼得堡数学奥林匹克，1989 年）

[解]　乙将获胜. 乙可将 0 到 999 这 1000 个整数均分成 125 组，每组 8 个相继的整数，然后按如下方针办事：当甲第 1 次写出某一组内的一个数时，这个数当然不是该组内的最小数，于是乙就写出该组内所可能写出的最小数(这时，乙可能取出 3，4 或 5 根火柴)，并在心中将该组余下的 6 个数从小到大分为 3 对. 这样一来，轮到甲时，他或者使整数还

在这一组,或者变到前一组(即较小的一组),但不能变回后一组.若为前者,则乙可写出与之同对的另一个数;若为后者,乙便像上面一样处理.由于乙在处理第1个数时至少取出3根火柴,故即使乙在此组中每写一数时都需放回1根火柴也够用了.可见,对于每种情形乙都可以应付自如.

8·20 桌上放有两堆火柴,根数分别为100和252.甲乙二人轮流拿取火柴,每次只能从其中一堆中取走火柴,且取走的根数应为另一堆火柴根数的约数,谁拿取最后一根火柴谁就获胜.如果甲先取且两人都采取正确的策略,谁能获胜?

(圣彼得堡数学奥林匹克,1988年)

[解] 乙必胜.对于每个自然数 n,令

$$v(n)=\max\{k \mid k\in N, 2^k \mid n\},$$

并称 $v(n)$ 为 n 的指标.注意到 $v(100)=2=v(252)$,我们先来证明如下的引理.

引理 如果两堆火柴数分别为 n 和 m 且有 $v(n)=v(m)$,则先拿者按规定从某堆(不妨设为第1堆)中取走 r 根后,必有 $v(n-r)\neq v(m)$.

引理的证明 由于 $r\mid m$,故有

$$v(r)\leqslant v(m)=v(n).$$

如果 $v(r)<v(n)$,则

$$v(n-r)<v(n)=v(m).$$

如果 $v(r)=v(n)$,则因 $n=2^k n_1$, $r=2^k r_1$,其中 n_1 和 r_1 均为奇数,故 n_1-r_1 为偶数,从而有

$$v(n-r)\geqslant k+1>k=v(n)=v(m).$$

回到原题的解.因为 $v(100)=v(252)=2$,由引理知,甲取火柴之后,两堆火柴根数的指标必然不等.于是乙可以从指标高的一堆取火柴,并使取走之后的两堆指标相等.这总是可以做到的.实际上,如果甲取后的两堆火柴数为 n_1 和 m_1 且 $v(n_1)>v(m_1)$,则乙可从第1堆的 n_1 根火柴中取走 $2^{v(m_1)}$ 根.易见,取走之后两堆指标相等.显然,乙只要坚持这个方针,最后必然获胜.

8·21 甲乙二人轮流从共有 n 块石头的石堆中取出石块.甲先开始,他第1次可从堆中取走任意多块,但不能不取也不能全部取走.以

后每人每次所取的石块数都应为对方刚才一次所取的石块数的约数.取得最后一块者为胜.问对于怎样的最小的 $n>1992$,乙可有获胜的策略?

(第 18 届全俄数学奥林匹克,1992 年)

[解] 首先,我们断言,对于 $n>1$,当且仅当 $n=2^m$ 时,乙有获胜策略.因而题中所求的最小的 $n=2048$.

设 $n=2^m,m\in N$,并设甲第 1 次所取的石块数为 $2^{m_1}(2k_1+1)$,其中 m_1,k_1 均为非负整数.于是乙只要按如下策略行事即可取胜:他第 1 次取走 2^{m_1} 块,而在以后各次中,乙每次所取的块数都与甲刚刚所取走的块数相等.这样一来,甲在第 h 次($h\geqslant 2$)取石块时,所取的块数必为2的幂,设为2^{m_h}.于是必有$0\leqslant m_h\leqslant m_{h-1}$,并且甲取过之后,堆中所剩的石块数必为 2^{m_h} 的奇数倍,当然不为 0.因而最后获胜者必然是乙.

对于 $n=2^m(2k+1),k\in N$,甲只要在第 1 次取走 2^m 块,则余下 $2^{m+1}k$ 块,乙不能一次拿光.乙每次只能拿走 2 的一个指数不超过 m 的方幂块石头,余下的石块数为 2 的方幂的奇数倍.于是甲只要再采取前种情形中乙的策略就可稳操胜券了.

8·22 两堆火柴的根数分别为 m 和n,$m>n$.甲乙二人轮流各从一堆中取火柴,每次从一堆中所取火柴的根数($\neq 0$)是另一堆中火柴根数的倍数.能在一堆中取得最后一根火柴者获胜.

(1) 试证当 $m>2n$ 时,先取火柴的甲总能获胜.

(2) 当 $m>\alpha n$ 时,甲总能获胜,求 α 的取值范围.

(第 12 届全苏数学奥林匹克,1978 年)

[证] 我们把开始时两堆火柴的根数(m,n)称为一个布局.如果从(m,n)出发,先取者总能获胜,则称(m,n)为一个胜局,否则称之为负局.

(1) 当 $m>2n$ 时,写 $m=pn+q,0\leqslant q<n,p\geqslant 2$.若 $q=0$,(m,n)当然是胜局.设 $q>0$.考察布局(q,n).若(q,n)为负局,则甲第一次取出 pn 根火柴即可获胜;若(q,n)为胜局,则甲先取出$(p-1)n$ 根火柴,布局化为$(n+q,n)$.乙只能从第一堆中拿去 n 根而化为(q,n),甲胜.可见,当 $m\geqslant 2n$ 时,甲总能获胜.

(2) 我们把每一个布局(m,n)对应于数轴上的点 $x=\frac{m}{n}\geqslant 1$. 在(1)中我们已经证明了当 $x\geqslant 2$ 时,总是胜局. 现在我们要证当且仅当 $x>\beta=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ 时,总是胜局.

在每一步中,点 x 向左移动某个正整数k. 如果点 x 落在区间$(0,1)$中,则应代之以$\frac{1}{x}>1$;如果点 x 为0,则是负局;如果点 x 变为1,则可多取 n 枚而化为0,故也是负局.

考虑数轴上长度为1的区间 $I=\left[\frac{1}{\beta},\beta\right]$. 对任何布局 $x>\beta$,甲总可以取一次火柴而使 x 落在区间I中. 因为 x 为有理数,故不会落在区间 I 的端点. 若 $x=1$,则甲胜. 而当$\frac{1}{\beta}<x<1$时,应用$\frac{1}{x}$代替x,故可设$1<x<\beta$. 这时轮到乙取火柴,他必然使 $x\longrightarrow x-1<\frac{1}{\beta}$,又应代之以$\frac{1}{x-1}>\beta$,亦即使新的 x 又落在β右方. 重复这个过程. 因火柴数逐次减少,必然有一次当甲使x落入区间I时恰好为$x=1$,故甲必胜. 而从证明过程同时看出,当$1<x<\beta$时,为负局. 故知所求 α 的取值范围为 $\alpha\geqslant\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.

8·23 桌上放有3堆火柴,根数分别为100,200,300. 甲乙二人进行游戏. 甲先开始并轮流进行如下操作:每次取走一堆火柴,再把余下两堆中的某一堆分成两个非空的堆. 轮到谁时不能进行操作,就算谁输. 问在两人都能正确操作的前提下,谁有必胜策略?说明理由.

(第20届全俄数学奥林匹克,1994年)

[解] 甲有必胜策略.

注意,3堆火柴的根数可以写成

$$100=2^2\times 25,200=2^3\times 25,300=2^2\times 75.$$

我们就一般的情形,即3堆火柴的根数分别为

$$2^n a,2^n b,2^m c(0\leqslant n<m,a,b,c\text{ 均为奇数})(*)$$

的情形进行证明. 甲可以取走根数为 $2^n a$ 的那堆火柴,并将 $2^m c$ 的那堆火柴分成两堆,根数分别为 2^n 和 $2^n(2^{m-n}c-1)$. 于是,操作之后3堆火柴的根数可以写成

$$2^n a_1, 2^n a_2, 2^n a_3,$$

其中 a_1, a_2, a_3 均为奇数.接下来轮到乙操作.不妨设他取走了根数为 $2^n a_1$ 的那一堆,而将根数为 $2^n a_2$ 的分成两堆,根数分别为 $2^{n_1} b_1, 2^{n_2} b_2$,其中 b_1, b_2 均为奇数且 $n_1 \geqslant n_2$.因为

$$2^n a_2 = 2^{n_1} b_1 + 2^{n_2} b_2,$$

所以,或者有 $n_1 = n_2 < n$,或者有 $n_2 = n, n_1 > n$.无论哪种情形,3堆火柴数又化为(*)式所示的情形.于是甲又可以按上述方式操作并使过程进行到某次乙无法操作为止.

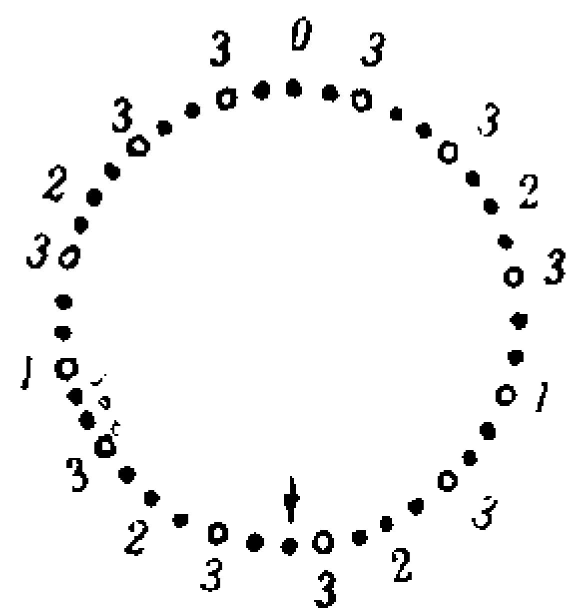
8·24　在圆周上放有若干枚黑棋子和白棋子.甲乙二人做游戏:甲拿走有相邻白棋子的所有黑棋子,然后乙拿走有相邻黑棋子的所有白棋子.就这样二人轮流拿下去,直到只剩一种颜色的棋子为止.

(1) 设开始时圆周上有40枚棋子.问能否使得在每人拿两次后,圆周上只剩一枚棋子?

(2) 设开始时圆周上有1000枚棋子.问最少要经过多少步拿子之后在圆周上只剩下一枚棋子?

(第11届全苏数学奥林匹克,1977年)

[解]　右图画出了41枚棋子,其中有29枚黑子和12枚白子.棋子旁所标的数字表明该棋子是在结束前几步被拿掉的,未标数字的棋子都该标有4,图中省略了.容易验证,甲乙二人每人拿子两步之后,只余下标有0的一枚黑子.这说明问题(1)的答案是肯定的,因为我们只要把图中标有箭头的那枚黑子拿掉就行了.



现在将拿子过程反过来加以分析.既然最后圆周上只剩一枚棋子,不妨设为黑子.因而在前一步至多拿走两枚白子,即这时棋盘上至多3枚棋子.再往回推一步,至多拿走4枚黑子,即未拿之前圆周上至多有5枚黑子和2枚白子,共7枚棋子.我们用 b_t 和 w_t 分别表示前推 t 步时圆周上可能有的黑子与白子的最大值.容易看出,当 $b_t > w_t$ 时,$b_{t+1} = b_t, w_{t+1} = w_t + 2b_t$;当 $b_t < w_t$ 时,$b_{t+1} = b_t + 2w_t, w_{t+1} = w_t$.利用这个递推公式,就可以依次推出圆周上黑子、白子及总数的最大值,列表如下:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
b_t	1	1	5	5	29	29	169	169	985
w_t	0	2	2	12	12	70	70	408	408
a_t	1	3	7	17	41	99	239	577	1393

由上表可见,为使得拿子7次后圆周上只剩下一枚棋子,开始时圆周上最多有577枚棋子.因而当圆周上有1000枚棋子时,至少要经过8步方能使最后留下一枚棋子.

这样的例子是可以构造出来的.让我们回到开头的例子,这是已经前推4步的情形.再于每枚黑子两侧各放一枚白子,然后再于每枚白子两侧各放一枚黑子并再各重复一次,就得到前推8步且有最大值的情形,即圆周上有408枚白子和985枚黑子共1393枚棋子.注意,在推第8步时,是增填了816枚黑子,将这些黑子中去掉393枚,就得到有1000枚棋子且满足要求的例子.综上可知,当圆周上有1000枚棋子时,最少要经过8步才能使圆周上只剩一枚棋子.

8·25　甲乙丙三人做游戏:共有三张牌,其上分别写有正整数 p, q, r,且 $p<q<r$.洗牌之后分发给三人,每人一张,并按每人所得牌上的数字付给弹子.然后收牌再洗,但所得的弹子由每人自己保存.这样洗牌,发牌,付弹子的游戏至少进行两次,已知游戏结束时甲,乙,丙三人分别有弹子20,10,9个,且乙知道他最后一次得到 r 个弹子,问谁在第一次游戏时得到 q 个弹子?

(第16届国际数学奥林匹克,1974年)

[解]　设游戏次数为 n,则

$$n(p+q+r)=20+10+9=39.$$

由于 $0<p<q<r$,故 $p+q+r\geqslant 6$.又因 $n\geqslant 2$,故知 $n=3$ 而 $p+q+r=13$.

已知乙最后一次得 r 个弹子,而他3次所得弹子的总数小于所发弹子总数的 $\frac{1}{3}$,所以乙在另外两次所得的弹子数均为 p.于是有

$$p+p+r=10.$$

由于丙所得弹子总数少于乙,所以他没有一次能得 r 个弹子.既然乙第一次得 p 个弹子,故丙第一次得 q 个弹子.

8·26　围绕一个圆桌坐着1994名学生玩传递纸牌的游戏.开始

时,全部 n 张纸牌都拿在一名学生的手里.每次传递时,都从手中至少有两张牌的学生中任选1人,他把手中的纸牌传给左右相邻的学生各1张.当且仅当每个学生手中的纸牌都至多1张时,游戏就结束了.求证

(1) 当 $n \geqslant 1994$ 时,游戏可以永远继续下去;

(2) 当 $n < 1994$ 时,游戏必然会结束.

(第35届国际数学奥林匹克预选题,1994年)

[证] (1) 当 $n > 1994$ 时,由抽屉原理知至少有1名学生的手中至少持有两张牌,故知游戏永远不会结束.当 $n = 1994$ 时,将1994名学生按顺时针顺序编号为 $G_1, G_2, \cdots, G_{1994}$,且开始时持有全部纸牌的学生为 G_1.定义纸牌的流通值如下:当它被 G_i 持有时,流通值为 $i, 1 \leqslant i \leqslant 1994$.将所有纸牌的流通值的和记为 S.显然,开始时 $S = 1994$.当纸牌从 $G_i(i \notin \{1, 1994\})$ 手中传出时,S 值不变;当纸牌从 G_1 或 G_{1994} 手中传出时,S 的值将增加或减少1994.所以,在整个进行过程中,总有 $S \equiv 0 (\bmod 1994)$.如果1994名学生每人手中恰有1张牌,则

$$S = 1 + 2 + \cdots + 1994 = 997 \times 1995 \equiv 997 (\bmod 1994).$$

所以在游戏进行过程中,这种情形不会产生,因而游戏永远不会结束.

(2) 设 $n < 1994$.在整个游戏过程中,当第1次由两名相邻学生中的一人传一张牌给另一人时,就在这张牌上写上两人的名字.以后轮到后者传牌时,必将这一张牌传回给前者,并始终保持这张牌只在签名的二人之间传递.这样一来,每个已传递过牌的两人对都对应于一张牌.由于 $n < 1994$,故知存在两名相邻的学生,他们之间从未传递过且以后也不会传递纸牌.如果游戏能永远进行下去,则由抽屉原理知,必有一名学生,进行了无穷多次传递而他的邻居之一至多进行了有限多次传递.这将导致后者在进行完全部传递后,前者还要进行无穷多次传递,将导致后者手中积累了无穷多张纸牌.这是不可能的.

8·27 设有 $n+1$ 个方格排成一行,由左到右依次编号为 $0, 1, \cdots, n$.还有已经标好号码 $0, 1, \cdots, n$ 的 $n+1$ 张纸牌,每张牌的大小恰与方格相同.任意洗牌之后放在每个方格中各1张.游戏的最终目标是使第 i 张牌放在第 i 号方格中,$i = 0, 1, \cdots, n$.在未实现这一目标之前,可按如下规则进行移动:确定使第 k 个方格放有号码为 $l > k$ 的纸牌的最小自然数 k,然后拿掉这张牌,并将从第 $k+1$ 号方格到第 l 号方格中的纸

牌同时向左串 1 格，再将 l 号纸牌放进第 l 号方格中. 求证

(1) 游戏至多进行 2^n-1 次移动后必将停止；

(2) 存在一种初始状态，恰好使游戏在进行 2^n-1 次移动后停止.

（第 35 届国际数学奥林匹克预选题，1994 年）

［证］ (1) 对于 $1\leqslant i\leqslant n$，定义指标 d_i. 若第 i 张牌恰在第 i 个方格中，则定义 $d_i=0$；否则定义 $d_i=1$. 令

$$f=d_1+2d_2+2^2d_3+\cdots+2^{n-1}d_n.$$

于是 $0\leqslant f\leqslant 2^n-1$ 且游戏结束当且仅当 $f=0$. 按定义，在每次移动后，某个指标 d_l 由 1 变成 0 而 $d_{l+1},d_{l+2},\cdots,d_n$ 均保持不变. 这时即使 $d_1,d_2,\cdots,d_{l-1}$ 全都由 0 变为 1，f 的值也至少减少 1. 所以，至多进行 2^n-1 次移动后游戏必然结束.

(2) 让我们反向来进行游戏. 从 $n+1$ 张牌全在正确方格中的情形开始，在每次移动中，都将在 $l>0$ 号方格中的第 k 张牌跳向左方某个方格中，使 f 的值至少增加 1. 为使 f 的值恰好增加 1，必须是把使 $d_k=0$ 的最小自然数 k 的第 k 个方格中的第 k 号牌跳到 0 号方格中. 考查 0，1，2，3，⋯ 的二进表示式可知，跳移过程依次是对纸牌 1，2，1，3，1，2，1，4，1，2，1，3，1，2，1，5，⋯ 进行的，而且这个次序还是惟一确定的. 因此，至多存在一个初始状态能使游戏在进行 2^n-1 次移动后才停止.

考虑如下的初始状态：0 号牌放在第 n 号方格中，而第 i 号牌则放在第 $i-1$ 号方格中，$i=1,2,\cdots,n$. 我们对牌数 $n+1$ 应用归纳法来证明游戏要在 2^n-1 次移动后结束，而在此之前 0 号牌始终不在 0 号方格中.

当 $n=1$ 时，结论显然成立. 设结论对某个 $n\geqslant 1$ 成立. 对于 $n+1$ 的情形，0 号牌放在第 $n+1$ 号方格中并且在第 $n+1$ 号牌进入到第 0 号方格之前始终不动. 因此，我们可以不管 0 号牌和第 $n+1$ 号方格而把第 $n+1$ 号牌视为 0 号牌按原规则来进行游戏. 由归纳假设知，必须且只须进行 2^n-1 次移动后第 $n+1$ 号牌在 0 号方格中而第 i 号牌恰在第 i 号方格中，$i=1,2,\cdots,n$. 下一步移动当然是把第 $n+1$ 号牌跳到第 $n+1$ 号方格中且以后就不动了. 这时 0 号牌在第 n 号方格中，第 i 号牌在第 $i-1$ 号方格中，$i=1,2,\cdots,n$. 再对前 $n+1$ 个方格应用归纳假设便知，恰还需要 2^n-1 次移动可使第 0，1，⋯，n 号牌各就

各位.总共进行了 $2^n-1+1+2^n-1=2^{n+1}-1$ 次移动,这就完成了归纳证明.

8·28 甲乙二人在画有 99×99 个方格的正方形场地上做游戏:甲先在场地中央画一个星号,乙则在放有星号的格子周围的 8 个方格中任选 1 个方格画一个圆圈.然后甲再在某个与已画有标记的格子挨着的空格中画一个星号,并一直继续下去.如果甲能成功地将星号画入场地四角的任何一个角上的方格中,就算他获胜.求证不论乙怎样做,甲总可以获胜.

(第 27 届莫斯科数学奥林匹克,1964 年)

[证] 甲先把星号画在中央方格,然后乙画圆圈.以后每次该甲画的时候,只要还无法画在角格,就在与乙刚画过圆圈的方格对称的方格中画星号.只要坚持这个原则,总有机会把星号画在某个角格中.

8·29 有 3×3 的方格棋盘和 9 张大小为一个方格的卡片,每张卡片上写有一个实数.甲乙二人轮流把这些卡片放到棋盘格子中去.在所有卡片放完之后,甲计算第一行与第三行的 6 个数之和,乙计算第一列与第三列的 6 个数之和,和数较大者获胜.试证当甲采取正确策略时,无论卡片上写有哪些数,乙都无法获胜.

(第 5 届全俄数学奥林匹克,1965 年)

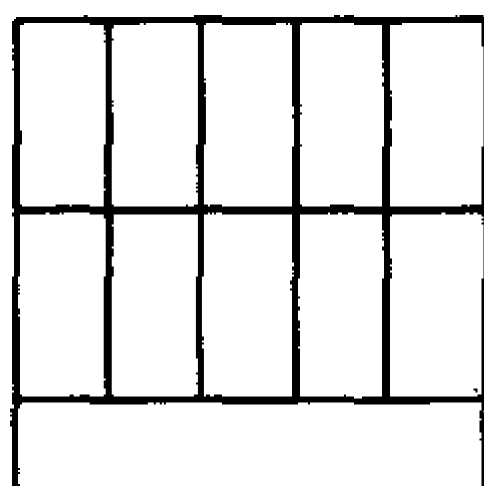
[证] 设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_9$ 是卡片上所写的数.如果 $a_1+a_9\geqslant a_2+a_8$,那么甲把 a_9 放到格子 1 中(见右图),而在第二次轮到甲时,他把 a_2(或 a_1)放到格子 2 或 3 中.如果 $a_1+a_9<a_2+a_8$,那么甲把 a_1 放到格子 2 中,而第二次把 a_9(或 a_8)放到格 1 或 4 中.这样一来,乙就无法取胜了.

	1	
2		3
	4	

8·30 甲乙二人在一个 5×5 的方格板上玩填数游戏:甲先且二人轮流在空格中填数,甲每次选择 1 个空格写上一,乙每次选择一个空格写上 0.填完之后计算每个 3×3 正方形中的 9 个数之和并将这些和数中的最大数记为 A.甲尽量使 A 增大,乙尽量使 A 减小.问甲可以使 A 取得的最大值是多少?

(第 35 届国际数学奥林匹克预选题,1994 年)

[解] 首先,将前 4 行的 20 个方格划分成 10 个 1×2 的矩形(见右图).显然,方格板上的每个 3×3 正方形中都恰含有上述 10 个矩形中的



3个.可见,乙只要在每个 1×2 矩形的两个方格之一中填上0,即可使 $A\leqslant 6$.每当甲在某 1×2 矩形的1个方格中填上1时,如果另一个方格空着,则乙就在其中写上0.便可得证每个 1×2 矩形中都至少有1个0.

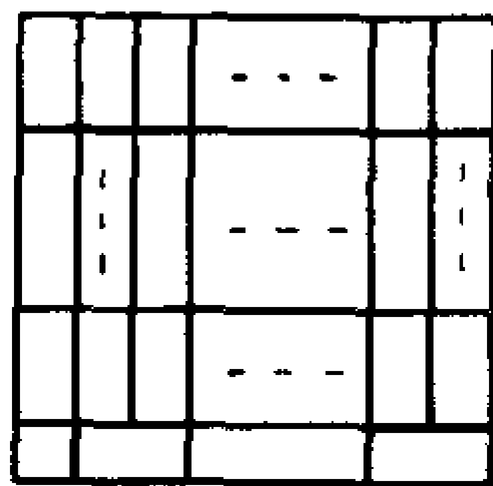
另一方面,甲可以使 A 值为6.甲首先在中心方格填上1,然后乙在某方格中填0.这时,或者第3行的另4个方格都空着,或者第3列的4个方格都空着,或者两组4个方格都空着.不妨设第3行的另4个方格都空着.于是甲第2次可在第3行第2列的空格中写上1,然后乙又在某空格中填上0.这时,第3行的第1,4两格至少有1个空格,不妨设为第1格.于是甲第3次可以在此格中写上1,然后乙又在某空格中写上0.这样一来,第3行的前3格中都是1,而整个方格板上共有3个0.考察方格板左上角和左下角的两个 3×3 正方形,其中必有1个正方形中至多有1个0,即至少还有5个空格,从而甲可以在其中再写上3个1而使 A 值至少为6.

综上可知,甲可以使 A 的最大值为6.

8·31　甲乙二人轮流在 25×25 的方格棋盘上放置棋子,甲执白先下,乙执黑,每颗新子都放于空格之中,但若一个空格的4个邻格(即有公共边的方格)已被同色棋子占领,则禁止于其中再放此种颜色的棋子.若轮到某人着棋时无处下子,则此人告负.问当双方都采用正确策略时,谁能获胜?

(第32届乌克兰数学奥林匹克,1992年)

[解]　甲胜.甲可以采取如下策略:第1步先将白子下在棋盘角上的1个方格中,然后将其余的方格划分成 1×2 的矩形(见图).以后,甲每步都将棋子下在乙所下的方格所在的矩形的另1个方格中.显然,只要乙有处可以下子,甲总可随之下子.所以,甲可以稳操胜券.



8·32　甲乙二人在无穷大的方格纸上做游戏.由甲开始,二人轮流在方格纸上标出1个结点,且保证使二人所标出的所有结点都落在某个凸多边形的顶点上(从甲第2次标点算起).如果轮到谁无法再按法则标下去时,谁就告负.问在双方均能正确选点时,谁能获胜?

(第42届莫斯科数学奥林匹克,1979年)

[解] 乙能获胜.乙可以在甲标定第1个结点后选定一个方格的中心作为对称中心,每次都选取甲刚刚标定的点的对称点标定.于是在两人各标定3点之后,得到一个中心对称的凸六边形的6个顶点.将六边形中每边的两条邻边延长,在六边形外得到一个与六边形以该边相邻的三角形,这样的三角形共有6个.显然,以后二人标定结点时,只能在这6个三角形内选点,而且每次甲标定点后,乙总有对称点可以标定.可见,进行有限步后,必然是甲首先以无点可标而告负.

8·33 甲乙二人轮流用凿子将一块有 $n\times n$ 个单位方格的木板凿穿,凿痕需自木板的边缘或自某个已被凿及的结点开始,每人沿网格线凿穿某单位方格的一条边.如果某人凿过之后使木板断开了,则判该人告负.如果甲先开始且都采用正确策略,谁将获胜?

(原苏联教委推荐试题,1991年)

[解] 显然,在木板边缘上及其内部,共有 $(n+1)^2$ 个结点.木板边缘上的结点或与凿痕相连的结点称为"已占"的,其他的结点称为未占的.当两个已占结点首次被凿痕沟通时,木板即会断开.因此,当轮到某人而不能找到任何一个未占结点时,他必然要负.由于游戏开始时共有 $(n-1)^2$ 个未占结点,所以只要双方的玩法都正确,则必然到第 $(n-1)^2+1$ 步时有人告负.因此,游戏的胜负由 n 的奇偶性所惟一确定.当 n 为奇数时,乙胜;当 n 为偶数时,甲胜.

8·34 两个女孩 *Eve* 和 *Odette* 在 3×3 的棋盘上用黑棋子和白棋子对局,规则如下:

Ⅰ.她们轮流下子.

Ⅱ.每轮到一次,就把一个棋子放在棋盘的空格上.

Ⅲ.棋手轮到时,可选一白子或黑子,且不必要总用同色.

Ⅳ.当棋盘填满的时候,某一行,列或对角线有偶数个黑棋子,*Eve* 就得到1分,而某一行,列或对角线有奇数个黑棋子,*Odette* 就得到1分.

Ⅴ.棋手至少得到8分中的5分才能算胜.

(1)4—4和局是否可能?说明之.

(2)叙述先下棋子的女孩的取胜策略.

(第10届加拿大数学奥林匹克,1978年)

[证] (1)4—4和局是可能的.

如图,第一行,第三行和第一列,第三列有偶数个黑棋子,*Eve* 得4

分,而第二行,第二列以及两对角线有奇数个黑棋子,Odette 得 4 分.

黑	白	黑
白	黑	白
黑	白	黑

(2) 如果有 0 或 2 个黑子的行,列和对角线的数目超过 4,Eve 就会得胜,如果有 1 或 3 个黑子的行,列和对角线的数目超过 4,Odette 就会得胜. 由于 Eve(黑)和 Odette(白)之间的对称性,只要考虑 Eve 先下棋子的情况就够了.

Eve 把一个黑子放在中心上,然后,不管 Odette 怎样下子,Eve 总是把不同色的棋子放在关于中心对称的方格上,这样,在她的后面 4 步中,每一步都保证有两条对角线之一或通过中心的行或列中有 2 个黑子,此外,至少还有另一行或另一列有 2 个黑子.

黑	1	白
	黑	
黑	2	白

事实上,试考虑游戏结局的棋盘,恰好有两角方格放两个黑子,这两个黑子不能在对角上. 因此,棋盘实质上实似如图的放法.

方格 1 和方格 2 恰好有一个放黑子,它所在的一行有偶数个黑子.

显然,棋的结局是 Eve 至少得 5 分.

8·35 甲乙二人在一张无穷大的方格纸上玩填符号的游戏. 甲先且二人轮流每次在一个空格中填上符号. 甲每次都填 ×,乙每次都填 ○. 如果能在一行,一列或平行于对角线的一条直线上的连续 11 个方格中都填上 ×,则甲胜. 求证乙总有办法阻止甲取胜.

(第 35 届国际数学奥林匹克预选题,1994 年)

3	3	2	2	4	1			1	4	3	3	2	2	4	1
2	2	3	3	4	1			1	4	2	2	3	3	4	1
4	1			1	4	3	3	2	2	4	1			1	4
4	1			1	4	2	2	3	3	4	1			1	4
1	4	3	3	2	2	4	1			1	4	3	3	2	2
1	4	2	2	3	3	4	1			1	4	2	2	3	3
2	2	4	1			1	4	3	3	2	2	4	1		
3	3	4	1			1	4	2	2	3	3	4	1		
		1	4	3	3	2	2	4	1			1	4	3	3
		1	4	2	2	3	3	4	1			1	4	2	2
3	3	2	2	4	1			1	4	3	3	2	2	4	1
2	2	3	3	4	1			1	4	2	2	3	3	4	1
4	1			1	4	3	3	2	2	4	1			1	4
4	1			1	4	2	2	3	3	4	1			1	4
1	4	3	3	2	2	4	1			1	4	3	3	2	2
1	4	2	2	3	3	4	1			1	4	2	2	3	3

[证] 将方格表周期地划分成 2×2 和 4×4 的正方形并在每个 4×4 的正方形中填数如右图所示. 我们把表中的下列 4 种已填数图形都称之为多米诺骨牌. 易见,无论是在横行,竖列,还

1	
1	

	2
2	

3	3

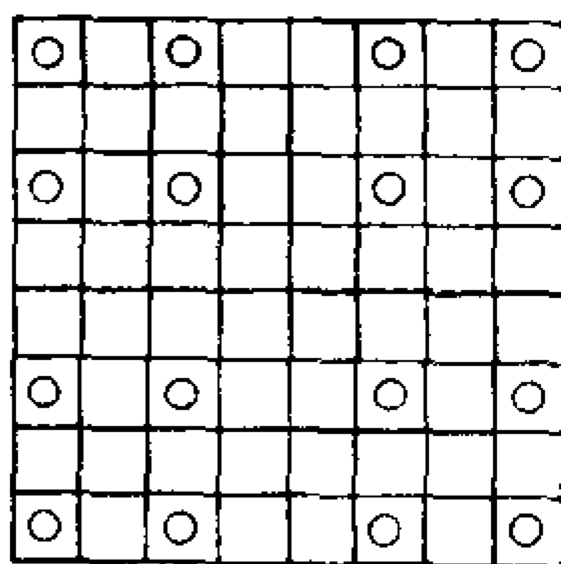
4	
	4

是在平行于对角线的直线上，任何连续 11 个方格中都含有一块多米诺骨牌. 因此，一旦甲在某块多米诺牌上的一个方格中划 ×，则乙就在另一方格中划 ○. 这样一来，甲就无法取胜了.

8·36　甲乙二人在一张 8×8 的方格纸上做游戏. 甲每次可将两个相邻(即有公共边) 的小方格涂黑，而乙则可将纸上任何一个小方格涂白(在游戏过程中，同一个方格可被反复涂色多次)，两人轮流涂色. 一开始时，所有方格都是白色的. 如果乙能在自己的每一次涂色后都使得：(a) 每个 5×5 的正方形中都至少有 1 个角上的方格是白色的，则判乙获胜；(b) 每个 5×5 的正方形中都至少有两个角上的方格是白色的，则判乙获胜. 问乙有无获胜的可能.

(原苏联教委推荐试题，1988 年)

[解]　(a) 乙可能获胜. 这张方格纸上共有 16 个不同的 5×5 的正方形. 我们在每个 5×5 的正方形中各选定 1 个角格并在格中画上小圆圈(如图所示). 由于这 16 个标有小圈的方格互不相邻，所以甲每次涂黑色至多能将这些方格中的 1 个方格涂黑. 轮到乙的时候，他只要把被甲刚刚涂黑的带圈方格(如果有的话) 重新涂白就行了.



(b) 甲可以使乙无法获胜. 因为图中共有 16 个不同的 5×5 的正方形，而且任何 1 个小方格都不同时是两个 5×5 正方形的角格. 因此，乙要想获胜，他就必须在每次涂色后至少应保持图中至少有 32 个白格. 而甲却有办法阻止乙实现这一目标. 例如，甲可以在自己的前 32 次涂色中涂遍 64 个方格每格一次. 而乙在相应的 32 次涂色中至多能使 32 个方格恢复为白色. 如果白格数少于 32 个，则乙已经无法获胜，故不妨设这时纸上恰有 32 个白格. 如果 32 个白格中有两个白格相邻，则甲只要将二者涂黑，就可使乙无法获胜. 如果任何两个白格都不相邻，则黑格与白格像国际象棋棋盘那样相间地分布. 但这将导致某些 5×5 的正方形的 4 个角格全是黑色的，乙也无法获胜.

8·37　甲乙二人在一张 19×94 的方格表上进行游戏. 每人每次可以涂黑一个以网格线为边的 $k\times k(1\leqslant k\leqslant19)$ 的正方形，但该正方形中不能有已被涂黑的部分，即每个小方格只能被涂黑一次. 甲先开始且二人轮流进行，谁涂黑了最后 1 个小方格，谁就获胜. 问在两人都正确

操作的情况下，谁有必胜策略？说明理由.

（第 57 届莫斯科数学奥林匹克，1994 年）

[解] 甲有必胜策略.

显然，矩形方格表的第47列与第48列之间的公共边为矩形的对称轴. 甲只要先把由第 39—56 列和上面 18 行的公共部分的 18×18 的正方形涂黑，则余下部分被对称轴分成左右两部分且任何一个正方形都或者在左半或者在右半. 因此，以后每次轮到甲时，只要将与乙刚刚涂黑的正方形轴对称的正方形涂黑就可保证必胜无疑.

8·38 甲乙二人在 8×8 的方格棋盘上玩“猫捉老鼠”的游戏. 甲用一棋子作为老鼠，乙有若干枚棋子，每枚当作一只猫. 所有棋子走法相同：可以向右，向左，向上或向下走一个格子. 如果老鼠已经走到棋盘的边格，则下一步它就可以跳出棋盘. 如果猫走进了老鼠所在的方格，它就可以将老鼠吃掉. 甲乙二人轮流走，但乙走时可以将所有的猫都走一步而且不同的猫可以向不同方向走. 老鼠先走，它设法跳离棋盘，而猫则设法吃掉老鼠.

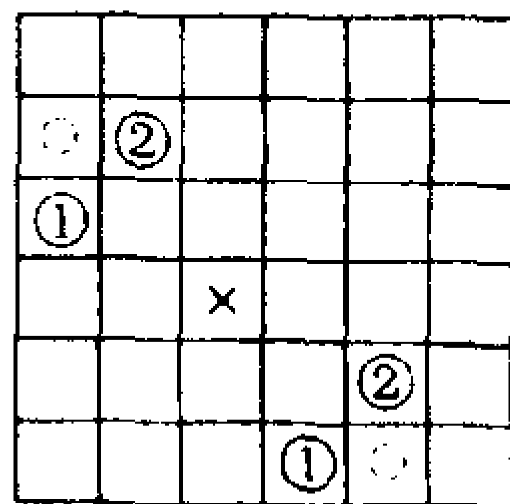
(1) 设老鼠被放在不是边格的某一格子中，问能否将两只猫放在棋盘边格中，使它们总能设法吃掉老鼠？

(2) 设在棋盘上有 1 只老鼠和 3 只猫，但老鼠开始的一次可连续走两步. 求证不论四枚棋子怎样摆放，老鼠总能躲开猫.

（第 8 届全苏数学奥林匹克，1974 年）

[解] (1) 过老鼠所在格的中心作一条平行于棋盘对角线的直线，它与棋盘边界相交处有两个边格，就将两只猫分别放在这两个方格中，于是三枚棋子成一条线，且老鼠在中间. 每当老鼠走一步时，两只猫也随之各走一步，总保持三枚棋子在一条直线上. 这样一来，老鼠就无法逃出猫的追捕范围.

进一步地，我们还可以安排猫的走法，使得每走一次，两只猫的距离都变近一些. 右图中的“×”表示老鼠，“○”表示猫. 如果老鼠向左或向下走一步，两只猫就分别走入两个标有 ① 的格子；如果老鼠向上或向右走一步，两只猫就分别走入标有 ② 的格子. 由于两只猫的距离越来越近，所以老鼠必然难逃猫口.



(2) 过老鼠所在方格的中心分别作两条平行于

对角线的直线，并去掉两条线上的方格，于是棋盘上剩下的方格分成 4 部分. 无论三只猫摆放在何处，4 部分中至少有一部分中没有猫. 老鼠就向这一方向连走两步. 这样一来，猫就再也追不上它了.

8·39 在 $n \times n$ 个方格的棋盘的角格中放有一枚棋子. 甲乙二人轮流把这枚棋子走到相邻的方格中去（相邻指有公共边）. 棋子不能第二次走入某一方格. 无法走棋的人为负方.

(1) 试证如果 n 为偶数，则先走的人能胜，如果 n 为奇数，则后走的乙胜.

(2) 如果开始时棋子不在角上的方格中，而在与它相邻的一个方格中，那么谁将获胜？

（第 12 届全苏数学奥林匹克，1978 年）

［证］ (1) 如果 n 为偶数，则可以把整个棋盘划分成若干个 1×2 的小矩形. 甲可以奉行如下策略：当棋子在某个 1×2 小矩形的一个方格中时，便把它走到另一个方格中去. 这样，轮到乙走时，只能把棋子走到一个新矩形中去，所以，甲必胜.

如果 n 为奇数，则乙可以把除放有棋子的角格之外的所有方格划分成若干个 1×2 的矩形，并采用前面甲用过的策略即可获胜.

(2) 当 n 为偶数时，甲采用(1)中的策略即可获胜. 当 n 为奇数时，将方格像国际象棋棋盘那样黑白相间地染色. 设 4 个角格都是白格，于是整个棋盘上白格多一个. 现在棋子在黑格中，因而每一步甲都将棋子走入白格，而乙则总是将棋子走入黑格. 于是甲只要把角格去掉的其余部分划分成 1×2 的矩形即可获胜. 总之，在这种情况下，先走的甲总能获胜.

8·40 甲乙二人在 1994×1994 的棋盘上轮流移动一枚棋子. 甲只能将棋子横向移动到邻格中，乙只能纵向将棋子移动到邻格中，但双方都不能将棋子移进它已经到过的方格中. 轮到谁时无法再移动棋子，谁就告负. 甲先将棋子随意放入一个方格，并由此开始移动第一步，求证甲有必胜策略.

（第 20 届全俄数学奥林匹克，1994 年）

［证］ 因为走棋的不同路线只有有限多种，所以游戏必有胜负，即甲乙双方必有一方有必胜策略. 如果甲没有制胜策略，则无论甲怎样走棋，乙都会采用正确的走棋法而取胜.

下面我们来研究在两副棋盘上进行的两个游戏.在棋盘 Ⅰ 上进行的是原来的游戏.设甲将棋子放入方格 x 并在第 1 步走到邻格 y.然后轮到乙走棋.在第2副棋盘上,甲将棋子放入方格 y,并且每步都照搬乙在棋盘 Ⅰ 上的走法.这时,两个棋盘上仅有的不同是棋盘 Ⅰ 上棋子已经到过方格 x,不能再走进去.而棋盘 Ⅱ 上棋子未到过方格 x,允许在某一步将棋子走入 x 方格.注意,按国际象棋棋盘上黑白相间涂色而言,乙每次都只能将棋子走入与 y 格同色的方格.因 y 与 x 相邻,故 y 与 x 异色,所以乙不能将棋子走入方格 x.甲在棋盘 Ⅱ 上模仿乙在棋盘 Ⅰ 上的走法,当然也不会走入方格 x.因而甲在棋盘 Ⅱ 上的走法确实可以进行到底.既然乙定会在棋盘 Ⅰ 上取胜,所以甲定会在棋盘 Ⅱ 上取胜.但当将棋盘 Ⅱ 旋转 90° 来看时,完全满足题中要求.这表明甲有必胜策略,矛盾.从而甲有必胜策略.

8·41　在 19×93 的矩形方格纸的左下角的方格中放有一枚棋子.甲乙二人进行如下的游戏:甲先且二人轮流移动棋子,每次可将棋子向上移动若干个方格或向右移动若干个方格,最后无法移动棋子者为负方.问谁有必胜策略?说明理由.

(第 20 届全俄数学奥林匹克,1993 年)

[解]　甲有必胜策略.

甲只须第 1 步将棋子向右走到第 75 列的最下方的方格中,即方格纸的最右方的 19×19 的正方形的左下角的方格.

考察这个正方形从棋子所在的左下角到右上角的对角线 l.轮到乙走时,他必然将棋子走离对角线 l.然后甲再把棋子走回到对角线 l 穿过的方格中来.按照这个原则,乙每走一步都必将棋子走离对角线 l,从而甲每次都可将棋子走到对角线 l 上来.经若干次后,甲必然能将棋子走到右上角的方格中,从而乙因无法再走而告负.

8·42　设甲有一条长为 k 的线段,乙有一条长为 l 的线段.甲先将自己的线段分成 3 段,然后乙也将自己的线段分成 3 段.如果可用分得的 6 条线段组成两个三角形,则乙胜;否则甲胜.问甲乙二人谁能根据比值 $\frac{k}{l}$ 的大小保证自己获胜?他该如何进行?

(第 57 届莫斯科数学奥林匹克,1994 年)

[解]　(1) 设 $\frac{k}{l}>1$,即 $k>l$,这时甲有必胜策略.甲可以将长为

k 的线段分成 3 段，长度分别为 k_1,k_2,k_3 且使 $k+l<2k_1<2k$. 于是 $(k-k_1)+l<k_1$，即 $k_2+k_3+l<k_1$. 由此可知，乙无论怎样将他持有的线段分成 3 段. 除 k_1 之外的 5 条线段中的任何两条的长度之和都小于 k_1. 所以无法与长为 k_1 的一条线段组成三角形. 甲胜.

(2) 设 $k\leqslant l$. 甲将长为 k 的线段分成 3 段，长度为 $k_1\leqslant k_2\leqslant k_3$. 然后乙先从自己持有的线段上截取长为 l_3 的线段，使 $k_2\leqslant l_3<k_2+k_3$. 于是 k_2,k_3 和 l_3 可组成一个三角形. 这时乙手中线段余下部分的长度大于 k_1，于是只要把余下部分均分为二即可与 k_1 一起组成三角形. 从而乙获胜.

8·43　设在平面上给定一个正 1968 边形. 甲乙二人按照如下法则轮流用线段去连结多边形的顶点：两个顶点中若至少已有一点与其他顶点连结起来，则不能再将此二顶点连结；连结两点的线段不得与已有线段相交，不能再按此法则继续进行下去者为负. 问甲乙二人(甲先)谁有必胜策略?他该怎样连线?

(第 31 届莫斯科数学奥林匹克，1968 年)

[解]　甲有必胜策略. 他第一次应过中心引一条对角线将相对两个顶点连结起来，于是把正多边形分成了对称的两部分. 然后乙只能在分出的某一部分中选两个顶点连一条线段. 接着，甲则在另一部分中连出关于所连的对角线与乙所连的线段对称的线段. 并且以后每次轮到甲时总按这一原则办事. 显然，甲不会负.

8·44　给定一个凸 n 面体，$n\geqslant 5$，每个顶点恰好引出 3 条棱. 甲乙二人玩下面的游戏：二人轮流在多面体的一个尚未签名的面上写上自己的名字，谁先把自己的名字签在具有公共顶点的某 3 个面上，谁就获胜. 求证先写者有必胜的策略.

(罗马尼亚数学奥林匹克，1978 年)

[证]　首先证明，给定的多面体至少有 1 个面是边数不少于 4 的多边形. 若不然，则它的 n 个面都是三角形. 因为每个面有 3 条棱，每条棱属于两个面，所以多面体共有 $\frac{3n}{2}$ 条棱. 又因每个面有 3 个顶点，每个顶点恰属于 3 个面，所以多面体共有 n 个顶点. 于是由欧拉定理有

$$n+n-\frac{3}{2}n=2.$$

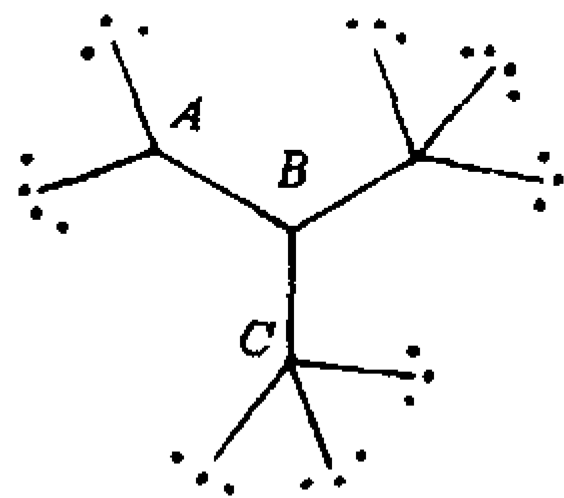
解得 $n = 4$,此与已知矛盾.

下面给出先写者甲的必胜策略:按上段证明,凸 n 面体上有 1 个面是边数不少于 4 的多边形 A_1,甲第 1 步在 A_1 上写上自己的名字.轮到乙时,他至多能在与 A_1 相邻的 1 个面 A_2 上签上自己的名字.这时,与 A_1 相邻的面至少还有 3 个:A_3, A_4, A_5.设 A_1 与 A_2, A_3, A_4, A_5 的公共棱分别为 l_2, l_3, l_4, l_5.设 l_4 与 l_2 没有公共端点.甲第 2 步在面 A_4 上签上自己的名字.这样一来,无论乙怎样签名,甲第 3 次总可在面 A_3 和 A_5 之一上签上自己的名字并获得胜利.

8·45 在一张纸上标定 1993 个点,其中某些点对之间连有互不相交的线段,这些线段中的任何一组都不形成闭折线.甲乙二人轮流在所标定的点上摆放棋子,但要求除甲放的第 1 枚棋子之外,每枚棋子都放在前一枚棋子的相邻的点上(有线段相连的两点称为相邻的).首先无法摆放棋子者负,求证甲有必胜策略.

(圣彼得堡数学选拔考试,1993 年)

[证] 设甲首先把棋子放在点 A,这时乙有必胜策略——将棋子放在点 B.我们考察如下方案:甲第 1 步将棋子放在点 B.若乙将棋子放到点 $C \neq A$ 时,乙有必胜策略,则原来乙将棋子放在 B 时,甲只要在下一步将棋子放在点 C 就可获胜.所以,当 A 将棋子放在点 B 时,乙只能将棋子放在点 A.这就是说,点 A 和 B 配成一对,甲第 1 步将棋子放在其中一点,乙第 2 步总是把棋子放在另一点.当甲第 1 步将棋子放在点 $A_1 \notin \{A, B\}$ 时,又可像上面一样地找到点 B_1,使 $\{A_1, B_1\}$ 配成一对.但总点数 1993 为奇数,故至少有一点无法像上面那样配成对,所以 A 总有必胜策略.



8·46 甲乙二人轮流在国际象棋棋盘的方格上放棋子"象":甲先进行且每次放一枚白象,乙每次放一枚黑象.每次都只能放在空格中,既可放在白格也可放在黑格中,但应保证所放的象不能被对方吃掉.首先无法按要求放置棋子者负,问在正确的策略之下,谁将获胜?说明理由.

(第 16 届全俄数学奥林匹克,1990 年)

[解] 乙将获胜.将正方形棋盘的一条中位线取为对称轴,乙只要每次都把自己的黑象放在与甲刚刚所放的白象所在的方格轴对称的

方格中即可稳操胜券.

8·47　甲乙二人轮流在国际象棋棋盘的方格上放棋子"马":甲先进行且每次放一枚白马,乙每次放一枚黑马.每次都只能放在空格中,既可放在白格中也可放在黑格中,但应保证所放的马不能被对方吃掉.首先无法按要求放置棋子者负,问在正确的策略之下,谁将获胜?说明理由.

(第16届全俄数学奥林匹克,1990年)

[解]　乙将获胜.乙只要每次都把黑马放在与甲刚刚所放的白马所在的方格关于棋盘中心对称的方格中即可稳操胜券.这时,黑马与白马在同色格中,当然不致被吃掉.

8·48　在国际象棋棋盘上放有若干枚棋子,在每一步中,可将1枚棋子走入相邻(沿水平方向或竖直方向)的空格中.经过若干步之后,每一枚棋子都到过棋盘上每个方格恰好一次,并且又都回到了原来出发的方格中.求证必有某一时刻,所有的棋子都不在自己原来的方格中.

(圣彼得堡数学奥林匹克,1988年)

[证]　考察第1个回到原位的棋子A.我们断言,在A走出自己的最后一步之前的状态中,每枚棋子都不在自己的原位.事实上,这时每枚棋子都至少走了一步,否则A无法走过它们所在的方格.另一方面,这些棋子又都未走回原位,否则A就不是第1个回到原位的棋子了.因此这时所有棋子都不在自己的原位.

8·49　在国际象棋棋盘的方格$a1$中放一只白马.甲乙二人用胶水涂抹这个棋盘,一人一个方格轮流涂抹.他们在涂胶后,应能保证马能跳入(马按照通常的国际象棋规则跳动)任何未涂胶水的方格,而在跳动中不被粘住.由甲先开始进行,首先无法按要求进行下去者为负.问在正确策略下,谁将获胜?

(第32届莫斯科数学奥林匹克,1969年)

[解]　甲将获胜.由规则知,只要棋盘上还有未涂胶的方格,总可以从中选一个马需要跳最多步数才能到达的方格,显然,将这个方格涂胶就符合要求.但棋盘上除了白马所占的方格外有63个方格,最后一个方格必是甲来涂胶,所以乙必输无疑.

8·50　一个国际象棋棋盘有3×1969个方格,白车在棋盘上追击黑马(它们按通常的国际象棋规则轮流走步).为了吃掉黑马,白车应当

如何走步？

（第 32 届莫斯科数学奥林匹克，1969 年）

［解］ 白车应首先走入中间一行方格中，然后一步走到与黑马成象步的位置，即在与黑马相邻一列的中间方格中，并且每步都按这个原则走步. 这样一来，黑马只能步步后退，最后退无可退，只能送上门来被白车吃掉.

8·51 一个国际象棋棋盘有 3×1969 个方格，白车在棋盘上追击黑象（它们按通常的国际象棋规则轮流走步）. 为了吃掉黑象，白车应当如何走步？

（第 32 届莫斯科数学奥林匹克，1969 年）

［解］ 白车应首先走入中间一行方格中，然后一步走到与黑象成马步的位置，即与黑象中间隔一列的位置. 这样一来，黑象只能朝向远离白车的方向走，而白车每次都跟上并仍然保持与黑象成马步的位置. 黑象退来退去，最后无路可走，只好送上门来被白车吃掉.

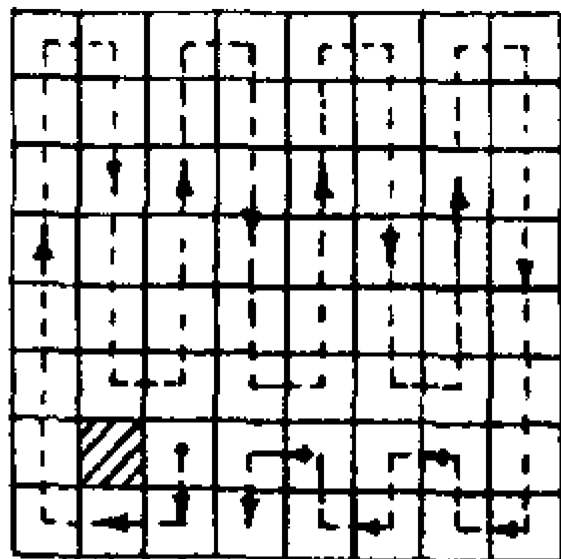
8·52 在 8×8 的国际象棋棋盘的某个方格中放一枚棋子，甲乙二人轮流将它移动到另一个从未到过的方格中，且使每次移动的距离都大于前一次移动的距离. 首先无法走棋者负. 在两名棋手都采用正确策略时，谁能获胜？

（中国国家集训队训练题，1990 年）

［解］ 甲先走必能获胜. 注意，8×8 方格棋盘的对称中心是结点. 于是，甲第 1 步可将兵移到关于棋盘中心对称的方格中去. 而且无论乙如何走，甲每次总按对称的原则走棋，则只要乙有棋可走，甲便有棋可走. 这样，甲便稳操胜券.

8·53 从国际象棋棋盘中挖去：(a) 方格 $b2$；(b) 方格 $b2$ 和 $g7$. 如果允许棋子在每一步可由所在方格走到一个（有公共边的）邻格中，问棋子能否自方格 $c2$ 出发，走遍每个方格都恰好一次？

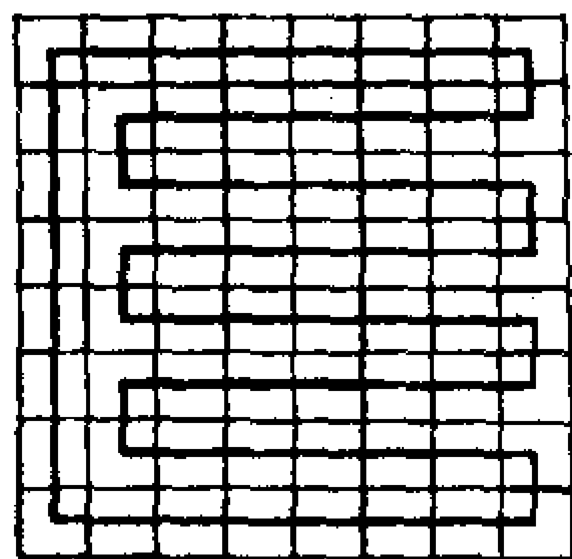
（第 18 届全俄数学奥林匹克，1992 年）



［解］ (a) 可以；(b) 不能. 当挖去方格 $b2$ 时，可按右图所示的路线走遍所有方格且每格 1 次. 当棋盘挖去方格 $b2$ 和 $g7$ 时，棋盘上白格比黑格多 2 个. 而棋子在行进过程中，总是交替地走过白格与黑格，故这时无法按题中要求走遍所有方格.

8·54　试证国际象棋中的车可以走遍全盘，经过每个方格恰好一次，然后回到出发处的充分必要条件是棋盘的方格数目为偶数.

（第 24 届莫斯科数学奥林匹克，1961 年）



［证］　当方格数目为偶数时，不妨设行数为偶数. 作为棋盘，当然不能只有 1 列方格. 当列数为 2 时，矩形回路即为所求. 当列数不小于 3 时，即可按上图所示的路线来走. 这就证明了充分性.

为证必要性，只须注意，车按要求走出的封闭折线的每边都是水平的或竖直的，因而它所经过的方格数必为偶数，亦即棋盘中的方格数必为偶数.

8·55　设 n 为大于 2 的偶数. 用 $\frac{n^2}{2}$ 种颜色为 $n\times n$ 的国际象棋棋盘上的方格涂色，每个方格涂 1 种颜色，每种颜色恰涂两个方格. 试证可以在棋盘上放置 n 个车，使得它们所在的 n 个方格的颜色互不相同，且 n 个车不能相互攻击.

（匈牙利数学奥林匹克，1981 年）

［证］　若不然，则对任意一种使 n 个车互相不能攻击的摆法中，总有两个车所在的方格同色. 因为摆在同色方格上的一对车至多有 $\frac{n^2}{2}$ 种不同摆法，余下的 $n-2$ 个车有 $(n-2)!$ 种不同摆法. 从而 n 个车的符合要求的摆法至多为 $\frac{n^2}{2}(n-2)!$. 另一方面，n 个车不能互相攻击的摆法总数应为 $n!$，故得

$$\frac{n^2}{2}(n-2)!\geqslant n!.$$

解得 $n\leqslant 2$，此与已知矛盾.

8·56　国际象棋棋盘的左下角方格 $a1$ 中有一枚棋子车. 每移动一次，车可沿水平或竖直方向挪动 1 格. 问车能否走遍棋盘的所有方格，且到过 64 个方格的次数恰好分别为 1，2，…，64. 并且最后

(1) 又回到了原出发的方格 $a1$?

(2) 在方格 $a2$ 中结束行程?

（最初在方格 $a1$ 中，也算作是到过该方格 1 次.）

（第 15 届全俄数学奥林匹克，1989 年）

[解] (1)不可能回到原出发的方格 $a1$.如果最后回到方格 $a1$,则车所走的路线是封闭的,从而沿水平方向和竖直方向的移动次数都是偶数,所以移动的总次数为偶数.

另一方面,按已知,到达棋盘上各个方格的总次数等于

$$1+2+\cdots+64=2080$$

为偶数.但在开始时,车已在方格 $a1$ 中1次,因此还要再移动2079次,为奇数,矛盾.

60	59	52	51	44	43	16	15
61	58	53	50	45	42	17	14
62	57	54	49	46	41	18	13
63	56	55	48	47	40	19	12
64	35	36	37	38	39	20	11
33	34	29	28	25	24	21	10
32	31	30	27	26	23	22	9
1	2	3	4	5	6	7	8

(2)可以在方格 $a2$ 中结束行程.将棋盘上的64个方格分别编号为1,2,…,64如右图所示.当车从第 k 号方格开始,依次走过方格 $k+1,k+2,\cdots,m-1$,最后到达 m 号方格时,我们把这条路线记为 $k\longrightarrow m$.返回来的路线则记为 $m\longrightarrow k$.考察如下的路线:

$$1\longrightarrow 64\longrightarrow 1\longrightarrow 63\longrightarrow 2\longrightarrow 62\longrightarrow 3\longrightarrow 61\longrightarrow 4$$

$$\cdots\longrightarrow 30\longrightarrow 34\longrightarrow 31\longrightarrow 33\longrightarrow 32.$$

不难验证,对于满足关系式 $1\leqslant k\leqslant 32$ 的第 k 号方格,车到过 $2k$ 次;对于满足关系式 $33\leqslant m\leqslant 64$ 的第 m 号方格,车到过 $129-2m$ 次.此外,车最后到达的32号方格恰为 $a2$.这表明这条路线满足题中全部要求.

8·57 设9枚棋子放在 8×8 的国际象棋棋盘的左下角,每格一枚组成一个 3×3 的正方形.规定每枚棋子可以跳过他邻格中的另一枚棋子到一个空着的方格,即可以关于它的有棋子的邻格中心作对称运动(可以横跳,竖跳或沿对角线斜跳),要求这些棋子都跳到棋盘的另一角,且仍然构成 3×3 的正方形.如果到达的角是:(1)左上角,(2)右上角,这一要求能否实现?

(中国国家集训队训练题,1990年)

[解] 均不能实现.将棋盘上的行自下而上编号,列自左而右编号为1,2,…,8.第 i 行 j 列的方格记为 (i,j).

考察9枚棋子的纵坐标之和 S.一方面,某枚棋子跳一次,和 S 增加2(竖跳或斜跳)或0(横跳).因而,在棋子跳动过程中,和 S 的奇偶性不变.另一方面,如果它们能跳到左(右)上角的 3×3 正方形中,和 S 将

增加 45,即奇偶性将发生改变,矛盾.这表明题中的两个要求都是无法实现的.

8·58　甲乙二人在一张 1×100 个方格的纸带上进行游戏:在最左端的方格中放有 1 枚棋子,每步可将棋子向右移动 1 格,10 格或 11 格.甲乙二人轮流执步,甲先走,一直到某人无法按要求继续执步为负.试问若两人均按正确的方式执步,谁能获胜?

(原苏联教委推荐试题,1991 年)

[解]　自左至右依次将方格编号为 $1,2,\cdots,100$.对于一个方格,如果由它出发必可取胜,则称之为"胜格";如果由它出发必然告负,则称之为"负格".显然,如果由某方格出发只能落入胜格,则该方格为负格;如果由某方格出发至少可以落入一个负格,则该方格为胜格.易见,第 100 号方格是负格.因此,第 99 号方格是胜格,第 98 号方格是负格,如此交替为胜格与负格,直至第 91 号方格为胜格.第 81—90 号方格都是胜格,因为从它们中每一格出发都可移动 10 或 11 个方格而进入最后 10 格中的某个负格.类似地可知,第 71—80 号的 10 个方格中,偶数号为负格而奇数号为胜格;而第 61—70 号的 10 个方格都是胜格.依此类推可知,第 1 号方格为胜格.因此,甲先走必能获胜.

8·59　将 $1\times n$ 的矩形分成 n 个方格并依次编号为 $1,2,\cdots,n$.在编号为 $n-2,n-1,n$ 的 3 个方格中各放 1 枚棋子.甲乙二人玩如下的游戏:甲乙二人轮流走棋且甲先走,每一步可以把 3 枚棋子中的 1 枚移到号码较小的空格里.最先无法走棋者为负.求证甲有必胜策略.

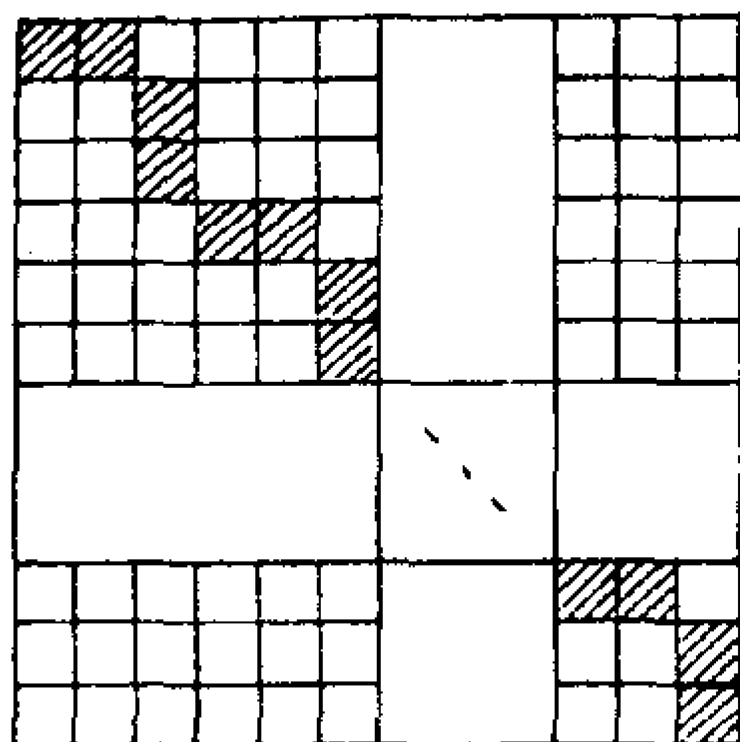
(前南斯拉夫数学奥林匹克,1983 年)

[证]　从第 2 个方格起,将 $(2k,2k+1)$ 的两个方格分为 1 组,共分 $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ 组.显然,位于 $n-2,n-1,n$ 号方格中的 3 枚棋子中总有两枚是在同一组方格中.甲第 1 步即将不同组的第 3 枚棋子移到 1 号方格中,于是这枚棋子不能再走.然后,无论乙把另两枚棋子中的 1 枚移到哪个方格,甲总是把另 1 枚棋子移到与前枚棋子所在方格同组的另一个方格中.这样,乙走棋之后,甲总有棋可走,故甲稳操胜券.

8·60　最多能在 $3n\times3n$ 的国际象棋棋盘上放置多少个"车",使得每个车至多受到另外一个车的攻击?

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1975 年)

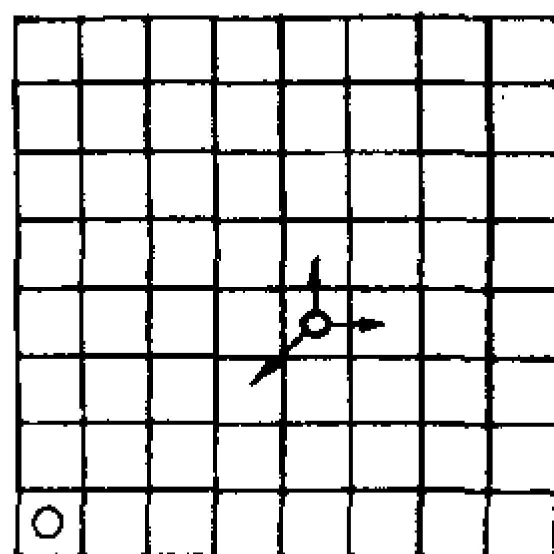
[解] 在棋盘上取沿主对角线排列的 n 个 3×3 的正方形，并在每个正方形中于画有阴影线的4个方格中各放置1枚“车”，则棋盘上共有 $4n$ 个车(如图所示)，且每个车恰受到另外一个车的攻击. 可见，所求的最大值不小于 $4n$.



另一方面，设棋盘上每个车至多受到另外一个车的攻击. 如果某个车不受任何车的攻击，则它自己独占棋盘的一行一列，即它所在的行和列中再无其他的车. 如果车 A 受到车 B 的攻击，则车 B 也受到车 A 的攻击，且二车不再受到其他车的攻击. 因此，二车占据2行1列或1行2列. 因棋盘上共有 $3n$ 行和 $3n$ 列，故至多可放置 $4n$ 个车.

综上可知，棋盘上最多可放 $4n$ 个车.

8·61 在 8×8 的国际象棋棋盘上放有1枚棋子，它每一步只能向上，向右或向左下方走1个方格(如图所示). 这枚棋子如果从左下角的方格出发，能否走遍棋盘上的所有方格且每个方格恰好经过1次?



(前南斯拉夫数学奥林匹克，1983年)

[解] 将棋盘上的方格的行从下到上依次编号为0,1,2,…,7，将列从左到右依次编号为0,1,2,…,7. 并将每个方格对应于它所在的行数与列数之和 x. 于是棋子的初始位置是 $x=0$，而棋子每走1步 x 的值要么增加1，要么减少2. 因此，模3看来，棋子所在方格的 x 值依次为0,1,2,0,1,2,….

		3			3		
3			3			3	
	3			3			3
		3			3		
3			3			3	
	3			3			3
		3			3		
○			3			3	

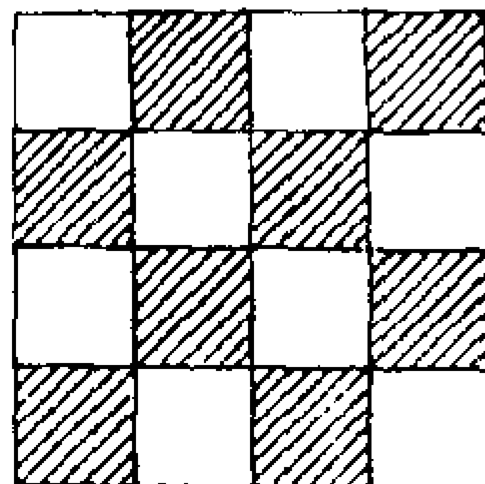
如果棋子能走遍每个方格恰好1次，则可按棋子走过的次序将除初始方格之外的其余63个方格分成21组，每组3个方格，其中恰有1个方格对应的 x 值为3的倍数. 从而应有21个这样的方格. 但棋盘上只有20个这样的方格，即图中标有3的20个方格，矛盾. 可见，题中所要求的走法是不能实现的.

8·62 试证在 4×4 个方格的国际象棋棋盘上，马不能走遍整个棋

盘,使得每个方格都恰好经过一次.

(第22届莫斯科数学奥林匹克,1959年)

[证] 因为国际象棋棋盘上的方格是黑白相间的,而马每跳一步都是从 2×3 矩形的一个角格跳到相对的角格,所以,马每跳一步都是从一种颜色的格子中跳到另一种颜色的格子中.不妨设马经奇数步跳到的格子是白色的.



另一方面,我们将棋盘上的16个方格分成两组:第1,4两行的8个方格为 A 组,第2,3两行的8个方格为 B 组.显然,当马从 A 组的某一方格中跳出时,一定落在 B 组方格之中.若能实现题中所要求的走法,则因 A,B 两组中方格数相等,故当从 B 组方格跳出时,也必落到 A 组方格中.因此,经过奇数步跳之后,马总是落在同一组方格之中.但无论 A 组还是 B 组,其中都不全是白格,矛盾.可见,所要求的走法是不能实现的.

8·63 在 12×12 的超级国际象棋棋盘上,一枚超级马每步从 3×4 方格矩形的一角跳到对角方格中.问超级马能否从某一格出发遍历每格一次,然后又回到出发点?

(第26届国际数学奥林匹克候选题,1985年)

[解] 因为国际象棋棋盘上的方格是黑白相间的,所以超级马每跳一次都从一种颜色的方格跳到另一种颜色的方格中.不妨设超级马经奇数步跳到的方格是白色的.

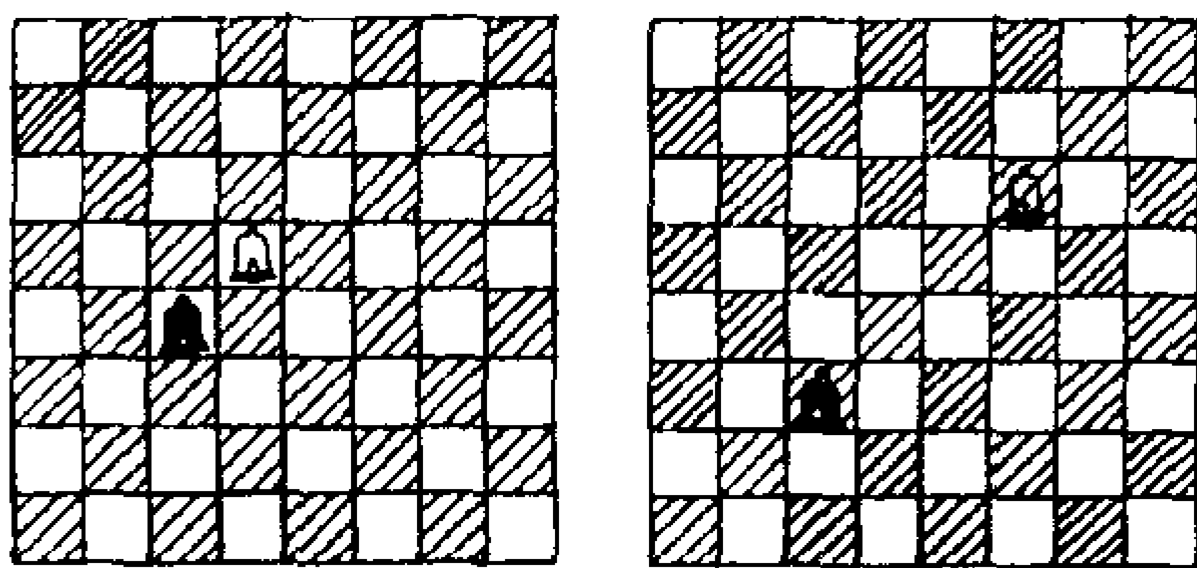
将 12×12 棋盘的第1,2,6,7,11,12这6行方格划归 A 组,而其余的6行方格为 B 组.显然,由 A 组格中出发跳一步,一定落到 B 组方格之中.又因 A,B 两组方格数相等,所以,若能实现题中所要求的跳法,则从 B 组方格中跳出时,超级马必落入 A 组的方格中.因此,奇数步跳之后,马总是落在 A 组(或 B 组)方格中.但无论 A 组还是 B 组,其中都不全是白格,矛盾.这意味着题中所要求的跳法是不存在的.

8·64 黑白两方进行如下的游戏:在国际象棋棋盘的两个角格中放有双方的"王",其中白王位于方格 $a1$ 中,黑王位于方格 $h8$ 中.游戏者轮流走步(白方先走),双方都可以把自己一方的王随意走到任何一个相邻的空格之中(相邻指有公共顶点),但必须遵守一条法则,即不得增加两枚棋子之间的距离(两枚棋子之间的最少步数称为二者的距离,

因而在游戏之初,二者之间的距离为7).谁能将自方的棋子走到棋盘相对的一边(白王走到 h 列或第8行中,黑王走到纵列 a 或第1行中),就算获胜.问在正确的对弈中,谁能获胜?他该怎样走棋?

(第31届莫斯科数学奥林匹克,1968年)

[解] 白方先走可以取胜.取胜的正确策略是首先按路线 $a1\longrightarrow b1\longrightarrow c1\longrightarrow\cdots$ 移动白王,直到黑王离开第8行(如果黑王不离开第8行,则白方将在第7步获胜).当黑王从第8行走出后,白王应及时抢占适当位置,使得两王之间的行和列的数目均为偶数,然后每次都按照这种原则走棋并尽可能向黑王逼近.易见,或迟或早在黑方执步时双方会处于下图所示的两种情形之一.此后黑方只能背离自己的目标向上或向右运动,这表明白王拖住了黑王而必然取胜.

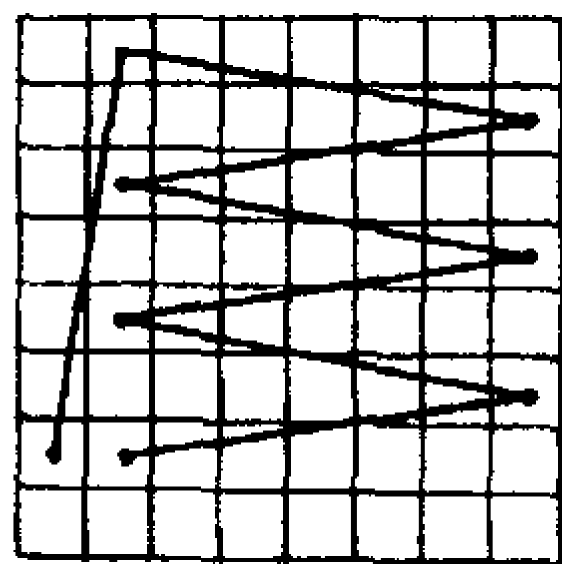


8·65 假定国际象棋中的马每走一步,可在水平方向移动 n 个方格而在竖直方向移动1个方格(或者水平方向1格而竖直方向 n 格).现有一只马位于无限大的国际象棋棋盘的一个方格中.试问对怎样的自然数 n,马可以走到任何指定的方格之中,而对怎样的 n 则无法作到?

(第25届莫斯科数学奥林匹克,1962年)

[解] 将马所在的方格记为(0,0),将这个方格右数第 i 列,上数第 j 行的相交方格记为 (i,j),自然,左数和下数用负数表示.

当 n 为奇数时,$\pm n\pm 1$ 为偶数,所以马跳一步时,起点与终点方格两个坐标之差的和总是偶数.所以,当马从(0,0)起跳时,无论跳多少步,它所在的方格的两个坐标之和为偶数.从而知马不能跳到坐标之和为奇数的方格中.



当 n 为偶数时,可按右图所示去跳,跳 $n+1$ 次之后,即回到原出发方格的邻格:

$$(0,0)\longrightarrow(1,n)\longrightarrow(n+1,n-1)\longrightarrow(1,n-2)\longrightarrow(n+1,n-3)\longrightarrow(1,n-4)\longrightarrow\cdots\longrightarrow(n+1,1)\longrightarrow(1,0).$$

既然从一格出发可以跳到它的邻格,当然可以跳到任一指定的方格.

综上可知,当且仅当 n 为偶数时,马可以跳到任何指定的方格.

8·66　在 8×8 国际象棋棋盘上的第1行的8个方格中各放上1枚白棋子,在第8行的8个方格中各放上1枚黑棋子.按如下规则进行游戏:白方先走,黑白双方轮流沿竖列走自己一方的棋子,每一步让1枚棋子沿竖列前进或后退1格或若干格,既不能从棋盘上取下棋子,也不能把棋子放进对方棋子所占据的方格或越过对方棋子.最先不能走棋者为负.求证黑方有必胜策略.

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1974年)

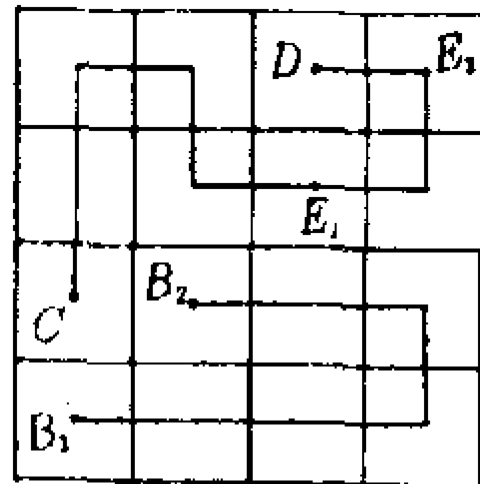
[证]　将棋盘分成4部分,每部分由两列方格组成.不论白方在哪一部分走棋,黑方总是在同一部分中应招.这样,如果黑方能在每一部分都剥夺白方行棋的机会,则白方必负无异.于是只须给出在一部分中黑方取胜的策略就行了.

如果白方让1枚白子前进 k 格,则黑方让另一列中的黑子前进 k 格;如果白方让白子后退 m 格,则黑方让同一列中的黑子前进 m 格.易见,白方每走一步,黑方总是有棋可走,即黑方不会负.另一方面,黑方每步都是前进,故在有限步后,白棋就无处可走了,即白棋必负.

8·67　在国际象棋棋盘上取定两个颜色相同的小方格.试证车能够从第1个方格出发,走遍棋盘上所有方格各一次而经过第2个取定方格两次.

(第24届莫斯科数学奥林匹克,1961年)

[证]　(1) 先证在 4×4 棋盘上结论成立.用过棋盘中心的十字线将 4×4 的正方形棋盘划分成4个 2×2 的正方形 Q_1,Q_2,Q_3,Q_4.不妨设两个取定黑格分别在 Q_2 和 Q_4 中.于是路线起点为 B_1 或 B_2,终点为 E_1 或 E_2.在图(a)中,若起点为 B_1,则将 B_2 与 C 连结;若起点为 B_2,则将 B_1 与 C 连结.若终点为 E_1,则将 D 与 E_1 连结;若终点为 E_2,则从方格 D 再走回 E_2.易见,这样的路线满足题中要求.其他情形都可类似地解决.

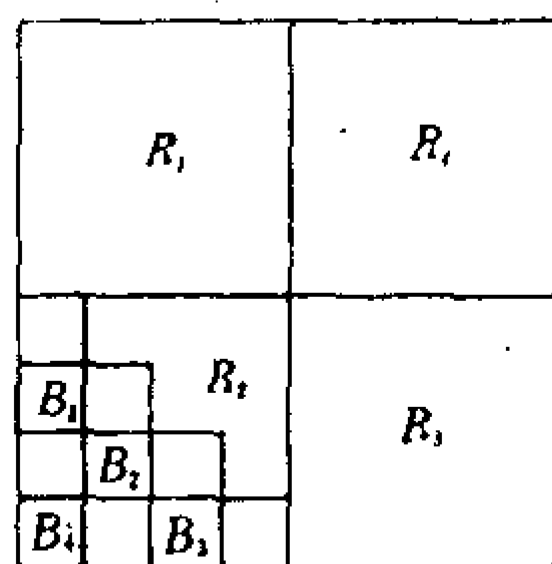


(a)

(2) 把 8×8 的棋盘用过中心的十字线划分成4个 4×4 的正方形 R_1,R_2,R_3,R_4.不妨设给定的两个方格都是黑格.

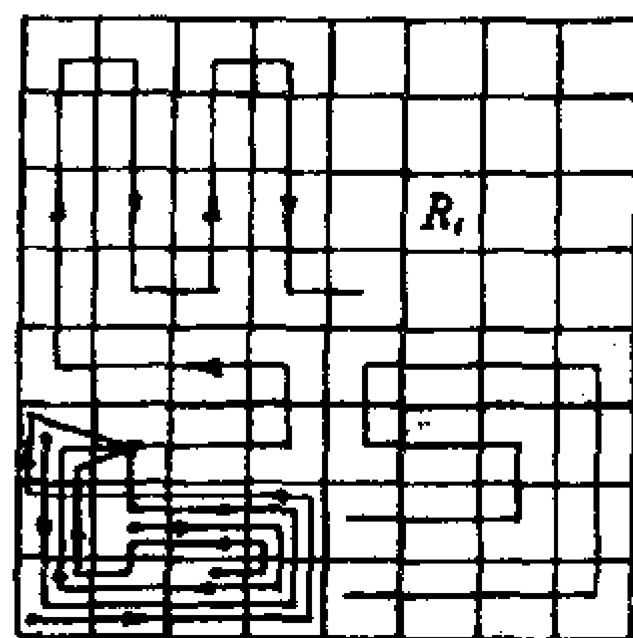
先看两个黑格分别位于对角的两个正方形中的情

形，不妨设二者分别在 R_2 和 R_4 中. 由对称性知可设第 1 个黑格为 B_1,B_2,B_3,B_4 之一(见图(b)) 按图(c) 所示的路线，车从方格 B_1,B_2,B_3,B_4 出发，可以在经过下半棋盘每格 1 次之后进入 R_1，经过 R_1 中每格 1 次之后到达 R_4 的左下角的黑格. 这样一来，问题就化成了两个取定黑格都在同一个 4×4 正方形中的情形，惟一的例外是 R_4 的左下角的黑格恰为取定的第 2 个黑格. 但是，这时车可继续沿图(c) 中 R_3 中所示的路线走遍 R_4 中每格 1 次最后又回到出发的左下角黑格，整个路线恰好满足题中要求.



(b)

当两个取定黑格位于相邻的两个 4×4 正方形中时，不妨设分别位于 R_2 和 R_3 中. 这时从 B_1,B_2,B_3,B_4 出发可在走遍 R_2 每格 1 次之后走入 R_1. 走遍 R_1 每格 1 次之后进入 R_4，然后在 R_4 中沿着与 R_1 中相同的路线走入 R_3 的右上角的黑格. 于是又把问题化成前段的情形(参看图(c)).



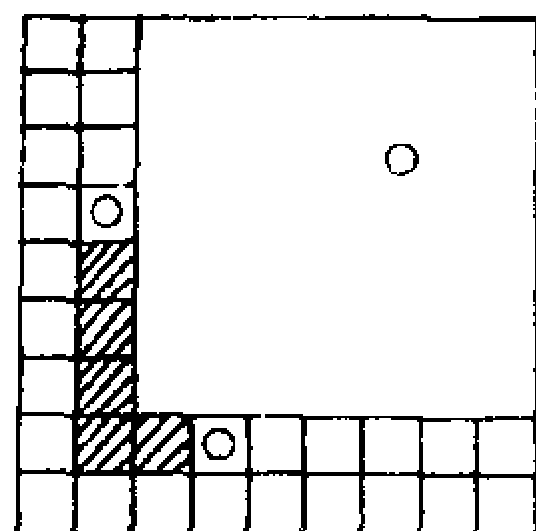
(c)

至于两个黑格本来就在同一个 4×4 正方形的情形，就更简单了，可参照上述两种情形加以解决. 这就完成了全部证明.

8·68 甲乙二人轮流为一张 25×25 个方格的棋盘涂色，甲用白色，乙用黑色，甲先涂色，每次涂 1 格，已涂色的格子不能再涂. 试问甲能否不依赖于乙的涂法而使涂色结束后，国际象棋中的王按国际象棋中的走法(王可由所在方格走到任何一个横向. 纵向和斜向的相邻方格中) 不经黑格而走遍所有白格(允许经过同一白格若干次)?

(圣彼得堡数学奥林匹克，1990 年)

[解] 甲无法保证实现，亦即乙有办法使甲不能实现.



不妨设甲涂白色的第 1 个方格既不在左两列也不在下方两行中. 乙第 1 次将位于左起第 2 列与下面第 2 行之交处的方格涂黑. 以后轮到乙时，每次都沿第 2 列向上或沿第 2 行向右将与已涂黑的方格相

邻的方格涂黑一格,直到两端皆被白格(图中标有小圆圈的方格为白格)堵住为止,或直到边界为止.

若为前者,设共涂黑 k 个方格,则 $2 \leqslant k \leqslant 45$. 这时,在左起第1列和下面第1行中在黑格外侧的方格共有 $k+2$ 个(图中粗实线所界的方格). 这 $k+2$ 个方格中,至多有 $k-2$ 个白格. 换句话说,又轮到乙涂色时,这 $k+2$ 个方格中至少还有4个空格. 于是乙可以在连续两次涂色中,涂黑两个不相邻的空格. 这样一来,黑格就至少围死了一个方格. 如果这个方格已被涂白,则白王就已经无法走进;如果这个方格是空的,则只要乙自己不去涂它,因方格总数为奇数,所以最后必然是甲把它涂成白色,导致白王无法出入. 若为后者,也可类似地导出同样的结果.

8·69　有一个无限大的国际象棋棋盘,将编号为 a 的行与编号为 b 的列相交处的方格记作 (a,b). 棋子从方格 (a,b) 中,可以一步跳到下列8个方格中的任何一个:

$$(a \pm m, b \pm n), (a \pm n, b \pm m),$$

其中 m 和 n 为固定的自然数,符号 $(+)$ 和 $(-)$ 则可任意搭配. 已知一枚棋子在跳了 x 步之后又回到了原出发处,求证 x 是偶数.

(第23届莫斯科数学奥林匹克,1960年)

[证]　首先设 m 与 n 互素.

(1) 设 m 和 n 中一个是偶数另一个是奇数. 于是棋子每走一步,它所在的方格都要变色. 在棋子走了 x 步又回到出发点时,由黑到白和由白到黑的步数同样多,x 当然是偶数.

(2) 设 m 和 n 都是奇数,棋子每走一步,两个坐标增量之和为偶数.

R		R		R		R		R		R		R	
	B		B		B		B		B		B		B
R		R		R		R		R		R		R	
	B		B		B		B		B		B		B
R		R		R		R		R		R		R	
	B		B		B		B		B		B		B
R		R		R		☆		R		R		R	
	B		B		B		B		B		B		B
R		R		R		R		R		R		R	
	B		B		B		B		B		B		B
R		R		R		R		R		R		R	
	B		B		B		B		B		B		B
R		R		R		R		R		R		R	
	B		B		B		B		B		B		B

右图中的星号代表方格 (a,b). 写有 R 和 B 的方格分别表示红格和蓝格. 未写字母的空格是棋子走不到的方格,与本题无关,不必涂色. 从标有星号的红格出发,横向平移奇数个方格,棋子走入空格. 注意,空格所在的列中,凡涂色的方格都是蓝格. 接着从空格沿竖直方向平移奇数个方格,进入一个蓝格. 这就

是说棋子从红格出发跳一步,进入蓝格.同理,棋子从蓝格出发跳一步,也必跳到红格.从而像(1)中一样地可证 x 为偶数.

最后,若 m,n 不互素,设 $(m,n)=k$,则我们可以把棋盘划成以 $k\times k$ 个方格为单位方格重新像原棋盘那样二染色,于是问题就归结为前面的情形.从而对任意自然数 m,n,棋子走的步数 x 必为偶数.

8·70 国际象棋中的王遍历 8×8 的棋盘每格恰好一次并在最后一步走回出发点(王的走法按通常国际象棋的规则),并且当用线段依次把王所走过的方格中心连结起来时,得到的行走路线是一条自身不交的封闭折线.

(1) 举例说明王可以沿着水平线和竖直线总共恰好走 28 步.

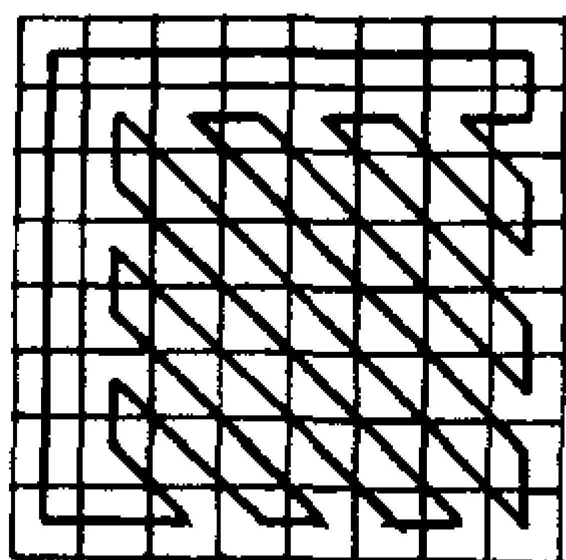
(2) 求证王沿着水平方向和竖直方向总共所走的步数至少为 28.

(3) 如果格子的边长为 1,求王所走路线的最大可能长度与最小可能长度.

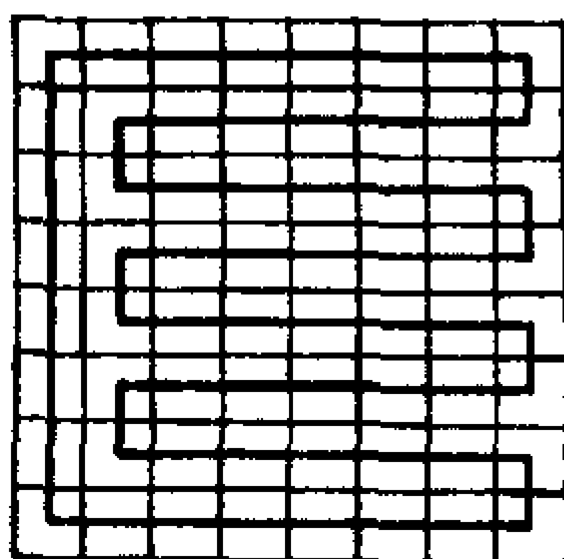
(第 7 届全苏数学奥林匹克,1973 年)

[解] (1) 见下面的图(a).

(2) 考察棋盘上由28个边格所组成的边界.显然,王在走遍棋盘时走过边界上的每个方格恰好一次.按照王走过的先后次序将这些边格排号为 $1,2,\cdots,28$,并将王走过的整个路线分成28段:从格子1到格子2,从格子2到格子3,…,从格子28到格子1.按已知,王所走的路线自身不交,因此格子 i 与 $i+1$ 必相邻,$i=1,2,\cdots,28$(格子29即为格子1).否则,如果设格子1与2不相邻,则两格把边界分成了两部分.当王走其中一部分的某格走到另一部分中某格时,所走的路线一定与从格子1到格子2的路线相交,矛盾.既然格子 i 和 $i+1$ 相邻,两格的颜色当然不同.因而当王由格子 i 经若干步走到格子 $i+1$ 时,其中至少有一步



(a)



(b)

是从一种颜色的格子走到另一种颜色的格子中去，而这一步或者是沿水平线或者是沿竖直线走的. 由此可知，王在整个行走过程中，沿水平线和竖直线总共所走的步数至少为 28 步.

(3) 显然，王行走的路线全长不小于64，而且存在全长为64的路线(上图(b)). 另一方面，由(1) 和(2) 知，王的整个路线中最少有 28 步是沿水平线或竖直线走的. 因而它的最大可能长度是 $28+36\sqrt{2}$.

8·71　黑板上写有 n 个实数. 允许从中擦去任何两个数，例如 a 和 b，而写上另一个数$\frac{1}{4}(a+b)$. 这种操作共进行 $n-1$ 次，最后黑板上只剩下了一个数. 已知开始时黑板上写的 n 个数都是 1，求证最后剩下的那个数不小于$\frac{1}{n}$.

(第 25 届全苏数学奥林匹克，1991 年)

[证]　因为

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{4}{a+b},$$

故知在操作过程中所有数的倒数之和不增. 因为开始时这个和数为 n，所以最后这个和数不超过 n，亦即最后所剩的一个数不小于$\frac{1}{n}$.

8·72　在黑板上写了 3 个整数，然后擦去其中的一个，并代之以剩下的两数之和与 1 的差. 重复这个步骤若干次后，黑板上的数变成了 17，1967，1983，问开始时黑板上所写的数能否是下列数组：

(1)2，2，2；　(2)3，3，3?

(第 17 届全苏数学奥林匹克，1983 年)

[解]　由(17，1967，1983) 往前倒推是方便的. 每次把最大的数去掉，可使后两数同时降低 16. 而 $1983=123\times16+15$，故可推得(15，17，31)，(3，15，17) 每次把大数去掉，可使后两数降低 2，从而最后得到(3，3，5). 这个数组可由(3，3，3) 推出但不能由(2，2，2) 推出.

8·73　在黑板上写有 1967 个“+”或“-”号，规定一次必须擦去两个符号，若擦去的两个符号相同，则补写 1 个“+”号，若擦去的两个符号不同，则补写 1 个“-”号. 求证在经过若干次操作后黑板上留下的最后一个符号不依赖于擦去符号的顺序.

(基辅数学奥林匹克，1967 年)

[证]　在每次操作后，黑板上的"-"号个数或者减少两个，或者保持不变．这就是说，在操作前后，黑板上"-"号的个数的奇偶性保持不变．因此，若开始时黑板上的1967个符号中有奇数个"-"，则最后留下的惟一符号是"-"；若开始时"-"号的个数为偶数，则最后留下的惟一符号是"+"．这个结果显然与操作顺序无关．

8·74　在黑板上写有若干个0,1,2．每步操作可以擦去黑板上两个不同的数字并写上一个第3种数字(用一个2代替0和1，用一个0代替1和2，用一个1代替0和2)．试证如果经过若干步操作后黑板上还剩一个数字，则这个数字与操作顺序无关．

（第9届全苏数学奥林匹克，1975年）

[证]　设p,q,r分别表示黑板上写有的0,1,2的个数．在每一步操作之后，p,q,r这三个数都增加或减少1，因而它们的奇偶性也随着改变．当在黑板上只剩下一个数字时，p,q和r这三个数中的一个变为1，两个变为0．所以，最后留在黑板上的数字一定是当初p,q,r三数中奇偶性与另两数不同的那个数所对应的数字，这当然与操作顺序无关．

8·75　在黑板上写有自然数1,2,…,1974．允许擦去其中的任意两个数并补写上二数之和或差．重复这样的操作直至在黑板上仅余1个数为止．求证这个数不能是零．

（基辅数学奥林匹克，1974年）

[证]　显然，如果擦去的两个数奇偶性相同，则补写的数是偶数；如果擦去的两个数奇偶性不同，则补写的数是奇数．这样，在每次操作之后，黑板上的奇数的个数或者不变，或者减少2．这就是说，黑板上奇数个数的奇偶性在操作之下是不变的．

因为在前1974个自然数中共有987个奇数，故在操作过程中黑板上总有奇数个奇数．最后黑板上所余的惟一的数也必为奇数，当然不是零．

8·76　在黑板上写有3个数：89,12,3并进行如下操作：任取其中两个数，分别求其和与差并都除以$\sqrt{2}$，然后用这两个数代替原来的两个数．问能否经过若干次操作使黑板上的3个数变为90,10,14?说明理由．

（中国浙江省初中数学竞赛，1990年）

[解]　不能．

设a,b,c为任意三个数，则经过一次运算后得到的三个新数为

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{a-b}{\sqrt{2}}, c.$$

由于

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2+c^2=a^2+b^2+c^2.$$

因此,每一次运算都保持三个数的平方和是一个不变量.

已知三个数的平方和为 $89^2+12^2+3^2=8074$,所要达到的三个数的平方和为 $90^2+10^2+14^2=8396$.

所以不能达到.

8·77　在黑板上写有一个自然数.每秒钟都将其加上它的所有偶位数字之和(即加上十位数字,千位数字等等偶位数字之和).求证经过某段时间之后,黑板上的数不再发生变化.

(圣彼得堡数学选拔考试,1993 年)

[证]　设黑板上的数为 n 位数.因为奇数位数进位之后为偶位数,故可设 n 为偶数.我们用数学归纳法证明,操作下去所得的数均至多为 $n+1$ 位数,从而不会永无休止地变化下去.

当 $n=2$ 时,结论显然成立.设结论于 $n=2k$ 时成立.当 $n=2(k+1)$ 时,设在某一时刻黑板上的数由 $2(k+1)$ 位因进位而变成 $2k+3$ 位,这时新数的前 3 位数字必为 100,其中 1 在奇数位.从而这 3 个数字对以后的操作没有影响.这样一来,以后的操作只在后 $2k$ 位数上进行.由归纳假设知操作下去,后 $2k$ 位数字组成的数至多变成 $2k+1$ 位数.从而整个 $2k+3$ 位数永远不会再进位,这就完成了归纳证明.

8·78　黑板上写着由 1 到 1988 的所有自然数.对这些数交替进行操作 A 和操作 B,即先 A,然后 B,再 A,再 B,并这样继续下去.操作 A 为从黑板上写有的每个数中都减去同一个自然数(在不同次的操作 A 中,减去的数可以不同);操作 B 为擦去黑板上的某两个数,然后写上该二数的和.操作过程一直进行到某次 B 之后,黑板上仅剩下 1 个数时为止.已知该数非负,求这个数.

(第 14 届全俄数学奥林匹克,1988 年)

[解]　因为操作 A 不减少黑板上数的个数而操作 B 每次都使数的个数减少 1,故当操作 A 和 B 各进行 1987 次后,黑板上仅剩下 1 个数.

设 d_k 是在第 k 次进行操作 A 时所减去的自然数，$k=1,2,\cdots,1987$. 由于在第 k 次操作 A 中，黑板上的所有数之和的值将减少 $(1989-k)d_k$，而操作 B 不改变这种和值，所以在交替进行了各 1987 次操作 A 和操作 B 之后，黑板上所写的数应为

$$x=\sum_{k=1}^{1988}k-\sum_{k=1}^{1987}(1989-k)d_k=\sum_{k=1}^{1987}(1989-k)(1-d_k)+1.$$

因 d_k 为自然数，故 $1-d_k\leqslant 0,k=1,2,\cdots,1987$. 又因 $x\geqslant 0$，故必有 $d_k=1,k=1,2,\cdots,1987$. 从而得到 $x=1$，即黑板上最后剩下的 1 个数是 1.

8·79　已知黑板上写着两个数：1 和 2. 现允许按如下规则写出新的数：当黑板上有 a 和 b 时，可以写上数 $ab+a+b$. 试问能否在黑板上写出数 13121 和 12131?

（第 22 届全苏数学奥林匹克，1988 年）

［解］　记 $c=ab+a+b$，于是 $c+1=(a+1)(b+1)$. 这就意味着，如果将操作开始时和进行中所出现的数都加 1，那么问题就变成了从 2 和 3 出发，每次所写的新数都是原有两个数的乘积. 因而黑板上出现的所有数都是 $2^n\cdot 3^m$ 的形式，其中 m 和 n 为非负整数，而且除了原有两数之外，m 和 n 都是自然数. 反过来，对任一形如 $2^n\cdot 3^m$ 的数，都可在黑板上出现. 这样一来，在原来的操作之下，黑板上得到的数都是 $2^n\cdot 3^m-1$ 的形式. 注意到 $13121=2\cdot 3^8-1$，$12131=2^2\cdot 3^2\cdot 337-1$，便知在黑板上可以写出 13121，但不能写出 12131.

8·80　在黑板上写着若干个数. 如果这些数中的两个数或更多的数的算术平均值不等于这些数中的任何数，就可以把这个平均值添写到黑板上. 求证从数 0 和 1 开始，按如上写法可以写出(1) $\frac{1}{5}$；(2)0 和 1 之间的任何有理数.

（第 13 届全苏数学奥林匹克，1979 年）

［证］　我们称分母为 2 的幂的分数为二进位形的有理数. 首先指出，从 0 和 1 出发，可以得到 0 与 1 之间的所有二进位形的有理数.

其次，为了得到分数 $\frac{1}{n}$，只要取和为 1 的 n 个不同的二进位形的有理数并计算其算术平均值即可. 例如，为了得到 $\frac{1}{5}$，我们写 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{3}{32}$，由

这 5 个数求平均值当然得到$\frac{1}{5}$.对于分母为 n 时,也可以照此办理.

为证(2),注意,如果能够从 0,1 出发得到 t,那么也可以得到 $1-t$(处处用 $1-x$ 代替 x 即可);进一步地,用同样方法也可以从 0,r 出发而得到 rt(用 rx 代替 x).这样一来,在已经得到$\frac{1}{n}$ 和$\frac{k}{n-1}$($k=1,2,\cdots,n-2$)之后,就可以得到 $1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$ 以及所有的$\frac{k}{n}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{k}{n-1}$,$k=1,2,\cdots,n-1$.

8·81　在黑板上依次写着 4 个数:9725,7461,6966,9.在它们之后写上它们的和数,如果和数为 5 位数,则抹去它的首位数.然后擦去第 1 个数,并对剩下的 4 个数重复刚才的作法并这样继续下去.问能否有一时刻,黑板上留下的 4 个数是 1989,1989,1989,1989?

(原苏联教委推荐试题,1989 年)

[解]　(1) 如果从(1989,1989,1989,1989) 开始按题中规定写下去,则第 7 次时得到的四元数组即为(9725,7461,6966,9).

(2) 按题中规定,已知 4 个数时,可惟一确定第 5 个数.反之,如果已知第 2,3,4,5 这 4 个数,也可惟一确定第 1 个数.因而由(1) 知,只须证明在从(9725,7461,6966,9) 开始的操作过程中.这个数组还会重复出现.

(3) 因为由四位数构成的四元数组只有有限多个,所以在操作充分多次之后,总有某个四元数组(a,b,c,d) 要重复出现,不妨设两次出现的步数 i 与 j 满足 $j-i>7$.由(2) 知,当从第 i 步与第 j 步的四元数组(a,b,c,d) 前推时,得到的四元数组对应相同.所以,当推了 i 步后,便知第 $j-i$ 步的数组与初始的四元数组相同.再由(1) 便知,再往前推 7 步便得数组(1989,1989,1989,1989).这就证明了题中要求的数组一定会出现.

8·82　设黑板上写有 128 个 1.每一步可以擦去黑板上的任意两个数 a 和 b,并写上 $ab+1$.这样做了 127 次之后,只剩下 1 个数.将这样剩下数的最大可能值记作 A.试求 A 的末位数字.

(圣彼得堡代表队选拔试题,1992 年)

[解]　首先证明,只要每一步都是对黑板上最小的两个数进行操

作，即可使最后余下的数达到最大值.我们将对黑板上的数 a 和 b 的操作记为 $a*b=ab+1$.假定在某一步上不是对最小的两个数 x 和 y 进行操作，则在 x 与 y"相遇"之前，二者均已分别同某些 a_i,b_j"相遇"过，且这些 a_i,b_j 都大于 x 和 y，亦即有

$$\begin{aligned}a&=((\cdots((x*a_1)*a_2)\cdots)*a_k)\\&=a_1a_2\cdots a_k\left(x+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1a_2}+\cdots+\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}\right)\\&=a_2a_3\cdots a_k(a_1x+1+u),\qquad ①\\b&=((\cdots((y*b_1)*b_2)\cdots)*b_n)\\&=b_1b_2\cdots b_n\left(y+\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_1b_2}+\cdots+\frac{1}{b_1b_2\cdots b_n}\right)\\&=b_1b_2\cdots b_n(y+v),\qquad ②\end{aligned}$$

其中 $u>0,v>0$ 分别表示相应括号内其余各数之和.我们可以假定在②中有 $y<b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，否则可通过交换而使 b 增大.交换 a_1 与 y 的位置，并考察所得的两个数

$$a'=a_2\cdots a_k(xy+1+u),b'=b_1b_2\cdots b_n(a_1+v).$$

这时有

$$\begin{aligned}a'b'-ab&=a_2\cdots a_kb_1\cdots b_n[(xy+1+u)(a_1+v)-(a_1x+1+\\&\quad u)(y+v)]\\&=a_2\cdots a_kb_1\cdots b_n(a_1-y)(u+1-vx).\qquad ③\end{aligned}$$

由于 $y<a_1,v\leqslant\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_1^2}+\cdots+\frac{1}{b_1^n}\leqslant\frac{1}{b_1-1}\leqslant\frac{1}{x}$，即 $1-vx\geqslant0$，故由③得到 $a'b'-ab>0$，即上述交换导致最后所余数的增大.这就证明了开头的断言.

这样一来，我们只要每次操作都是对黑板上最小的两个数进行，即可得出最大可能值.于是，前64步之后黑板上有64个3；再操作32步之后，黑板上有32个10；这样继续下去，最后可得最大值的末位数字为2.

8·83　在黑板上写有自然数 $1,2,\cdots,n(n\geqslant3)$.允许每次擦去其中任何两个数 p 和 q，而代之以 $p+q$ 和 $|p-q|$.已知经过若干次改写之后，黑板上所有的数全都为 k.求 k 的所有可能值.

（第25届全苏数学奥林匹克，1991年）

［解］　显然，操作过程中所出现的所有数都是非负整数.如果两个非负整数的和与差都能被某奇数 d 整除，那么这两个数本身也都可

以被 d 整除.因此,如果黑板上的数 k 能被奇数 $d>1$ 整除,那么开始时在黑板上的所有数都应是 k 的倍数,这是不可能的,因为 1 就不能是 d 的倍数.所以,k 不能有奇的素因数,故有 $k=2^s$,$s\in N$.由于在每步操作之后,黑板上的最大数的值不减,故知 $k\geqslant n$.下面来证明 k 可为任何不小于 n 的 2^s,$s\in N$.

因为只要操作一次,即可实现

$(2^m,2^m)\longrightarrow(0,2^{m+1})$;$(0,2^m)\longrightarrow(2^m,2^m)$,

故不难看出,如果在黑板上写有一组由 2 的不同方幂所组成的数,它们的指数都不超过 s_0,而其中又有两个相等的小于 2^{s_0} 的数,那么经过若干步操作之后,必可使得所有的数全都变为 2^{s_0}.

我们对 $n\geqslant 3$ 使用归纳法来证明:由数组 $1,2,\cdots,n$ 出发,总可经过若干步操作而得到如上所述的全由 2 的方幂所组成的数组,而且 s_0 可以取成任何满足不等式 $2^{s_0}\geqslant n$ 的自然数.

因为 $(3,1)\longrightarrow(4,2)$,故知 $n=3,4$ 时结论成立.又因 $(5,3)\longrightarrow(8,2)$,$(6,2)\longrightarrow(8,4)$,$(7,1)\longrightarrow(8,6)$,故知 $n=5,6,7,8$ 时结论也成立.设结论对于 $3\leqslant n\leqslant m$ 的所有 n 成立,经证结论对于 $n=m+1>8$ 也成立.记 $m+1=2^h+r$,其中 $h\geqslant 3$,$1<r\leqslant 2^h$.这时,我们依次对数对 $(p,q)=(2^h+j,2^h-j)$ 进行操作,$j=1,2,\cdots,r$,可以得到由下列 3 部分数所构成的数组:

(1)$1,2,\cdots,2^h-r-1$(这些数是黑板上未经操作的数,当 $r=2^h$ 或 2^h-1 时,这部分数不存在);

(2)$2,4,\cdots,2r$(这些数由差数 $|p-q|$ 而来);

(3)$2^h,2^{h+1},\cdots,2^{h+1}$(这些数由和数 $p+q$ 及数 2^h 而来).

既然 $h\geqslant 3$,故前两组数中至少有一组数的个数不少于 3 个.当前两组数中某组数的个数不少于 3 时,即可使用归纳假设.而当某组数至多 2 个时,它们已经全是 2 的方幂.故知由 $1,2,\cdots,m+1$ 出发,经若干次操作后可全变为 2 的方幂.另一方面,当 $r=2^h-j$,$j=0,1,2,3$ 时,后两组中各有一个 2^h.对于其余的 r,前两组各有一个 2.这就完成了归纳证明.

8·84　将从 1 到 1982 这些自然数按照某种次序排成一行.计算机从左向右读依次相邻的两个数(第 1 个与第 2 个,第 2 个与第 3 个,等等),如果在读到的两个数中较大的数在左边,则计算机改变二者的位

置，然后再继续读下去，直到读完为止．接着计算机又从右到左读一遍，并按与上面相同的规则互换两数的位置．读完之后发现：在第 100 号位置上的数两次都没有改变自己的位置．求这个数．

（第 16 届全苏数学奥林匹克，1982 年）

［解］　分别考察前 99 个数中的最大数 a 和后 1882 个数中的最小数 b．显然，$a \geqslant 99, b \leqslant 101$．因为第 100 号位置上的数 x 两次未动，故有 $a < x < b$．从而必有 $x = 100$．

8·85　将 4 个数 1，9，8，8 写成一行并进行如下的操作：对每一对相邻的数都作一次减法，即用右边的数减去左边的数，然后将所得的差写在这两个数之间，算是完成了一次操作．然后再对这个由 7 个数所排成的一行进行同样的操作．如此继续下去，共操作 100 次．求最后所得到的一行数的和．

（第 51 届莫斯科数学奥林匹克，1988 年）

［解］　在每次操作中，该行数中最左端的数只作减数 1 次，最右端的数只作被减数 1 次，中间的每个数都是作减数和被减数各 1 次，因而在操作之后，这行数的和增加 7．操作 100 次之后，这行数的和为

$$S = 1 + 9 + 8 + 8 + 7 \times 100 = 726.$$

8·86　取一对自然数，作其中较大者除以较小者的带余除法（如果二数相等，也用其中一个除以另一个）．再将所得的商和余数作为一对新的数，继续进行上述运算，直到其中一个数变为 0 为止．试证如果开初所取二数均不超过 1988，则所述的运算不可能进行到 6 次以上．

（第 51 届莫斯科数学奥林匹克，1988 年）

［证］　由于余数必小于除数，所以二数中的最小数是严格递减的．因此，如果对于某个 k，在做第 k 次运算时的较小数不超过 $7 - k$（$1 \leqslant k \leqslant 6$），则所需的运算不超过 6 次．否则，第 k 次运算时的除数都不小于 $8 - k$，$k = 1, 2, \cdots, 6$，于是在 6 次运算之后，所得的商

$$q \leqslant \frac{1988}{7!} < 1,$$

当然只能为 0．

综上可知，所述的运算不能进行到多于 6 次．

8·87　已知三元数组列 $\{(x_n, y_n, z_n)\}$ 按如下法则构造：

$$x_1 = 2, y_1 = 4, z_1 = \frac{6}{7};$$

$$x_{n+1}=\frac{2x_n}{x_n^2-1}, y_{n+1}=\frac{2y_n}{y_n^2-1}, z_{n+1}=\frac{2z_n}{z_n^2-1}, n=1,2,\cdots.$$

(1) 求证上述构造过程可以无限持续下去；

(2) 能否在某一步上得到三元数组(x_k, y_k, z_k)，使得 $x_k+y_k+z_k=0$?

（第 16 届全俄数学奥林匹克，1990 年）

[解] (1) 只须证明，在任何一步所得到的三元数组中，都不可能出现 1 或 -1. 若不然，设由三元数组(a,b,c)得到三元数组(α,β,γ)且有 $\alpha=1$，则由定义便有$\frac{2a}{a^2-1}=1$，亦即有 $a^2-2a-1=0$. 由此解得 $a=1\pm\sqrt{2}$ 为无理数. 但由定义知所有 x_n, y_n, z_n 都是有理数，矛盾.

(2) 注意到

$$x_1+y_1+z_1=2+4+\frac{6}{7}=\frac{48}{7}=x_1y_1z_1,$$

我们用归纳法来证明

$$x_n+y_n+z_n=x_ny_nz_n. \qquad ①$$

设 ① 式于 $n=k$ 时成立. 当 $n=k+1$ 时，由递推定义有

$$x_{k+1}y_{k+1}z_{k+1}=\frac{8S_k}{(x_k^2-1)(y_k^2-1)(z_k^2-1)}, S_k=x_ky_kz_k.$$

而 $x_{k+1}+y_{k+1}+z_{k+1}$ 通分后分母与上式相同，分子为

$$\begin{aligned}&2x_k(y_k^2-1)(z_k^2-1)+2y_k(x_k^2-1)(z_k^2-1)+2z_k(x_k^2-1)(y_k^2-1)\\&=2x_ky_kz_k(y_kz_k+x_kz_k+x_ky_k)-2(x_ky_k^2+x_kz_k^2+y_kx_k^2+y_kz_k^2+z_kx_k^2\\&\quad+z_ky_k^2)+2(x_k+y_k+z_k).\end{aligned} \qquad ②$$

由归纳假设有 $x_k+y_k=S_k-z_k$, $x_k+z_k=S_k-y_k$, $y_k+z_k=S_k-x_k$，对于 ② 式右端第 2 个括号，便有

$$\begin{aligned}&x_ky_k^2+x_kz_k^2+y_kx_k^2+y_kz_k^2+z_kx_k^2+z_ky_k^2\\&=x_ky_k(x_k+y_k)+x_kz_k(x_k+z_k)+y_kz_k(y_k+z_k)\\&=x_ky_k(S_k-z_k)+x_kz_k(S_k-y_k)+y_kz_k(S_k-x_k)\\&=S_k(x_ky_k+x_kz_k+y_kz_k)-3S_k.\end{aligned} \qquad ③$$

将 ③ 代入 ② 便知 $x_{k+1}+y_{k+1}+z_{k+1}=x_{k+1}y_{k+1}z_{k+1}$，即 $n=k+1$ 时 ① 式成立.

如果对某个 n，有 $x_n+y_n+z_n=0$，则由 ① 有 $x_ny_nz_n=0$，即 3 个

数中至少有1个为0,这是不可能的.从而知使 $x_n+y_n+z_n=0$ 的三元数组永远不会出现.

8·88　三台自动打号机都能在卡片上打印自然数的数对.它们按如下方式工作:第一台打号机读完卡片 (a,b) 后输出新卡片 $(a+1,b+1)$,第二台打号机读完卡片 (a,b) 后输出新卡片 $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$(仅当 a 和 b 都是偶数时它才工作),第三台打号机每次读两张卡片 (a,b) 和 (b,c) 时,输出的新卡片是 (a,c).此外,三台自动机都能自动退回读过的卡片.

(1) 设有一张初始卡片(5,19),问能否利用三台打号机的操作来得到卡片(1,50)?能否得到卡片(1,100)?

(2) 设有初始卡片 (a,b),$a<b$,而我们要得到卡片 $(1,n)$.问 n 取何值时能做到这一点?

(第12届全苏数学奥林匹克,1978年)

[解]　首先指出,可以得到卡片(1,8):

$$(5,19)\to(6,20)\to(3,10)\to\cdots\to(10,17)\to(3,17)\to$$
$$(4,18)\to(2,9)\to\cdots\to(9,16)\to(2,16)\to(1,8).$$

由卡片(1,8)出发,连续使用第一台打号机,可分别得到(8,15),(15,22),(22,29),(29,36),(36,43),(43,50).依次由它们进行第三台操作即得(1,50).

另一方面,注意,无论怎样操作,卡片上的两个整数之差总是7的倍数.但99不是7的倍数,故得不到卡片(1,100).

设 d 是 $b-a$ 的最大奇因数.我们指出,当且仅当 $n=1+kd(k\in N)$ 时,从卡片 (a,b) 可以得到卡片 $(1,n)$.

必要性显然,因为三种操作都保持卡片上的两个整数之差总能被 d 整除.为证充分性,只须证明,从 (a,b) 出发可以得到 $(1,1+d)$.如果 a 和 b 奇偶性相同,则可使 $(a,b)\to\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$ 或者 $(a,b)\to(a+1,b+1)\to\left(\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\right)$.因为当 $a\geqslant3$ 为奇数时,$\frac{a+1}{2}<a$,故当 $a>1$ 时,总可经过适当操作使所得的卡片上前一自然数小于 a.而上述第二种操作还表明,当 $a=1,b=1+md,m>1$ 时,可经过操作使得 a 保持为1,但 b 减小.由此可见,总能得到 $(1,1+d)$.

当 a 和 b 奇偶性不同时，可作操作

$$(a,b)\longrightarrow\cdots\longrightarrow(b,2b-a)\longrightarrow(a,2b-a)$$

这就化成了奇偶性相同的情形.

8·89　给定两个各由 1958 个数组成的数列，其中每个数都是 $+1$ 或 -1. 现允许每次同时改变第 2 个数列中的任何 11 项的符号，求证只要经过有限多次改变，即可将第 2 个数列变得与第 1 个数列相同，即对应项都相同.

（第 21 届莫斯科数学奥林匹克，1958 年）

［证］　在右表中画出了数列中的连续 12 项，每次将其中 11 项变号，其中画点的三角形是不变向的. 经过 11 次改变后，前 11 项均不变号而只有第 12 项变号. 这就是说，经 11 次改变，可以使数列中的某一项改变符号而其他各项均不动. 从而可将第2个数列中与第一个数列不同的项逐个改变符号而使二者相同.

△ △ △ △ △ △ △ △ △ △ △ △
△• ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽
▽ ▽• △ △ △ △ △ △ △ △ △ △
△ △ △• ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽
▽ ▽ ▽ ▽• △ △ △ △ △ △ △ △
△ △ △ △ △• ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽
▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽• △ △ △ △ △ △
△ △ △ △ △ △ △• ▽ ▽ ▽ ▽ ▽
▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽• △ △ △ △
△ △ △ △ △ △ △ △ △• ▽ ▽ ▽
▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽• △ △
△ △ △ △ △ △ △ △ △ △ △• ▽

8·90　在数列 1,9,7,5,2,… 中，自第 5 项起，每个数字都等于它前面的 4 个数字之和的个位数字. 问在此数列中，(1) 是否会出现连续 4 项为 1,2,3,4 和 3,2,6,9?(2) 是否会再次出现连续 4 项为 1,9,7,5?(3) 是否会出现连续 4 项为 8,1,9,7?

（第 38 届莫斯科数学奥林匹克，1975 年）

［解］　将数列多写出几项如下：

1,9,7,5,2,3,7,7,9,6,9,1,5,…

按奇偶性来看为

奇，奇，奇，奇，偶，奇，奇，奇，奇，偶，奇，奇，… 它的项是以“奇，奇，奇，奇，偶”为周期循环出现的. 容易证明，这个数列确实具有这样的周期性. {1,2,3,4} 和{3,2,6,9} 的奇偶性分别为{奇，偶，奇，偶} 和{奇，偶，偶，奇}，当然不会在此数列中出现.

(2) 由于四数组 $\{a,b,c,d\}$（a,b,c,d 都是数字）的个数是有限的，而数列是无限的，故由抽屉原理知，其中必有两段连续 4 项相同. 设为 $(a_i,a_{i+1},a_{i+2},a_{i+3})$ 和 $(a_j,a_{j+1},a_{j+2},a_{j+3})$，满足 $a_{i+k}=a_{j+k}$，$k=0$，

1,2,3. 由此即可逐步推出 $a_{i-k}=a_{j-k}, k=1,2,\cdots$. 特别地,当 $k=i-1$ 时,便得 $a_{j-i+1}=a_1=1, a_{j-i+2}=a_2=9, a_{j-i+3}=a_3=7, a_{j-i+4}=a_4=5$,即在数列中可以再次出现 1,9,7,5.

(3) 注意,连续4项8,1,9,7的下一项是5. 所以,1,9,7,5的前一项为8. 这就是说,上面得到的连续4项1,9,7,5往前移动1位,即为8,1,9,7. 当然必在数列中出现.

8·91　数列 1,0,1,0,1,0,… 自第7项起,每个数字都等于它前6项之和的个位数字. 求证在数列中不会出现连续6项为 0,1,0,1,0,1.

(圣彼得堡数学奥林匹克,1984年)

[证]　我们用 $L(n)$ 表示正整数 n 的个位数字. 考察函数

$$f(a_i)=L(2a_i+4a_{i+1}+6a_{i+2}+8a_{i+3}+10a_{i+4}+12a_{i+5}).$$

因为

$$\begin{aligned}&f(a_{i+1})-f(a_i)\\&=L(2a_{i+1}+4a_{i+2}+6a_{i+3}+8a_{i+4}+10a_{i+5}+12a_{i+6})-L(2a_i+\\&\quad 4a_{i+1}+6a_{i+2}+8a_{i+3}+10a_{i+4}+12a_{i+5})\\&=L(2a_{i+6})-L(2(a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3}+a_{i+4}+a_{i+5}))=0,\end{aligned}$$

所以 $f(a_i)$ 为定值. 于是有

$$f(a_i)=f(a_1)=L(2+6+10)=8, i=1,2,\cdots.$$

若命题不成立,则有 $j\in N$,使得

$$a_j=a_{j+2}=a_{j+4}=0, a_{j+1}=a_{j+3}=a_{j+5}=1,$$

于是有

$$f(a_j)=L(4+8+12)=4,$$

矛盾. 所以数列中不会出现连续6项为 0,1,0,1,0,1.

8·92　由0和1构成的任意一个有限序列都称为一个单词. 将单词 A 重复3遍所得到的单词 AAA 称为 A 的三倍体. 例如当 $A=101$ 时,它的三倍体就是 101101101. 对于单词,允许进行下列两种操作:

(1) 可在它的任一位置(包括词首与词尾)添加某词的三倍体;

(2) 可从中划去某词的三倍体.

例如,由单词 0001 可以得到 0111001,也可以得到 1,等等. 问能否经过若干次操作,由单词 10 得到单词 01?

(圣彼得堡数学奥林匹克,1988年)

[解] 不能实现.对于单词 $A = a_1a_2a_3\cdots a_n$,令

$$v(A) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n,$$

不难验证,如果单词 A 经一次操作而变成单词 B,则有

$$v(B) \equiv v(A) (\bmod\ 3),$$

即在操作过程中,单词的 v 值不变.由于

$$v(01) = 2 \not\equiv 1 = v(10),$$

所以从 01 出发不能经过若干次操作而得到 10.

8·93 设 $f_1 = (a_1, a_2, \cdots, a_n)(n > 2)$ 是一个整数数列.对数列 $f_k = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 进行如下操作:$f_{k+1} = (c_{i_1}, c_{i_2}, c_{i_3} + 1, \cdots, c_{i_n} + 1)$,其中$(c_{i_1}, c_{i_2}, \cdots, c_{i_n})$ 是$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 的任一排列.依次作出 f_1, f_2, $\cdots$,求存在正整数 k,使 f_k 中的 n 个数全都相等的充分必要条件.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

[解] 显然,题中所述的操作等价于从 n 个数中任选两个各减去 1.

若 n 为偶数而$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 是奇数,则操作下去时,每次所得的 n 个数之和都是奇数,所以 n 个数永远不会全相等.

若 n 为偶数,$n = 2m$, $m \in N$ 且$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 是偶数,则这 n 个数可分成两组,每组 m 个数.由于这两组数之和的差是偶数,故当每次从和数较大的组中两数各减去 1,经有限次操作后可使两组数之和相等.然后,从每组数中各选 1 个最大数并同时减去 1,经若干次之后就能使 n 个数全都相等.

若 n 为奇数,$n = 2m+1$, $m \in N$,依次从前两数,第 3 和第 4 个数,$\cdots$,第 $2m-1$ 和 $2m$ 个数都减去 1,则相当于将第 $2m+1$ 个数加 1.当 n 个数不全相等时,只要为每次的最小数加 1,经有限次后必可使 n 个数全都相等.

综上可知,所求的充分必要条件是 n 为奇数或n 为偶数且$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 也是偶数.

8·94 按某种顺序把从 1 到 1993 的自然数排成一行,对这一行实行下述变换:如果数 k 占有第一个位置,则把这行中的前 k 个数按相反的顺序重新进行排列.证明经过有限次这种变换以后,一定可以使数 1 占有第一个位置.

(第 19 届全俄数学奥林匹克,1993 年)

[证] 我们对从 1 到 n 的自然数排成一行的情形用数学归纳法来

证明所要求的结论.

当 $n=1$ 时,第一个位置显然是数 1.

假设对一行中有 $n-1$ 个数的情形结论已经成立,我们来证明有 n 个数的情形结论仍成立.

如果经过有限次变换,数 n 排在最后一个位置,则对前 $n-1$ 个数马上可以应用归纳假设,从而得到所需的结论(因为 n 已无处可移).

如果数 n 怎么也移不到最后的位置,这时它总不可能占第一个位置,可见,位于最后位置的数在任何一次变换中永远不会移动.这样,参与变换的数仅有 $n-1$ 个,这样,把数 n 和位于最后位置的数调换以后,并不会改变我们所做的变换.这时,只需对前 $n-1$ 个数应用归纳假设就可以了.

对 $n=1993$ 即为本题.

8·95　对于数 123456789101112…9989991000 进行如下的操作:勾掉两个相邻的数码 a 和 b(a 在 b 前),然后在它们原来的位置补上数 $a+2b$(可取数的第 1 位数字作为 b,而取数之前的 0 作为 a).对于所得的数再进行一次操作,并一直进行下去(例如,从数 118307 进行一次操作,可以得到数 218307,38307,117307,111407,11837 或 118314).求证用这种方法可以最终得到 1.

(第 32 届莫斯科数学奥林匹克,1969 年)

[证]　首先注意:

(1)1 位数字之前加 0 然后操作,所得的数比原数大,其他操作均非如此;

(2) 在这种操作之一惟一不变的数字组是 19.

鉴于这两点,我们对所给的数按从后到前的顺序进行操作,即总是对最后两位数字进行一次操作,如遇最后两位是 19,则改为对最后 2,3 两位数字进行操作.容易看出,每次操作都使数的值变小.因此,经过多次操作之后,必能变成一位数.事实上,若出现四位数 1219,则变为 149,122,16,13,7;若出现三位数 $12x$,则对后两位操作一次时,所得的后 1 位数字必为偶数不会出现 19,从而终将变成一位数.

对于一位数,可分别进行如下操作:

$$2\longrightarrow4\longrightarrow8\longrightarrow16\longrightarrow13\longrightarrow7\longrightarrow14\longrightarrow9\longrightarrow18\longrightarrow17\longrightarrow15\longrightarrow11\longrightarrow3\longrightarrow6\longrightarrow12\longrightarrow5\longrightarrow10\longrightarrow1.$$

这就完成了全部证明.

8·96　设 n 是大于 1 的奇数,定义

$$X_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})=(1,0,\cdots,0,1),$$
$$X_k=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}),\quad k=1,2,\cdots,$$

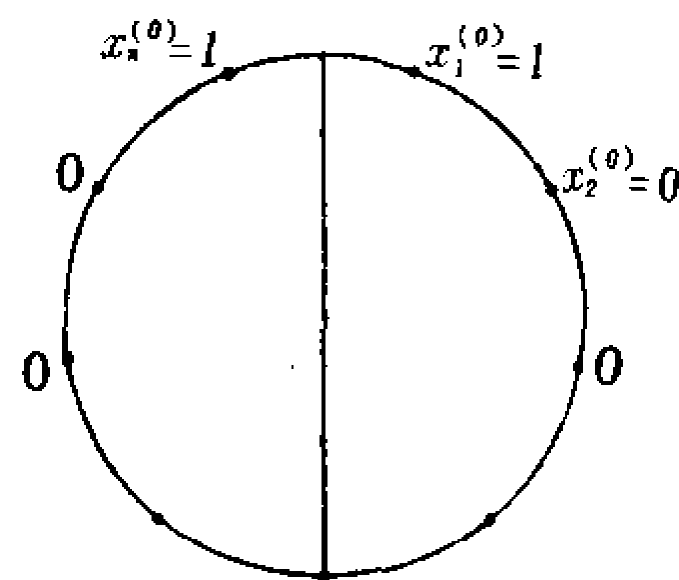
其中

$$x_i^{(k)}=\begin{cases}0, x_i^{(k-1)}=x_{i+1}^{(k-1)},\\ 1, x_i^{(k-1)}\neq x_{i+1}^{(k-1)},\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n,$$

且约定 $x_{n+1}^{(k-1)}=x_1^{(k-1)}$. 已知对 $m\in N$ 有 $X_m=X_0$,求证 $n\mid m$.

(第 10 届中国中学生数学冬令营,1995 年)

[证]　将一个圆周等分成 n 份,并按顺时针顺序将 $x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}$ 依次放在 n 个分点上. 于是这 n 个数关于过弧 x_1x_n 中点的直径对称,即右图中所示的竖直直径. 我们称之为"对称轴". 易见,对于这组 n 个数,仅有这一条对称轴.



把圆上每相邻两数 $x_i^{(0)}$ 与 $x_{i+1}^{(0)}$ 按模 2 作加法,并将所得的和放在圆弧 x_ix_{i+1} 的中点上. 然后把原来的 n 个数撤去,则所得的 n 个数恰为 $x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots,x_n^{(1)}$ 且由作法知,这 n 个数仍然关于竖直直径对称. 最后我们把新数组按下标放回到原来的 n 个位置,这相当于将新数组沿逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{n}$. 从而它们的对称轴也随之沿逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{n}$,且新数组的对称轴仍是惟一的. 这表明每进行一次这样的操作,所得的新数组的对称轴与原数组的对称轴相比,都是沿逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{n}$.

由已知,$X_m=X_0$. 这意味着操作 m 次后所得的数组与原数组相同,对称轴的位置当然也相同,即 m 次操作后,对称轴旋转的角度之和为 π 的整数倍,记为 $k\pi$. 于是有

$$\frac{m\pi}{n}=k\pi,$$

即 $m=nk$. 所以有 $n\mid m$.

8·97　设有 7 个方程的方程组如下：

$$* = *,$$

$$* + * = *,$$

$$* + * + * = *;$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$* + * + * + * + * + * + * = *.$$

甲乙两名学生依次将其中 1 个星号改写成某数.求证先开始填数的甲总能使 7 个等式全都成立.

（基辅数学奥林匹克，1973 年）

［证］　注意，7 个方程中第 1，3，5，7 个方程中共有偶数个星号，第 2，4，6 个方程中都共有奇数个星号.易见，甲要获胜，当且仅当在每个方程中他都去写最后一个数.对于有偶数个星号的方程，甲可按如下原则办：每当乙改写其中 1 个星号为某数之后，甲便也随之将这个方程中的 1 个星号改写成任意一个数，使该方程中仍有偶数个星号待改写.

开始时，甲可将第 2 个方程中的第 1 个星号改写成数.轮到乙时，若他在某有偶数个星号的方程中去改写，甲便按上述原则办理；若他将第 4 或第 6 个方程中的某个星号改写成数，则甲可在下一步中将这两个方程中的另一个中的一个星号改写成数.这样一来，所有方程中都剩下偶数个星号待改写，乙就输定了.

8·98　设在 $n\times n$ 个方格的正方形表格中标定 $n-1$ 个方格.试证可以通过行与行之间的交换和列与列之间的交换，使得所有标定方格都在表格的主对角线的下方.

（第 16 届全苏数学奥林匹克，1982 年）

［证］　显然，表格中至少有一行和一列中没有标定方格.把不含标定方格的一列与最右一列对换，再把所得表格的最下面一行与至少包含一个给定方格的行对换.于是问题就化归为 $(n-1)\times(n-1)$ 的情形.

8·99　已知一个 $m\times n$ 的方格表，每个方格中填有一个实数.现规定可以同时改变某一行或某一列中所有数的符号.试证必能经过若干次变号，使得数表中任何一行以及任何一列的所有数之和都是非负的.

（第 1 届全俄数学奥林匹克，1961 年）

[证]　记数表中的 mn 个数的和为 S. 因为当将行与列中的数任意变号时,所得到的不同数表只有有限多个(2^{m+n-1} 个),故必有一个数表使 S 达到最大值. 这个数表便满足题中的要求.

若不然,设数表中有一行数之和是负的. 于是当将这一行数同时变号时,将使和数 S 的值增大,矛盾.

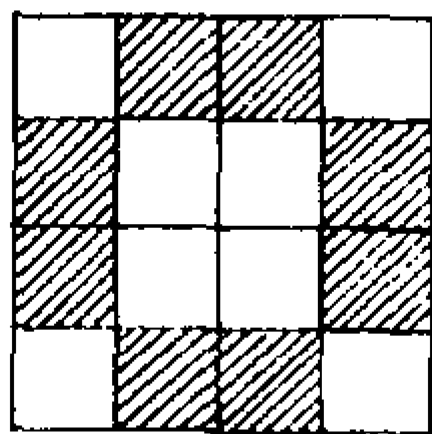
8·100　(1) 如图,在 4×4 的正方形方格表的每个方格中已填好一个"+"或"−"号. 可以同时改变某一行,某一列或平行于对角线的直线中所有方格中的符号(特别地,可以改变正方形角上一个格子内的符号). 求证无论改变多少次符号,表格中的符号都不可能全变成正号.

+	−	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

(2) 在 8×8 的国际象棋棋盘上的一个非角上的方格中填写负号,而在其余所有格中都写上正号. 可以同时改变某一行,某一列或某条平行于对角线的直线中的所有方格中的符号(特别地,可以改变角上一个方格中的符号). 求证无论改变多少次符号,总不能得到全是正号的棋盘.

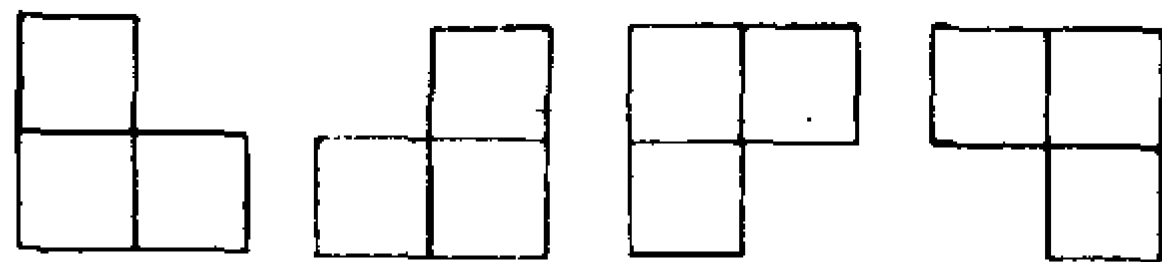
(第 2 届全苏数学奥林匹克,1968 年)

[证]　(1) 容易看出,与正方形的边或者对角线平行的每一条直线都与右图中画有阴影的 8 个方格中的偶数个方格相交. 因此,这些阴影方格中的负号个数的奇偶性在改变符号的操作下是不变的. 既然开始时有一个负号,所以无论怎样操作下去,也不能使方格表中的符号全变成正号.



(2) 无论题中所给的惟一负号在哪一个格子中,我们总可以从 8×8 方格表中画出一个 4×4 的正方形,使得负号的位置与(1) 中一样. 从而将问题化归为(1) 的情形.

8·101　设有一块有 9×9 个方格的正方形方格板,其上的每个方格都涂有黑白两色之一. 我们把右图所示的 4 种三联格统称为"角形". 规定每次操作可将一个角形中的 3 个方格同时改变颜色,即黑格改涂白色而白格改涂黑色. 求证经过有限多次操作,总可



将方格板上的所有小方格都变成白色.

(第20届全俄数学奥林匹克,1993年)

[证] 考察一个2×2的正方形中小方格的颜色改变的情形.第1次操作改变A,B,C3格的颜色;第2次操作改变A,B,D3格的颜色;第3次操作改变A,C,D3格的颜色.则操作3次后,方格A改变3次颜色而方格B,C,D都改变两次颜色.从而进行3次操作相当于保持B,C,D3格的颜色不变而只改变方格A的颜色.这就是说,可以经过3次操作而改变方格板上任一方格的颜色而保持所有其他方格的颜色不变.由此可知,可经过有限多次操作而将方格板上的所有黑格都变成白格.

A	B
C	D

8·102 在1000张卡片上分别写上自然数1,2,…,1000(每张卡片上写1个数),然后用这些卡片盖住1×1994矩形中的某1000个方格,其中每个方格与卡片大小一致.如果放有写着自然数n的卡片的方格的右侧邻格是空着的,则可将写有$n+1$的卡片移过来盖住这个空格,这叫做移动一次.求证不可能进行多于50万次这样的移动.

(第20届全俄数学奥林匹克,1994年)

[证] 按题中规定,写有1的卡片是不会被移动的.因此,写有2的卡片至多可被移动1次,写有3的卡片至多可被移动2次.设写有k的卡片至多移动$k-1$次.这时,写有$k+1$的卡片如果不在卡片k的右邻格,则它可移动1次到右邻格中.以后仅当卡片k移动1次时,卡片$k+1$才有1次移动的机会,故卡片$k+1$至多移动k次.由数学归纳法知卡片n至多移动$n-1$次对所有n成立.

因而,所有卡片所能进行移动的总次数不超过

$$1+2+\cdots+999=999\times1000\times\frac{1}{2}<500000.$$

8·103 一张无穷大的方格板的每个方格的边长为l.在其中一个方格正方形$ABCD$的4个顶点处各有一只青蛙.每分钟都有一只青蛙跳跃并从原位置跃到关于另外一只青蛙所在点对称的位置上去.求证这4只青蛙不可能在某一时刻处于一个更大的正方形的4个顶点上.

(第57届莫斯科数学奥林匹克,1994年)

[证] 显然,每次跳跃时起点和对称中心都是方格板的结点,所以落点也是方格板的结点.因此,任何两只青蛙之间的距离都不会小于

l. 从而若 4 只青蛙在某一时刻位于边长为 h 的某个正方形的 4 个顶点上，则必有 $h \geqslant l$ 而绝不能有 $h < l$.

设结论不成立，于是必有某一时刻，使 4 只青蛙分别位于一个边长 $h > l$ 的正方形 $EFGH$ 的 4 个顶点上. 这样一来，从正方形 $EFGH$ 开始按反向进行跳跃，则 4 只青蛙又可跳回到正方形 $ABCD$ 的 4 个顶点上. 这表明从边长较大的正方形可以跃到边长较小的正方形. 按比例缩小后照样进行跳跃，从正方形 $ABCD$ 出发又可跃到边长更小的正方形的 4 个顶点上，矛盾. 所以 4 只青蛙不可能在某一时刻处于一个边长更大的正方形的 4 个顶点上.

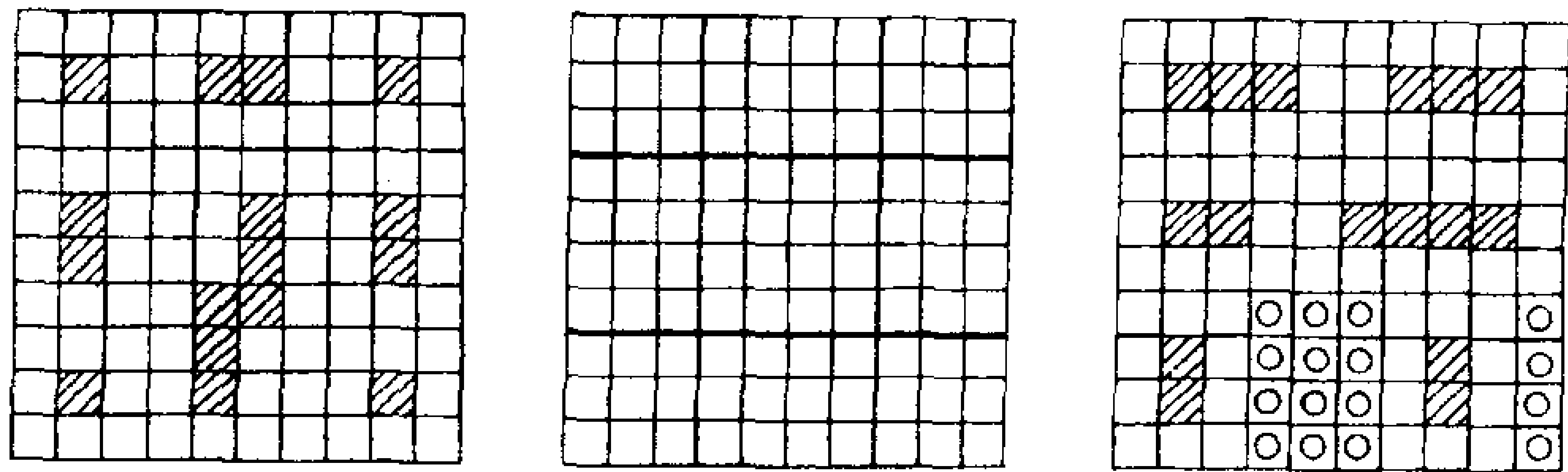
8·104 要在一张 10×10 的方格纸上摆放下列 10 张硬纸片，其中 1 张 1×4 的，2 张 1×3 的，3 张 1×2 的和 4 张 1×1 的，使得摆放之后，纸片之间不能有公共点，连公共顶点也不能有，但纸片可以沿着方格纸的边沿来放(纸片要放在以网格线为边的矩形中).

求证(1) 如果按照纸片的规格由大到小的顺序依次摆放，即先放 1×4 的，再放 1×3 的，1×2 的，最后放 1×1 的，则这一过程必可顺利进行完毕，并且在过程的每一步，都只需关心本次怎样去放，而不必顾及后面的步骤.

(2) 如果按照由小到大的顺序依次摆放纸片，则可能出现不能继续摆放下一张的情况. 试举例说明之.

(第 57 届莫斯科数学奥林匹克，1994 年)

[证] 先举例证明(2) 成立. 在下面左图中，已经放好了 9 张较小纸片的位置. 易见，无法按题中要求放入最大的 1×4 纸片. 这表明可能出现中途不能继续摆放下一张纸片的情况.



再证(1). 将 10×10 的方格纸分成 9 个矩形区域如上面中图所示. 按由大到小的顺序放置硬纸片时，前 3 张大纸片只需动用至多 6 个区

第八章 操作与游戏

组合卷

域.所以有足够的空格放置3张1×2的纸片.这6张纸片全部放好后，所占据的方格连同“禁格”至多共有84个方格.换句话说,至少还有16个“自由格”上面右图中画有小圈的16个方格,即在这样方格中的任何一个上放置1×1的纸片时,与前面的纸片之间都没有公共点.

显然,只须再证从任何16个方格中必可选出4个方格,使得它们之间两两没有公共点.为方便起见,我们称有公共点(包括公共顶点)的两个方格是相邻的.下面我们证明一个更强的命题

引理　对所有非负整数n,从方格纸的任意$5n+1$个方格中,总可选出互不相邻的$n+1$个方格.

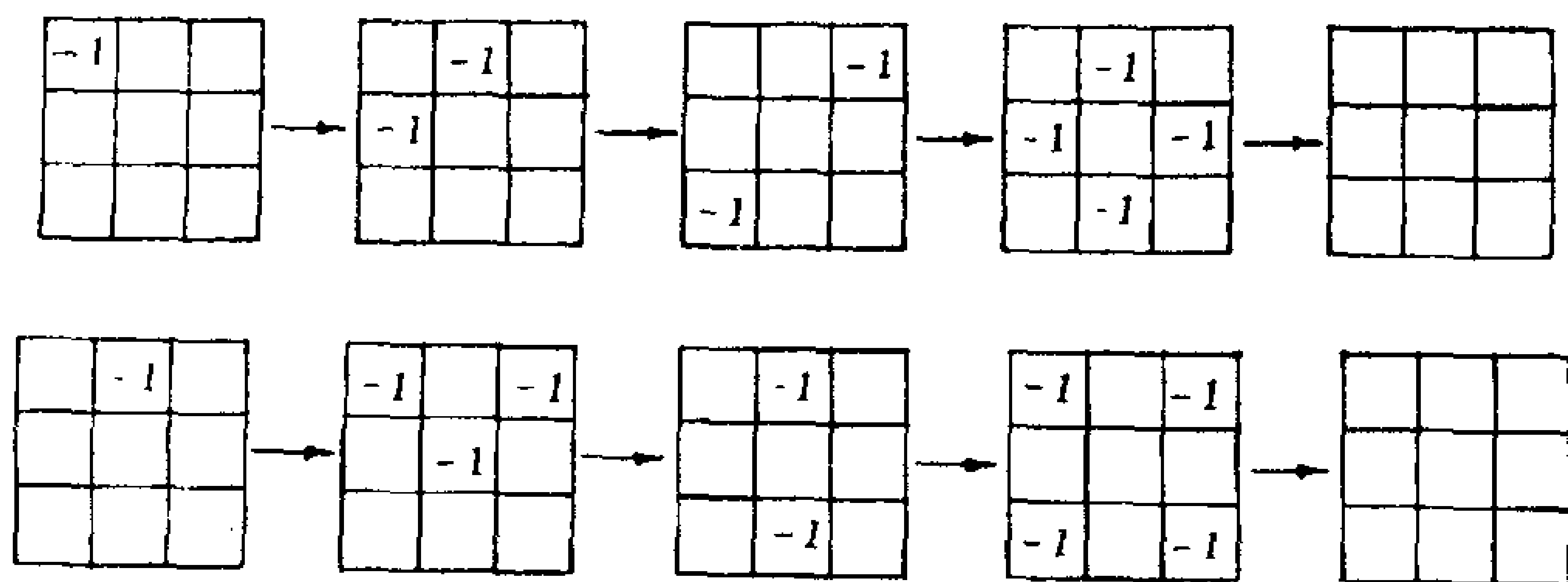
引理的证明　$n=0$时结论显然成立.设命题于$n=k$时成立.当$n=k+1$时,考察这$5k+6$个给定方格.设方格A是其中最左面一排方格中位于最上面的一个方格.这时,A的左面一列和上方都没有邻格,所以它至多有4个邻格.去掉方格A和它的至多4个邻格,至少还有$5k+1$个方格.由归纳假设知从中可以选出$k+1$个互不相邻的方格.再加上A即得$k+2$个互不相邻的方格.这就完成了归纳证明.

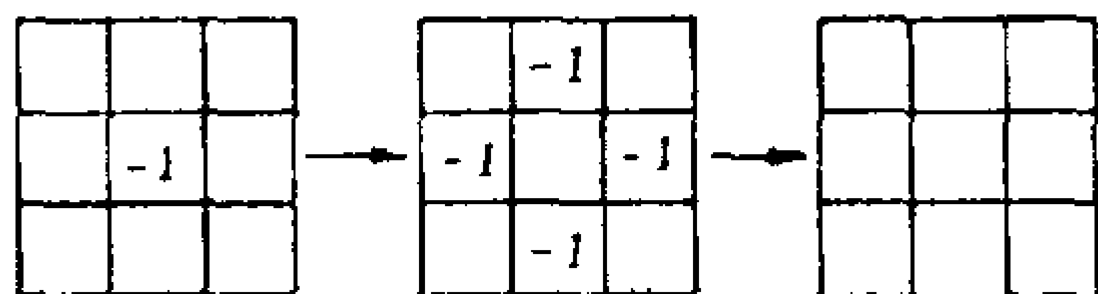
因$16=3\times5+1$,故由引理知,16个“自由格”中必可选出4个互不相邻的方格.将4张1×1的纸片分别放入这4个方格便满足题中的要求.

8·105　在3×3的方格表的每个方格中都写着1和-1之一,然后每格中的数用所有与它相邻(指有公共边)的方格中的数的乘积来代替.求证经若干次这样的变换后,所有方格中的数都是1.

(第18届全苏数学奥林匹克,1984年)

[证]　我们先看如下三个特殊数表的变化情形,每种情形下都只有一个方格中的数是-1,其余的都是1(表中空格未写出的数均为1).





可见,这三种情形都是至多经过4次变换就全变为1.但任何一个数表都可分解成若干个这样数表的乘积(指对应方格中的数分别相乘),从而知任一数表都至多经过4次变换即可全变为1.

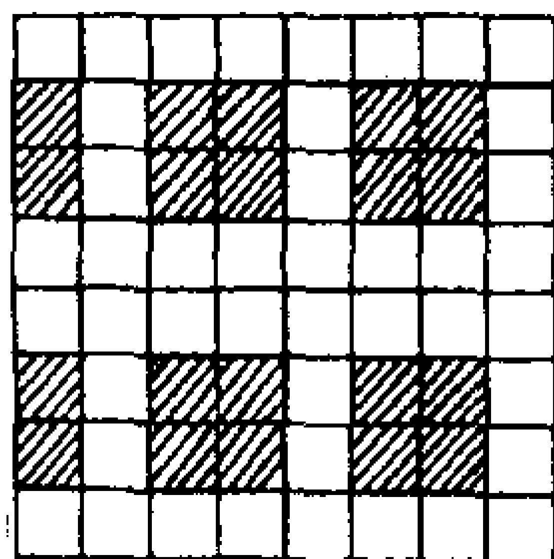
8·106　在一张 8×8 的方格表的每个方格中都填入一个自然数.允许每次挑出一个 3×3 或 4×4 的正方形表格并将其中的所有自然数都加1.能否经过有限次这种操作而使得表中的所有数都能被10整除?

(第35届莫斯科数学奥林匹克,1972年)

[**解1**]　由于题目中关心的是能否被10整除,故只须考察每个数的末位数字的变化情形.于是问题化为:在 8×8 的方格表的每个方格中填入一个一位数(即 $0,1,2,\cdots,9$),得到一张数表,能否经过有限次操作使数表中的64个数全变为"0"(模10为0)?这又等价于:能否从一张全"0"数表出发,经有限次操作而得到任一数表?

显然,每格均为一位数的数表共有 10^{64} 个.但在 8×8 的数表中,共有36个不同的 3×3 子表和25个不同的 4×4 的子表,共61个.而每张子表至多只能进行9次操作(操作10次模10等于没有操作).因此,从全"0"表出发,只能得到 10^{61} 种不同的数表.故知必有某个数表 A 是得不到的.从而当以它为初始数表时,不能经有限次操作而使表中所有数都能被10整除.

[**解2**]　在 8×8 的方格表中,我们将右图所示的20个方格涂成黑色.容易看出,在每个 3×3 或 4×4 的子方格表中,都恰有偶数个(2,4或6)黑格.因此,如果我们选取一个数表,使20个黑格中数字之和为奇数.则在操作过程中,24个黑格中的自然数之和永远为奇数.从而不能是10的倍数.这就表明不是对于任何数表都能经有限次操作而将表中64个数都变成10的倍数.



8·107　在一张有8行5列的矩形方格表中,每个方格中都填有1个自然数.在每一步中,允许将某一行的所有数同时加倍,或将某一列

的所有数同时减 1. 试证经若干步后,可将表中所有数都变为零.

(第 37 届莫斯科数学奥林匹克,1974 年)

[证] 先看第 1 列. 如果其中最小数为 1,则将每个最小数所在的行都先后同时加倍,于是最小数变为 2(如果开始时最小数不小于 2,则可省去这一步). 然后将第 1 列数同时减 1,于是最小数仍然是 1,但其他数都减少 1. 反复进行上述操作,可将第 1 列的所有数都变成 1. 于是只要同时减 1 就全变成了零. 然后再依次对第 2 列,第 3 列等按上述原则操作,最后即可使整个数表中的所有数都变为零.

8·108 在 3×3 的正方形表格中填上如图所示的数字,将该表进行如下操作:

0	3	2
6	7	0
4	9	5

每次操作是对表中相邻两数同时加上一个数(相邻是指有公共边的两小格),问能否经过若干次操作,使得

(1) 表格中各数均为 0.

(2) 表格中四个角的数为 1,其余均为 0.

(第 13 届全俄数学奥林匹克,1987 年)

[解] (1) 能够得到. 事实上经过 5 次操作即可:

0	3	2
6	7	0
4	9	5

$-2\rightarrow$

0	1	0
6	7	0
4	9	5

$-4\rightarrow$

0	1	0
6	7	0
0	5	5

$-5\rightarrow$

0	1	0
6	7	0
0	0	0

$-6\rightarrow$

0	1	0
0	1	0
0	0	0

$-1\rightarrow$

0	0	0
0	0	0
0	0	0

(2) 考虑这种操作的一般形式:

为此,设表格中第一行的数从左到右为 a,b,c,第二行从左到右为 d,e,f,第三行从左到右为 g,h,k.

a	b	c
d	e	f
g	h	k

按操作规则,任意相邻的数都加上同一个数,因此操作的每一步均不改变

$$S=(a+c+e+g+k)-(b+d+h+f)$$

的值.

而表格的初始状态 S 的值为

$$S=(0+2+7+4+5)-(3+6+9+0)=0.$$

要达到的状态 S 的值为

$$S=(1+1+0+1+1)-(0+0+0+0)=4.$$

因此不能实现满足题目要求的操作.

8·109　在 100×100 的方格表中的每个方格中都写有一个正号"+".允许同时改变整行与整列的所有方格中所写的符号.问能否经过若干次这种操作,使得方格表中恰有1970个负号"-"?

（第33届莫斯科数学奥林匹克,1970年）

［解］　容易看出,表格中有多少个负号,仅与改变多少行,多少列的符号有关,而与改变的是哪几行,哪几列及改变的先后次序无关.因此我们可以认为先将前 k 行依次变号,然后再将前 l 列变号.于是负号的个数为 $(k+l)100-2kl$.为满足题中要求,应有

$$(k+l)100-2kl=1970,$$

$$(50-k)(50-l)=1515.$$

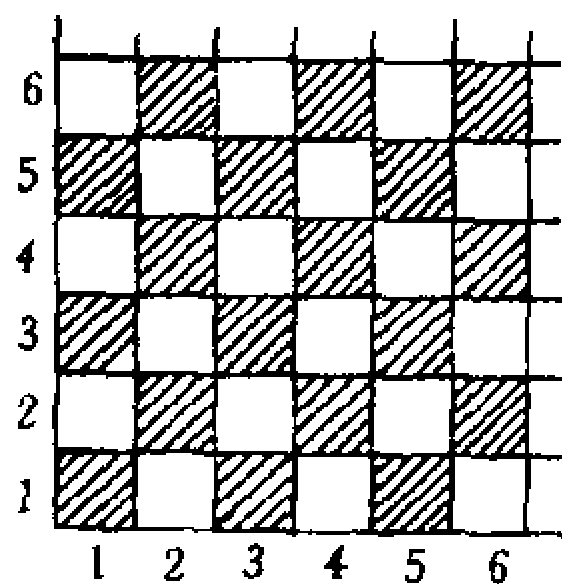
这样,问题化为求这个不定方程的 $0 \leqslant k, l \leqslant 100$ 的整数解.但1515的质因数分解为 $1515=3\times5\times101$,故知所要求的解是不存在的,所以无论怎样按规定操作,都不能使表中恰有1970个负号"-".

8·110　给定一个由 16×16 个小方格拼成的棋盘方格,这些小方格的颜色黑白相间,现定义一种操作 A:把位于第 i 行的所有小方格和位于第 j 列的所有小方格都换成相反的颜色($1\leqslant i, j\leqslant16$).我们把 A 称为在位于第 i 行第 j 列上的小方格上的一次操作.

试问能否经过若干次操作把棋盘上的所有小方格都换成同一颜色?证明你的结论.

（中国四川省数学竞赛,1988年）

［解］　在原棋盘的每一个小黑方格处(即图中 $i+j$ 为偶数的小方格处)各进行一次上述的操作就可以把所有小方格都变成白色的,或在原棋盘的每一个小白方格处(即图中 $i+j$ 为奇数的小方格处)各进行一次操作,就可把所有小方格都换成黑色的.



下面给出证明:

设 S_{ij} 为位于第 i 行第 j 列的小方格.

(1) 若 S_{ij} 为黑色的,除 S_{ij} 外,位于第 i 行和第 j 列的小黑方格各有7个,加上 S_{ij} 本身共有15个,由于这15个小黑方格上的每一次操作都改变一次 S_{ij} 的颜色,所以 S_{ij} 共改变了15次颜色,最后变成白色的.

(2) 若 S_{ij} 为白色的,则位于第 i 行和第 j 列的小黑方格各有8个,

共有 16 个,由于在这 16 个小黑方格上的每一次操作都改变一次 S_{ij} 的颜色,所以 S_{ij} 共改变了 16 次颜色,最后仍为白色的.

这表明可以经过若干次操作而使棋盘上的小方格成为同色.

8·111　表(a)是一个英文字母电子显示盘,每一次操作可以使某一行 4 个字母同时改变,或者使某一列 4 个字母同时改变.改变的规则是按照英文字母表的顺序,每个英文字母变成它的下一个字母(即 A 变成B,B 变成C,…,最后字母 Z 变成A).

S	O	B	R
T	Z	F	P
H	O	C	N
A	D	V	X

(a)

K	B	D	S
H	E	X	G
R	T	B	S
C	F	Y	A

(b)

问:能否经过若干次操作,使表(a)变为表(b)?如果能,请写出变化过程;如果不能,说明理由.

(第 4 届祖冲之杯初中数学邀请赛,1991 年)

[解 1]　为方便计,将表中的英文字母用它在字母表中的序号代替(即 A 是 1,B 是 2,C 是 3,…,Y 是 25,Z 是 26).

这样,表(a)与表(b)就相当于两个 4×4 的数表.而每一次操作就相当于使数表中某一行或某一列的每一个数被 26 除时的余数加 1.

我们只要证明表(a)的左上角的4个字母永远变不成表(b)左上角的 4 个字母就可以了.

为此,考察 2×2 的表$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,记

$$k=(a+d)-(b+c).$$

每次操作,有

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} a+1 & b+1 \\ c & d \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} a+1 & b \\ c+1 & d \end{pmatrix}$$

这时,变化后的 2×2 表的 k 值是不变的,即不论进行多少次操作,2×2 表的 k 值是一个不变量.

表(a)左上角的2×2表为$\begin{pmatrix} S & O \\ T & Z \end{pmatrix}$对应的数表为$\begin{pmatrix} 19 & 15 \\ 20 & 26 \end{pmatrix}$,其$k$值为

$$k=(19+26)-(20+15)=10.$$

表(b)左上角的2×2表为$\begin{pmatrix} K & B \\ H & E \end{pmatrix}$对应的数表为$\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$,其$k$值为

$$k=(11+5)-(2+8)=6.$$

两者k值不同,所以表(a)不能变成表(b).

[解2] 将26个英文字母按其在字母表中序号的奇偶性分别对应于1和0,表(a)和表(b)就分别化为表(a′)和(b′)(见右图).这时,表(a′)中共有5个1,表(b′)中共有8个1.因为在每次操作之下,表中1的个数的改变差只能为4,2,0,−2,−4之一,即1的个数的奇偶性不变.所以有5个1的表(a′)永远不能变成有偶数个1的表(b′).

1	1	0	0
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0

(a′)

1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1
1	0	1	1

(b′)

[解3] 只看表(a)和(b)的中心4个方格的字母的变化情形,并将其中字母按其在字母表中序号的奇偶性分别对应于1和−1(见右下图).然后将表(a″),(b″)的各4个数分别作连乘积,得到$P_{a''}=1$,$P_{b''}=-1$.每次操作都或者使表中4个数不变或恰有两个数变号,从而4数之积保持不变.由此可见,表(a″)永远不能变成表(b″),从而表(a)也永远不能变成表(b).

Z	F
O	C

E	X
T	B

−1	−1
1	1

(a″)

1	−1
−1	−1

(b″)

8·112 已知在$n\times n$的方格表的每个方格中都填有一个实数且使得每一行和每一列数的和都等于零.现允许对数表进行如下的操作:任取一行数,将其分别加到某一列的相应数上去(即该行的第i个数加到该列的第i个数上去,$i=1,\cdots,n$;每行中的数从左至右编号,每列中

的数由上而下编号),并同时从另一列数中分别减去这一行数.试证可以经过若干次操作,使表中的所有数都变为零.

(第22届全苏数学奥林匹克,1988年)

[证] 为书写简便起见,我们用$O_{j,k}^{i}$表示将第i行数加到第j列并从第k列数减去第i行数的操作.在我们对已知数表依次进行操作

$$O_{n,1}^{1},O_{n,2}^{2},\cdots,O_{n,n-1}^{n-1}$$

之后,数表对角线上的前$n-1$个数都变为0.

考察如下一串操作

$$O_{j,i}^{j},O_{i,j}^{i},O_{i,j}^{j},O_{n,i}^{i},O_{j,n}^{j}.$$

不难验证,对上面所得的数表进行这一串操作之后所得的新数表中,位于第i行和第j列交点处的数变为0,而数表中不在第n行和第n列的其余所有数保持不变.

对每一对$(i,j)(i\neq j,i=1,2,\cdots,n-1,j=1,2,\cdots,n-1)$都作上述这一串操作,便可得到新数表,使其中除第$n$行和第$n$列之外的数全都为0.

注意,题中所规定的操作保持数表的每行每列数之和为零这一性质不变,故最后得到的数表仍应具有这一性质.从而数表中的所有数全都为零.

8·113 现有64个1面涂黑而另5面涂白色的单位正方体,并将它们放在一块8×8的方格棋盘上,正方体的一面恰与一个方格重合,每个正方体的黑面可朝向任何方向.允许如下操作:将一行或一列正方体同时转动.求证必能经过若干次操作,使得所有正方体的黑面都朝上.

(匈牙利数学奥林匹克,1969年)

[证] 我们利用国际象棋的通用记号,用$a,b,c,\cdots,h$表示列,用$1,2,3,\cdots,8$表示行,例如正方体$a1$放在第一行最左边的位置上.我们用左,右,上,下,前,后来分别表示每个正方体的6个面.黑面可为这6个面的任何一面.

首先看正方体$a1$.转动a列和1行,可使$a1$的黑面向前.这样,当再转动a列时,$a1$的黑面保持向前不动.于是,可以转动a列和2行,使$a2$的黑面向前.再依次转动a列与3行,a列与4行,$\cdots$,直到a列与8行,使得正方体$a1,a2,\cdots,a8$的黑面全都向前.然后依次转动$1,2,\cdots,8$行,使a列的8个正方体全都黑面向上.再转动a列,使它们的黑面全

都向左.此后再不转动 a 列,而当转动其他列和任何行时,a 列立方体的黑面保持向左不变.

接着依次对 $b,c,\cdots,h$ 列的正方体重复上述操作过程,可使全部64个正方体全都黑面向左.最后,再依次将 $a,b,\cdots,h$ 列的每列都转动 $90°$,即可使64个正方体全都黑面向上.

8·114　在 10×10 的方格表的任意91个方格中各放1枚白子.每次从中取走一枚白子,放入一枚黑子,且黑子可放在任意一个空格内.然后再取走一枚白子,并放入一枚黑子.这样继续下去,直到不再有白子为止.求证必有某一时刻,在某两个相邻(有公共边)方格中放有异色的棋子.

(圣彼得堡数学奥林匹克,1989年)

[证]　若不然,则在取放棋子的过程中,任何两个同时放有棋子的相邻方格中的棋子都是同色的.

因为100个方格中放有91枚棋子,故方格表中始终有某一行和某一列全被棋子占满.这些方格彼此相邻,所放棋子当然都是同色的.我们称这19枚棋子构成的图形为十字架(实际上,有时退化为 T 形或曲尺形).开始时,十字架当然是白色的.因为每次操作都是取走一枚白子后放入一枚黑子,而新十字架和原十字架至少有两个公共方格,其中至少有1个是未动的,所以在操作过程中,十字架始终是白色的.但是,最后结果中十字架却是黑色的,矛盾.

8·115　在 5×5 个方格的正方形表格的一个方格中填写"-"号,在其余方格中均写上"+"号.每次允许从表格中任选一个 $k\times k(2\leqslant k\leqslant5)$ 的方格表并将其中的所有方格都改变符号.试问开始时应当将"-"号填在哪一个方格内,才能使得有可能经过若干次上述变号后,表中所有方格中的符号都是"+"号?

(第25届全苏数学奥林匹克,1991年)

[解]　我们把右图中写有字母 A 的所有方格称为 A 组.显然,任何一个 $k\times k(2\leqslant k\leqslant5)$ 的正方形都含有偶数个 A 组方格.因此,如果开始时的惟一负号在某个 A 格,那么在每步变号之后,总有奇数个 A 格中写有负号,当然不可能出现所有方格中都是正号的情形.

A		A	A	
	A			A
	A			A
A		A	A	
	A			A

将上图所示的图表分别旋转90°,180°和270°,不难看出,只要开始时的惟一负号不在中心方格内,就不可能经若干次变号而变为全是正号.

当开始时的惟一负号位于中心方格内时,只要经过下列的5次变号,即可变为全是正号:先取左下方的3×3正方形,再变右上方的3×3正方形,然后分别取余下的两个2×2的正方形,最后将整个5×5的正方形变号.

8·116　在8×8方格表右上角的方格内放有1枚黑棋子.以后每一次允许在表中的任何一个空格内放置1枚白棋子,并且改变已放在相邻(具有公共顶点)方格中的棋子的颜色(白改黑,黑改白).问能否出现方格表上全部方格都放有白子的结局?

(圣彼得堡数学奥林匹克,1991年)

[解1]　不能出现.每当在一个空格内放置1枚棋子时,就用线段将该方格的中心与相邻的空格的中心连结起来(只要还有空格存在).显然,最后的结果是除了右上角的方格未参与连线之外,其他的每两个相邻方格的中心都恰好连有1条线段,从而所连的线段总数为奇数.从而连线过程中必有某一方格放入白子时连出奇数条线段,即它有奇数个相邻方格.因此,在改换颜色之后,这个方格中的棋子是黑色的.

[解2]　不能出现.如果最后结局是所有方格中都是白子,则因放入时除1个黑子外都是白子,故总共改变颜色的次数(1个方格中的棋子改变1次颜色算1次)为奇数.

另一方面,方格表内部每个结点是4个方格的公共顶点,组成两对斜相邻的方格,在放入棋子的过程中恰发生两次颜色改变.方格表内部每条边(方格的边)恰是1对相邻方格的公共边,恰发生1次颜色改变.由对称性知发生颜色改变的总次数为偶数,矛盾.所以不会出现所有方格中都放有白子的结局.

8·117　设有9个盒子排成3×3的正方形和足够多的黑白石子.甲乙二人玩放石子的游戏:每次由一人将3粒石子放入同一行或同一列的3个盒子中,这3粒石子也不必同色.每个盒子中不能装有异色的石子.如果有人将1粒白石子放入装有黑石子的盒子中,则将这粒白石子与1粒黑石子同时从盒中取走.当中央与四角的盒子各有1粒黑子,而其他盒子都空着时,游戏结束.若在游戏的某一阶段,有x个盒子各

含一粒黑石子而其余的盒子都空着,求 x 的所有可能值.

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)

[解] 显然,x 可以为 3,6,9,4(先放一行黑子,再放一列石子,其中2粒黑子和1粒白子,使白子与先放的黑子抵消1个),5(先放两行黑子,然后放一列石子,其中2粒白子和1粒黑子,使两粒白子与先放的黑子抵消 2 个).

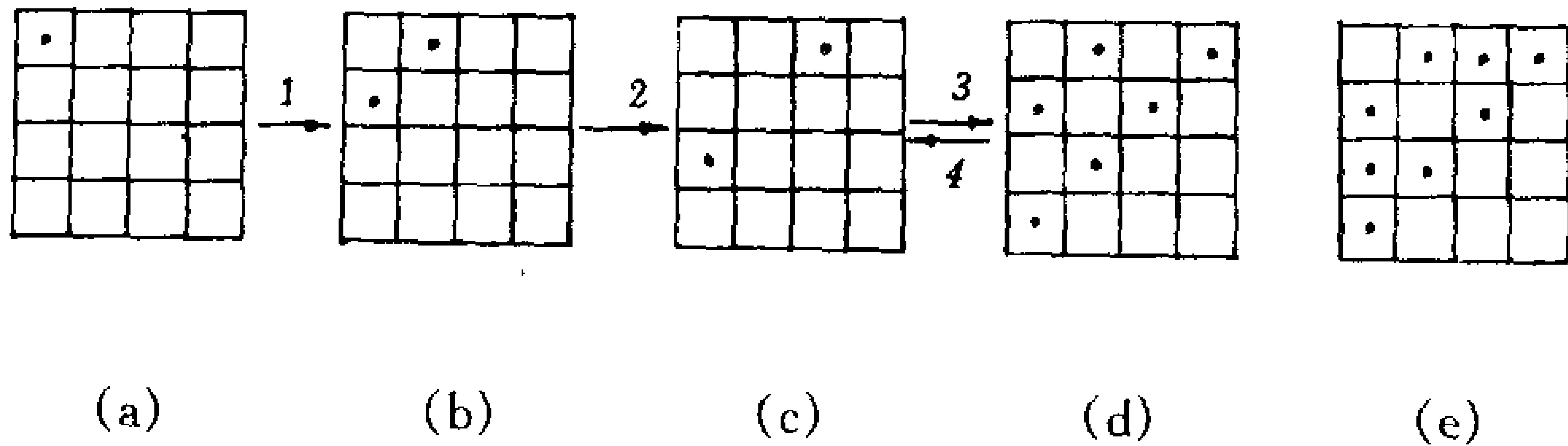
下面证明,x 不能取得 1,2,7,8. 注意,无论 x 为 1 或 2,总可从 3×3 正方形中选定两行两列,使这两行两列相交的 4 个盒子中只有 1 个盒子中放着 1 粒黑子,另 3 个盒子都空着. 类似地,在 x 为 7 或 8 时,也可以选出这样 4 个盒子,其中 3 个盒子中各装着 1 粒黑子而另 1 个盒子空着.

将每个黑子对应于 1,白子对应于 -1 并仅仅考察上面选定的 4 个盒子. 易见,每次放石子后,都使得 4 个盒子所对应的数之和 S 增加 2,0 或 -2,即保持和 S 的奇偶性不变. 因为开始时盒子全都空着,故 S 总为偶数. 但在上面选出的 4 个盒子中共有 1 或 3 粒黑子,对应的和数 S 为奇数,矛盾. 这表明 x 不能取得 1,2,7,8.

8·118　在平面上给出一个 9×9 的方格表,并在其中的每一方格中都任意地填入 $+1$ 或 -1. 下面一种改变填入数的方式称为一次变动:对任意一个小方格,将与此格有一条公共边的所有小方格(不包括此格本身)中的数作连乘积. 于是每取一格,就可算出一个数. 在所有小格都取遍后,就将原格中的数全部擦掉而将这些算出的数填入相应的方格中. 问是否总可以经过有限次变动,使得所有小方格中的数都变为 $+1$?

(第 7 届中国中学生数学冬令营,1992 年)

[解 1] 首先,对于 2×2,3×3 的方格数表,都可经过有限次变动而使表中的所有数全为 $+1$. 但是,对于 4×4 的数表,答案是否定的.



(a)　(b)　(c)　(d)　(e)

对于 4×4 的方格数表，我们从最简单的初始状态入手：左上角方格中的数为 -1，其余的数均为 $+1$. 容易看出，它在前 4 次变动后所得的数表如下(其中黑点表示 -1，空格表示 $+1$，下同)：

易见，后两个数表互变. 这就表明变动下去时，数表中总有 -1. 稍加注意还可发现，当将数表(c)和(d)对应数相乘时，就得到数表(e)，这是一个不变数表，即当按题中规定变动时，它总是变成它自己.

利用上面的数表(e)，可以对称地拼成 9×9 的不变数表(图(f)). 这就证明并不是所有 9×9 的数表都能经过有限次变动而使表中的所有数都变为 $+1$. 当然，分别从数表(c)，(d)出发，按类似方法拼成 9×9 的数表，则所得的两个 9×9 数表也是互变的. 从而也可得到同样的结论.

(f)

[解 2] 注意，当我们在表中一行相间地填入 -1 和 $+1$ 并按规则变动时，这些 -1 只是从一行变到相邻的行，行本身的结构则不变. 因而，当我们从图(g)开始操作时，只要注意哪几行有 -1 就够了. 这时有

$$(1,9)\xrightarrow{1}(2,8)\xrightarrow{2}(1,3,7,9)\xrightarrow{3}(4,6)\xrightarrow{4}$$
$$(3,7)\xrightarrow{5}(2,4,6,8)\xrightarrow{6}(1,9).$$

(g)

这表明数表(g)的变化周期为 6，即经过 6 次变动后，又变回到数表(g). 从而知本题的答案是否定的.

[解 3] 考察一个最简单而又对称的数表，即中心方格中的数为 -1，其他方格中都是 $+1$ 的数表的变动情形. 具体地依次画出数表列即可发现，第 8 次变动后所得的数表与第 2 次变动后所得的数表相同(图(h))，即我们得到了一个周期为 6 的周期数表列，其中的每个数表中都有 -1. 从而知本题的答案是否定的.

(h)

8·119 设有一张 $m\times n$ 的矩形方格表的每个方格中都填有一个

自然数.每次操作可以将一对相邻方格中的两个数同时加上一个整数，使所得的数为非负整数.试求可以经过若干次操作而使表中所有数均为 0 的充分必要条件.

(第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年)

[解] 记第 i 行 j 列的数为 a_{ij},则数表中所有数都能变为 0 的一个必要条件是

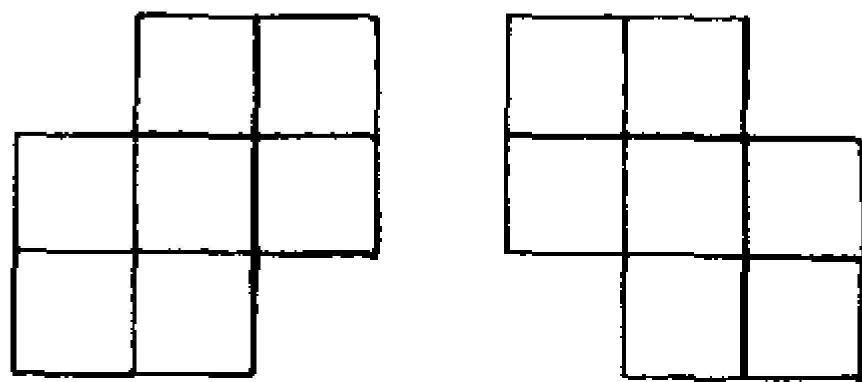
$$\sum_{\substack{2 \mid (i+j) \\ 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}} a_{ij} = \sum_{\substack{2 \nmid (i+j) \\ 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}} a_{ij}. \qquad ①$$

事实上,因为每次操作过程中,① 式左右两端同时加上同一个整数且最终各数均为 0,所以开始时 ① 式两端必相等.

下面证明 ① 还是充分条件.从表中第 1 列开始.设第 1 列的前 3 行中的数依次为 a,b,c.若 $a > b$,则将 b 和 c 同时加上 $a-b$,然后再将 a 与 $b+(a-b)=a$ 同时加上 $-a$,便可使第 1 列的前两个数都变为 0.若 $a \leqslant b$,则将 a 和 b 同时加上 $-a$.这样进行下去,数表总可变成下列两种情形之一:

若 $g \leqslant h$,则将 g 与 h 同时加上 $-g$.若 $g > h$,则将 r 与 h 同时加上 $g-h$,然后将 g 与 $h+(g-h)$ 同时加上 $-g$.总之,我们总可以使第 1 列的数全变为 0.这样继续下去,可以使除了第 n 列有 1 个数可能非零之外的所有其余的数都是 0.再由条件 ① 知,表中的所有数都是 0.这表明条件 ① 就是所求的充分必要条件.

8·120 在 $m \times n$ 个方格的矩形方格表的每个方格中都填有一个 $+1$ 或 -1.每一步允许同时改变右图所示的两种图形之一的 7 个方格中的所有数的符号.问对于怎样的 m 和 n,可以通过有限次这样的变号,使得数表中的所有数的符号全都变得与原来的符号相反?



(a)

(原苏联教委推荐试题,1991 年)

[解] (1) 在 3×3 的方格数表中分别作图(a) 所示的两种图形的变换各一次,结果是恰好将 4 个角格中的数变号(即图中标有星号的 4 个方格中的数变号).将这样的变换对于 4×4 的方格表中的每个 3×3 的数表施行一次,则恰好将 4×4 数表中的所有数的符号全部改变(参看图(b)).因此,当 m 和 n 都是 4 的倍数时,可将 $m\times n$ 数表分成若干个互不相交的 4×4 数表并对每个 4×4 数表施行上述变换,即可将 $m\times n$ 数表中的所有数的符号全部改变.

*		*
*		*

1	2	1	2
3	4	3	4
1	2	1	2
3	4	3	4

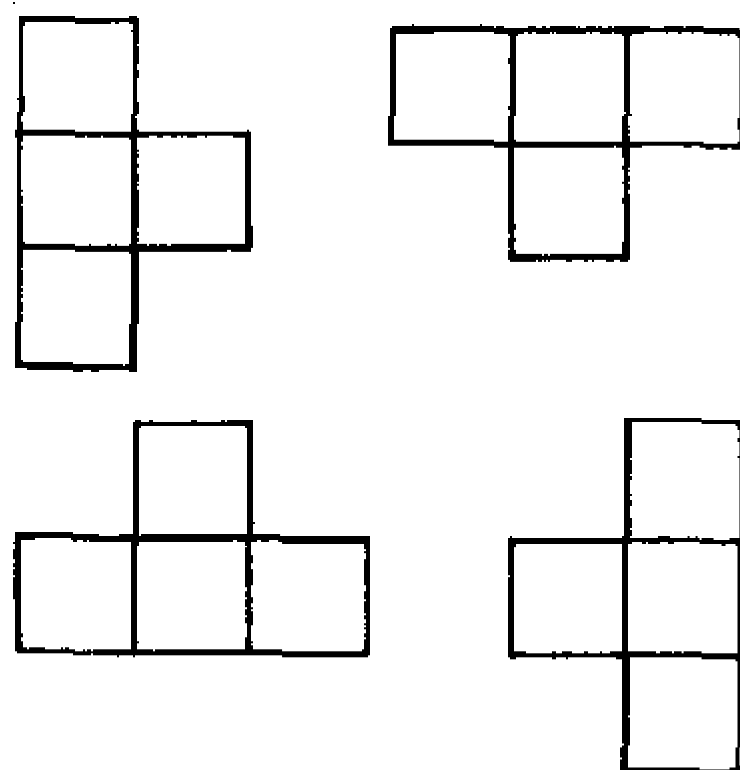
(b)

(2) 设 m 与 n 之一不是 4 的倍数,不妨设为 m.选定方格表的一条长为 m 的边,并将靠这条边的一列方格称为第 1 列,与第 1 列相邻的一列方格称为第 2 列.假定可以通过一系列变换使表中所有数都变号,我们将每个方格中的数在变换过程中所经受的变号次数称为该方格的"度",于是每个方格的度都是奇数.

(i) 设 m 为奇数.由于在每次变换中,第 1 列数或有两个变号,或者全未变号,从而第 1 列方格的度数之和为偶数.由于 m 为奇数,故第 1 列方格中至少有 1 个方格的度数为偶数,矛盾.

(ii) 设 $m=4k+2$,其中 k 为正整数.由于每次涉及第 1 列的变换恰改变其中两个数的符号,所以涉及第 1 列的变换必有奇数次.在每一次这样的变换中,第 2 列中都恰有 3 个数被改变符号.而对那些不涉及第 1 列数的变换,则或者改变第 2 列中两数的符号,或者不改变第 2 列中任何数的符号.从而第 2 列数的变号次数之和为奇数.但由于每个方格的度数均为奇数,故第 2 列方格的度数之和为偶数,矛盾.

综上可知,当且仅当 m 和 n 都是 4 的倍数时,题中的要求可以实现.



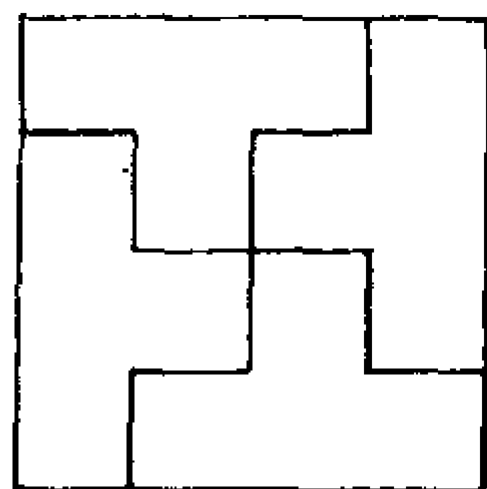
(a)

8·121　在一块 $n\times n(n\geqslant3)$ 个方格的国际象棋棋盘上,每次允许将右图所示的图形之一中的 4 个方格全部改涂为相反的颜色

(即白涂黑,黑涂白).问能否经过若干次操作,使得棋盘中的所有方格全都改涂为相反的颜色?

(原苏联教委推荐试题,1990年)

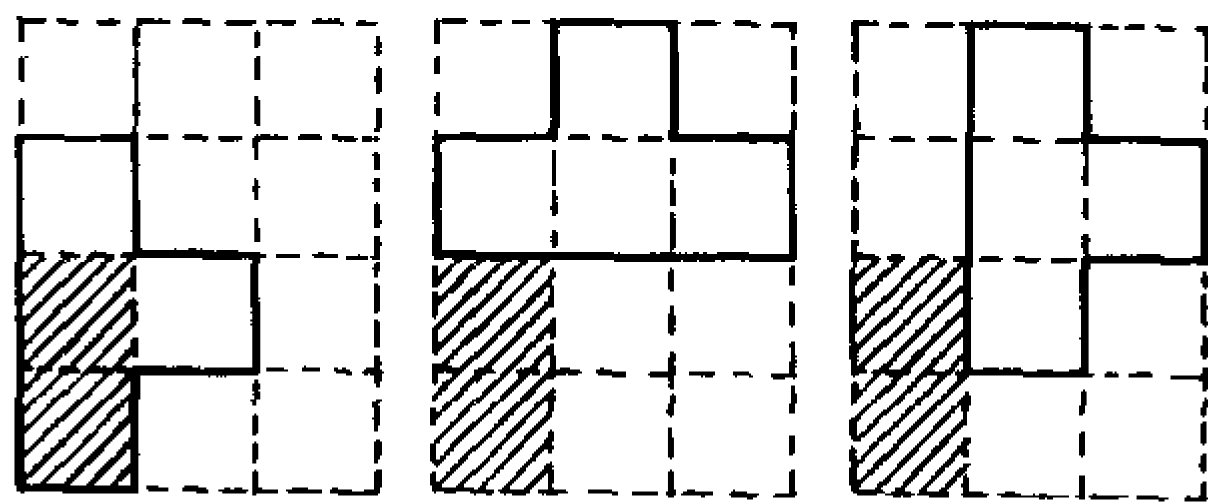
[解] (1)因为在如图所示的4个方格中,总是3黑1白或1黑3白,所以在每次改涂前后,棋盘中黑格与白格个数之差模4不变.对于 n 为奇数的情形,最初的差模4等于1(假设4个角上的方格都是黑色的),若能实现满足要求的改涂,则黑格与白格的个数之差模4等于3,此与差模4不变矛盾.可见,当 n 为奇数时,满足要求的改涂方法是不存在的.



(b)

(2)当 $n=4k$ 时,可将 $4k\times 4k$ 的棋盘分成 k^2 个 4×4 的正方形,然后像图(b)那样将 4×4 的正方形分成4块并各进行一次改涂,即可成功.

(3)当 $n=4k+2(k\geqslant 1)$ 时,可先分成一个 $4k\times 4k$ 的正方形,剩余部分则分成一些 1×2 的小矩形.由(2)知,对于 $4k\times 4k$ 的正方形可以实现满足要求的改涂.至于对 1×2 的小矩形,可以通过"借用"矩形以外的方格,按图(c)所示的步骤分3步进行,每步都将粗实线所界的4个方格改涂,结果是阴影线所示的两格改变颜色,而其他各格都恢复原色.这种借用均可在棋盘之内进行而无需越出棋盘的边界.所以,这时整个棋盘的改涂也是可以实现的.



(c)

综上可知,当且仅当 n 为不小于4的偶数时,题中要求的改涂是可以实现的.

8·122 在正方形的某个顶点放1根火柴,其他3个顶点空着.允许进行如下操作:从某个顶点移走任意多根火柴,同时在该顶点的两个相邻顶点处放上火柴,根数之和等于移走火柴根数的两倍.能否经过若干次操作,使得各顶点处的火柴根数(按逆时针顺序)为1,9,8,9?

(中国国家集训队训练题,1990年)

[解] 记正方形 4 个顶点处的火柴根数依次为 a_1,a_2,a_3,a_4,并令

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4.$$

则在题中规定的操作之下,数 S 是模 3 不变的.但开始时 $S = 1$,而当 4 个顶点的火柴根数依次为 1,9,8,9 时,$S = -9 \equiv 0 \pmod 3$,可见,题中所论的情况是不会出现的.

8·123 在正 n 边形的每个顶点都放置一个数,其中有 $n-1$ 个是 0 而另 1 个是 1.允许每次将某个子正 k 边形的 k 个顶点上的数全都加 1.能否经过若干次操作而使得 n 个顶点上的数全都变得相等?

(圣彼得堡数学选拔考试,1993 年)

[解] 不能实现.

将正 n 边形的中心记为 O,将第 i 个顶点 A_i 上所放的数记为 a_i, $i = 1,2,\cdots,n$.令

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{OA_i}.$$

易见,在满足题中要求的操作之下,向量 $\vec{S}$ 是不变的.当然有 $\vec{S} \neq 0$.但若经若干次操作后使 n 个顶点上的数全都相同,则相应的向量 $\vec{S} = 0$,矛盾.

8·124 在正 25 边形的顶点上分别写上整数 $a_1,a_2,\cdots,a_{25}$,其中 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{13} = 1, a_{14} = a_{15} = \cdots = a_{25} = -1$.对这一圈数进行如下操作:在每一个数上都加上它下一个位置的数,即 a_1 上加 a_2,a_2 上加 a_3,$\cdots$,在 a_{25} 上加 a_1,并用所得的和数 $b_1,b_2,\cdots,b_{25}$ 来代替原来的数 $a_1,a_2,\cdots,a_{25}$.接着对这圈新数再进行同样的操作.如此继续下去,共进行 100 次操作.求证在所得到的 25 个整数中,必有 1 个数大于 10^{20}.

(第 34 届莫斯科数学奥林匹克,1971 年)

[证] 我们来考察一圈数之和 S 的变化情形.开始时,$S(0) = 1$.操作一次,变为 $S(1) = 2$,而且每操作一次,和数就增加一倍,故有

$$S(100) = 2^{100} > 10^{25}.$$

因此,25 个数中最大的一个数不小于

$$\bar{a} = \frac{10^{25}}{25} > 10^{23} > 10^{20}.$$

8·125　时针的圆形钟面字盘(圆周上写有 1,2,…,12)的中心轴固定在黑板上,钟面能绕轴旋转 30° 的任意整数倍角度.开始时,在钟面每个数所对应的黑板处均写上零,然后转动钟面,每次钟面停止时,都将钟面上每个数加到黑板上对应位置的数上.

试问,经过若干次转动后,是否能够使黑板上所有数均为 1984?

(第 10 届全俄数学奥林匹克,1984 年)

[解]　不能.

由于每次转动钟面后加到黑板上所有数之和为

$$1+2+\cdots+12=78.$$

所以经过若干次转动后,黑板上的数字之和能被 78 整除.

若黑板上的所有数均为 1984,则这些数的和总为 12×1984,因为 $78\nmid 12\times1984$,所以上述操作目的不可能达到.

8·126　已知一个圆周上写有若干个实数.如果对于某依次相邻的 4 个数 a,b,c,d 有 $(a-d)(b-c)<0$,则可以交换 b 和 c 的位置.求证这样的交换只能进行有限多次.

(第 5 届全苏数学奥林匹克,1971 年)

[证]　考察圆周上相邻数的两两乘积之和 S 的变化情形.

由 $(a-d)(b-c)<0$ 可得 $ab+cd<ac+bd$.于是在交换 b 和 c 位置后,和数 S 中只有 3 项受到影响且有

$$ab+bc+cd<ac+cb+bd.$$

即交换后使和 S 变大.但和 S 只能取有限多个不同的值.

8·127　在圆周上按任意顺序写上 4 个 1 和 5 个 0,然后进行如下的操作:在相同的相邻数字之间写上 0,而在不同的相邻数字之间写上 1,并擦掉原来的数字.求证不论操作多少次,都不可能得到 9 个 0.

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1975 年)

[证]　若不然,设在进行 k 次操作后圆周上第 1 次出现 9 个 0.则在进行第 k 次操作之前,圆周上的 9 个数字都相同,只能都是 1.这又导致在进行第 $k-1$ 次操作之前圆周上的 9 个数字中的每相邻两个都互不相同.此不可能.

8·128　某校数学小组的学生做成一种计算器,按下按钮即可将四数组 (a,b,c,d) 变成四数组 $(a-b,b-c,c-d,d-a)$.试证如果开始的四个数不全相等,那么按若干次按钮后得到的四数组中至少有

一个数大于 1985.

（第 19 届全苏数学奥林匹克，1985 年）

［证］ 将第 n 次操作后所得的四数组记为(a_n,b_n,c_n,d_n). 显然有

$$a_n+b_n+c_n+d_n=0, n=1,2,\cdots. \quad ①$$

由 ① 有

$$\begin{aligned} a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2 &= 2(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+c_{n-1}^2+d_{n-1}^2)+2(b_{n-1}+d_{n-1})^2 \\ &\geqslant 2(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+c_{n-1}^2+d_{n-1}^2). \quad ② \end{aligned}$$

由 ② 递推得

$$a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2 \geqslant 2^{n-1}(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2). \quad ③$$

由此即可推知本题结论成立.

8·129 任意地将数 $1,2,\cdots,n$ 写在一个圆周上. 允许每一次交换相邻两数的位置，只要这两数之差的绝对值大于 1. 试证经过若干次这样的交换之后，可以使所有数按自然顺序排列于圆周上.

（第 15 届全俄数学奥林匹克，1989 年）

［证］ 设顺时针方向为正向. 首先，可以交换 1 与其他数的位置，使 1 与 2 相邻且 1 排在前面. 然后将 2 按顺时针方向交换并前进，直到与 3 相邻，接着再将 1 与其他数交换，使之与 2 相邻. 从而得到 1,2,3 按顺时针方向排列. 再用 3 倍的交换步骤，依次使 3 与 4,2 与 3,1 与 2 靠拢，于是 1,2,3,4 已经排好. 这样继续下去，最后便可使全部 n 个数都按顺时针方向排好. 显然，反向排列也是可以做到的.

8·130 设(a,b,c,d)是一组不全为 1 的正数，并按以下规则得到新的四数组(ab,bc,cd,da)，即将每一数乘以后一个数而第 4 个数乘以第一个数. 按照这个规则可依次作出第三组，第四组，等等. 求证在所得的数组序列中，不会再次出现(a,b,c,d).

（第 1 届全俄数学奥林匹克，1961 年）

［证］ 记 $abcd=p$，于是由四数组的生成规则便知，第二组的 4 数之积为 p^2，第三组的 4 数之积为 p^4，…，第 n 组的 4 数之积为 $p^{2^{n-1}}$. 显然，当 $p\neq 1$ 时，乘积数列是严格单调的，所以，四数组序列中的任何两项都不同.

设(a,b,c,d)在所论四数组序列中再次出现,于是有$abcd=1$.现在考察第二组的4个正数:ab,bc,cd,da.容易验证,第四组的4个数为$b^2c^2,c^2d^2,d^2a^2,a^2b^2$,即它们是第二组4个数的平方的重排.同理,对每个$n\in N$,第$2(n+1)$组的4个数都是第$2n$组的4个数的分别平方的一个重排.

如果$\max\{ab,bc,cd,da\}>1$,则第$2n$组的4个数中的最大者α_n将构成一个严格递增的数列,当然不会重复出现(a,b,c,d).故必有$ab=bc=cd=da=1$,即从第二组起,所有四数组均为$(1,1,1,1)$.既然(a,b,c,d)会再次出现,故有$a=b=c=d=1$,此与已知矛盾.

8·131 在圆周上放置2^n个数,每个数都是1或-1.按如下规则构造新数组:将每相邻两数的乘积写在该两数之间的圆弧上.在全部写好之后将原来的2^n个数擦掉,于是得到新数组并称之为一次操作.试证经过若干次操作之后,必能得到2^n个数全是1的数组.

(第1届全俄数学奥林匹克,1961年)

[证] 当$n=1$时,结论显然成立.设$n=k$时结论成立,让我们来考察$n=k+1$时的情形.将给定的2^{k+1}个数依次记为$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{2^{k+1}-1},x_{2^{k+1}}$.注意到$x_i^2=1$,便知前两次操作后所得的数组依次为

$$x_1x_2,x_2x_3,x_3x_4,\cdots,x_{2^{k+1}-1}x_{2^{k+1}},x_{2^{k+1}}x_1,$$

$$x_1x_3,x_2x_4,x_3x_5,\cdots,x_{2^{k+1}-1}x_1,x_{2^{k+1}}x_2.$$

容易看出,当把第二次操作后所得的新数组按奇偶写成两组

$$x_1x_3,x_3x_5,\cdots,x_{2^{k+1}-1}x_1,$$

$$x_2x_4,x_4x_6,\cdots,x_{2^{k+1}}x_2$$

时,恰与把已知数组按奇偶号码分成两组操作一次后所得的两个数组相同.同理,对任意$j\in N$,当把第$2j$次操作后所得的数组按奇偶号码写成两组时,二者恰好与把已知数组按奇偶分成两组分别操作j次后所得的两个数组相同.而分开所得的两个数组各有2^k个数,于是由归纳假设知操作若干次后两个数组中的数都将变为1,从而命题结论对$n=k+1$成立,这就完成了归纳证明.

8·132 正五边形的每个顶点对应于一个整数,使得这5个整数的和为正数.若其中3个相邻顶点所对应的整数依次为x,y,z且中间的

数$y<0$,则可进行如下操作:整数x,y,z分别换为$x+y,-y,z+y$.只要所得的5个数中还有负数,这种操作就继续进行.问这种操作是否进行有限多次后必定终止?说明理由.

(第27届国际数学奥林匹克,1986年)

[解1] 设5个整数x_1,x_2,x_3,x_4,x_5依逆时针方向顺次排列在正五边形的5个顶点上且有$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5>0$.考虑目标函数

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_5)^2+(x_4-x_1)^2+(x_5-x_2)^2. \quad ①$$

设$x_3<0$,于是操作一次后,(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)将变成$(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)=(x_1,x_2+x_3,-x_3,x_4+x_3,x_5)$.这时,

$$\begin{aligned}&f(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)\\&=(x_1+x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3+x_5)^2+(x_3+x_4-x_1)^2+(x_2+x_3-x_5)^2\\&=(x_1-x_3)^2+4x_1x_3+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_5)^2+4x_3x_5+(x_4-x_1)^2+x_3^2+2x_3(x_4-x_1)+(x_2-x_5)^2+x_3^2+2x_3(x_2-x_5).\end{aligned} \quad ②$$

将②与①相减,得到

$$\begin{aligned}&f(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)-f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\\&=x_3^2+2x_3(x_2-x_5)+4x_1x_3+4x_3x_5+x_3^2+2x_3(x_4-x_1)\\&=2x_3(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)<0.\end{aligned}$$

这表明每经一次操作,目标函数f的值至少下降2.因为f只能取非负整数值,故这种操作经有限多次后必然终止.

[解2] 考虑目标函数

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\sum|x_i|+\sum|x_i+x_{i+1}|+\sum|x_i+x_{i+1}+x_{i+2}|+\sum|x_i+x_{i+1}+x_{i+2}+x_{i+3}|, \quad ③$$

其中的求和号均表示对i从1到5求和且当$k>5$时,$x_k=x_{k-5}$.于是当经过一次操作而将(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)变成$(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)=(x_1,x_2+x_3,-x_3,x_4+x_3,x_5)$时,便有

$$f(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)=|x_1|+|x_2+x_3|+|x_3|+|x_4+x_3|+|x_5|+$$

$$|x_1+x_2+x_3|+|x_2|+|x_4|+|x_3+x_4+x_5|+|x_5+x_1|+$$
$$|x_1+x_2|+|x_2+x_3+x_4|+|x_4+x_5|+|x_3+x_4+x_5+x_1|+$$
$$|x_1+x_2+x_3+x_5|+|x_1+x_2+x_3+x_4|+|x_2+x_3+x_4+x_5|+$$
$$|x_4+x_5+x_1|+|x_3+x_4+x_5+x_1+x_2+x_3|+|x_5+x_1+x_2|. \quad ④$$

比较③、④两式可见,除④式右端倒数第二项与③式右端倒数第三项$|x_1+x_2+x_4+x_5|$之外,其余19项都相同(仅仅次序不同).因为$x_3<0, x_1+x_2+x_3+x_4+x_5>0$,故有

$$|x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5|\leqslant \max\{|x_1+x_2+x_3+x_4+x_5|,\ |x_3|\}<|x_1+x_2+x_4+x_5|.$$

这表明$f(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)<f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$.因此,这种操作进行有限多次后必然终止.

8·133 (1) 在正12边形$A_1A_2\cdots A_{12}$的顶点A_1上写着负号"-",在其余顶点上都是正号"+".可以同时在6个依次相邻的顶点上把现有符号改正相反的符号.试证无论经过多少次变号,都不可能使点A_2的符号变为负号,而在其余顶点上都是正号.

(2) 如果不是在6个顶点而是在4个依次相邻的顶点上改变符号,则上述结论仍然成立.

(3) 如果在3个依次相邻的顶点上同时变号,则(1)的结论仍然成立.

(第5届全苏数学奥林匹克,1971年)

[证] (1) 把12个顶点分成6组:$\{A_1,A_7\},\{A_2,A_8\},\{A_3,A_9\},\{A_4,A_{10}\},\{A_5,A_{11}\}$和$\{A_6,A_{12}\}$,每组的两个顶点相对.在每次改变符号时,每组点中恰有一点改变符号.因此,在第$2k-1$次改变符号后,后5组中每组的两个顶点的符号都不同;而在第$2k$次改变符号后,这5组中每一组的两个顶点都同号.故知不可能出现$\{A_2,A_8\}$两点异号而$\{A_3,A_9\}$两点同号的情形.

(2) 把12个顶点分成4组:$\{A_1,A_5,A_9\},\{A_2,A_6,A_{10}\},\{A_3,A_7,A_{11}\},\{A_4,A_8,A_{12}\}$.在每次操作中,每组3个顶点中恰有一个变号.因此可像(1)中一样地进行推理而得知,每组中负号数目的奇偶性在每次操作时都要改变.因而$\{A_2,A_6,A_{10}\},\{A_3,A_7,A_{11}\}$中负号数目的

奇偶性总是相同的.

(3) 把全部顶点分成3组:$\{A_1,A_4,A_7,A_{10}\}$,$\{A_2,A_5,A_8,A_{11}\}$,$\{A_3,A_6,A_9,A_{12}\}$.并像上面一样地进行推理即可.

8·134 在圆周上放有20个实数,允许将依次相邻放置的3个数x,y,z换成$x+y,-y,z+y$(仍按原来次序放置).假如开始时按顺时针方向依次放置着20个数$1,2,\cdots,9,10,-1,-2,\cdots,-9,-10$,问能否经过若干次上述变换而使数组变成$10,9,\cdots,2,1,-10,-9,\cdots,-2,-1$?

(圣彼得堡数学奥林匹克,1990年)

[解] 可以实现.设想在圆周上放置了20个整数$x_1,x_2,\cdots,x_{20}$,使得差值$x_2-x_1,x_3-x_2,\cdots,x_{20}-x_{19},x_1-x_{20}$恰为原来的数组$1,2,\cdots,9,10,-1,-2,\cdots,-9,-10$.因为原数组之和为0,这样做是可能的,例如可取0,1,3,6,10,15,21,28,36,45,55,54,52,49,45,40,34,27,19,10.不难验证,原数组中的变换$(x,y,z)\longrightarrow(x+y,-y,z+y)$就相当于新数组中的变换$(x_k,x_{k+1})\longrightarrow(x_{k+1},x_k)$,其中$y=x_{k+1}-x_k$,即原数组的允许变换变为新数组的相邻两数的交换.而新数组显然可以经过若干次相邻两数的交换而变成如下次序:$x_1,x_{20},x_{19},\cdots,x_2$,这时相应的差值数组$x_{20}-x_1,x_{19}-x_{20},\cdots,x_2-x_3,x_1-x_2$恰为$10,9,\cdots,2,1,-10,-9,\cdots,-2,-1$.

8·135 在圆周上放置了若干个实数,它们的和为正数.允许将依次相连放置的3个数x,y,z换为$x+y,-y,z+y$(仍按原来顺序摆放).求证利用这样的变换,仅可由原来的数组得到惟一的一组非负实数.

(圣彼得堡数学奥林匹克,1990年)

[证] 将所给的数组按顺时针方向记为$a_1,a_2,\cdots,a_n$.设$\{x_k\}$为另一无穷数组(下标k取遍所有整数),使得

$$a_j=x_{j+in+1}-x_{j+in},j=1,2,\cdots,n,i\in Z.\quad ①$$

令$S=a_1+a_2+\cdots+a_n$,于是对①求和便得

$$S=x_{k+n}-x_k,\quad k\in Z.\quad ②$$

容易验证,题中规定的对原来数组的变换$(a_{k-1},a_k,a_{k+1})\longrightarrow(a_{k-1}+a_k,-a_k,a_{k+1}+a_k)$等价于对新数组$\{x_k\}$作如下变换:将数列$\{x_k\}$中

所有形如

$$x_{k+in}, x_{k+in+1}, i \in Z$$

的相邻两项的数对同时交换位置.

考察在这种交换之下,有限数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的变化情形. 首先,由于其中任何相邻两项可以交换,故可以实现其中任何两项的位置的互换. 其次,当无限数列中的交换发生在 k 是 n 的倍数时,相当于有限数列中的 x_1 与 x_n 互换位置,但这时 $x_1 \longrightarrow x_n - S, x_n \longrightarrow x_1 + S$.

利用这种交换,我们可以首先将 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 中的最小数换到数列的首项,而将最大数换到数列的末项,即使 x_1 最小,x_n 最大. 如果这时有 $x_n \leqslant x_1 + S$,则只要再通过交换将中间的 $n-2$ 项从小到大排好就可以了. 如果 $x_n > x_1 + S = x_{n+1}$,则应将 x_1 与 x_n 互换并变为 $x_n - S, x_1 + S$. 对于得到的新数组,再重复上述过程,显然,重复有限次后,必可使得 $x_n \leqslant x_1 + S = x_{n+1}$. 于是再通过交换而使得中间 $n-2$ 项按从小到大的次序排好,最后得到新数列

$$x'_1 \leqslant x'_2 \leqslant x'_3 \leqslant \cdots \leqslant x'_n \leqslant x'_1 + S = x'_{n+1}. \qquad ③$$

易见,这时对应的圆周上的数组中的数都是非负的.

考察由 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 变到 $\{x'_1, x'_2, \cdots, x'_n\}$ 的过程可知 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n$,且两个数组存在一个双射(一一对应),使相应两数之差为 S 的整数倍. 又因后一数组满足条件 ③,故它被前一数组所惟一确定. 此外,尽管开头时数组 $\{x_k\}$ 的取法可以不同,但由 ① 知不同数组 $\{x_k\}$ 与 $\{\overline{x_k}\}$ 的对应项的差是常数. 因而这并不影响最后导出的非负实数组的值. 这就证明了非负实数组的惟一性.

8·136　在中心为 O 的正 n 边形的每个顶点上都放有数 $+1$ 和 -1 之一. 允许同时改变在某一正 k 边形顶点上的数的符号(k 边形的中心为点 O 且 k 可以等于 2).

(1) 求证当 $n = 15$ 时,存在 $+1$ 和 -1 的一种初始摆法,使得无论进行多少次变号都不能把所有顶点上的数全变成 $+1$.

(2) 当 $n = 30$ 时,求证与(1) 相同的结论.

(3) 当 n 是任何大于 2 的自然数时,求证与(1) 相同的结论.

(4) 对于任意自然数 n,试求满足以下条件的 $+1$ 和 -1 的不同摆法的最大个数 $K(n)$:任何一个摆法不能由另一个摆法经过若干次变

号而得到.例如证明 $K(200)=2^{80}$.

(第10届全苏数学奥林匹克,1976年)

[证] 首先指出,对于正 n 边形,其顶点上 $+1$ 和 -1 的不同摆法的种数为 2^n.如果两种摆法能经题中允许的变号操作而互变,则称两种摆法是等价的.任何两次操作的结果与操作的先后次序无关.将同一操作连续进行两次,相当于没有进行操作的恒等变换.因此,在整个操作过程中,可排除重复操作.也可以只限于进行在正 p($p\mid n$为素数)边形的顶点上改变符号的操作,因为其他操作可以分解为这种操作的乘积.这样的正 p 边形称为生成多边形.

(1) 当 $n=15$ 时,共存在8个生成多边形:5个正三角形和3个正五边形.用 E 表示单位摆法,即所有顶点都放置 $+1$ 的摆法.于是,任何等价于 E 的摆法都可以通过实施上述8种操作中的某些操作来实现.从而等价于 E 的不同摆法不超过 2^8 个,这当然少于所有摆法的总数,故知存在不等价于 E 的摆法.

(2) 当 $n=30$ 时,生成多边形的总数为 $15+10+6=31$.这时,生成多边形的个数大于顶点数,故像(1)中那样的方法是行不通了.为此,我们注意到由这些生成多边形对应的操作不是互相独立的,其中有的可以分解为另一些的乘积.例如,在关于正30边形的中心 O 对称的每两个三角形(或五边形)中只取其中的一个并将它的顶点改变符号,然后再于包含这个三角形的一个顶点的三(五)个"正二边形"上改变顶点的符号,这等价于改变另一个三角形(五边形)的顶点的数的符号.这样一来,生成多边形只剩下 $15+5+3=23$ 个.从而像(1)一样地可知存在不等价于 E 的摆法.

(3) 注意,对于任何 n,若记等价于 E 的所有不同的摆数法的总数为 $T(n)$,则对任何摆数法 A,等价于 A 的所有不同摆数法的总数也是 $T(n)$,因为它们可以分别由摆法 A 与 E 的等价类中的摆数法逐项相乘而得到.用 $K(n)$ 表示"等价类"的个数,于是有

$$K(n)T(n)=2^n.$$

设 n 有 s 个不同的素因数,且有

$$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_s^{a_s}. \qquad ①$$

令 $q=p_1p_2\cdots p_s$, $m=\frac{n}{q}$.把正 n 边形分解成 m 个正 q 边形,于是计算

$T(n)$ 的问题就归结为较简单的计算 $T(q)=T(p_1p_2\cdots p_s)$ 的问题，因为每一个生成 p_i 边形恰包含在一个 q 边形之中，换句话说，在不同的 q 边形中所进行的变号操作互不相关．因此有

$$T(n)=(T(q))^m,K(n)=(K(q))^m.$$

我们从 $s=2$ 开始，设 $n=p_1p_2$．把 n 边形的顶点用数 $0,1,\cdots,n-1$ 编号，并把这些数字写在 $p_1\times p_2$ 的表格中，使在同一列中的数在除以 p_1 时有相同的余数，在同一行中的数在除以 p_2 时有相同的余数．这样要求是可以做到的，因为任一小于 p_1p_2 的非负整数被分别除以 p_1,p_2 时的两个余数 (r_1,r_2) 所惟一确定．（参看上图，其中 $p_1=3,p_2=5,n=15$）正多边形的顶点上的数 +1 和 −1 的一种摆法对应于表格中的数 $\sigma(r_1,r_2)=+1$ 或 -1 的摆法（r_1 是行的号码，r_2 是列的号码）．例如当多边形的第 7 个顶点是 +1（−1）时，表格中第 2 行第 3 列的方格中应是 +1（−1）．于是，在正 p_1 边形和正 p_2 边形进行变号操作就分别对应于在表格 σ 中改变相应列和行的所有数的符号．这样一来，用这些操作总可以把任何一种摆法变为如下的摆法：表 σ 的第一行和第一列中都是 +1．我们称这样的摆法为“规范”的．可以证明，所有的规范摆法两两不等价．事实上，当改变表 σ 中行与列的符号时，乘积

	0	1	2	3	4
0	0	6	12	3	9
1	10	1	7	13	4
2	5	11	2	8	14

$$\sigma(r_1,r_2)\sigma(0,r_2)\sigma(r_1,0)\sigma(0,0) \qquad ①$$

的值保持不变，其中 (r_1,r_2)，$1\leqslant r_1\leqslant p_1-1$，$1\leqslant r_2\leqslant p_2-1$．而这样的一组值确定一个等价类．因此

$$K(p_1p_2)=2^{(p_1-1)(p_2-1)},T(p_1p_2)=2^{p_1+p_2-1}.$$

特别地有 $K(15)=2^8,T(15)=2^7;K(10)=2^4$．还可以求出 $K(200)$：$n=200=2^35^2,q=10,m=20,K(200)=(K(10))^{20}=2^{80}$．

对于 $s>2$，可类似地求出 $K(n)$．设 $q=p_1p_2\cdots p_s$，于是从 0 到 $q-1$ 的整数 k 由 k 分别除以 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 所得的 s 个余数 $r_1,r_2,\cdots,r_s$ 惟一确定（中国余数定理）．摆数法 $\sigma(r_1,\cdots,r_s)$ 是在数组 $\{r_1,r_2,\cdots,r_s\}(0\leqslant r_i\leqslant p_i-1,i=1,2,\cdots,s)$ 上取值为 ±1 的函数．这时，对正 p_i 边形顶点上的数作变号操作，就对应于将函数 $\sigma(r_1,r_2,\cdots,r_s)$ 在下列 p_i 个数组

$\{r_1^0,\cdots,r_{i-1}^0,r_i,r_{i+1}^0,\cdots,r_s^0\},r_i=0,1,\cdots,p_i-1$

上的值改变符号.因此,对于任一摆数法 σ,总可以经过适当操作而使

$$\sigma(r_1,r_2,\cdots,r_s)=1,\text{当 } r_1r_2\cdots r_s=0. \qquad ②$$

像上面一样,我们把满足条件②的摆数法称为是规范的.与 $s=2$ 的情形一样,任何两个不同的规范摆法互不等价.因此有

$$K(q)=2^{(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1)},K(n)=2^{\varphi(n)},$$

其中 $\varphi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_s})$.显然 $\varphi(n)<n$,故对任何自然数 $n\geqslant 3$,总有不等价于 E 的摆数法.

8·137　在圆周上排列着12个位置,在其中某4个相邻的位置上分别放着4枚棋子,颜色依次为红,黄,绿,蓝.每次移动,都可将其中任意一枚棋子从原来的位置出发,越过4个位置而移到第5个位置上,只要这个位置是空着的.而且规定移动往两个方向都可进行.现知移动若干次后,4枚棋子回到了原来的4个相邻位置上,问这时它们的排列顺序可能是怎样的?

(第12届莫斯科数学奥林匹克,1949年)

[解]　将12个位置依次编号为1,2,…,12.当一枚棋子从位置1出发向一个方向跳动时,其位置依次为

1,6,11,4,9,2,7,12,5,10,3,8,1.　①

尽管在圆周上看,4枚棋子的顺序可以发生变化,但沿着①中所列的顺序看时,任何两枚棋子的顺序都不会颠倒.故知当4枚棋子回到原出发时的4个相邻位置时,排列顺序也与原来相同.

8·138　已知7个正六边形中的每个都涂有黑白两色之一(如图(a)所示).每一步操作都可以随意选定1个正六边形,并将它以及与它相邻的所有正六边形同时改涂成另一种颜色(即黑改白,白改黑).求证在对图(a)进行若干步改涂后,

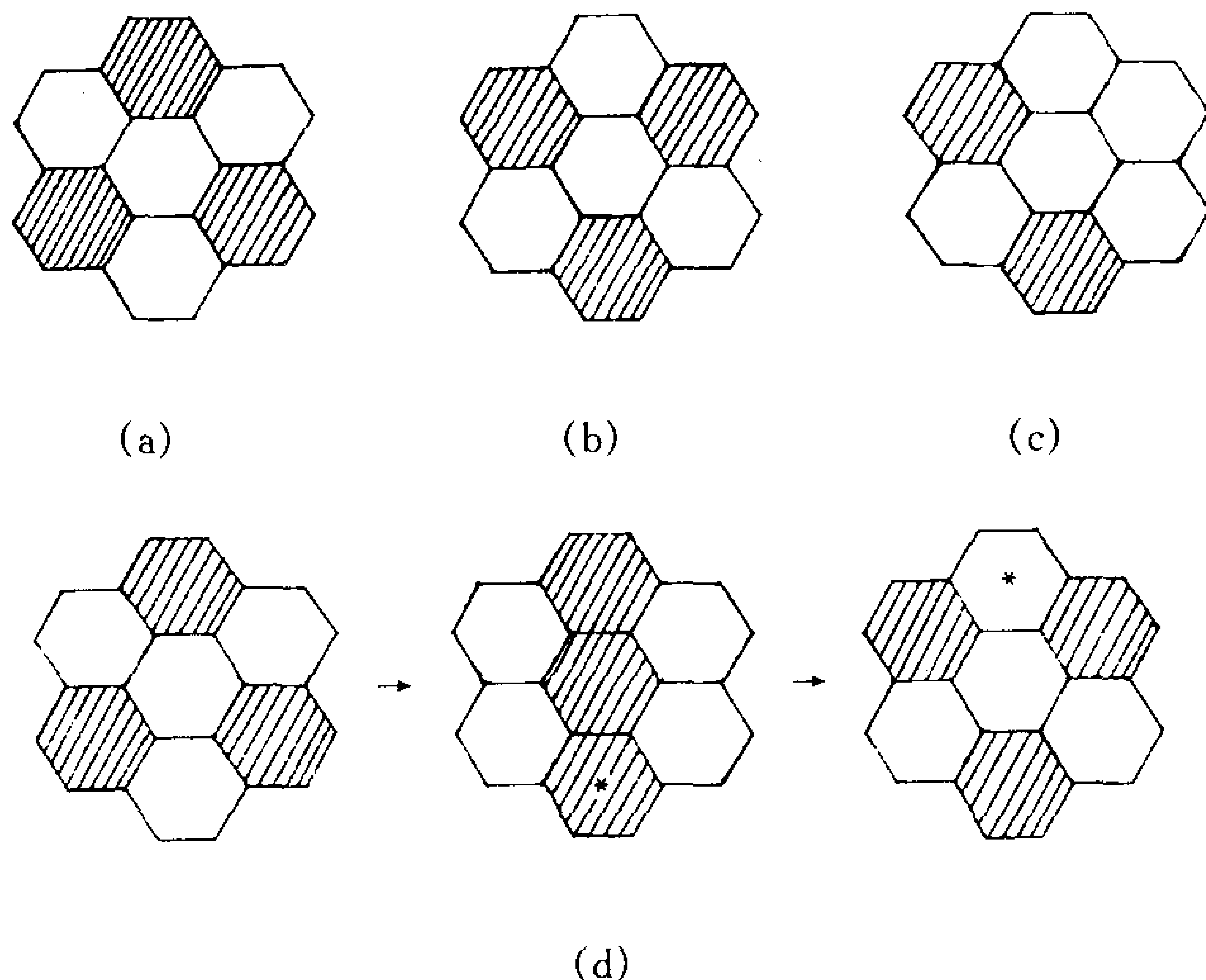
(1)有可能得到如图(b)所示的涂色方式;

(2)不可能得到如图(c)所示的涂色方式.

(第15届全俄数学奥林匹克,1989年)

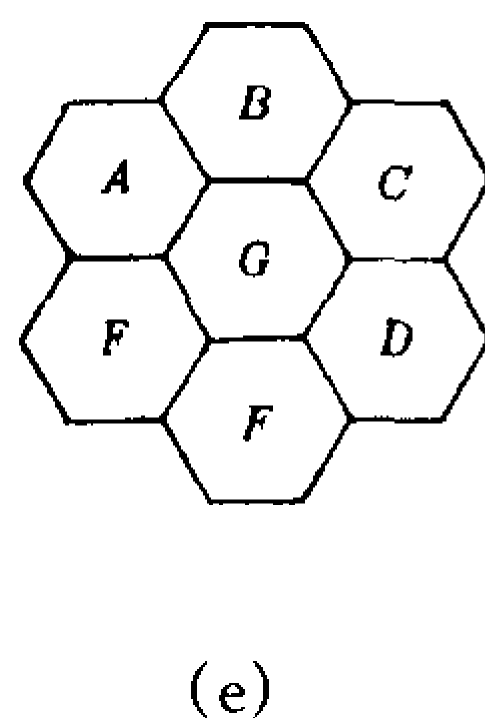
[证]　(1)只需做如下的两次改涂,即可得到图(b)所示的涂色方式,其中标有星号的正六边形是被选定的:

(2)我们将7个正六边形分别标上字母如图(e)所示,并在涂白色


(a) (b) (c)

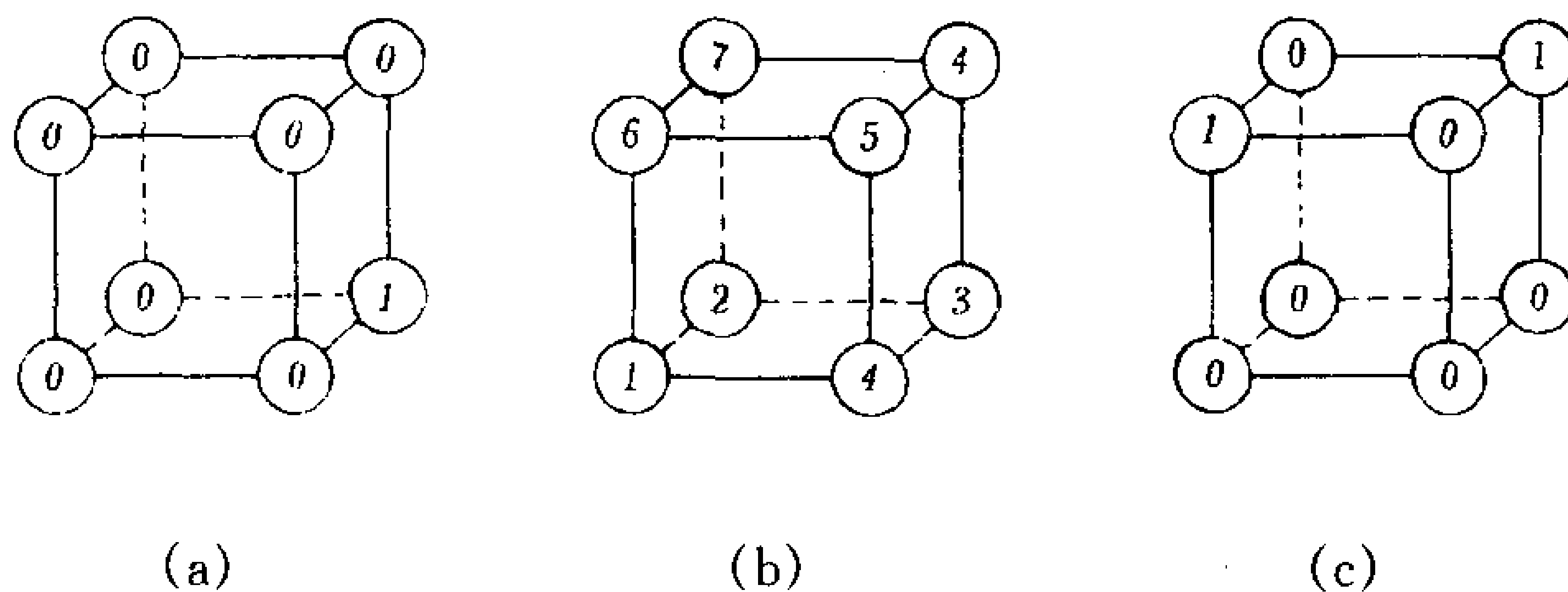
(d)

的正六边形中写上 + 1,涂黑色的正六边形中写上 - 1.题中所规定的每步操作,相当于将涉及到的正六边形中的数同时乘以 - 1.容易看出,在任何操作之下,4个正六边形 A,C,D,F 中所写数的乘积都不改变,因此总为 + 1.但因图(c)中这4个数之积为 - 1,所以无论怎样操作和操作多少次,都不能得到图(c)所示的涂色方式.



(e)

8·139　设立方体的每个顶点上都写着一个非负整数.每次操作允许将任何一条棱的两个顶点上的数同时加1.如果



(a) (b) (c)

开始时在顶点上的数如下图所示问能否经过若干次操作,使得立方体

顶点上的数全都变成相等的数?

(第15届全苏数学奥林匹克,1981年)

[解] 注意,每次操作都使8个顶点上数字之和增加2,因此和数总为奇数,故由图(a)出发不可能使8个整数变成相等的数.

对于图(b)给出的立方体,只要将下底的1和2连续操作5次,4和3操作一次,则4条竖直棱中每条的两个顶点上的数都相同,从而可继续操作使8个顶点上的数都变为7.

在图(c)给出的立方体中,将8个顶点分成两组,每组的4个顶点互不相邻.于是操作时,两组顶点数字之和的差不变.易见它总等于2,所以不可能使8个顶点上的数全都相等.

8·140 有三堆石子的个数分别为19,8,9,现进行如下操作:每次从三堆中的任意两堆中分别取出1个石子,然后把这2个石子都加到另一堆上去.试问:能否经过若干次这样的操作使得

(1) 三堆的石子数分别为2,12,22.

(2) 三堆的石子数均为12.

如能达到要求,请用最小的操作次数完成它,如不能达到,说明理由.

(中国广州、重庆、洛阳、福州、武汉初中数学竞赛,1989年)

[解] (1) 能够做到.

因为原来最少的一堆石子,要使它变为2,至少要经过六次操作,事实上六次可以成功:

$(19,8,9)\longrightarrow(21,7,8)\longrightarrow(23,6,7)\longrightarrow(22,5,9)\longrightarrow(24,4,8)\longrightarrow(23,3,10)\longrightarrow(22,2,12)$.

(2) 不能达到.

由于每次操作后,每堆石子数或者减1,或者加2,不妨写为

$$(a,b,c)\longrightarrow(a-1,b-1,c+2).$$

若 a,b,c 对模3不同余,设

$$a\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3),b\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3),c\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3),$$

则经过操作后得到的三个数 $a-1,b-1,c+2$ 对模3仍不同余,即

$$a-1\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3),b-1\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3),c+2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3).$$

于是,每次操作后都不改变这三个数被3除的余数互不相等的关系.

由于 19,8,9 被 3 除的余数为 1,2,0,而 12,12,12 被 3 除的余数均为 0,所以不论如何操作,都不可能使三堆的石子数均为 12.

8·141　设有 m 个盒子,每个盒内有某些小球.又设 n 是小于 m 的正整数.进行如下操作:从 m 个盒子中任选 n 个盒子并各放入一个小球.求证

(1) 若 m 与 n 互素,则有限次操作后,可以使 m 个盒内的球数都相等;

(2) 若 m 与 n 不互素,则存在一种各个盒内有球的初始分布,使得无论怎样操作和操作多少次,都不能使 m 个盒子内的球数全都相等.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

[证]　(1) 由于 $(m,n)=1$,故存在正整数 u,v,使得

$$un=vm+1=v(m-1)+v+1.$$

这意味着可以将 n 个球放入 u 次,使 $m-1$ 个盒中各放入 v 个球,而原来球数最少的另一个盒子中放入 $v+1$ 个球.显然,重复这一过程足够多次,就可使 m 个盒子中的球数全都相等.

(2) 设 $(m,n)=d>1$.若开始时有 $m+1$ 个球在这些盒子中,则在 k 次操作之后,球的总数为 $m+1+kn$.因为这个数不能被 d 整除,所以也不能被 m 整除.这就是说,无论怎样操作和操作多少次,都不能使 m 个盒子中的球数全都相等.

8·142　设有 2^n 个球分了许多堆,我们可以任意选甲、乙两堆来按照以下规则挪动:若甲堆的球数 p 不少于乙堆的球数 q,则从甲堆拿 q 个球放到乙堆里去,这样算是挪动一次.证明可以经过有限多次挪动把所有的球合并成一堆.

(中国北京市数学竞赛,1963 年)

[证 1]　用数学归纳法.

当 $n=1$ 时,共有二个球,可能只有一堆,不必挪动,可能分为两堆,每堆一个,挪动一次就并成一堆.所以 $n=1$ 时,命题成立.

假设 $n=k$ 时命题成立,即对 2^k 个球分成许多堆以后,经过有限次挪动能并成一堆.

现在来证 2^{k+1} 个球分堆之后,也能按规则并成一堆.

由于 2^{k+1} 个球所分各堆的球数或是奇数,或是偶数,而奇数个球的堆数必是偶数,任意把这些奇数个球的堆两两配合,在每两堆之间挪

动一次，就使得各堆的球数就都是偶数了，这时总堆数不会比原来的堆数多，我们在每堆里将每两个球合成一个大球，这时球的总数就由 2^{k+1} 个小球变成 2^k 个大球.

由归纳假设，这 2^k 个大球总能按规则并成一堆，并成一堆后再把每个大球拆成两个小球，就是把 2^{k+1} 个小球合成一堆了.

这表明对所有自然数 n，命题都成立.

[**证 2**] 假设 2^n 个球最初分成了 h 堆，各堆球数是

$$a_1, a_2, \cdots, a_h.$$

如果这里有奇数，就把奇数个球的堆两两配合，并且对两堆之间挪动一次. 这时堆数 $k \leqslant h$，各堆的球数为

$$a'_1, a'_2, \cdots, a'_k. \quad ①$$

且都是偶数，因此存在正整数 $p \geqslant 1$，使得 2^p 能整除 ① 中的各数，但 2^{p+1} 不能，于是 ① 可以写作

$$2^p b_1, 2^p b_2, \cdots, 2^p b_k \quad ②$$

它们必须满足

$$2^p(b_1 + b_2 + \cdots + b_k) = 2^n.$$

$b_1, b_2, \cdots, b_k$ 之中必有奇数，否则若都是偶数，则 ① 中的数便都能被 2^{p+1} 整除.

如果 $p = n$，则 $k = 1, b_1 = 1$，这时，所有的球都已并入一堆.

如果 $p < n$，则有

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_k = 2^{n-p},$$

这时 $b_1, b_2, \cdots, b_k$ 之中的奇数必有偶数个，再把这些奇数两两配合，每这样的两堆之间挪动一次，就使各堆球数变为

$$2^p b'_1, 2^p b'_2, \cdots, 2^p b'_l, l \leqslant k. \quad ③$$

其中 $b'_1, b'_2, \cdots, b'_l$ 都是偶数，又必存在一正整数 $q \geqslant 1$，使得 2^q 能整除 $b'_1, b'_2, \cdots, b'_l$，而 2^{q+1} 不能.

这时 ③ 又可以写为

$$2^{p+q}c_1, 2^{p+q}c_2, \cdots, 2^{p+q}c_l.$$

如果 $p + q = n$，那么 $l = 1, c_1 = 1$，所有球已并成一堆. 如果 $p + q < n$，必然有

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_l = 2^{n-(p+q)}.$$

$c_1, c_2, \cdots, c_l$ 中的奇数有偶数个,两两配合,再作挪动,如此继续下去.

由于每调整一次,各堆都能提出公因数 $2^p, 2^{p+q}, \cdots$,并且 2 的幂增大下去,因此总有达到 2^n 的时候,这时就必然成为一堆.

8·143 设有 nk 块石头被分成了 n 堆并允许进行如下操作:将某堆中的一些石块挪入另一堆,但挪入的石块数应等于该堆中原有的石块数.问对于怎样的自然数 k,使对所有 n,都可以通过有限次的操作而使得最终余下的各堆中的石块数目都相等?

(圣彼得堡代表队选拔试题,1992 年)

[解] 当且仅当 k 是 2 的方幂时,才能经操作而使余下的各堆石块数目都相等.

设 $2k$ 块石头被分成两堆,块数分别为 1 和 $2k-1$,记作 $(1, 2k-1)$,并假定可以经过若干次操作而变为 (k, k) 或 $(0, 2k)$.按规定,每次操作可将 (x, y) 变为 $(2x, y-x)$,记为 $(x, y) \longrightarrow (2x, y-x)$.如果反向考察这一过程,则有

$$(a, b) \longleftarrow \left(\frac{a}{2}, b+\frac{a}{2}\right) \swarrow \begin{matrix} \left(\frac{a}{4}, b+\frac{3}{4}a\right) \\ \left(\frac{3a}{4}+\frac{b}{2}, \frac{b}{2}+\frac{a}{4}\right) \end{matrix} \cdots$$

$$\longleftarrow (ra+sb, (1-r)a+(1-s)b)$$

其中 r 与 s 都是真分数,且二者的分母都是 2 的幂.可见,为使 $(k, k) \leftarrow (1, 2k-1)$,应有 $1 = k(r+s)$,因此 k 必为 2 的幂.当最后结果为 $(0, 2k)$ 时,也得到同样的结论.

反之,设 $k = 2^m$, $m \in N$ 且 $2^m n$ 块石头分成 n 堆,往证可通过若干次操作,使所余各堆石头的块数都相等.

考察 n 堆石块数的奇偶性.

(1) 如果其中有两堆的块数为两个不同的奇数,则可以在这两堆之间进行一次操作,使所得的两堆都非空且块数都是偶数.

(2) 如果块数为奇数的堆的石块数都相等,设均有 h 块,则这样石堆的个数为偶数.

(a) 如果其余各堆的块数均为 $2h$,则只要将前面块数为 h 的两堆合成一堆即可使结论成立.

(b) 设块数为偶数的堆中有一堆的块数不是 $2h$,记这堆为 A_1.设

块数为 h 的堆为 $B_1,B_2,\cdots,B_{2l}(l\in N)$.先在 A_1,B_1 之间进行一次操作,则所得的两堆石块数仍为一奇一偶,但其中块数为奇数的一堆的块数不是 h.再将这堆与 B_2 进行一次操作,则两堆块数都是偶数,从而块数为奇数 h 的堆数减少 2.这样一来,所得的结果或出现(a) 的情形或出现(b) 的情形而可以继续上述过程,直到最后化成 n 堆均非空且块数均为偶数的情形.但这时可将两块石头视为一块,于是化为 n 堆中有 $2^{m-1}n$ 块石头的情形.于是由数学归纳法即可完成证明,这就证明了充分性.

8·144　有 1987 块玻璃片,每片上都涂有红,黄,蓝三色之一.允许进行如下操作:将不同颜色的两块玻璃片擦净,然后涂上第 3 种颜色.求证

(1) 无论开始时红,黄,蓝色玻璃片各有多少块,总可以经过若干次操作而使所有的玻璃片涂有同一种颜色;

(2) 最后变成哪一种颜色,与操作顺序无关.

(第 2 届中国东北三省邀请赛,1987 年)

[证 1]　设在 1987 块玻璃片中,有 x_1 块红的,x_2 块黄的和 x_3 块蓝的.注意,若第 1 次操作将 1 红 1 黄变为 2 蓝,第 2 次操作将 1 红 1 蓝变为 2 黄,则两次操作合起来将 2 红变为 1 黄 1 蓝.令

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-662)^2+(x_2-662)^2+(x_3-662)^2.$$

由对称性,设 $x_1\geqslant 664$.现进行上述的双次操作,于是 3 种玻璃片数变为 $y_1=x_1-2,y_2=x_2+1,y_3=x_3+1$.因而有

$$\begin{aligned}f(y_1,y_2,y_3)&=(x_1-2-662)^2+(x_2+1-662)^2+(x_3+1-662)^2\\&=(x_1-662)^2-4(x_1-662)+4+(x_2-662)^2+2(x_2-662)+\\&\quad 1+(x_3-662)^2+2(x_3-662)+1.\\&=f(x_1,x_2,x_3)-4x_1+2x_2+2x_3+6.\end{aligned}$$

因为 $x_1\geqslant 664$,故 $x_2+x_3\leqslant 1323$.从而由上式可得

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)-f(y_1,y_2,y_3)&=4x_1-2(x_2+x_3)-6\\&\geqslant 2656-2646-6=4.\end{aligned}$$

这就是说,只要 x_1,x_2,x_3 中有 1 个数不小于 664,就可以进行上述的双次操作而使函数 f 的值至少下降 4.因而经若干次操作之后一定停止.

这意味着 $\max\{x_1,x_2,x_3\} \leqslant 663$. 因为 $x_1+x_2+x_3=1987$, 故知 $\max\{x_1,x_2,x_3\}=663$. 但这时只有两种可能情形: $\{663,663,661\}$, $\{663,662,662\}$. 无论哪种情形,3 个数中总有两个相等. 将它们所对应的两种玻璃片一对一地擦去颜色并涂上第 3 种颜色,则所有玻璃片都变成了第 3 种颜色.

将红,黄,蓝玻璃片分别对应于整数 0,1,2,并记这 1987 个整数之和为 S. 于是有

(i) 擦去 1 红 1 黄涂上 2 蓝, S 增加 3;

(ii) 擦去 1 红 1 蓝涂上 2 黄, S 值不动;

(iii) 擦去 1 黄 1 蓝涂上 2 红, S 减少 3.

由此可见,在规定操作之下,和数 S 模 3 不变. 因此,若开始时 $S \equiv 0 \pmod 3$,则最后全化为红色;若开始时 $S \equiv 1 \pmod 3$,则最后全化为黄色;若开始时 $S \equiv 2 \pmod 3$,则最后全化为蓝色. 这一结果只与初始状态有关而与操作顺序无关.

[**证 2**] 因 $1987=3\times 662+1$,故可一般地考虑有 $3m+1$ 块玻璃片的情形并关于 m 使用数学归纳法来证明.

当 $m=0$ 时结论显然成立. 设结论于 $m=k$ 时成立. 当 $k+1$ 时,至少有 4 块玻璃片.

(i) 当 3 色玻璃片数满足 $0<x_1\leqslant x_2\leqslant x_3$ 时,由归纳假设知对 (x_1-1,x_2-1,x_3-1) 的情形可经有限次操作化成同一种颜色. 对另外的 3 块玻璃片,将与上面归纳化出的颜色不同的两块玻璃片擦净,涂上该种颜色就行了.

(ii) 当 3 色玻璃片数中有一个是 0,例如为 $0=x_1<x_2\leqslant x_3$. 将后两种玻璃片各一块擦净并涂上第 1 种颜色. 于是 $x'_1=2$. 若 $x'_2>0$,则就化成了(i) 的情形. 若 $x'_2=0$,则 $x'_3\geqslant 2$. 于是将第 1,3 两种颜色玻璃片各 1 块擦净并涂上第 2 种颜色,就又化成了(i) 的情形.

综上可见, $m=k+1$ 时结论也成立,这就完成了归纳证明. 特别当 $m=662$ 时成立.

再证(2). 因为 $x_1+x_2+x_3=1987\equiv 1 \pmod 3$,所以 $\{x_1,x_2,x_3\}$ 这 3 个数中必有两个模 3 相等而另一个与它们模 3 不等. 因为一个数减 1 和加 2 在模 3 看来是一样的,故在操作过程中,模 3 相等的两上数始终模 3 相等,最后必然变为 0. 所以最后变成哪种颜色仅仅取决于开始时

模3不与另两数相等的数代表哪一种颜色，这当然与操作顺序无关.

8·145　设有1个黑盒与分别标号为$1,2,\cdots,n$的n个白盒，n个白盒中共有n个球.允许进行如下操作：若标号为k的白盒中恰有k个球，则取出这k个球并将它们分别放入黑盒及标号为$1,2,\cdots,k-1$的白盒中各1个.求证存在惟一的放球法，使得n个球开始时都在白盒中，且在进行若干次操作后，可以使n个球都在黑盒中.

（保加利亚数学奥林匹克，1992年）

［证1］　我们把黑盒中有a_0个球而标号为i的白盒中有a_i个球（$i=1,2,\cdots,n$）的球的分布状态记为$(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n)$.于是本题即是证明存在惟一的状态$(a_0,a_1,\cdots,a_n)$，$a_0=0$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=n$，使得经过若干次操作后变为$(n,0,0,\cdots,0)$.为方便计，我们把题中允许的操作记为φ.若状态$(a_0,a_1,\cdots,a_n)$满足$a_k=0(1\leqslant k\leqslant n)$及$a_i>0(i=0,1,\cdots,k-1)$，则定义操作$\varphi^{-1}$：

$$(a_0,a_1,\cdots,a_k,\cdots,a_n)\xrightarrow{\varphi^{-1}}(a_0-1,a_1-1,\cdots,a_{k-1}-1,k,a_{k+1},\cdots,a_n).$$

易见，$\varphi\varphi^{-1}$和$\varphi^{-1}\varphi$都是恒等操作，即φ^{-1}与φ为互逆操作.

先证存在性.对于状态$(n,0,0,\cdots,0)$作逆操作φ^{-1}，直到不能再作为止：

$$(n,0,0,\cdots,0)\xrightarrow{\varphi^{-1}}(n-1,1,0,\cdots,0)\xrightarrow{\varphi^{-1}}(n-2,0,2,0,\cdots,0)$$
$$\xrightarrow{\varphi^{-1}}(n-3,1,2,0,\cdots,0)\xrightarrow{\varphi^{-1}}\cdots\xrightarrow{\varphi^{-1}}(0,a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

其中$a_1+a_2+\cdots+a_n=n$.可见，只要对$(0,a_1,a_2,\cdots,a_n)$进行若干次操作（每次都是上述过程的逆操作），即可化为$(n,0,\cdots,0)$，这就证明了题中要求的状态的存在性.

下面用数学归纳法来证明满足要求的状态的惟一性.当$n=1,2$时，惟一性显然成立.设当$n=k$时惟一性成立.如果$n=k+1$时惟一性不成立，则有两种不同的状态$(0,a_1,a_2,\cdots,a_{k+1})$和$(0,b_1,b_2,\cdots,b_{k+1})$，$a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n=b_1+b_2+\cdots+b_{k+1}$且均可经过若干次操作而变为$(n,0,0,\cdots,0)$.

若$a_{k+1}=k+1$，则$a_1=a_2=\cdots=a_k=0$，于是

$$(0,0,0,\cdots,k+1)\xrightarrow{\varphi}(1,1,1,\cdots,1,0).$$

由于 $k \geqslant 2$,故第 k 个黑盒中的 1 个球无法取出.

若 $0 < a_{k+1} < k+1$,则第 $k+1$ 个黑盒中的球无法取出.两种情形都无法变成$(n,0,0,\cdots,0)$,所以必有 $a_{k+1}=0$.同理可证 $b_{k+1}=0$.

因为$(0,a_1,a_2,\cdots,a_k,0)$ 和$(0,b_1,b_2,\cdots,b_k,0)$ 都可经若干次操作而变为$(n,0,0,\cdots,0)$,故都可经过一次操作 φ 而化成:

$$(0,a_1,a_2,\cdots,a_k,0)\xrightarrow{\varphi}(1,a'_1,a'_2,\cdots,a'_k,0),$$

$(0,b_1,b_2,\cdots,b_k,0)\xrightarrow{\varphi}(1,b'_1,b'_2,\cdots,b'_k,0)$,其中 $a'_1+a'_2+\cdots+a'_k=k=b'_1+b'_2+\cdots+b'_k$.这样一来,以下的操作就相当于分别经过若干次操作而将$(0,a'_1,a'_2,\cdots,a'_k)$ 和$(0,b'_1,b'_2,\cdots,b'_k)$ 变成$(k,0,0,\cdots,0)$.于是由归纳假设知

$$a'_i=b'_i,i=1,2,\cdots,k.$$

从而得到$(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{k+1})=(b_0,b_1,b_2,\cdots,b_{k+1})$,矛盾.惟一性得证.

[证 2] 首先用数学归纳法来证明满足题中要求的初始状态的存在性.将第 i 个白盒中有 a_i 个球的状态记为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,其中 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n$.当 $n=1,2$ 时,结论显然成立.设 $n=k\geqslant 2$ 时结论成立,满足要求的状态为$\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$,其中 $0\leqslant a_i\leqslant i,a_1+a_2+\cdots+a_k=k$.如果 $a_i>0,i=1,2,\cdots,k$,则 $a_1=a_2=\cdots=a_k=1$.将 1 号白盒中的球放入黑盒后就无法进行操作了,与归纳假设矛盾,故必有 $j,1\leqslant j\leqslant k$,使 $a_i>0,i=1,2,\cdots,j-1,a_j=0$.当 $n=k+1$ 时,考察如下的初始状态

$$(a_1-1,a_2-1,\cdots,a_{j-1}-1,j,a_{j+1},\cdots,a_k,0).$$

易见,其中 $k+1$ 个数之和为 $k+1$ 且对第 j 个白盒操作一次之后,恰好化成归纳假设中 $n=k$ 的初始状态,从而可经若干次操作而化成题中要求的状态,这就证明了满足要求的初始状态的存在性.

惟一性的证明同证 1.

8·146 $n(n\geqslant 4)$个盘子里放有总数不少于4的糖块,从任选的两个盘子中各取 1 块糖,放入另一个盘子中去,称为一次操作.问能否经过若干次操作,把所有糖块都集中到一个盘子中去.证明你的结论.

(第 9 届中国中学生数学冬令营,1994 年)

[解 1] 我们关于糖块数 m 使用归纳法来证明,经过若干次操作,

可以使所有糖块都集中到一个盘子中去.

当 $m=4$ 时,装有糖块的盘子至多4个,糖块分布只有4种不同情形:(1,1,1,1),(1,1,2,0),(1,3,0,0),(2,2,0,0).这时可操作如下:

$(1,1,1,1)\longrightarrow(1,3,0,0)\longrightarrow(0,2,2,0)\longrightarrow(2,1,1,0)\longrightarrow(4,0,0,0)$.

即 $m=4$ 时命题成立.

设命题于 $m=k(k\geqslant4)$ 时成立.当 $m=k+1$ 时,选定一个装有糖块的盘子并固定其中一块糖不参加变动.由归纳假设知其余的 k 块糖可以经过若干次操作而集中于一个盘中.如果这个盘恰是我们选定并留有一块糖的盘子,问题就解决了.否则,有4个盘中糖数为 $(k,1,0,0)$.于是可再操作如下:

$(k,1,0,0)\longrightarrow(k-1,0,2,0)\longrightarrow(k-2,2,1,0)\longrightarrow(k-3,2,0,2)\longrightarrow(k-1,1,0,1)\longrightarrow(k+1,0,0,0)$.

这就证明了 $m=k+1$ 时命题成立.

[解2] 如果装有糖块的盘数不少于3个,则我们选定糖块数最少的两个盘子,将其中的糖块一对一地拿到糖块数最多的盘子中去.经若干次操作之后,原来糖块数最少的盘子变成空盘.于是装有糖块的盘子数至少减少1个.这样操作下去,最后至多有两个盘子中还有糖块.设两个盘中的糖块数为 m_1 和 m_2,$m_1\geqslant m_2\geqslant1$.如果 $m_1\geqslant m_2+2$,则进行如下操作:

$(m_1,m_2,0,0)\longrightarrow(m_1-1,m_2-1,2,0)\longrightarrow(m_1-2,m_2+1,1,0)\longrightarrow(m_1-2,m_2,0,2)\longrightarrow(m_1-3,m_2-1,2,2)\longrightarrow(m_1-1,m_2-1,1,1)\longrightarrow(m_1-1,m_2+1,0,0)$.

这样一来,两个盘中糖块数之差减少2.经若干次这样的组合操作之后,可使两个盘中糖块数之差不超过1.

若 $m_1=m_2+1$,则可进行下列操作

$(m_2+1,m_2,0,0)\longrightarrow(m_2,m_2-1,2,0)\longrightarrow(m_2,m_2-2,1,2)\longrightarrow(m_2,m_2,0,1)$.

由此可见,总能经过若干次操作而化成 $(m,m,1,0)$ 或 $(m,m,0,0)$ 的情形.显然,只须再将前两盘中糖块一对一地拿到第三盘中就行了.

8·147 彼得在银行里有3个账户,其中每个账户的存款数都是元的整数倍.现在允许他把钱从一个账户转存到另一个账户,但必须使后

者的钱数增加一倍.

(1) 求证彼得总能把所有钱转存到两个账户中;

(2) 彼得是否总能经过若干次转存而将全部钱都转到一个账户中?

(第 35 届国际数学奥林匹克预选题,1994 年)

[解] (1)设彼得在3个账户中的钱数分别为a,b,c元且$a\leqslant b\leqslant c$.若 $a=0$,则结论自然成立.以下设 $a>0$.我们写 $b=aq+r$,其中 $q\in N$,r 为整数且$0\leqslant r<a$.将 q 表示为若干个 2 的幂之和

$$q=m_0+2m_1+2^2m_2+\cdots+2^km_k,$$

其中当$0\leqslant i\leqslant k-1$时,$m_i=0$或1,但 $m_k=1$.首先,我们依次做 $k+1$次转存如下.在第 i 次转存时,若 $m_i=1$,则从第2个账户中取出 2^ia 元钱存入第 1 个账户;若 $m_i=0$,则从第 3 个账户中取出 2^ia 元钱存入第1个账户.因为 $m_k=1$,所以第 $k+1$ 次转存的钱取自第 2 个账户.又因$(1+2+2^2+\cdots+2^{k-1})a=(2^k-1)a<qa\leqslant b\leqslant c$,所以上面从第 3 个账户取钱转存的程序是没有问题的.这样一来,在第 $k+1$ 次转存后,第 2 个账户存款余额为 $r<a$,即 3 个账户中钱数最少的账户的存款数至少减少 1.再把这个账户当作上面的 a 重复上面的程序,并一直进行到 $r=0$ 为止,便可将全部存款存入两个账户中.

(2) 由于每次转存都使存入账户的钱数增加一倍,故钱数为偶数.所以,当彼得在 3 个账户中的存款数之和为奇数时,不能通过转存而使全部存款集中到 1 个账户中.

8·148 将顺序为$1,2,\cdots,2n$ 的 $2n$ 张牌变成为$n+1,1,n+2,2,\cdots,n-1,2n,n$,即将原来的前 n 张牌移至第$2,4,\cdots,2n$ 张,而原来的后 n 张牌则按原序排在奇数号位置$1,3,\cdots,2n-1$.这称为一次洗牌.问对于哪些 n,从$1,2,\cdots,2n$ 开始可经过若干次洗牌而回到原来的状态.

(第 28 届国际数学奥林匹克候选题,1987 年)

[解] 对所有 $n\in N$ 都可以实现.

对任意 $n\in N$,令 $m=2n+1$.设第 x 张牌经一次洗牌后变成第 x_1 张,则有 $x_1\equiv 2x\pmod m$.因此经过 k 次洗牌后有

$$x_k\equiv 2^kx\pmod m,\ k=1,2,\cdots.$$

由于 m 为奇数，所以 $2^{\varphi(m)}x \equiv x(\bmod\ m)$. 其中 $\varphi(m)$ 为欧拉函数. 又因 x 和 $x_{\varphi(m)}$ 都小于 m，故有 $x_{\varphi(m)} = x$，即经过 $\varphi(2n+1)$ 次洗牌之后恢复原状.

8·149　把一副四种花色的纸牌排成一行. 如果两张同样花色的纸牌相邻或仅隔 1 张牌，则将两张中左边那张抽走. 另外，还可以在最右边补充从其他付同样纸牌中取来的任意多张牌. 试证可以用这种方式补充牌和抽走牌，使得最终只剩下 4 张牌.

（第 32 届莫斯科数学奥林匹克，1969 年）

[证]　对纸牌张数 n 使用数学归纳法. 当 $n = 5$ 时，由抽屉原理知其中必有两张花色相同. 如果两张相邻或仅间隔 1 张牌，则可将左边那张抽走而变为 4 张，结论成立. 如果同花色的两张牌间至少隔着两张其他花色的牌，则只有下列 4 种可能的排列：

(1) $abcab$；(2) $abcda$；(3) $abcad$；(4) $abcdb$.

对于这 4 种情形，可分别处理如下：

$abcab\underline{a} \longrightarrow abcba \longrightarrow acba$；

$abcdad\underline{cd} \longrightarrow abcadcd \longrightarrow abcacd \longrightarrow abacd \longrightarrow bacd$；

$abcad\underline{cd} \longrightarrow abcacd \longrightarrow abacd \longrightarrow bacd$；

$abcdb\underline{d} \longrightarrow abcbd \longrightarrow acbd$.

由此可见，$n = 5$ 时结论成立.

设 $n = k \geqslant 5$ 时结论成立. 当 $n = k + 1$ 时，考察其最右方的 5 张牌. 由上面论证知可将它们经若干次操作化为 4 张. 于是纸牌总数化为 k 张，从而由归纳假设知结论成立.

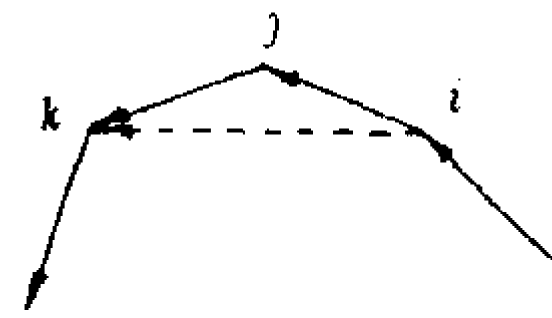
8·150　书架上放有一套 20 卷的文集，图书管理员想把它们自左至右由 1 到 20 卷依次排列，每一次他都把 1 卷未放对位置的文集同占了它的位置的文集交换位置. 试证图书管理员为了理顺次序，所要做的这种交换的次数，与他实施这些行动的先后次序无关.

（原苏联教委推荐试题，1989 年）

[证]　用 20 个点来代表放置这套书的 20 个位置. 如果在第 i 个位置放的书是第 j 卷 $(j \neq i)$，则由第 i 点画出一个箭头指向第 j 点. 于是我们得到一个有 20 个顶点的有向图. 如果第 k 卷书已放在第 k 个位置上，则第 k 点是图中的孤立点. 把图中的所有孤立点去掉后，所得到的图记为 G. 设 G 有 n 个顶点. 易见，G 中每个顶点的度数都是 2 且恰有

1个箭头指向它和1个箭头离开它.这表明 G 是一个每点度数皆为2的图,从而它可分解为 $m(m \geqslant 1)$ 个互相之间没有公共顶点的圈.

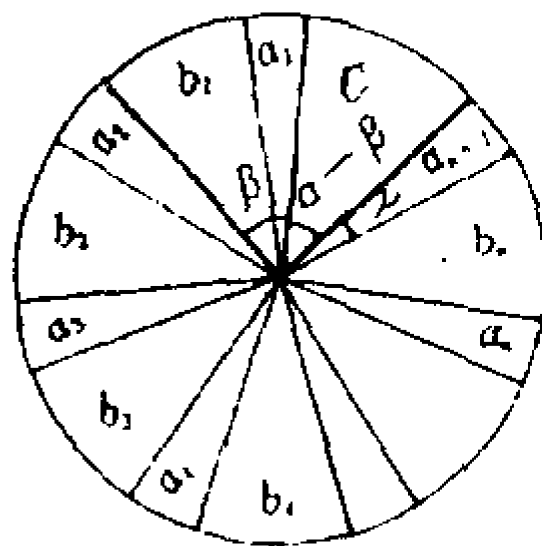
按题意,每交换一次位置,即是将图 G 中某个箭头的起点和终点的两本书交换,结果是箭头的终点变为孤立点而箭头所在的圈减少1条边.例如在右图中交换 i 和 j 点所放的书,于是 j 变成孤立点而原来由 j 指向 k 的箭头变为由 i 指向 k.经若干次交换后,这个圈的顶点只剩两个,则再交换一次便使两个顶点都变成孤立点.可见,若图 G 中某圈共有 s 条边,则只要交换 $s-1$ 次就使 s 个顶点全变为孤立点.所以,为使图 G 中的顶点全变成孤立点,恰需交换 $n-m$ 次,这只与图 G 的顶点数 n 及圈数 m 有关,当然与交换的顺序无关.



8·151 某人用如下方式来切割肉饼:先切下一个圆心角为 α 的扇形,将其翻过面来嵌回原处,然后将整个肉饼围绕中心旋转 β 角,已知 $\beta<\alpha<180°$.接着再于原处(不随肉饼转动)切下圆心角为 α 的扇形,将其翻转并嵌回原处,再将整个肉饼同向旋转 β 角,如此继续下去,试证经有限次这种操作之后,肉饼上的所有点将同时回到自己原来的位置上.

(第31届莫斯科数学奥林匹克,1968年)

[证] 右图中,两条粗实线所夹的扇形即为每次切下的顶角为 α 的扇形.为叙述明确起见,我们从一条切口开始,将圆面分成圆心角为 β 的 n 个扇形.设第 n 个扇形的终边离另一条切口还余一个圆心角为 $\gamma(\gamma<\beta)$ 的扇形,记为 a_{n+1}.然后我们在分出的每一个顶角为 β 的扇形中,都由它的始边起划出1个顶角为 γ 的扇形,即图中的 $a_1,a_2,\cdots,a_n$.余下的扇形分别记为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,它们中每个的顶角均为 $\beta-\gamma$.



经第1次切割,翻转嵌入,旋转之后,扇形 a_1,b_1 在翻转之后分别落在 a_{n+1},b_n 的位置上,而其他扇形 $a_i,b_j(i=2,\cdots,n+1,j=2,\cdots,n)$ 则都沿顺时针方向转过了 β 角而落在 a_{i-1},b_{j-1} 的位置.此外,图中顶角为 $\alpha-\beta$ 的扇形 C 回到原处,只是正反两面对调了.由此可见,每操作偶数次时,扇形 C 的所有点都回到原处.

第2次操作后,a_2,b_2,a_1,b_1 分别处于原来 a_{n+1},b_n,a_n,b_{n-1} 的位

置上且都正反两面对调了.不难看出,经 n 次操作后,$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都以反面朝上回到了出发时的位置.从而经 $2n$ 次操作后,$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 上的所有点都回到原来的位置.此外,经 $n+1$ 次操作后,$a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 都以反面回到原来的位置.从而经 $2(n+1)$ 次操作后,$a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 上的所有点都回到原来的位置.

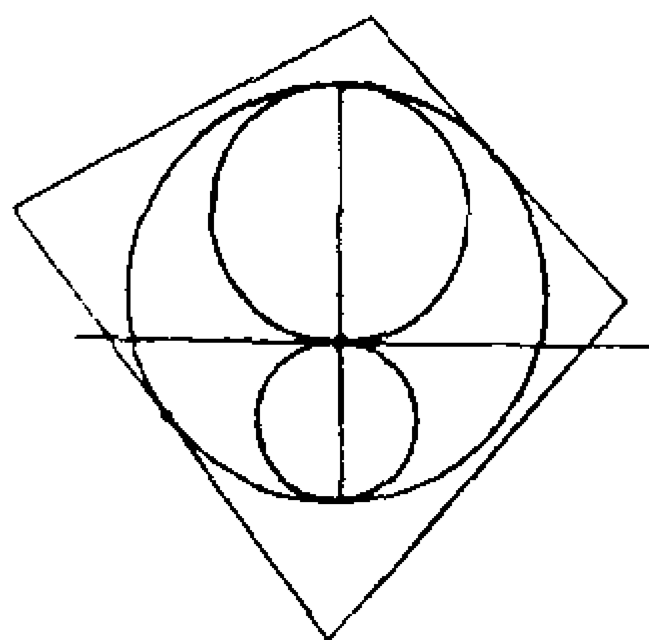
综上可知,当操作 $2n(n+1)$ 次后,肉饼上的所有点都回到自己原来的位置上.

如果 $360°-\alpha=n\beta$,则情形就简单了.这时,只要操作 $2n$ 次就行了.

8·152　有一个半径为 10cm 的圆形蛋糕,烤制时在其中放入了一颗半径为 3mm 的珍珠,烤好之后想要找到它.为此允许用刀沿直线将蛋糕切成两块(相等不相等不限).如果刀子没有切到珍珠,可以再切开其中的一块;如果珍珠还未发现,则还可以再切开已得到的三块之一;如此继续下去.试证无论怎样切,在切了 32 次之后,都有可能仍未发现珍珠.但却可以适当地切 33 次,使得无论珍珠在什么位置,都能把它找出来.

(第 32 届莫斯科数学奥林匹克,1969 年)

[证]　用一组 33 条等距平行线把直径 20cm 的蛋糕分成宽度相等的 34 条,则每条的宽度都小于 6mm,即小于珍珠的直径.故当沿这组平行线切 33 刀时,一定会发现珍珠的位置.



为证前一结论,我们这样来做.首先,第一次把圆切成两部分.过圆心作与切口线垂直的直径,它被切口线分成两段.分别以这两段为直径作圆,则两圆分别在圆被切成的两部分内,且两圆直径之和等于原来大圆的直径.然后第二次又将一块切开,若未切着其中的圆,则不必管;若又将其中的圆切为两块,则像上面一样地又在切开的两块中各作一圆,两圆之径之和等于被切圆的直径之和.于是我们得到至多 3 个圆,它们的直径之和等于 20cm 且每块中至多一个圆.这样继续下去,切了 32 次之后,得到至多 33 个圆,它们的直径之和为 20cm,故其中必有一个圆的直径大于 6mm.显然,当珍珠埋在这个圆内时,就没有被发现.

8·153　已知 30 只杯子中各装着一些牛奶.男孩 B 想使所有杯子里的牛奶分得均匀.为此,他每次任取两只杯子,并将其中牛奶多的一

只杯中的牛奶倒向另一只杯子，直到两只杯子中牛奶的数量相等为止．问能否在 30 只杯子中分装适量的牛奶，使 B 在上述操作下，无论如何也达不到目的？

（第 20 届全苏数学奥林匹克，1986 年）

［解］ 题中的要求是可以实现的．例如在一只杯子中倒入 200 克牛奶，其余杯子中各倒入 100 克牛奶．如果能分装均匀，则每只杯子中应有 $103\frac{1}{3}$ 克牛奶．但从整数出发，每次求两个数的平均值，只能得到分母为2的幂的分数．故知这种情况下无论怎样操作都不能使牛奶分得均匀．

8·154 设在大木箱中放着两个较小的箱子，在这两个较小箱子中又各放着两个更小的箱子，这样一共套放了 n 重．在 2^n 个最小的箱子中各放着一枚硬币，其中一些小箱中的硬币是国徽朝上，而其余小箱中的硬币则都是数字朝上．每一次允许翻转其中任意一只箱子（可大可小），并且是连同箱中的所有东西同时翻转．试证只须经过不超过 n 次翻转，总可使得国徽朝上和数字朝上的硬币枚数相同．

（第 28 届莫斯科数学奥林匹克，1965 年）

［证］ 将最大的箱子称为 n 级的，次大的两个箱子都称为 $n-1$ 级的，…，直到最小的装有硬币的箱子称为 1 级的．对于任何一只箱子，其中硬币中国徽和数字出现的个数之差称为这个箱子的亏值（可正可负）．我们将最大箱子的亏值记为 d．让我们来证明如下的引理．

引理 当 $|d|>0$ 时，总可找到一只箱子，将它翻转后，可使总亏值减少到不超过原亏值的$\frac{1}{2}$，即 $|d'|\leqslant\frac{1}{2}|d|$．

若不然，则当翻转任何一个亏值为 d_1 的箱子时，总亏值 d 变动了 $2d_1$，按反证假设便有：$|d-2d_1|>\frac{1}{2}|d|$．于是下列两条之一成立：

(1) d_1 与 d 异号；

(2) d_1 与 d 同号且满足 $|d_1|<\frac{1}{4}|d|$ 或 $|d_1|>\frac{3}{4}|d|$．

不妨设 $d>0$．我们用 $d(j)$ 表示第 j 级箱子的亏值．因为 $|d(1)|=1$ 而 d 为正偶数不小于2，故对任何一个第1级箱子，都有 $|d(1)|\leqslant\frac{1}{2}d$．再由(2)便知 $|d(1)|<\frac{1}{4}d$ 或 $d(1)$ 为负．对于任何一个 2 级箱

子,它含有两个1级箱子,故有 $|d(2)| < \frac{1}{2}d$. 从而由(1)和(2)知,或者 $d(2)$ 为负,或者有 $|d(2)| < \frac{1}{4}d$. 逐步推证,最后可得 d 为负或 $d < \frac{d}{4}$,此不可能. 这就完成了引理的证明.

按引理,可选取一只箱子并将之翻转,使得亏值至少减少一半. 如果亏值不为零,则又可继续下去. 于是或者在某次之后亏值变为0,或者一直可以进行 n 次. 因为 $|d| \leqslant 2^n$,故进行 n 次之后的亏值不大于1. 但亏值总为偶数,故必为0.

8·155　阿里巴巴试图潜入山洞. 在山洞入口处立着一面鼓,鼓的侧面有4个孔,在每个孔的里面靠近孔口处各装有一个开关,开关有上和下两种状态. 如果4个开关的状态全都一致,洞门即可打开. 允许将手伸入任意两个孔,触摸开关以了解其状态,并可随意改变或不改变其状态. 但每当这样做了之后,鼓就飞快地转动起来,以至在停转之后无法确认刚才触动了哪些开关. 现允许重复这种步骤10次,求证阿里巴巴必能进入山洞.

(第33届莫斯科数学奥林匹克,1970年)

[证]　第1次,阿里巴巴将一对相邻开关扳为上;第2次再将一对相对开关扳为向上. 于是4个开关中至少有3个向上. 如果洞门没有打开,就说明第4个开关处于状态下.

第3次,阿里巴巴将手伸进相对的两个孔,如果碰到向下的开关,则把它扳向上方,即可进入山洞;如果碰到两个向上的开关,则把其中之一扳为向下. 这样,4个开关中两个相邻的开关向上,另两个相邻的向下.

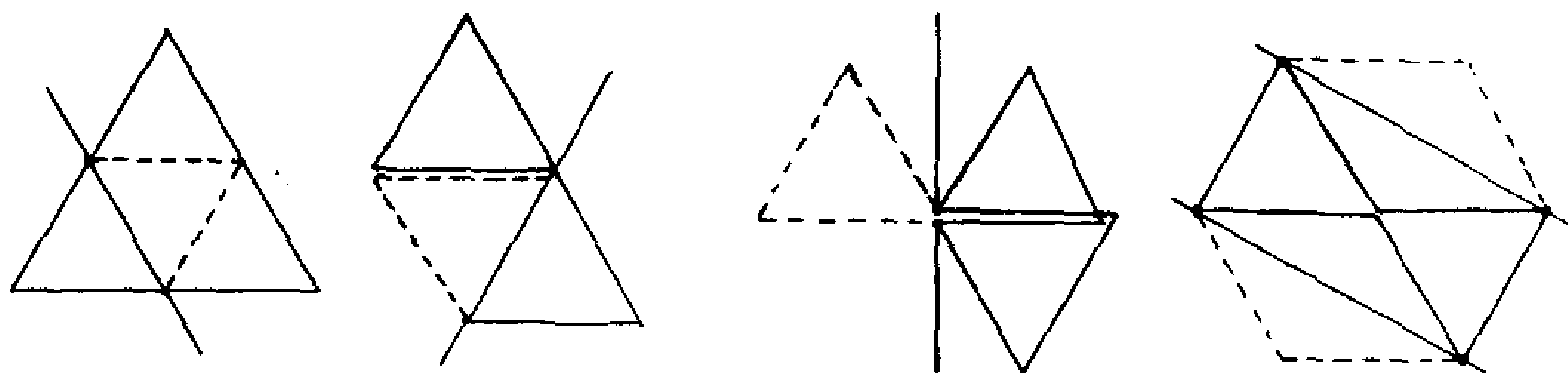
第4次,阿里巴巴将手伸进两个相邻的孔中,如果遇到的两个开关状态相同,他就扳动它们,即可打开洞门;如果遇到的两个开关状态不同,则也同时扳动它们. 于是4个开关中相对两个状态相同. 从而第5次只要将手伸进一对相对孔中扳动开关就可以进洞了.

8·156　将一根硬导线弯曲成正三角形的形状,并焊死其端点. 允许沿着导线上任意两点之间的连线对折夹在该两点之间的那段导线,使得折后的导线位置同该段导线的原来位置关于过该两点的直线对称(如果这两点重合,则可任取一条经过该点的直线作为对称轴). 试问能

否经过若干次这样的对折，得到一个周样同长的正六边形？

（第 32 届莫斯科数学奥林匹克，1969 年）

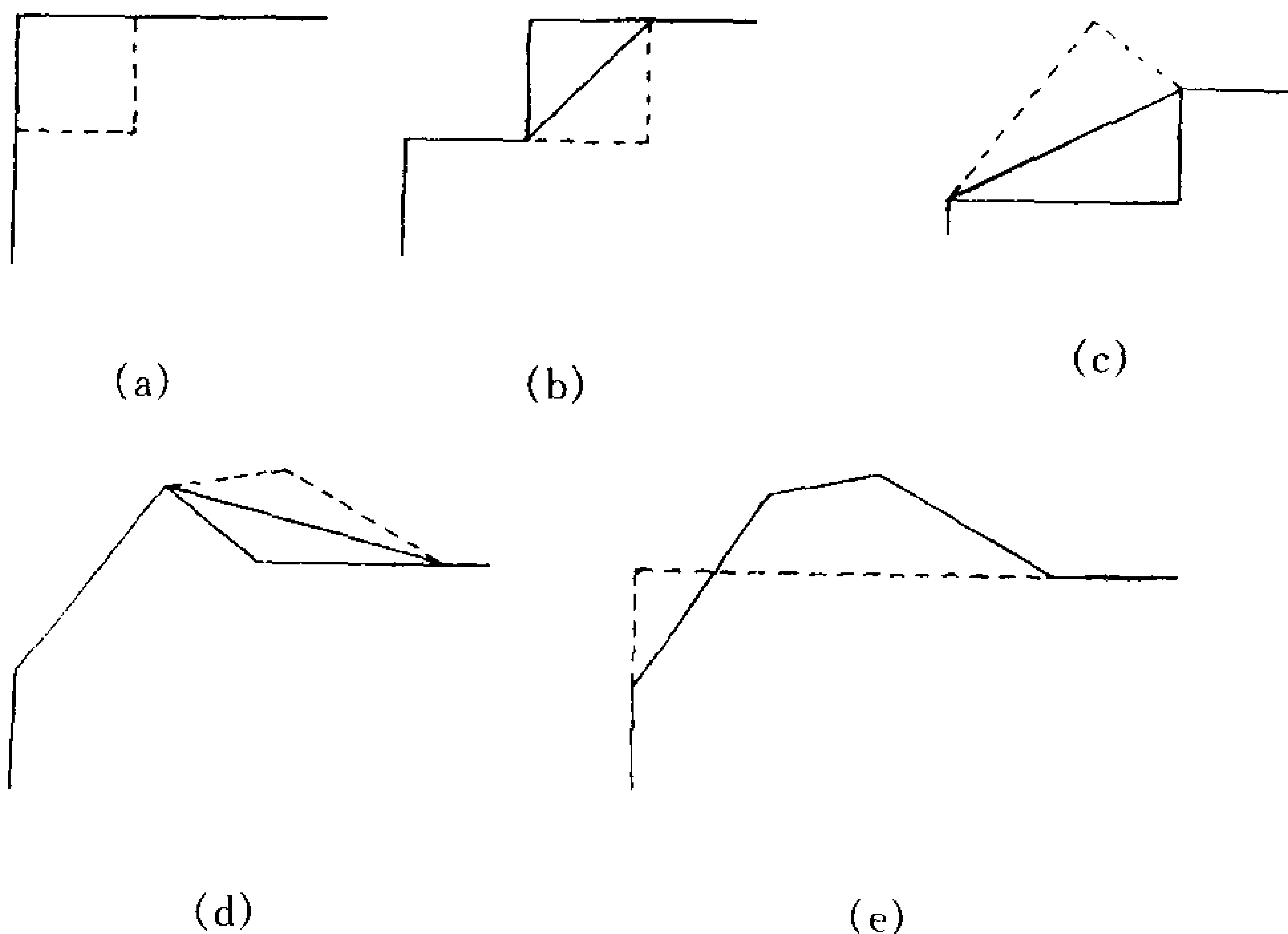
［解］ 可以．具体对折方法如下图所示：



8·157 某农场主得到了一块用篱笆围着的正方形田园，并且还得到一份文件，文件上写明，他有权力进行若干次如下的操作：经过篱笆墙上的任意两点间引一条直线，将直线一侧的这两点之间的围墙拆除．然后在直线另一侧关于直线的对称位置上重建起来．试问农场主能够用这样的手段增大自己田园的面积吗？

（第 32 届莫斯科数学奥林匹克，1969 年）

［解］ 可以增大田园面积．方法如下：



8·158 在平面上给定点 P_0 和 $\triangle A_1A_2A_3$，且约定当 $s \geqslant 4$ 时，$A_s = A_{s-3}$．构造点到 $P_0, P_1, P_2, \cdots$，使得 P_{k+1} 为点 P_k 绕中心 A_{k+1} 顺时针

旋转120°所到达的位置，$k=0,1,\cdots$. 已知$P_{1986}=P_0$，求证$\triangle A_1A_2A_3$为正三角形.

（第27届国际数学奥林匹克，1986年）

［证］ 记$u=e^{\frac{i\pi}{3}}$. 按点列$\{P_n\}$的构造法知

$$(A_{k+1}-P_k)u=P_{k+1}-A_{k+1},$$

$$P_{k+1}=(1+u)A_{k+1}-uP_k,k=0,1,\cdots,1985.$$

将$k=0,1,2$三式结合起来，得到

$$P_3=w+P_0,$$

其中$w=(1+u)(A_3-uA_2+u^2A_1)$是一个与P_0无关的常数. 同理有

$$P_{3m}=w+P_{3(m-1)},m=2,3,\cdots,662.$$

由此立即可得

$$P_{1986}=662w+P_0.$$

因已知$P_{1986}=P_0$，故得$w=0$. 从而有

$$A_3-uA_2+u^2A_1=0.$$

因为$u^2=u-1$，故由上式得到

$$A_3-A_1=u(A_2-A_1),$$

这就意味着$\triangle A_1A_2A_3$为正三角形.

8·159 在区间$[0,1]$上标出了22个点，允许将其中任意两个点换为连结它们的线段的中点. 求证可以经过20次这样的代换后，使得剩下的两个点间的距离不超过0.001.

（圣彼得堡数学奥林匹克，1990年）

［证］ 设标出的22个点依次为$0\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{21}<a_{22}\leqslant 1$，将它们分成11对：

$$(a_1,a_2),(a_3,a_4),\cdots,(a_{21},a_{22}).$$

然后按每对中两数之差从大到小重新排列上述11对数如下：

$$(b_1,b_2),(b_3,b_4),\cdots,(b_{21},b_{22}), \qquad ①$$

从每对中各取1点（究竟取哪1点以后定）记为$x_1,x_2,\cdots,x_{11}$. 余下的各1点相应地记为$y_1,y_2,\cdots,y_{11}$. 将两组数由前往后依次取中点，我们得到两点：

$$A = \frac{1}{1024}(x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + \cdots + 512x_{11}),$$

$$B = \frac{1}{1024}(y_1 + y_2 + 2y_3 + 4y_4 + \cdots + 512y_{11}),$$

于是有

$$A - B = \frac{1}{1024}\{(x_1 - y_1) + \sum_{i=2}^{11}2^{i-2}(x_i - y_i)\}. \quad ②$$

下面证明,只要适当选取$\{x_k\}$,便可使A和B两点间的距离不超过$\frac{1}{1024}$.具体选法如下:首先取$x_{11} = b_{22}$,于是$x_{11} - y_{11} > 0$.又因$x_{11} - y_{11}$是所有数对的两数之差中最小的,而且②式右端其余各项系数之和等于512,故可取$x_{10} = b_{19}, x_9 = b_{17}, \cdots, x_j = b_{2j-1}$,直到使和数

$$\sum_{i=j}^{11}2^{i-2}(x_i - y_i) \quad ③$$

第1次变为负值为止.易见,这时③的绝对值不超过最后一项的绝对值$2^{j-2}|x_j - y_j|$,其中当$j = 1$时,系数2^{j-2}理解为1.若直到$j = 1$才能使③式非正,则③的绝对值不超过1,问题已获解决.若$j > 1$,则再取$x_{j-1} = b_{2j-2}$,使$x_{j-1} - y_{j-1} > 0$,并继续这样下去,直到形如③的和数的值又变为正数为止.然后再改变取法以使差值$x_i - y_i$变号,直到取完x_1为止.易见,这样取法可使②式右端括号中的和式的绝对值不超过1,从而$|A - B| \leqslant \frac{1}{1024}$.

8·160　设n是大于1的整数.有n盏灯$L_0, L_1, \cdots, L_{n-1}$作环状排列,每盏灯都恰处在"开"和"关"两种状态之一.下面进行一系列的操作:$S_0, S_1, \cdots, S_i, \cdots$,操作$S_j$按下列规则影响$L_j$的状态(不改变其他各灯的状态):

(1)如果L_{j-1}是开的,则S_j改变L_j的状态,使它由开到关或者由关到开;

(2)如果L_{j-1}是关的,则S_j不变L_j的状态.上述操作序列$\{S_i\}$和灯列$\{L_i\}$中的标号,应按模n同余的方式来理解,即$L_n = L_0, L_{n+1} = L_1, \cdots$.

设操作开始前全部n盏灯全都开着,求证

(i)存在一个正整数$M(n)$,使得经过$M(n)$次操作后,n盏灯再

次全都开着;

(ii) 若 $n=2^k$,则经过 n^2-1 次操作之后,全部灯都是开着的;

(iii) 若 $n=2^k+1$,则经过 n^2-n+1 次操作之后,全部灯都是开着的.

(第 34 届国际数学奥林匹克,1993 年)

[证] 设初始状态,即全部灯都开着的状态为 T_0,进行完第 k 次操作 S_k 之后的状态为 T_k. 由于 T_k 总共只有 2^n 种不同状态,$k(\bmod\ n)$ 也只有 n 种不同数值,故数对 $(k(\bmod\ n), T_k)$ 也只有有限多个不同取法. 由抽屉原理知,存在无穷多个自然数 $k_1<k_2<\cdots<k_m<\cdots$,使得 $(k_j(\bmod\ n), T_{k_j})$ 均相同. 由此可见,从状态 T_{k_1} 开始循环,不妨设循环周期为 k_2-k_1. 而且由于 $T_{k_1}=T_{k_2}$ 且 $k_1\equiv k_2(\bmod\ n)$,故有 $T_{k_1-1}=T_{k_2-1}, T_{k_1-2}=T_{k_2-2},\cdots$, 依此类推. 但当 T_{k_1} 退到 T_0 时,T_{k_2} 退到 $T_{k_2-k_1}$. 于是有 $T_0=T_{k_2-k_1}$,即 $T_{k_2-k_1}$ 也是全部灯都开着的状态,这就证明了(i).

我们将开着的灯对应于 -1,关着的灯对应于 $+1$,这个数仍用 L_j 来代表. 于是操作 S_j 就是将 L_j 变为 $L_{j-1}L_j$,而保持其余的数不变.

为证(ii),只须证明周期为 n^2-1. 由(i)知,操作若干次后,还要出现状态 T_0,我们从这 T_0 按逆序向回推,即每次将 L_j 变为 $L_j\div L_{j-1}$. 注意,状态 T_0 意味着全部 n 个数都是 -1. 从 L_{n-1} 开始往回推 $n-1$ 次,因每次都是两个 -1 相除,故所得结果是 $L_0=-1$,其余的 $n-1$ 个数全是 $+1$. 我们记这个状态为 T_1.

我们用数学归纳法证明,对状态 T_1 从 L_0 开始逆向操作 $n(2^i-1)$ 次后 $(i\leqslant k)$, $L_0, L_1,\cdots, L_{2^i-1}$ 都是 -1,其余的都是 $+1$.

当 $i=1$ 时显然. 设当 $i=m(m\leqslant k-1)$ 时命题成立. 当 $i=m+1$ 时,先进行 $(2^m-1)n$ 次逆向操作,由归纳假设知这时 $L_0, L_1,\cdots, L_{2^m-1}$ 都是 -1,其余的都是 $+1$. 接着再逆向操作 n 次,易见,这时只有原来正负交界处的两个数 L_0 和 L_{2^m} 为 -1,其余 $n-2$ 个数全是 $+1$. 由于继续进行逆向操作时,$\{L_0, L_1,\cdots, L_{2^m-1}\}$ 和 $\{L_{2^m}, L_{2^m+1},\cdots, L_{2^k-1}\}$ 这两段在变化过程中互不干扰,故由归纳假设知,进行 $(2^m-1)n$ 次逆向操作后,所得的结果状态是 $L_0, L_1,\cdots, L_{2^m-1}, L_{2^m},\cdots, L_{2^{m+1}-1}$ 都是 -1,其余的都是 $+1$.

特别地，当 $i=k$ 时，恰好化为 T_0. 这是共进行了 $(n-1)+(2^k-1)n=n^2-1$ 次逆向操作. 反过来对此 T_0 进行 n^2-1 次操作，当然得到后面的 T_0. 这就完成了(ii)的证明.

当 $n=2^k+1$ 时，类似于上面的推理过程，首先对 T_0 从 L_{n-1} 开始逆向操作 $n-1$ 次，于是得到状态 T_1，即 $L_0=-1$，其余 $n-1$ 个数全是 $+1$ 的状态. 接着对 T_1 从 L_0 开始逆向操作 $(2^k-1)n$ 次，得到的结果是 $L_0,L_1,\cdots,L_{2^k-1}$ 都是 -1，而 $L_{2^k}=+1$. 再对 L_0,L_{2^k} 各逆向操作一次，前者不变而后者变为 -1，从而又得到 T_0，共操作的次数是 $(n-1)+(2^k-1)n+2=(n-1)n+1$. 反过来操作次数当然也是一样，这就完成了(iii)的证明.

8·161　在一个无限大的方格棋盘上划定一个 $n\times n$ 的正方形并在其中每个方格中放一枚棋子，共放 n^2 枚棋子. 允许进行如下操作：如果横向或纵向的连续3个方格中的前两格中有棋子而第3格空着，则可将第1格中的棋子跳过第2格落到第3格，并将第2格中的棋子拿掉. 问对于怎样的 n，可以经过若干次操作而使棋盘上只剩下1枚棋子.

（第34届国际数学奥林匹克，1993年）

[解]　此题与7·13题基本一致. 解法可参看7·13题的解法.

8·162　甲乙二人玩如下的游戏：甲从集合{1,2,3,4}中任取一个数，乙向甲问一连串的问题，其中每个问题都是下述类型："你所选取的数在不在某个子集中?"甲只能回答在或不在，而且 A 至多只能说一次谎. 求证

(1)乙只须共提5个问题，在得到 A 的回答后，便能断定甲所选定的那个元素；

(2)为了总能断定 A 所选定的数，乙只提4个问题是不够的.

（保加利亚数学奥林匹克，1994年）

[证]　乙只须向甲提下列5个问题：

(i)你所选的元素在不在子集{1,2}中?

(ii)你所选的元素在不在子集{1,2}中?

(iii)你所选的元素在不在子集{1,3}中?

(iv)你所选的元素在不在子集{1,3}中?

(v)你所选的元素在不在子集{1,4}中?

便可断定甲所选定的数.为此,我们将甲的所有不同回答列表于右,其中对号“√”表示回答在,空格表示回答不在,谎答题号0表示5个答案都是真的,i 表示第 i 题的答案是谎话.易见,表中所列出的甲的24组答案互不相同,所以乙可凭甲的答案而确定甲所选的数.

选数	谎答题	问题 1	2	3	4	5
1	0	√	√	√	√	√
	1		√	√	√	√
	2	√		√	√	√
	3	√	√		√	√
	4	√	√	√		√
	5	√	√	√	√	
2	0	√	√			
	1		√			
	2	√				
	3	√	√	√		
	4	√	√		√	
	5	√	√			√
3	0			√	√	
	1	√		√	√	
	2		√	√	√	
	3				√	
	4			√		
	5			√	√	√
4	0					√
	1	√				√
	2		√			√
	3			√		√
	4				√	√
	5					

如果乙只提4个问题,由于每个问题的答案只有“在”和“不在”两种,对4个问题的所有不同的答案只有16种.另一方面,当甲选定数 i 时,甲对4个问题的答案共有5种不同(不说谎以及分别在第1,2,3,4题的回答是谎话),$i=1,2,3,4$,所以甲对乙的4个问题的回答共有20种可能的答案.由抽屉原理知其中必有两种答案是完全相同的,但它们对应于不同的选数,从而乙在这时无法断定甲所选定的数.

8·163 给定4个全等的直角三角形纸片并允许进行如下的操作:每次可以选择一个直角三角形并将它沿斜边上的高剪开成两个直角三角形.求证无论经过多少次操作,在所得到的三角形中总有两个全等.

(第58届莫斯科数学奥林匹克,1995年)

[证] 若不然,则存在4个全等的直角三角形纸片,经过有限次操作后可使所得到的直角三角形互不全等.

设这样的有限次操作的最少次数为 n,并考察达到 n 次的一组4个全等的直角三角形,显然,操作 n 次可以使所得的直角三角形互不全等与先剪哪个三角形,后剪哪个三角形的操作顺序无关.

既然开始时是4个全等的直角三角形,所以必然有3个要沿斜边上的高剪开.不妨设开头的3次操作就是剪开这3个三角形.于是得到6个三角形可以分成两组,每组3个三角形彼此全等.这样一来,每组3个全等三角形中又都至少剪开两个.不妨设第4至7次操作就是剪开这4个三角形.注意,所得到的8个三角形中有4个全等.按假设,从这4个全等的直角三角形出发,只要再操作 $n-7$ 次就可以得到互不全等

的三角形,此与 n 的最小性矛盾.这就表明无论经过多少次操作,总有两个三角形全等.

8·164 设有3堆石块,甲每次从其中一堆中搬出1块放入另一堆,甲每搬动一次都可从乙处得到报酬,其钱数等于他所放入的堆中的石块数与所搬出的堆中其他石块数之差.如果该差数是负值,则甲应退还这一数目的钱给乙(如果甲无钱可退,则可暂欠).经过若干次搬动后,所有石块都位于自己原来所在的堆中,求这时甲所可能挣到的钱的最大值.

(第21届全俄数学奥林匹克,1995年)

[解] 甲所能挣到的钱数的惟一值就是0,当然最大值也是0.

假定我们在每一堆石块中,都用线段将石块两两相连结.甲在搬动石块时,首先要解开该石块与堆中所有其他石块所连的那些线段(这些线段的一头仍拴在该石块上,只解开拴在其他石块上的那一端),然后将石块连同这些线段一起搬到另一堆中,并用带来的这些线段与新堆中的石块一一连结.这时,如果还剩有线段无石块可连结,则表明该石块原在堆中的石块数多于新堆的石块数.于是甲可从这一石块上取下多余的线段,并按取下的线段条数向乙领钱.如果该石块上带来的线段不够用,则表明原堆中的石块数少于搬到的新堆.于是甲便向乙索取尚欠的线段,以便将该石块与新堆中的每一石块都相连结,并按所索取的线段条数向乙付钱(或者暂欠).显然,所述的规则与原题一致.

这样一来,易知,我们在各堆中所连结的线段的总条数与甲从乙处得到的钱数之和在搬动石块的过程中保持不变.既然在搬动若干次后所有石块的分布与开始时一样,甲所得到的钱数也和未搬动前一样,当然是0.

8·165 一架旋转木马上共有 n 个座位,男孩 A 共转了 n 场.在每转完一场之后,他就从原来的座位上起来,沿顺时针方向转移到另一个座位上,但任何一次转移他都没有走足整个圆周.将男孩 A 在一次转移中所经过的座位的数目(包括他原坐着的那个座位)称为该次转移的长度.假设他的 $n-1$ 次转移的长度互不相同,求能使 A 在 n 场旋转中坐遍 n 个座位的 n 的所有可能值.

(第21届全俄数学奥林匹克,1995年)

[解] (1)当 n 为奇数时,$n-1$ 次转移的长度之和为

$$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1). \qquad ⊛$$

这是 n 的倍数.从而表明第 n 次旋转时坐的位置与第 1 次相同.这就是说 n 个座位中至少有 1 个座位没有坐过.可见,奇数 n 都不满足要求.

(2)当 n 为偶数时,⊛式表示的 $n-1$ 次转移的长度之和不再是 n 的倍数,因而(1)中的问题不再存在.这时,A 的 $n-1$ 次转移长度可以按下述方式来取:

当 $n=4k+2$ 时,依次取为

$1,n-2,3,n-4,\cdots,2k+1,2k,2k+3,2k-2,\cdots,n-3,2,n-1.$

容易算出,上面数列前 m 项之和模 n 的值依次为

$1,n-1,2,n-2,\cdots,k+1,n-(k+1),k+2,n-(k+2),\cdots,2k,$
$n-2k,2k+1.$

这恰好表明 $n-1$ 次转移所座的 $n-1$ 个座位加上开始时的座位共 n 个座位互不相同.

当 $n=4k$ 时,依次取为

$1,n-2,3,n-4,\cdots,2k-1,2k,2k+1,2k-2,\cdots,n-3,2,n-1.$

类似地可以验证这种取法满足题中要求.

综上可知,所求的 n 的所有可能值就是所有偶数.

8·166　设 $m,n,k\in N$,有 4 个酒杯,容量分别为 m,n,k 和 $m+n+k$ 升.允许进行如下操作:将一个杯中的酒全部倒入另一杯中或者将另一杯中倒满酒为止.开始时,大杯中装满酒而另 3 个杯子却空着.问为使对任何 $s\in N,s<m+n+k$,都可经过若干次操作,使得某个杯子中恰有 s 升酒的关于 m,n,k 的充分必要条件是什么?

(中国国家集训队测验题,1995 年)

[解]　所求的充分必要条件是 $(m,n,k)=1$.

必要性.若 $(m,n,k)=h>1$,则无论怎样操作,每个杯中的酒量都是 h 的整数倍,从而无论怎样操作都不会出现某杯中有 1 升酒的情形,矛盾.必要性成立.

充分性.因 $(m,n,k)=1$,故存在整数 a,b,c,使得

$$am+bn+ck=1. \qquad ⊛$$

不妨设 $a>0,b<0,c<0$.现在按如下原则进行操作:首先将 m 杯倒满

酒，接着将 m 杯中的酒倒入 n 杯中，若 $m \geqslant n$，则倒满 n 杯为止；若 $m < n$，则都倒入 n 杯为止，然后再从大杯中倒满 m 杯，再从 m 杯倒入 n 杯中，这样下去，直到倒满 n 杯为止. 然后将 n 杯中的酒倒回大杯中. 接着再将 m 杯尚存的酒倒入 n 杯中，每当 m 杯空了时，就用大杯中的酒倒满；每当 n 杯中倒满酒时，就又倒回大杯中，直到 n 杯中的酒倒回大杯 b 次为止. 然后 m 杯依然，但用 k 杯代替 n 杯继续进行操作，直到 k 杯中的酒倒回大杯 c 次为止. 由㊀式易知，这时 m 杯中恰有 1 升酒.

将 m 杯中的 1 升酒倒入 k 杯中，然后重复上述的全过程，最后即可在 m 杯中得到恰有 2 升酒的情形. 依此类推，即可依次在 m 杯中得到 $1,2,3,\cdots,m$ 升酒的情形.

若 $n > m$，则只要将上述的 j 升酒倒入 n 杯，然后再倒入 m 升，即可依次得到 $m+1,m+2,\cdots,n$ 升酒的情形，故不妨设 $m \geqslant n \geqslant k$.

将上面得到的 $j(0 \leqslant j < n)$ 升酒倒入 n 杯，并将 k 杯装满酒，m 杯空着，这时大杯中有酒 $m+n-j$，即可分别得到 $m+1,m+2,\cdots,m+n$ 升. 只要再把 k 杯中的酒倒回大杯中，则大杯中的酒量可依次为 $m+k,m+k+1,\cdots,m+n+k$. 这就完成了充分性的证明.

8·167 甲乙二人借助前100个自然数玩一种游戏：甲先把这 100 个数按某种顺序写成一个数列且不让乙看到. 然后乙每次可以写出这 100 个自然数中的 50 个数，请甲将这 50 个数按它们在数列中出现的次序写出来. 乙看了前面提问的结果后，再提下一次的 50 个数并这样继续下去. 问乙最少要提问多少次，才能保证无论甲写的数列如何，乙都可以把它写出来？证明你的结论.

（第 22 届全俄数学奥林匹克，1996 年）

［解］ 乙第 1 次提出数组 $M_1=\{1,2,\cdots,50\}$，第 2 次提出数组 $M_2=\{51,52,\cdots,100\}$，请甲分别将 M_1 和 M_2 中的各 50 个数按数列中的顺序写出来. 然后乙把 M_1 和 M_2 中按数列中顺序在前的各 25 个数所成的集合记为 M_3，另外的 50 个数所成的集合记为 M_4，并于第 3，4 两次分别就 M_3 和 M_4 提问，然后甲给出答案. 易见，甲就 M_3 给出的答案中的前 25 个数即为原数列的前 25 项，就 M_4 给出的答案中的后 25 项即为原数列的后 25 项. 最后，乙将 M_3 答案中的后 25 个数与 M_4 答案中的前 25 个数放在一起进行第 5 次提问，甲给出的答案恰为原数列的中间 50 项，这样就确定了整个数列. 所以所需提问的最少次数不

多于5次.

下面证明乙只提问4次是不够的.要确定甲所写出的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 的排序,必须使每个相邻数对 (a_i,a_{i+1}) 在乙提问的答案中至少出现一次,否则甲对两个数列

$$a_1,a_2,\cdots,a_i,a_{i+1},\cdots,a_{100},$$

$$a_1,a_2,\cdots,a_{i+1},a_i,\cdots,a_{100}$$

的所有提问的回答都是相同的.

让我们来证明,总存在一个数列,使在乙和甲之间问答4次之后仍然是无法确定的.确切地说,在问答两次之后,我们就可以构造一个满足两次答案条件的数列,使得再经两次问答是无法确定的.

设第1次50个数的排序情况是

$$k_1,k_2,\cdots,k_{50}. \qquad ①$$

设乙第2次提出的50个数中有 m 个数在①中出现过.于是甲可在给出的答案

$$k'_1,k'_2,\cdots,k'_{50}. \qquad ②$$

中使重复出现的 m 个数的号码与①中分别相同.然后按如下原则来构造数列:

(1) $k_i,k'_i\in\{a_{2i-1},a_{2i}\},i=1,2,\cdots,50$;

(2)每个相邻四数组 $\{a_{4i-3},a_{4i-2},a_{4i-1},a_{4i}\}$ 中,3个相邻数对在①和②中均不是相邻的.

注意,①和②中的每两个相应的相邻数组的关系有以下4种可能:

(i) $k_{2m-1}=k'_{2m-1},k_{2m}=k'_{2m}$;

(ii) $k_{2m-1}=k'_{2m-1},k_{2m}\neq k'_{2m}$;

(iii) $k_{2m-1}\neq k'_{2m-1},k_{2m}=k'_{2m}$;

(iv) $k_{2m-1}\neq k'_{2m-1},k_{2m}\neq k'_{2m}$.

针对4种不同情况,我们分别按如下方式来构造新数列的第 m 个相邻四数组 $(a_{4m-3},a_{4m-2},a_{4m-1},a_{4m})$:

(i) $(k_{2m-1},*,k_{2m},*)$;

(ii) $(k_{2m-1},*,k_{2m},k'_{2m})$;

(iii) $(k_{2m-1},k'_{2m-1},*,k'_{2m})$;

(iv) $(k_{2m-1},k'_{2m-1},k_{2m},k'_{2m})$,

其中 * 号表示在①和②中都未出现的数.显然,这种数的个数恰好和在①和②中重复出现的数的个数同样多.

如果想对这个构造出的数列再进行两次问答就确定下来,则每组的 3 个相邻数对都至少在两次答案的排序中出现一次.也就是每组的 4 个数都必须至少在两次提问之一中出现.但 50 不是 4 的倍数,故上述要求是无法实现的.

综上可知,为了保证无论甲所写的数列如何,乙都可以确定出来,乙和甲之间最少要问答 5 次.

8·168 设 $A=\{1,2,\cdots,17\}$.对于映射 $f:A\to A$,记

$$f^{(1)}(x)=f(x),f^{(k+1)}(x)=f(f^{(k)}(x)),k\in N.$$

设从 A 到 A 的一一映射 f 满足条件:存在自然数 M,使得

(1)当 $m<M,1\leqslant i\leqslant 16$ 时,有

$$f^{(m)}(i+1)-f^{(m)}(i)\not\equiv\pm 1(\bmod\ 17),$$

$$f^{(m)}(1)-f^{(m)}(17)\not\equiv\pm 1(\bmod\ 17);$$

(2)当 $1\leqslant i\leqslant 16$ 时,有

$$f^{(M)}(i+1)-f^{(M)}(i)\equiv 1\text{ 或 }-1(\bmod\ 17),$$

$$f^{(M)}(1)-f^{(M)}(17)\equiv 1\text{ 或 }-1(\bmod\ 17).$$

试对满足上述条件的一切 f,求所对应的 M 的最大可能值,并证明你的结论.

(第 12 届中国中学生数学冬令营,1997 年)

[解] 用正 17 边形的顶点来依次表示 1,2,…,17 这 17 个数.数对 $\{i,i+1\}$ 对应于正 17 边形的第 i 条边而数对 $\{i,j\}$ ($i-j\not\equiv\pm 1(\bmod\ 17)$)时,对应于正 17 边形的对角线.于是条件(i)是说当 $m<M$ 时,映射 $f^{(m)}$ 将每条边 $\{i,i+1\}$ 都映射为对角线 $\{f^{(m)}(i),f^{(m)}(i+1)\}$.条件(ii)表明 $f^{(M)}$ 第 1 次将每条边都映射为边.

引理 集合

$$\{(f^{(m)}(i),f^{(m)}(i+1)\mid i=1,2,\cdots,17,m=1,2,\cdots,M-1\}$$

中的所有元素互不相同.

引理的证明 若不然,由于 f 是一一映射,故必有 $1\leqslant m_1<m_2\leqslant M-1,1\leqslant i,j\leqslant 17$,使得

$$\{(f^{(m_1)}(i),f^{(m_1)}(i+1)\}=\{(f^{(m_2)}(j),f^{(m_2)}(j+1)\}.$$

因为

$$\{(f^{(m_2)}(j),f^{(m_2)}(j+1)\}$$
$$=\{f^{(m_1)}(f^{(m_2-m_1)}(j),f^{(m_1)}(f^{(m_2-m_1)}(j+1))\}$$

而且 f 为一一映射,故有

$$\{i,i+1\}=\{f^{(m_2-m_1)}(j),(f^{(m_2-m_1)}(j+1)\},$$

此与条件(i)矛盾.引理证毕.

回到原题的解.注意,引理中的集合的元素互不相同,它共有$(M-1)\times 17$ 个元素.每个元素都对应于正 17 边形的一条对角线,而正 17 边形所有对角线的条数为 $C_{17}^2-17=7\times 17$ 条,所以有

$$(M-1)\times 17\leqslant 7\times 17.$$

由此即得 $M\leqslant 8$.

另一方面,令

$$f(i)\equiv 3i(\mathrm{mod}\ \ 17),i\in A,$$

于是对 $m\in N$,有

$$f^{(m)}(i+1)-f^{(m)}(i)\equiv 3^m(\mathrm{mod}\ \ 17).$$

容易算出,当 m 分别取值 1,2,3,4,…时,3^m 模 17 的值依次为

$$3,9,10,13,5,15,11,-1.$$

可见,对此 f 有 $M=8$.故知所求的 M 的最大值为 18.

8·169　在一块无限大的国际象棋棋盘上有一只(p,q)马.它每跳一步,可沿水平方向走 q 个方格,同时沿竖直方向走 p 个方格,也可以沿水平方向走 p 个方格,同时沿竖直方向走 q 个方格.求所有正整数对(p,q),使得这只(p,q)马从任何一格出发,都可以在跳若干步后到达棋盘上的任何另一方格中.

(保加利亚数学奥林匹克,1994 年)

[解]　设这块棋盘是黑白相间地染色的,注意,如果 p 和 q 是奇偶性不同的一对正整数,那么这只马每跳一步前后,所在的方格异色;如果 p 和 q 的奇偶性相同,那么这只马每跳一步前后,所在的方格都同色.可见,为使这只马从任何一格出发,都可以跳若干步后到达这块棋盘的任何另一个方格,$p+q$ 必为奇数,即正整数 p 与 q 奇偶性不同.

设 p 和 q 是奇偶性不同的一对正整数.在这块棋盘上引入直角坐标系,使所有方格的中心恰为坐标平面上的全部整点,且这只马所在的方格的中心为原点.以下我们就用方格中心的坐标来代表方格.这样一来,这只马无论跳了多少步,它所到达的方格的坐标点是 p 与 q 的线

性组合,即两个坐标都是 $kp+hq$ 型的,其中 $k,h\in Z$.如果 $(p,q)=d>1$,那么马所到达的方格 (x,y) 的两个坐标 x 和 y 也都是 d 的倍数.从而知马不可能跳到任何另一方格.所以为使这只马能跳到任何另一方格,必须有 $(p,q)=1$,即 p 和 q 互质.

综上可知,为满足题中要求,正整数对 (p,q) 应满足下列两个必要条件:

(i) $p+q$ 为奇数;

(ii) p 与 q 互质.

下面我们将证明,这两个条件还是充分的.

从马的跳法可知,这只马从方格 (x,y) 出发,可以跳到方格 $(x\pm 2p,y)$,$(x\pm 2q,y)$,$(x,y\pm 2p)$ 和 $(x,y\pm 2q)$.例如

$$(x,y)\longrightarrow(x+p,y+q)\longrightarrow(x+2p,y),$$
$$(x,y)\longrightarrow(x+q,y+p)\longrightarrow(x,y+2p),$$
$$(x,y)\longrightarrow(x\pm p,y\pm q)\longrightarrow(x,y\pm 2q),$$

其中箭头表示马从前一个方格跳一步到达箭头所指的方格.由此可知,这只马从方格 (x,y) 出发,可以到达任何方格

$$(x+2kp+2hq,y+2np+2mq),k,h,n,m\in Z, \quad ①$$

因为 $(p,q)=1$,故存在 $u,v\in Z$,使得

$$up+vq=1.$$

于是有

$$2up+2vq=2. \quad ②$$

由①和②可知,对任何 $k,h\in Z$,马从方格 (x,y) 出发,都可以到达方格 $(x\pm 2k,y\pm 2h)$.

又因 p 与 q 奇偶性不同,不妨设 p 为奇数而 q 为偶数.这样,马从 $(0,0)$ 出发,跳一步到达方格 (p,q),因 q 为偶数,故可经若干步而到达方格 $(p,0)$.由于 p 为奇数,故又可经若干步跳动而到达方格 $(1,0)$,即到达始发方格的相邻方格.从而可以到达任何一个指定方格.这就证明了满足题中要求的所有数对 (p,q) 即为具有不同奇偶性且互质的所有正整数对.

8·170　在坐标平面上有4枚棋子,它们的中心都位于整点.每枚棋子都可按以另外任意两枚棋子的中心分别为起点和终点的向量移动.求证任何两枚棋子都可以按这种规则走棋若干步之后重叠在一

起.

(第22届全俄数学奥林匹克,1996年)

[证] 先证如下的引理:

引理 如果3枚棋子位于平行于一条坐标轴的同一直线的整点上,则其中任何两枚棋子都可经走棋若干步后重叠.

引理的证明 设棋子A,B,C中A与B之间的距离为3对棋子间距离的最小值.不妨设B在A与C之间.将棋子C按向量$\overrightarrow{BA}$移动若干次,直到将C移动到线段AB上为止.这时3对棋子间的距离的最小值将变小.由于位于同一条直线上的两个整点间的距离是整数,所以经若干次这样的变小之后,这个最小值将变为0.这表明3枚棋子中已有两枚重叠.如果是指定的两枚已经重叠,证明就完成了.否则,可以再走一步,将重叠的两枚棋子中指定的一枚走到另一枚指定的棋子上,引理证完.

回到原题的证明.将所有棋子都投影到x轴上并把投影看作棋子.于是当棋子按某个向量移动时,其投影也就按该向量的投影移动.

选定两个投影,并将其余两个投影之一作为第3个投影.于是由引理知可走棋若干步后使两个投影重合.然后将重合的两个投影看作一枚棋子,另两个投影看作两枚棋子,于是又得到一条直线整点上的3枚棋子.若需要移动代表重叠投影的棋子时,可将原两枚棋子先移动其中一枚,再沿同向量移动另一枚,这样一来,二者的投影仍然重合.于是由引理又知可使另两个投影之一与已是重叠的投影再重叠,导致3个投影重叠在一起.这表明3个投影所对应的3枚棋子恰在一条平行于y轴的直线的3个整点上,再由引理知可经过若干次走棋使指定的两枚棋子重叠在一起.

8·171 设$ABCD$是块20×12的矩形方格板($AB=20$).设r是给定的自然数,当且仅当两个方格的中心相距$\sqrt{r}$时,可以把放在其中一个方格中的棋子移到另一个方格中.已知在左上顶点A为一个顶点的角格中放有惟一的一枚棋子.我们的目标是经过一系列移动,使棋子走到右上顶点B所在的角格中.

(i)求证当$2\mid r$或$3\mid r$时,这一目标无法实现;

(ii)求证当$r=73$时,这一目标可以实现;

(iii)当 $r=97$ 时,这一目标能否实现?

(第37届国际数学奥林匹克,1996年)

[解] 用(i,j)表示第 i 行 j 列的方格,于是方格(i_1,j_1)中的棋子可以走到方格(i_2,j_2)中的条件是$(i_1-i_2)^2+(j_1-j_2)^2=r$.

(i)当 $2\mid r$时,i_1-i_2 与 j_1-j_2 奇偶性相同.从而 i_1-j_1 与 i_2-j_2 奇偶性相同.但 $1-1$ 与 $1-20$ 的奇偶性不同,故无法将左上角方格中的棋子走到右上角方格中.

当 $3\mid r$时,由条件知

$$(i_1-i_2)^2+(j_1-j_2)^2\equiv0(\bmod\ 3).$$

由于完全平方数模 3 时只能为 0 或 1,故必有

$$i_1-i_2\equiv0,j_1-j_2\equiv0(\bmod\ 3).$$

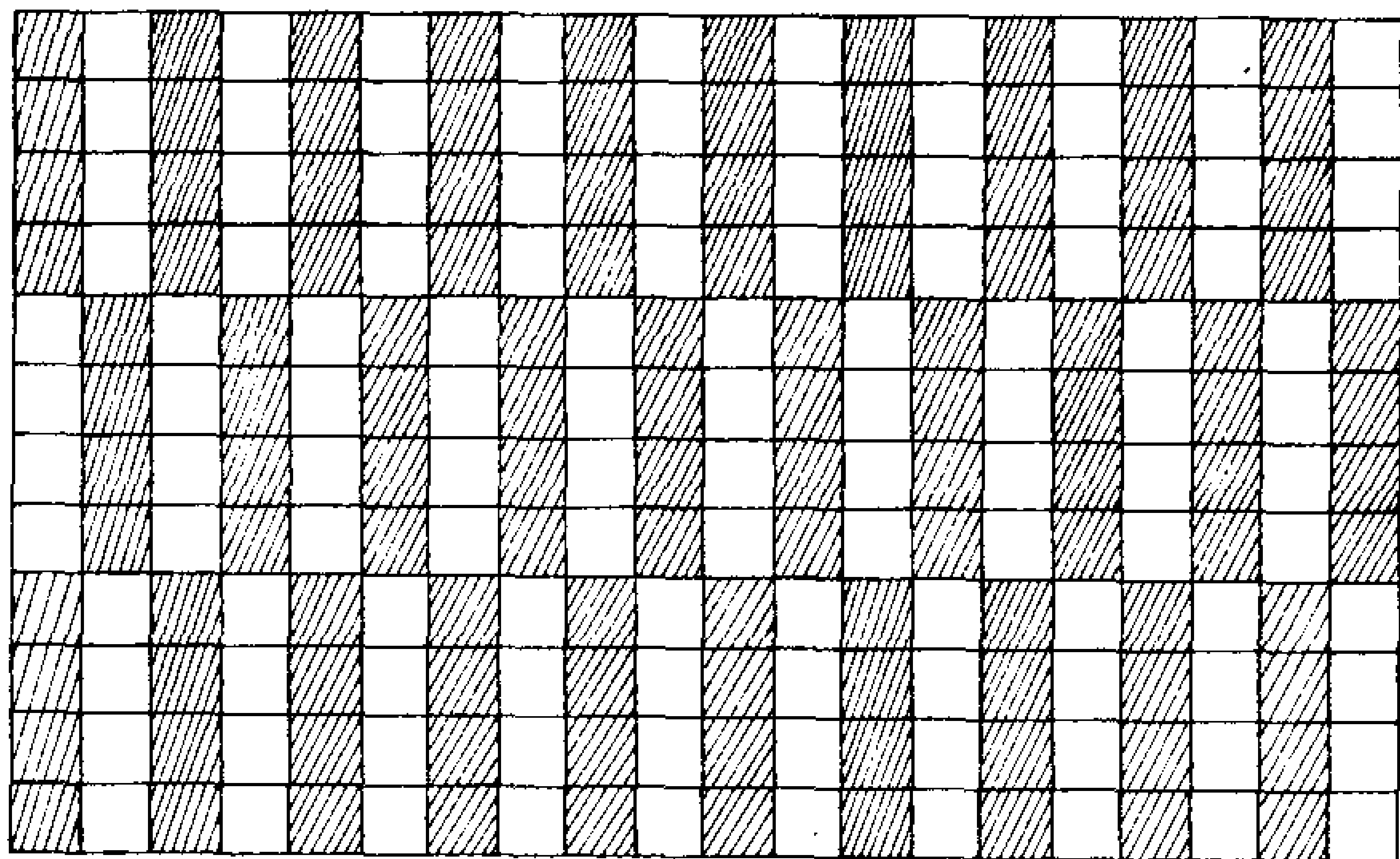
从而有

$$i_1-j_1\equiv i_2-j_2(\bmod\ 3).$$

但 $1-1\not\equiv1-20(\bmod\ 3)$,所以也不能实现.

(ii)当 $r=73=3^2+8^2$ 时,可以实现题中要求,具体走棋方法如下:

$(1,1)\longrightarrow(4,9)\longrightarrow(7,17)\longrightarrow(10,9)\longrightarrow(2,6)$
$\longrightarrow(5,14)\longrightarrow(8,6)\longrightarrow(11,14)\longrightarrow(3,17)$
$\longrightarrow(6,9)\longrightarrow(9,17)\longrightarrow(1,20)$.



(iii)当 $r=97=4^2+9^2$ 时,$|i_1-i_2|$ 与 $|j_1-j_2|$ 只能一个是 9 而另一个是 4.将矩形方格板涂色如右图所示.易见,从黑格出发走一步,只能走到另外的黑格中而走不到白格中,从而不可能由左上角的黑格

走到右上角的白格.

8·172 将有限多颗豆子放在一排方格中,并假定这排方格是双向无穷的.一个移动序列按以下规则进行:在每一步,先选取一个至少放有两颗豆子的方格,从中取出两颗豆子,一颗放入该方格的左邻方格中,另一颗放入该方格的右邻方格中.当每个方格中都至多放有1颗豆子时,移动序列终止.求证对于给定的初始状态,任何一个满足规则的移动序列,都将在移动同样多步之后结束,并且具有相同的终结状态.

(第37届国际数学奥林匹克预选题,1996年)

[证] (1)首先证明,无论初始状态如何,移动序列必将终止.

若不然,设对共有 n 颗豆子的某个初始状态存在一个无穷移动序列.取初始状态中有豆子的方格中最左边的方格标号为0,然后向右依次将方格标号为1,2,…;向左依次将方格标号为-1,-2,….设第 k 次移动前,有豆子的方格中的最小标号为 m_k,最大标号为 M_k.当 $m_k<l<M_k$ 时,若标号为 l 的方格中没有豆子,则称它为空格.设初始状态中,最长的连续空格串的长度为 L,$L\geqslant 0$,即共有 L 个连续空格,则无论进行多少次移动,最长的连续空格串的长度都不超过 $A=\max\{L,1\}$.

事实上,如果 $L\leqslant 1$,但移动若干步之后出现多于1个连续空格,则可考察这串连续空格中最后生成的那一个空格.在这个方格变为空格的那步移动中,它必然是将仅有的两颗豆子分别移到与它相邻的两个方格中,而这将导致它的左右两个相邻方格都不是空格,矛盾.如果 $L\geqslant 2$,但移动若干步后出现多于 L 个连续空格,也可以类似地导出矛盾.所以,最长的连续空格串的长度总是不超过 A.

因此,对任何 $k\in N$,总有

$$M_k-m_k\leqslant(n-1)(A+1). \qquad ①$$

设第 k 次移动前,标号为 l 的方格中有豆子 $a_{k,l}$ 颗,定义函数

$$f(k)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty} l a_{kl},\quad g(k)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty} l^2 a_{kl}.$$

易知 $f(k)=f(k+1)$,$k=1,2,\cdots$.因此有 $f(k)=f(1)=C$.又因

$$m_k n=m_k\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_{kl},\leqslant f(k)\leqslant M_k\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_{kl}=M_k n,$$

故得

$$m_k \leqslant \frac{C}{n} \leqslant M_k. \qquad ②$$

由①和②可得

$$m_k + (n-1)(A+1) \geqslant M_k \geqslant \frac{C}{n},$$

$$m_k \geqslant \left[\frac{C}{n} - (n-1)(A+1)\right];$$

$$M_k - (n-1)(A+1) \leqslant M_k \leqslant \frac{C}{n},$$

$$M_k \leqslant \left[\frac{C}{n} - (n-1)(A+1)\right].$$

这表明所有豆子所在方格的标号始终都不小于 $\left[\frac{C}{n} - (n-1)(A+1)\right]$,且都不大于$\left[\frac{C}{n} + (n-1)(A+1)\right]$.

令 $B = \max\left\{\left|\left[\frac{C}{n} - (n-1)(A+1)\right]\right|, \frac{C}{n} + (n-1)(A+1)\right\}$,于是有

$$g(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} l^2 a_{kl}, \leqslant B^2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_{kl} \leqslant B^2 n. \qquad ③$$

由于$(a+1)^2 + (a-1)^2 - 2a^2 = 2$,故有

$$g(k+1) - g(k) = 2, k = 1, 2, \cdots. \qquad ④$$

由④递推便得

$$g(k) = 2(k-1) + g(1), k = 1, 2, \cdots.$$

取 $k_0 \in N$ 足够大,使得 $2(k_0 - 1) + g(1) > B^2 n$,则得 $g(k_0) > B^2 n$,此与③矛盾.

(2)再证对于给定的初始状态,经任何移动序列后都具有相同的终止状态.

对于一个连续方格串,如果其中每个方格中都有豆子,但与这串方格左右相邻的两个方格中都没有豆子,则称这串连续方格中的所有豆子为一串.对于相继的两串豆子(两串豆子之间有空格但是没有其他的豆子),如果移动若干步之后可使这两串中的各一些豆子到达同一个方格中,则称这两串豆子是互相干扰的,否则就称这两串豆子是互不干扰的.这样一来,我们可以将初始状态中的 n 颗豆子分成若干串,进而又可分成若干组互相干扰的串,使不同组中的串互不干扰.可见,只须对相继的互相干扰的串进行证明.对于这种情况,我们指出,其终止状态

中至多有 1 个空格.

若不然,则可考察终止状态中的两个相继的空格,即二者之间不再有其他空格的两个空格.由于这些串豆子是互相干扰的,所以任何一个空格都不能是始终不变的.换句话说,终止状态中的空格都是在移动到某一步时形成的.如果两个空格不相邻,则考察其中较后生成的一个,不妨设为右边的一个空格.它只能是将其中仅有的两颗豆子取出,分别放在与它相邻的两个方格中,且移动后此方格左边邻格中只有 1 颗豆子.只有这样才能保证此方格在终止状态中是空格.因此左邻方格在这步移动之前是空格.这导致两个相继方格彼此之间靠近了 1 个方格.重复上面的过程,可以使这两个空格变为相邻方格.再考察在这之前的移动,易知这两个相邻空格不能再参与移动.而这意味着这两个相邻空格将这组豆子串分成互不干扰的串,矛盾.

由上述论证知,可以假定初始状态中的所有豆子只是一组互相干扰的豆子串,因此它的终止状态中至多有 1 个空格.

考察下列的和式序列:

$\cdots\cdots,$

$0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1),$

$0+1+2+\cdots+(n-2)+n,$

$0+1+2+\cdots+(n-3)+(n-1)+n,$

$\cdots\cdots,$

$0+2+3+\cdots+n,$

$1+2+3+\cdots+n,$

$1+2+\cdots+(n-1)+(n+1),$

$\cdots\cdots.$

易知每个整数恰好在和式序列的结果中出现 1 次,由上面讨论可知,终止状态中有豆子的方格的标号必为和式序列中某一和式中的各项.因函数 $f(k)\equiv C$ 取定值,而和式序列中结果等于 C 的和式是惟一确定的,所以终止状态也是惟一确定的.

(3)最后证明,对于给定的初始状态,任何移动序列都将在移动同样多步之后终止.

因为对于给定的初始状态,终止状态惟一确定,从而与初始状态和终止状态相对应的函数 g 的值也惟一确定.由④知

$g(k+1)-g(k)=2$,即每步移动都导致相应的 g 值增加 2. 所以终止状态的 g 值与初始状态的 g 值之差除以 2 的运算结果就是移动的步数,它也是惟一确定的,这就表明任何移动序列移动的步数都是同样多的.

第九章　染色问题

9·1　将数轴上每一个坐标为整数的点，都涂上红蓝两色之一. 试证至少有一种颜色具有如下的性质：对每个自然数 k，都能找到无穷多个涂有这种颜色的点，它们的坐标都能被 k 整除.

（第 40 届莫斯科数学奥林匹克，1977 年）

［证］　若不然，则红蓝两色都不具有所论的性质，即存在自然数 k_1 和 k_2，使得红点中只有有限多个点的坐标是 k_1 的倍数，蓝点中只有有限多个点的坐标是 k_2 的倍数. 这样一来，所有整数中只有有限多个是 $k_1 \cdot k_2$ 的倍数，此不可能. 由此可知，两种颜色中，至少有一种颜色具有题中所要求的性质.

9·2　试证可以将 $\{1,2,\cdots,1986\}$ 中的每个数都染上两种颜色之一，使得不存在含有 18 项的单色等差数列.

（匈牙利数学奥林匹克，1986 年）

［证］　设所有由 $S=\{1,2,\cdots,1986\}$ 中的 18 个数构成的等差数列的集合为 M. 对于任意的 $\alpha \in M$. 设其首项为 a，公差为 d，于是有 $1 \leqslant a \leqslant 1969$，且 $1 \leqslant d \leqslant \left[\frac{1986-a}{17}\right]$. 对于每个 $S \ni a \leqslant 1969$，当 d 取 $\left\{1,2,\cdots,\left[\frac{1986-a}{17}\right]\right\}$ 中的 1 个值时，便可得到 1 个以 a 为首项，d 为公差的等差数列 $\alpha \in M$. 因此，M 中首项为 a 的等差数列的个数为 $\left[\frac{1986-a}{17}\right]$. 于是有

$$|M| \leqslant \sum_{a=1}^{1969}\left[\frac{1986-a}{17}\right] \leqslant \sum_{a=1}^{1969} \frac{1986-a}{17}$$

$$\leqslant \frac{1}{17}(1986 \times 1969 - 985 \times 1969) < 116000.$$

对于每个 $\alpha \in M$，S 中除出现在 α 中的 18 个数之外还有 1968 个数，每个数都有两种可能的涂色方式，因而使 α 为单色等差数列的不同涂色法共有 2^{1969} 种. 由于 M 中共有 $|M| < 116000$ 个 18 项的等差数列，从而至少有 1 个单色的 18 项等差数列的所有不同涂色法的总数不超过

$$|M| 2^{1968} < 116000 \times 2^{1969} < 2^{1986}.$$

另一方面，用两种颜色给 S 中的数涂色的所有不同涂色法的总数为 2^{1986}，所以至少有 1 种涂色法，使得二染色的 S 中不存在单色的 18 项的等差数列.

9·3 试证可以用 4 种不同颜色为数集 $M = \{1,2,\cdots,1987\}$ 中的每个数都涂上一种颜色，使得 M 中任何一个成等差数列的 10 元子集中的 10 个数的涂色都不全相同.

（第 28 届国际数学奥林匹克预选题，1987 年）

［证］ 首先，我们来计算 M 中包含的 10 项等差数列的个数. 公差为 1 的等差数列共有 1978 个；公差为 2 的等差数列共有 1969 个；公差为 3 的等差数列共有 1960 个；…；公差为 220 的等差数列共有 7 个. 故 10 项的等差数列的总数为

$$1978 + 1969 + 1960 + \cdots + 7 = 218350.$$

因而，有同色的 10 项等差数列的染色法的种数不多于 $n = 218350 \times 4 \times 4^{1977} < 4^{1987}$. 而所有不同的染色法的总数恰为 4^{1987}，故知必有一种染色法满足题中要求.

9·4 设 n 与 k 是互素的两个正整数且 $k < n$. 将集合 $M = \{1,2,\cdots,n-1\}$ 中每个数都染上红蓝两色之一，染色法如下：

(1) 对 M 中每个 i，使 i 和 $n-i$ 同色；

(2) 对 M 中每个 i，$i \neq k$，使 i 和 $|k-i|$ 同色. 求证 M 中所有数必为同色.

（第 26 届国际数学奥林匹克，1985 年）

［证 1］ 题中给出了 M 中 $n-1$ 个正整数的染色，我们把它视为局部染色，现在设法将它推广到整体，即按同样的原则将所有整数染色，具体方法如下：

(i)0 与 k 同色;

(ii) 对任意整数 j,存在整数 $q(j)$ 和非负整数 $r(j) < n$,使得 $j = n \cdot q(j) + r(j)$. 令 j 与 $r(j)$ 同色.

由于 $n - j = n - nq(j) - r(j) = -nq(j) + [n - r(j)]$,故由(i),(ii) 和(1) 有 $n - j \sim n - r(j) \sim r(j) \sim j$,其中 $a \sim b$ 表示 a 与 b 同色. 又因 $-j \sim n - (-j) = n + j \sim j$, $|j - k| = |nq(j) + r(j) - k|$,所以

$$|j - k| \sim |r(j) - k| \sim r(j) \sim j.$$

由此可见,$(n-1)k,(n-2)k,\cdots,2k,k$ 都同色. 从而由(ii) 又知,$r(k),r(2k),\cdots,r((n-1)k)$ 同色. 因为 $(k,n) = 1$,故有 $M = \{r(k),r(2k),\cdots,r((n-1)k)\}$,从而 M 中所有数都同色.

[证 2] 当 a 与 b 同色时,记为 $a \sim b$. 我们用数学归纳法来证明:对任何 $a \in M, a > 1$,都有 $b < a$,使得 $b \sim a$. 由此可见,所有 $a > 1$ 都与 1 同色,当然导致 M 中所有数都同色了.

当 $n = 2$ 时,命题显然成立. 设对所有 $n < m$,命题都成立. 往证当 $n = m$ 时,命题也成立.

若 $k = 1$,则对任何 $1 < a \in M$,由(2) 有 $a \sim a - 1$.

若 $k > 1$,因 $(n,k) = 1$,故存在正整数 q 和 r,$0 < r < k$,使得 $n = qk + r$.

对于 $a > k$,由(2) 有 $a \sim a - k < a$.

对于 $a = k$,由(1) 和(2) 有 $a \sim n - a = (q-1)k + r \sim \cdots \sim r < k = a$.

对于 $a < k$,当然有 $a \in M' = \{1,2,\cdots,k-1\}$. 这时我们考虑用 M' 代替 M,以 k 代替 n,以 r 代替 k 的新问题. 这时,由(2) 知 $a \sim k - a$,即新问题满足相应的条件(1);由(1) 和(2) 又知 $a \sim n - a = qk + r - a \sim |r - a|$,即新问题满足相应的条件(2). 又有 $(n,k) = 1$ 推得 $(k,r) = 1$. 从而由归纳假设知存在 $b < a$,使得 $b \sim a$. 这就完成了归纳证明.

9·5 将数轴上的每个整数都涂上 100 种颜色之一,且对所有整数涂色中 100 种颜色全都用到. 如果对于任何两个端点为整数点的长度相同的区间 $[a,b]$,$[c,d]$,当 a 与 c 同色且 b 与 d 同色时,这两个区间中的整数点全都对应同色,即对满足 $0 \leqslant x \leqslant b - a$ 的任何整数 x,$a + x$

与 $c+x$ 都同色. 求证 -1990 与 $+1990$ 必不同色.

(中国国家集训队测验题,1990 年)

[证] 我们将证明一个更强的结论:两个整数 x 与 y 同色,当且仅当 $100\mid(x-y)$. 这样,因为 $1990-(-1990)=3980$ 不是 100 的倍数,所以二者必不同色.

将 100 种颜色从 1 到 100 编号并将整数 x 的着色看作是从 x 到它涂色的编号 $f(x)$ 的对应,即有

$$f(x): Z \longrightarrow \{1,2,\cdots,100\}.$$

取定整数 $a<-1990-100^2-1$,并使在 $[a+100^2,+\infty)$ 中 100 种颜色都出现. 显然有 $a, a+1, \cdots, a+100^2<-1990$.

对任一整数 n,由于对数对 $(a+i, a+i+n)$ 的不同涂色方式共有 100^2 种,故由抽屉原理知,必有 $0 \leqslant i_1<i_2 \leqslant 100^2$,使得

$$f(a+i_1)=f(a+i_2), f(a+i_1+n)=f(a+i_2+n).$$

令 $d=i_2-i_1$,由此及已知条件便知,当 $x \in[a+i_1, a+i_1+n]$ 时, $f(x+d)=f(x)$.

因为 n 有无穷多种取法而 $d \leqslant 100^2$,故由抽屉原理又知,必有无穷多个 n,对应于同一个 d 值. 因而由上段结果便有

$$f(x+d)=f(x), x \geqslant a+100^2,$$

即当 $x \geqslant a+100^2$ 时, $f(x)$ 为以 d 为周期的周期函数. 又由数 a 的选法知,当 $x \geqslant a+100^2$ 时,100 种颜色全都用到,所以 $d \geqslant 100$.

如果 $d>100$,考察

$$a+100^2, a+100^2+1, \cdots, a+100^2+100$$

这 101 个数,由抽屉原理知其中必有两个数同色,即有 $0 \leqslant j<k \leqslant 100$,使得 $a+100^2+j$ 与 $a+100^2+k$ 同色. 于是由 $f(x)$ 的周期性便知

$$f(a+100^2+j+id)=f(a+100^2+k+id), i=0,1,2,\cdots.$$

由此可见, $k-j \leqslant 100$ 也是 $f(x)$ 的周期. 又因 100 种颜色都要用到,故知 $k-j=100$,即当 $x \geqslant a+100^2$ 时, $f(x+100)=f(x)$.

9·6 给定若干个红点和若干个蓝点,其中某些点间连有线段. 如果与一个点相连的所有点中半数以上的点的颜色与该点不同,则称该点为奇异点. 奇异点可以重新涂色:在每一步中可任选一个奇异点并把它涂成另一种颜色. 求证经过若干步之后不再有奇异点.

(第 8 届全苏数学奥林匹克,1974 年)

[证] 因为每次将一个奇异点改涂为另一种颜色时,端点异色的线段的条数至少减少1而端点异色的线段只有有限条,所以改涂颜色只能进行有限次必然停止,这时当然不再有奇异点了.

9·7 任意地将平面上的每点都涂上黑白两色之一,求证一定存在一个边长为1或$\sqrt{3}$的正三角形,它的3个顶点同色.

(第1届中国中学生数学冬令营,1986年)

[证] 若任何两个相距为1的点都同色,则结论显然成立.以下设点A和B异色并考察与A,B两点的距离都为2的点C.显然,点C与点A,B之一异色,不妨设C与A异色.记线段AC的中点为D并设D与A同色.分别以点A和D为心,以1为半径作圆并记两个交点为E和F,则$\triangle EAD$和$\triangle FAD$都是边长为1的正三角形.若二者之一的3个顶点同色,则结论成立;否则,点E,F,C均与点A异色,即$\triangle CEF$的3个顶点同色且它是一个边长为$\sqrt{3}$的正三角形.这就完成了证明.

9·8 将平面上每个点都涂上红蓝两色之一,求证存在两个相似三角形,它们的相似比为1995,且每个三角形的3个顶点都同色.

(中国高中数学联赛,1995年)

[证1] 在平面上作两个同心圆,使它们的半径之比为1995.然后作出9条不同的半径,与两圆各交于9个点.由抽屉原理知,大圆上的9点中必有5点同色.再考察过这同色5点的5条半径与小圆的5个交点.由抽屉原理又知,其中必有3点同色,于是分别以这同色3点和大圆上相应的同色3点为顶点的两个三角形便满足题中要求.

[证2] 我们证明一个加强命题:对于任何正实数a,总存在一个斜边长为a,且有一个角为30°的直角三角形,它的3个顶点同色.

作一个以a为边长的等边三角形,由抽屉原理知3个顶点中必有两点同色.不妨设$AB=a$且点A和B均为红色.以AB为直径作圆,并作此圆的以AB为对角线的内接正六边形.除A,B外的另4个顶点中若有1个红点,则这个红点连同A,B一起的3个红点满足要求.否则,另外4点均为蓝点,其中任何3点均满足要求.这就证明了加强命题,由此立刻可推知原命题成立.

9·9 将线段A_0A_n依次用分点$A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}$分成n段,将端点A_0和A_n涂成蓝色,中间的分点涂上红色或蓝色,求证端点异色的小线

段的条数必为偶数.

（中国国家集训队训练题，1986 年）

［证 1］ 设 A_i 是第 1 个红点. 现将 A_i 改涂成蓝色.

(1) 若 A_{i+1} 为红点，则由于 A_i 颜色的改变，使得线段 $A_{i-1}A_i$ 的两个端点由异色变同色，而 A_iA_{i+1} 的两个端点由同色变异色. 可见，端点异色的线段总数不变.

(2) 若 A_{i+1} 为蓝点，则随着点 A_i 颜色的改变，线段 $A_{i-1}A_i$ 和 A_iA_{i+1} 的端点均由异色变为同色，即端点异色的线段总数减少 2.

将(1) 与(2) 结合起来可知，在这种操作下，端点异色的小线段的条数的奇偶性不变.

经过若干次操作之后，将会使所有分点都变成蓝色. 这时，端点异色的线段条数为零，当然是偶数. 所以，原来的端点异色的小线段的条数也是偶数.

［证 2］ 我们用数学归纳法来证明. 当 $n = 1$ 时，没有分点而只有两个端点且都是蓝点，端点异色的小线段条数为零，结论当然成立.

设命题于 $n < k$ 时成立. 考察 $n = k$ 的情形.

(1) 若 $\{A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}\}$ 中没有蓝点，则端点异色的小线段恰有两条：A_0A_1 和 $A_{k-1}A_k$，结论当然成立.

(2) 若 $\{A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}\}$ 中有蓝点 A_i，则由归纳假设知线段 A_0A_i，A_iA_k 中的端点异色的小线段条数均为偶数，从而 A_0A_k 中的端点异色的小线段条数也为偶数，即当 $n = k$ 时命题成立.

［证 3］ 我们再用第一归纳法来证明. $n = 1$ 时命题显然成立. 设命题于 $n = k$ 时成立. 考察 $n = k + 1$ 的情形.

(1) 若分点及端点中有相邻两点同色，则当把两点去掉 1 点时，端点异色的线段条数不变. 但这时共有 k 个点，于是由归纳假设知命题成立.

(2) 若分点和端点中任何相邻两点都不同色，则线段上的点是蓝红交替排列的. 所以每条小线段的两个端点都异色. 又因两个端点都是蓝色，所以分点数为奇数. 从而小线段数为偶数，这就完成了归纳证明.

［证 4］ 将线段 A_0A_n 上的蓝点标上数 $+1$，红点标上数 -1，并用两端点标数之积来标志每条小线段. 易见，端点异色的小线段标有 -1，端点同色的小线段标有 $+1$. 将 n 条小线段所标之数连乘，则乘积中除

A_0, A_n 两点所标之数出现1次以外,其余各点的数各出现两次,所以乘积为 $+1$.这意味着对应于 -1 的端点异色的小线段的条数为偶数.

9·10　在一条直线上标出 n 个不同的蓝点和 n 个不同的红点,求证同色点两两之间的距离之和不超过异色点两两之间的距离之和.

(第20届全俄数学奥林匹克,1994年)

[证1]　我们来证明更一般的命题,即当所标出的点可以重合时,题中的结论仍然成立.

设所标出的 n 个蓝点和 n 个红点共有 m 个不同的点.这时将同色点两两之间距离之和与异色点两两之间距离之和分别记为 S_1^m 和 S_2^m.

关于 m 用数学归纳法来证明.当 $m=1$ 时,命题显然成立.设命题于 $m=k$ 时成立,即有 $S_1^m \leqslant S_2^m$.当 $m=k+1$ 时,我们将直线上自左至右的 $k+1$ 个不同的标定点依次记为 $A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}$.设有 s 个红点和 t 个蓝点重合于点 A_{k+1}.现将位于 A_{k+1} 的标定点全都移到点 A_k,并考察移动前后 S_1 与 S_2 的变化情形.这时,当且仅当两点中一点未动而另一点移动时,两点之间的距离缩短了 $|A_kA_{k+1}|$.于是有

$$
\begin{aligned}
&(S_1^{k+1}-S_2^{k+1})-(S_1^k-S_2^k)=(S_1^{k+1}-S_1^k)-(S_2^{k+1}-S_2^k)\\
&=[s(n-s)+t(n-t)]|A_kA_{k+1}|-[s(n-t)+t(n-s)]|A_kA_{k+1}|\\
&=[2st-s^2-t^2]|A_kA_{k+1}|=-(s-t)^2|A_kA_{k+1}|\\
&\leqslant 0,
\end{aligned}
$$

亦即有

$$S_1^{k+1}-S_2^{k+1}\leqslant S_1^k-S_2^k\leqslant 0.$$

这就完成了归纳证明.

[证2]　把给定的这条直线视为数轴,设 n 个蓝点的坐标依次为 $x_1<x_2<\cdots<x_n$,n 个红点的坐标依次为 $y_1<y_2<\cdots<y_n$.下面用数学归纳法来进行证明.

当 $n=1$ 时,结论显然成立.设当 $n=k$ 时结论成立.当 $n=k+1$ 时,使用证1中的记号,我们有

$$S_1^{k+1}=S_1^k+\sum_{i=1}^{k}|x_i-x_{k+1}|+\sum_{i=1}^{k}|y_i-y_{k+1}|, \qquad ①$$

$$S_2^{k+1}=S_2^k+\sum_{i=1}^{k}|x_i-y_{k+1}|+\sum_{i=1}^{k}|y_i-x_{k+1}|+|x_{k+1}-y_{k+1}|. ②$$

直接计算有

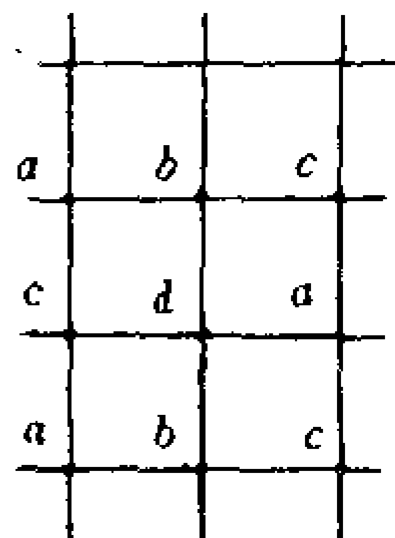
$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k}|x_i-x_{k+1}|+\sum_{i=1}^{k}|y_i-y_{k+1}| \\
=&\sum_{i=1}^{k}(x_{k+1}-x_i)+\sum_{i=1}^{k}(y_{k+1}-y_i) \\
=&\sum_{i=1}^{k}(x_{k+1}-y_i)+\sum_{i=1}^{k}(y_{k+1}-x_i) \\
\leqslant&\sum_{i=1}^{k}|x_{k+1}-y_i|+\sum_{i=1}^{k}|y_{k+1}-x_i|+|x_{k+1}-y_{k+1}|. \quad ③
\end{aligned}$$

由 ①—③ 及归纳假设即得 $S_1^{k+1}\leqslant S_2^{k+1}$,这就完成了归纳证明.

9·11　把一张无穷大的方格纸的每个结点都涂上 4 种颜色之一,使得每个方格的 4 个顶点的颜色都互不相同.求证方格纸上存在一条网格线,其上的结点只有两种不同颜色.

（第 34 届莫斯科数学奥林匹克,1971 年）

［证］　考察一条水平网格线 l 上的结点涂色情况.如果任何相邻3个结点都只有两种颜色,则 l 上的所有结点也只有两种颜色,从而直线 l 即为所求.如果 l 上有 3 个相邻顶点颜色互不相同,分别记为 a,b,c.由于已知每个方格的 4 个顶点的颜色互不相同,故知 b 上方的结点只能是第 4 种颜色 d(见右图).这样一来,a 上方只能是 c,c 上方只能是 a.类似地,c,d,a 的上方必然分别是 a,b,c.依此类推便知,三条竖直网格线上的结点都只有两种不同颜色.可见,无论哪种情况,结论都成立.



9·12　设 S 为平面上的一个有限点集(含点数 $\geqslant$ 5),其中的若干点涂上红色,其余的点涂上蓝色.设任何 3 个同色的点不共线.求证存在一个三角形,使得

(1) 它的三个顶点涂有相同的颜色;

(2) 这三角形至少有一条边上不包含另一种颜色的点.

（第 20 届加拿大数学奥林匹克,1988 年）

［证］　由于点数 $\geqslant 5$,且所有点只染两种颜色,所以至少有 3 点同色,因此同色三角形的集合不是空集.

我们从同色三角形的集合中,找到一个面积最小的三角形.

如果这个三角形的每一条边上都有一个另一颜色的点,那么我们

找到了另一个同色的三角形,而且有更小的面积,这是不可能的.因此题设的三角形一定存在.

9·13　设在空间给出20个点,其中某些点涂黄色,其余的点涂红色.已知在任何一个平面上的同种颜色的点不会超过三个.求证存在一个四面体,它的四个顶点同色,并且至少有一个侧面内不含有另一颜色的点.

(第1届希望杯数学竞赛,1990年)

[证]　因为共有20个点,涂黄、红两种颜色,所以至少有4点同色,又由于同一平面上的点中同色的点不会超过三个.

所以四顶点同色的四面体是存在的.并且这种四面体一定有有限多个.

在这些四顶点同色的四面体中一定有一个体积最小的,那么这个体积最小的四顶点同色的四面体即为所求,即至少有一个侧面内不含有另一种颜色的点.

否则,若这个四面体的各面上都有一个另一颜色的点,则以这四点为顶点也构成一个四顶点同色(另一颜色)的四面体,然而它的体积会更小,这就导致矛盾.

9·14　将正13边形的每个顶点都染上红蓝两色之一,求证存在3个同色顶点,它们是某个等腰三角形的3个顶点.

(第35届莫斯科数学奥林匹克,1972年)

[证1]　由抽屉原理知,13个顶点中必有7个顶点同色.在13个顶点中,互不相邻的顶点组至多有6个顶点,故7个同色顶点中总有两个是相邻的,不妨设A_1和A_2都是红点.

考察A_3,A_8,A_{13}这3个顶点,如果其中有1个红点,则与A_1,A_2一起构成等腰三角形的3个顶点.如果3点都是蓝点,则它们也构成一个等腰三角形的3个顶点.

[证2]　由抽屉原理知,13个顶点中必有7个顶点同色,不妨设有7个红点.这7个红点之间可以连出21条线,以下称之为红线.

连出正13边形的所有对角线,则边和对角线中共有6种不同长度.从而由抽屉原理又知,21条红线中必有4条长度相同.这4条线段共有8个端点,但红顶点只有7个,所以长度相同的4条红线中必有两条有1个公共端点.可见,这两条等长红线的3个端点即为所求.

9·15　将正九边形的每个顶点都涂上红蓝两色之一,求证存在两

个全等的三角形,两个三角形的所有顶点都涂有同一种颜色.

(基辅数学奥林匹克,1976年)

(德国数学奥林匹克,1993年)

[证1] 将正九边形的所有对角线都画出来.在这个图形中,所有线段只有4种不同长度.从小到大分别记之为l_1,l_2,l_3,l_4.由这些线段构成的不同的三角形只有7种,按边长来记分别为(l_1,l_1,l_2),(l_1,l_2,l_3),(l_1,l_3,l_4),(l_1,l_4,l_4),(l_2,l_2,l_4),(l_2,l_3,l_4),(l_3,l_3,l_3).

9个顶点共涂有两种颜色,由抽屉原理知其中必有5点同色,不妨设有5个红点.这5个红点为顶点可以构成$C_5^3=10$个三角形.这10个三角形分属于上述的7类,由抽屉原理知其中必有两个属于同一类,故有两个顶点为同色的全等三角形.

[证2] 9个顶点共涂有两种颜色,由抽屉原理知其中必有5点同色,不妨设有5个红点.

将正九边形$A_1A_2\cdots A_9$的9个顶点分成3组:$\{A_1,A_4,A_7\}$,$\{A_2,A_5,A_8\}$,$\{A_3,A_6,A_9\}$.5个红点分属于这3个集合,于是或有两集中各有两个红点,或有一个集中有3个红点.若为前者,则这4个红点是一个等腰梯形的4个顶点,当然存在全等三角形对,而且有两对;若为后者,则这3个红点为等边三角形的3个顶点.另两个红点分别和上述等边三角形中与它最近的一条边各构成一个三角形,则二者全等.

[证3] 由抽屉原理知可设有5个红点.于是必有两个相邻红点.若所有顶点都是红点,结论自然成立.若不然,则可设A_1,A_2是红点而A_9不是红点.考察另3个红点.

(1) 若另3个红点中有两个相邻,则这两个相邻顶点及A_1,A_2构成一个等腰梯形的4个顶点且都是红点,从而存在两个顶点全是红点的三角形全等.

(2) 若另3个红点互不相邻,则只有以下4种情形:

(i) $\{A_3,A_5,A_7\}$,这时,$\triangle A_1A_2A_5\cong\triangle A_2A_1A_7$;

(ii) $\{A_3,A_5,A_8\}$,这时,$\triangle A_1A_3A_5\cong\triangle A_3A_1A_8$;

(iii) $\{A_3,A_6,A_8\}$,这时,$\triangle A_2A_3A_6\cong\triangle A_3A_2A_8$;

(iv) $\{A_4,A_6,A_8\}$,这时,$\triangle A_1A_2A_4\cong\triangle A_2A_1A_8$.

综上可知,总存在两个全等的三角形,它们的顶点全都涂有同一种颜色.

9·16　将正九边形的 5 个顶点涂上红色，问最少存在多少对全等三角形，它们的顶点都是红点？

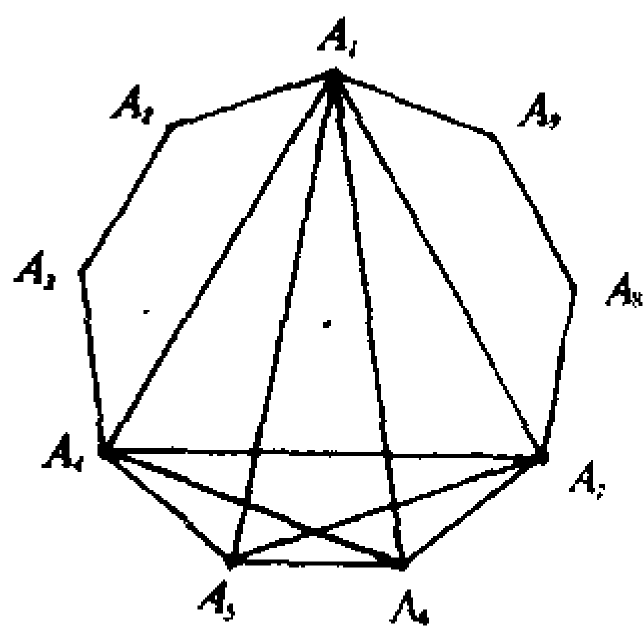
（中国天津市代表队测验题，1992 年）

[解]　以 5 个红点为顶点的三角形共有 $C_5^3=10$ 个，我们称之为红三角形. 设正九边形的外接圆的周长为 9，并用弦所对的弧的长度来表示弦长. 在正九边形中，以它的 9 个顶点为顶点，彼此互不全等的三角形只有 7 种，其 3 边长分别为：(1,1,7)，(1,2,6)，(1,3,5)，(1,4,4)，(2,2,5)，(2,3,4)，(3,3,3). 从而由抽屉原理知至少有 3 对全等的红三角形. 若有不少于 3 个红三角形两两全等，则全等的红三角形对至少有 4 对. 故下面设不同对之间互不全等.

设两个红三角形 $\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle B_1B_2B_3$ 全等. 由于只有 5 个红点，故这两个红三角形至少有 1 个公共顶点，至多有两个公共顶点.

(1) 设两个全等的红三角形恰有 1 个公共顶点. 因为二者内接于同一个圆，故必关于过公共顶点的直径对称. 从而另 4 个红点为一个等腰梯形的 4 个顶点. 易见，这时至少有 4 对全等的红三角形.

(2) 设两个全等的红三角形有 1 条公共边. 因为它们的顶点都是正九边形的顶点，故这两个三角形的各另一个端点间的连线平行于公共边. 于是又得到一个等腰梯形，其中有两对全等的红三角形. 除了这两对之外，至少还有 1 对全等的红三角形，而由这对出发又可找到另一对. 显然，这一对不会和前两对重复，故至少有 4 对全等的红三角形.



在右图中，5 个红点所构成的 10 个红三角形中，恰有 4 对全等的红三角形.

综上可知，所求的全等三角形的最小对数为 4.

9·17　在正 $6n+1$ 边形中，将其中的 k 个顶点涂成红色，而将其余顶点全都涂成蓝色. 求证 3 个顶点同色的等腰三角形的个数与顶点涂色的状态无关.

（第 20 届全俄数学奥林匹克，1994 年）

[证]　为方便计，我们把以给定的 $6n+1$ 边形的顶点为顶点的等腰三角形简称为“三角形”，把这个多边形 M 的边和对角线统称为多边形 M 中的线段.

注意,给定的多边形 M 中的每条线段都恰属于 3 个不同的三角形(这一结论仅对边数是被 6 除余 ±1 的多边形成立).

将两个端点为两蓝,一蓝一红和两红的线段条数分别记为 a,b,c,而将蓝顶点个数为 0,1,2,3 的三角形的个数分别记为 x_0,x_1,x_2,x_3. 由于 3 个顶点皆蓝的三角形中,3 条边皆为端点两蓝的线段,而在 3 个顶点两蓝一红的三角形中恰有 1 条边端点两蓝,故有

$$3a = 3x_3 + x_2. \qquad ①$$

同理有

$$3b = 2x_2 + 2x_1, \qquad ②$$

$$3c = x_1 + 3x_0. \qquad ③$$

①×2+③×2-②,得到

$$6x_3 + 6x_0 = 6a + 6c - 3b,$$

$$x_3 + x_0 = a + c - \frac{1}{2}b. \qquad ④$$

当多边形 M 中有 k 个红顶点时,记蓝顶点数为 $h = 6n + 1 - k$,于是有 $a = C_h^2 = \frac{1}{2}h(h-1), b = kh, c = C_k^2 = \frac{1}{2}k(k-1)$. 代入 ④ 即得

$$x_3 + x_0 = \frac{1}{2}\{h(h-1) + k(k-1) - kh\}$$

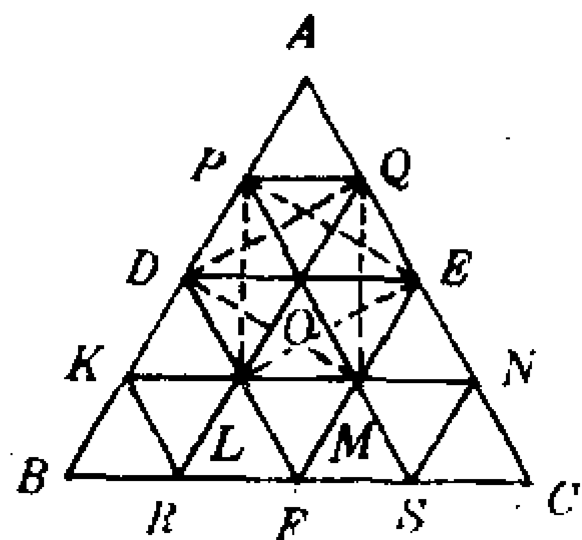
因为 3 个顶点同色的等腰三角形的个数为 $x_3 + x_0$,所以上式恰好表明它与 k 个红点的分布状态无关.

9·18 等边 $\triangle ABC$ 的 3 条中位线将它分成 4 个三角形 $\triangle ADE$, $\triangle BDF$, $\triangle DEF$ 和 $\triangle CEF$. 在它们的 9 条边上各取中点 K,L,M,N,O,P,Q,R,S. 将这 15 个点中的每点都涂上红蓝两色之一. 求证其中一定有 3 个同色点,使它们是一个等边三角形的 3 个顶点.

(美国纽约数学奥林匹克,1980 年)

(第 11 届奥地利数学奥林匹克,1988 年)

[证 1] 我们证明一个比本题更强的结论:在右图所示的 10 点 A,D,E,K,L,M,N,O,P,Q 中必有 3 个同色点,使得它们是一个等边三角形的 3 个顶点.



若不然,则 10 点中的任何成等边三角形的 3 点均不同色. 不妨设点 O 为红色. 考察 D,L,M,E,

Q,P6 点的涂色情形.易知

(1) 正六边形 $DLMEQP$ 的任何两个相邻顶点不能同为红色;

(2)$\triangle DMQ$ 和 $\triangle LEP$ 的各 3 个顶点中,都至少有 1 个红点和 1 个蓝点.

由此可知,6 点中恰有 2 个红点且为一组相对顶点.不妨设点 D 和 E 为红点,于是点 P 和 Q 为蓝点.这样一来,不论点 A 为红点还是蓝点,都导致 3 个同色点为一个等边三角形的 3 个顶点,矛盾.

[**证 2**] 若不然,则 15 点中任何成等边三角形的 3 点均不同色.因此,点 O,L,M 不同色,其中必有两点同色,不妨设点 L 和 M 为红色而点 O 为蓝色.从而点 F 为蓝色.又因 $\triangle OKF$ 和 $\triangle OFN$ 都是等边三角形,故点 K 和 N 均为红色.于是 K,L,M,N4 点均为红色,从而点 R 和 S 为蓝色.这样一来,点 O,R,S 都为蓝色,矛盾.

9·19 在坐标平面上,纵,横坐标都是整数的点称为整点.试设计一种将所有整点染色的方法,将每个整点都染上白色,红色或黑色中的一种颜色,使得

(1) 每种颜色的点都出现在无穷多条平行于横轴的直线上;

(2) 对于任意白点 A,红点 B 及黑点 C,总可以找到一个红点 D,使 $ABCD$ 为一平行四边形.

证明你设计的染色法符合上述要求.

(中国高中数学联赛,1986 年)

[**解**] 将整点(x,y)按以下方式染色:当 $x+y$ 为偶数时,染红色;当 x 为奇数而 y 为偶数时,染白色;当 x 为偶数而 y 为奇数时,染黑色.显然,这种染色法满足条件(1).

下面来验证这一染色法满足条件(2).设点 $A(x_1,y_1)$ 为白色,点 $B(x_2,y_2)$ 为红色,点 $C(x_3,y_3)$ 为黑色.

我们先来证明 A,B,C 三点不共线.注意到 x_2-x_1 与 y_2-y_1 的奇偶性不同而 x_3-x_1 与 y_3-y_1 都是奇数,便知

$$(x_2-x_1)(y_3-y_1)\neq(y_2-y_1)(x_3-x_1). \quad ①$$

因 x_3-x_1 为奇数,故有 $x_3\neq x_1$.若 $x_1=x_2$,则这三点不共线;若 $x_1\neq x_2$,则由 ① 又有

$$\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}\neq\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

这意味着三点不共线．因此，在任何情况下，A,B,C 三点都不共线．

取点 $D(x_4,y_4)$，其中 $x_4=x_3+(x_1-x_2)$，$y_4=y_3+(y_1-y_2)$．显然 D 为整点．又因 AC 和 BD 的中点都是 $\left(\frac{1}{2}(x_1+x_3),\frac{1}{2}(y_1+y_3)\right)$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

最后，因为 $x_4+y_4=(x_3+y_3+x_1+y_1)-(x_2+y_2)$ 是偶数，故 D 为红点，这就说明了染色法满足条件(2)．

9·20　已知空间中的每点都被涂上指定的 5 种颜色之一，并且确有 5 个点分别被涂上互不相同的颜色．试证存在一条直线，其上的点至少涂有 3 种不同颜色；且还存在一个平面，其上的点至少涂有 4 种不同的颜色．

（第 39 届莫斯科数学奥林匹克，1976 年）

[证]　过 5 个颜色互不相同的点中的每两点作一条直线，共得 10 条直线．如果 10 条直线中有 1 条上面至少涂有 3 种不同颜色，问题就解决了．设 10 条直线中的每条都恰涂有两种不同颜色．作一个平面 P，使它与 10 条直线中的任何一条都不平行．于是平面 P 与 10 条直线的 10 个交点中至少有 4 种不同颜色．取定 4 个颜色互不相同的点 A,B,C,D．若其中有 3 点共线，或过 4 点中某两点的直线涂有 3 种不同颜色，则这条直线即为所求；否则，3 对直线 $\{AB,CD\}$，$\{AD,BC\}$，$\{AC,BD\}$ 中至少有 1 对直线相交．易证，相交的两条直线上都涂有 3 种不同颜色．

过这条涂有 3 种不同颜色的直线及涂有第 4 种颜色的点作一个平面即为所求．

9·21　白色球面上有 12% 的面积沾上了红色，试证存在着球的一个内接平行六面体，它的所有顶点都是白色的．

（第 41 届莫斯科数学奥林匹克，1978 年）

[证 1]　将球面的红色区域关于球心作中心对称．因原有的红色区域的面积为 12%，故映射之后的红色部分的面积不超过 24%，从而球面上还有白色区域，而且与这一区域关于球心对称的部分也是白色的．

在白色区域中取某正方形的 4 个顶点，并取这 4 点关于球心的 4 个对称点．则这 8 个点都是白点且为长方体的 8 个顶点．

[证 2]　过球心作 3 个互相垂直的平面，并将球面上的红色部分分

别关于3个平面作对称映射,则在所得的球面上,红色部分的面积不超过$2^3\times 12\% = 96\%$.因而可在3个平面之外的球面上取得1个白点.于是这个白点在3次对称映射中共有7个象点,这8个点全是白的且为一个正方体的8个顶点.

9·22　平面上已给997个点,将连结每两点的线段中点染成红色.证明至少有1991个红点.能否找到恰有1991个红点的点集?

(亚太地区数学奥林匹克,1991年)

[证]　由997个点连结每两点的线段只有有限条,所以必有一条最长者.设AB为诸线段中的最长者.

A与其他996个点连结的中点均在以A为圆心,$\frac{1}{2}AB$为半径的圆的内部或圆周上.

B与其他996个点连结的中点均在以B为圆心,$\frac{1}{2}AB$为半径的圆的内部或圆周上.

所以至少有

$$2\times 996 - 1 = 1991$$

个中点,即有1991个红点.

下面我们构造恰有1991个红点的997个点的点集:

在x轴上取997个点,坐标分别为$1,2,\cdots,997$,则区间$(1,997)$内分母为1或2的有理点就是全部的红点.个数恰为1991个.

9·23　正20边形$A_1A_2A_3\cdots A_{20}$的10个顶点被染为黑色,另外10个顶点被染成白色.考察由A_1A_4及所有与它长度相等的对角线所组成的集合,求证其中两端皆黑的对角线与两端皆白的对角线条数相等.

(第43届莫斯科数学奥林匹克,1980年)

[证1]　所论的对角线共有20条,每条对角线有两个端点,共40个端点;多边形的每个顶点恰为两条对角线的端点.

设这20条对角线中有k条端点异色,则k条线段恰有k个白端点和k个黑端点.由于多边形共有10个白顶点和10个黑顶点,故这20条对角线共有20个白端点和20个黑端点.去掉上述的黑白端点各k个,余下的$20-k$个白端点是$\frac{1}{2}(20-k)$条端点皆白的对角线的端点.余下的$20-k$个黑端点也与此相同,故知端点皆白的对角线与端点皆黑

的对角线条数相等.

[证 2] 将所论的对角线全都画出来,得到一条有 20 条边的封闭折线.设想把这条折线拉成一个正 20 边形.于是问题就化为证明正 20 边形 $A_1A_2\cdots A_{20}$ 的端点皆白的边与端点皆黑的边条数相等.

设 10 个白顶点分成 k 组,使每组顶点都相邻且不同组之间都隔有黑顶点,于是黑顶点也恰好分成 k 组.由每组同色顶点所连出的端点同色的边的条数比顶点数少 1,故知共有 $10-k$ 条端点皆白的边和 $10-k$ 条端点皆黑的边.

9·24 设 A 为平面上 $2n$ 个点构成的集合,其中任意三点不共线.现将 n 点涂红色,n 点涂蓝色.试证明或否定,可找到两两不共点的 n 条直线段,其中每条线段的二端点均为 A 中异色的点.

(第 40 届美国普特南数学竞赛,1979 年)

[解] 因为总共只有有限个点,故将红点与蓝点一一配对的方法也只有有限个,即有 $n!$个.对每个配对方法 p,我们考虑所得到的 n 条线段的长度和 $s(p)$.

在这有限个长度和中,必然有某个长度和最小.这个最小值设为 $s(p)$.假设在 p 中有二线段RB 和$R'B'$ 相交,其中 R 和R' 表示红点,B 和 B' 表示蓝点,若将此二线段用 RB' 和$R'B$ 代替.由于三角形任两边之和大于第三边,这时所对应的配对方法 p' 的线段长度和 $s(p')$ 比 $s(p)$ 小,与 $s(p)$ 的假设矛盾.因此 p 中的n 条线段两两不相交.

9·25 在 100×100 的方格表的每个方格中都点上一个红点或蓝点,使得在每一行中都恰有 50 个红点和 50 个蓝点,在每一列中也都恰有 50 个红点和 50 个蓝点.用蓝色线段将每两个处于相邻(有公共边)方格中的蓝点连结起来,用红色线段将每两个处于相邻方格中的红点连结起来.求证表中红蓝两色的线段条数相等.

(第 34 届莫斯科数学奥林匹克,1971 年)

[证] 首先,不管红点和蓝点,这些点中凡处于两个相邻方格中的点间都连一条线段.显然,每个角格中的点引出两条线段,每个边格中的点引出 3 条线段,内部每格中的点各引出 4 条线段.让我们来证明一个等价命题:

命题 从所有红点引出的线段条数与从所有蓝点引出的线段条数相等.

(1)4 个角点都是红点.这时容易算出,边点中有 200 个蓝点和 192 个红点,从而内点中红点比蓝点多 4 个.由此可见,这种情形下红点引出的所有线段条数与蓝点引出的所有线段条数相等.

(2)4 个角点中有 3 个红点.这时,边点中有 198 个蓝点和 194 个红点,内点中红点比蓝点多 2 个.故知此时命题结论也成立.

(3)4 个角点中红蓝点各两个,无论两红点相对与否,都有对称性.因此知边点中红蓝点数相等,从而内点亦然.故知命题结论成立.

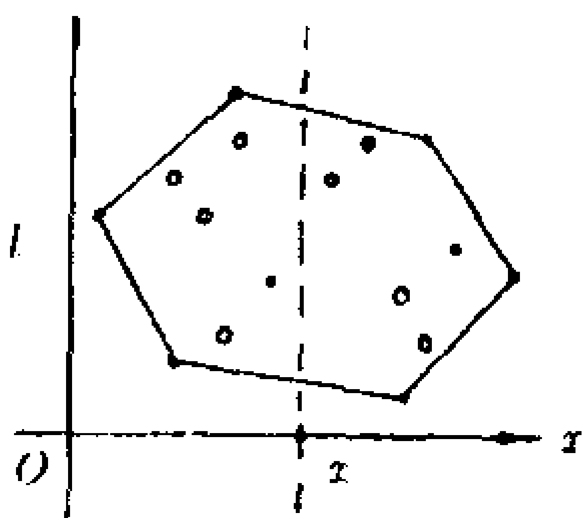
(4) 当4个角点中至多有1个红点时,至少有3个蓝点.从而由(1),(2) 知此时结论也成立.

综上可知,命题结论成立.将端点异色的线段擦去,则对红点和蓝点而言,擦去的线段数相等,因而留下的线段数仍相等,所以红蓝线段数相等.

9·26 设平面上有 n 个蓝点和 n 个红点,其中任何 3 点都不共线且周界多边形的顶点同色,试证可以作一条直线,将 $2n$ 个点分在直线的两侧,使得直线两侧的点数都不为零且每侧的红蓝点数都相等.

(中国国家集训队训练题,1986 年)

[证] 不妨设周界多边形的顶点都是红点.取一条与周界多边形没有交点的直线 l,使 l 与给定的 $2n$ 点中的任何两点的连线都不平行.作一条与 l 垂直的直线作为 x 轴,两条直线交点记为 O,作为原点(如图).然后将直线 l 朝向点集的方向(作为 x 轴的正向)平行移动.对每个 x,将直线 l 平移到过x 的位置时,直线 l 左侧红点个数与蓝点个数之差记为$f(x)$.显然,$f(x)$ 总取整数值.因为直线 l 与任何两个给定点的连线都不平行,所以 $f(x)$ 在每次变化时,都改变± 1.又因周界多边形的顶点都是红点,所以当 l 在前进过程中越过的第 1 个点必为红点,这时有 $f(x_1) = 1$.当直线 l 已经越过 $2n-1$ 个点只剩 1 点尚未越过时,剩下的 1 点必为红点,故这时有 $f(x_2) = -1$.从而 $f(x)$ 在变化过程中必有一点 x_0,$x_1 < x_0 < x_2$,使 $f(x_0) = 0$.这意味着当直线 l 平移到过点x_0 时,直线 l 两侧的红点个数与蓝点个数都相等.



9·27 设 $k,h \in N$ 且 $k \geqslant 2, h \geqslant 2$,将整点集合 $M = \{(x, y) \mid x = 0,1,\cdots,kn-1, y = 0,1,\cdots,hn-1\}$ 中的每点都涂上 n 种颜

色之一.如果每个顶点属于 M 且边与坐标轴平行的矩形的 4 个顶点的颜色都不全相同,且每种颜色在每一行都恰好出现 k 次,在每一列恰好出现 h 次,则称涂色是合格的.试证对于每一种合格的涂色,都有 $kh \leqslant n(n+1)$.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

[证] 不妨设 $k \leqslant h$.考察固定一种颜色 C 在 M 中的涂色情况.令

$$M_j = \{[p,q] \mid 0 \leqslant p < q \leqslant kn-1, \text{点}(p,j)\text{与}(q,j)\text{都涂有颜色 } C\}, j = 0,1,\cdots,hn-1.$$

因为第 j 行恰有 k 个点涂有 C 色,所以 M_j 共有 $\frac{1}{2}k(k-1)$ 个元素.又因每个顶点在 M 中且边平行于坐标轴的矩形的顶点都不全同色,所以对所有 $0 \leqslant i < j \leqslant hn-1$,都有 $M_i \cap M_j = \varnothing$.

满足 $0 \leqslant p < q \leqslant kn-1$ 的不同数对 $[p,q]$ 共有 $\frac{1}{2}kn(kn-1)$ 对,而 $M_0 \cup M_1 \cup \cdots \cup M_{hn-1}$ 共有 $\frac{1}{2}hnk(k-1)$ 对元素且互不相同,故有

$$hnk(k-1) \leqslant kn(kn-1). \qquad ①$$

由此可得

$$k \leqslant h \leqslant \frac{kn-1}{k-1} = n + \frac{n-1}{k-1}. \qquad ②$$

若 $k \geqslant n+1$,则②式右端小于 $n+1$,矛盾,故有 $k \leqslant n$.将②代入①即得

$$kh \leqslant kn + \frac{k(n-1)}{k-1} = (n-1)\left(\sqrt{k-1} + \frac{1}{\sqrt{k-1}}\right)^2 + k. \qquad ③$$

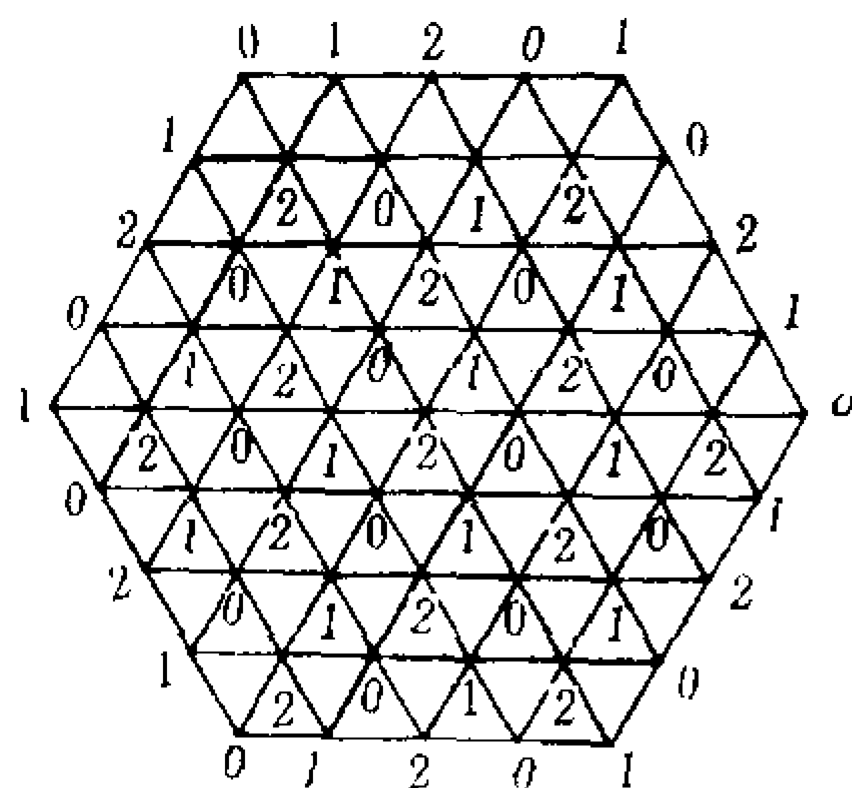
因为③式右端关于 k 递增,故在 $k = n$ 时取得最大值.从而得到

$$kh \leqslant n^2 + n = n(n+1).$$

9·28 在平面上给定一个正六边形,将它的每边都分成 1000 等分,并用平行于六边形各边的线段将分点连结起来,于是将正六边形剖分成若干个小正三角形.在所得的网格图中任选一个正三角形(大小不论)并把它的 3 个顶点涂上颜色.然后继续用这个办法给结点涂色,但已涂过色的结点不能再涂色,直到不能再进行为止.试证如果只剩一个结点没有涂色,那么这个结点一定不是原六边形的顶点.

(第 20 届全苏数学奥林匹克,1986 年)

[证] 在每个结点都写上 0,1,2 三个数字之一,使得每个小正三角形的 3 个顶点上的数字都是 0,1,2 各一个(参看右图).这时,原六边形的 6 个顶点中,3 个标有 0,另 3 个标有 1,而且网格图中标出的所有数之和除 3 余 2.



对于网格图中的任一正三角形,若有两个顶点标数相同,则第三个顶点也标有同一数字.否则,三个顶点所标数字各不相同.由此可知,三个顶点所标数之和是 3 的倍数.因而,当只剩一个顶点没有涂色时,它所标的数字一定是 2,当然不是原六边形的顶点.

9·29 设圆周上有 800 个点,按顺时针方向依次标号为 1,2,…,800,它们将圆周分成 800 段弧.今任选一点涂成红色,然后按如下规则逐次涂红其余的一些点:如果第 k 号点已被涂红,则可按顺时针方向转过 k 段弧,再将所到达的那个点涂红,如此继续下去.问圆周上最多可得到多少个红点?说明理由.

(中国国家集训队测验题,1993 年)

[解] 如果首先将 1 号点涂红,则可得到 25 个红点{1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,224,448,96,192,384,768,736,672,544,288,576,352,704,608,416}.这表明所求的红点数的最大值不小于 25.

当第 1 个红点为 m 号时,所有红点的集合为$\{m2^k(\mathrm{mod}\ 800)\mid k=0,1,2,\cdots\}$.因为 $2^4=16\equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$,所以 $2^{4h}\equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$.于是有

$$2^4\equiv 16,2^8\equiv 6,2^{12}\equiv 21,2^{16}\equiv 11,2^{20}\equiv 1(\mathrm{mod}\ 25)$$

因此即得

$$2^{25}\equiv 32\pmod{800}.$$

因而有

$$\{m2^k(\mathrm{mod}\ 800)\mid k=0,1,2,\cdots\}\subset \{m2^k(\mathrm{mod}\ 800)\mid k=0,1,2,\cdots,24\}.$$

这意味着当首先将 m 号点涂红时,得到的所有红点数不超过 25.

综上可知,最多得到 25 个红点.

9·30 把正 n 边形的每个顶点都涂上若干种颜色之一,使涂有同一种颜色的点是一个正多边形的全部顶点且 n 个顶点至少涂了两种颜

色.求证涂色后所得的多边形中必有两个全等.

（第4届全苏数学奥林匹克,1970年）

[证] 如果有公共起点 O 的单位向量组 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_m$ 在旋转角度 $\frac{2k\pi}{m}(k<m)$ 后变为自己,则称该单位向量组是对称的.由于这组向量的和在旋转 $\frac{2k\pi}{m}<2\pi$ 的角度后不变,所以它们的和一定是零向量.

特别,当 $k=1$ 时,依次以正 m 边形的顶点为端点的向量组构成一个对称向量组.

我们对起点为 O 的一切单位向量作旋转变换:$\vec{e}\longrightarrow\overrightarrow{D^le}$ （l 倍旋转）,其中 $\overrightarrow{D^le}$ 也是一个单位向量,它与初始方向 OX 的夹角是 $\vec{e}$ 与 OX 的夹角的 l 倍.在作变换 D^l 时,只要 kl 不被 m 整除,则对称向量组仍然变为对称向量组(相邻向量 $\vec{e}_i,\vec{e}_{i+1}$ 之间的夹角 $\frac{2k\pi}{m}$ 增加到 l 倍,从中减去 2π 的整倍数之后,就得到 $\overrightarrow{D^le_i}$ 与 $\overrightarrow{D^le_{i+1}}$ 之间的夹角 $\frac{2r\pi}{m}$,其中 r 为 kl 除以 m 的余数);如果 kl 能被 m 整除(特别当 $k=m$ 时),所有向量 $\overrightarrow{D^le_i}$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 都重合为一个向量.

有了上面的准备,下面我们来着手解题.设把正 n 边形的所有顶点涂上若干种颜色,使每一种颜色的顶点能构成一个正多边形.若结论不成立,则可设所构成的正多边形的边数为 $l,q_1,q_2,\cdots,q_s$ 且使 $l<q_1<q_2<\cdots<q_s$.于是我们可以把在 n 边形的顶点上所作的对称向量组按顶点颜色的不同分成 $s+1$ 个对称向量组,它们分别有 l 个,q_1 个,q_2 个,$\cdots$,q_s 个向量.现在每一个对称向量组的和向量为 0,且总和也为 0,没有什么矛盾.然而只要对这些向量作 l 倍旋转变换,就会产生矛盾.作这个变换时,第一组的全部 l 个向量重合成一个向量,它们的和当然不为0.而有 $q_i(i=1,2,\cdots,s)$ 个向量的其余各组向量及由全部 n 个向量构成的向量组变换后仍是对称向量组,因此它们每组的和向量都等于0.这个矛盾说明 $l,q_1,q_2,\cdots,q_s$ 中至少有两个相同,从而导致两个全等的正多边形.

9·31 将平面上的每点都涂上1992种颜色之一,并且每种颜色的点都有.试证对于任意三角形 T,都可以在平面上找到一个与 T 全等

的三角形,使得它的每两条边上都有颜色相同的点(不包括顶点).

(圣彼得堡代表队选拔试题,1992年)

[证] 将三角形 T 置于平面上,并记其外心为 O,其最小角为 α_0. 将三角形 T 绕点 O 逆时针旋转角度 $\alpha \leqslant \alpha_0$,并记所得的三角形为 $T(\alpha)$,显然有 $T(\alpha) \cong T$,而且三角形 $T(\alpha)$ 的第1边与 T 的第2边相交,$T(\alpha)$ 的第2边与 T 的第3边相交,$T(\alpha)$ 的第3边与 T 的第1边相交.

对所有 $\alpha \in [0,\alpha_0]$,考察三角形 $T(\alpha)$ 的3条边(不包括顶点)的涂色情形.让每个三角形 $T(\alpha)$ 都对应于一个 3×1992 的方格数表:当第 i 条边上有第 j 种颜色的点时($1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j \leqslant 1992$),则在方格 (i,j) 中写上1,否则就写0.显然,这样的不同数表只有有限多个,但 α 却有无穷多个,故由抽屉原理知存在 $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \alpha_0$,使得三角形 $T(\alpha_1)$ 和 $T(\alpha_2)$ 所对应的数表相同.这就是说,$T(\alpha_1)$ 的某条边上有何种颜色的点,$T(\alpha_2)$ 的对应边上就有同种颜色的点.

下面证明三角形 $T(\alpha_1)$ 满足题中要求.由对称性知,只须证明 $T(\alpha_1)$ 的第1,2两条边上有颜色相同的内点.上段中已经指出,$T(\alpha_1)$ 的第1边与 $T(\alpha_2)$ 的第2边相交,记交点为 A,并设点 A 涂有 j_1 号颜色.这意味着 $T(\alpha_1)$ 的第1边和 $T(\alpha_2)$ 的第2边上都有 j_1 号颜色的点.因为 $T(\alpha_1)$ 和 $T(\alpha_2)$ 对应的数表相同,故 $T(\alpha_1)$ 的第2边上也有 j_1 号颜色的点,即 $T(\alpha_1)$ 的第1,2两条边上都有 j_1 号颜色的内点.

9·32 在坐标平面上给定集合 $M = \{(x,y) \mid x,y \in N, x \leqslant 12, y \leqslant 12\}$,并将 M 中的每点都涂上红,白,蓝三色之一,试证存在一个矩形,它的边平行于坐标轴,4个顶点都在 M 中且颜色相同.

(瑞典数学奥林匹克,1982年)

[证1] 显然,集合 M 中共有144个点且构成12行和12列的正方形点阵.由抽屉原理知,必有一种颜色的点至少有48个,不妨设红点有48个.设第 i 列中共有 a_i 个红点,$i = 1,2,\cdots,12$,于是有 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{12} = 48$.

将同一列的两个红点称为一个点对并考察点对的数目.第 i 列上的点对个数为 $\frac{1}{2}a_i(a_i - 1)$,从而点对总数为

$$m = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{12}^2) - \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{12})$$

$$= \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{12}^2) - 24. \qquad ①$$

由柯西不等式有

$$m \geqslant \frac{1}{24}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{12})^2 - 24$$
$$= 96 - 24 = 72. \qquad ②$$

显然,每个红点对都对应一个由两点的纵坐标组成的"行对". 于是由②知至少有72个行对. 另一方面,由于点阵共有12行,共可组成 $C_{12}^2 = 66$ 个不同的行对,故由抽屉原理知,必有两个不同列的红点对对应于同一个行对. 易见,以这两对中的4个红点为顶点的矩形即为所求.

[证2] 考察每行和每列上的12个点的涂色情形,有两种可能:

(1) 每行与每列上都恰有红,白,蓝点各4点;

(2) 存在1行或1列,其上有5个同色点.

先看第1种情形. 这时,不妨设第1行,即纵坐标为1的一行上的4个红点是(1,1),(2,1),(3,1),(4,1). 于是前4列中除这4个红点外还有12个红点,它们分属于下列11个集合:

$$S_j = \{(i,j) \mid i = 1,2,3,4\}, j = 2,3,\cdots,12.$$

由抽屉原理知存在 S_{j_0}, $2 \leqslant j_0 \leqslant 12$,其中至少有两个红点,不妨设为 $(1,j_0)$,$(2,j_0)$. 于是 $(1,j_0)$,$(2,j_0)$,(2,1),(1,1)4点即为所求.

再看第2种情形. 不妨设第1行上有5个红点:(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1). 设题中结论不成立. 于是像前段论证一样地可证,前5列中除这5个红点外,至多还有11个红点. 因而其中的白点和蓝点至少有44个. 不妨设其中至少有22个白点,它们分布在前5列上. 由抽屉原理知,必有一列上至少有5个白点,不妨设为(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6). 考察集合

$$T = \{(i,j) \mid 2 \leqslant i \leqslant 5, 2 \leqslant j \leqslant 6, i,j \in N\}.$$

由反证假设知 T 中至多有4个白点和5个红点. 从而 T 中至少有11个蓝点. 显然,这11个蓝点分属于下列5个集合:

$$T_j = \{(i,j) \mid i = 2,3,4,5\}, j = 2,3,4,5,6.$$

由抽屉原理知有 j_0, $2 \leqslant j_0 \leqslant 6$,使 T_{j_0} 中至少有3个蓝点,不妨设为(2,6),(3,6),(4,6).

考察集合

$$V = \{(i,j) \mid 2 \leqslant i \leqslant 4, 2 \leqslant j \leqslant 5\}.$$

由反证假设知其中至多有4个红点,3个白点和4个蓝点,共11点,此与$|V| = 12$矛盾.

综上可知,无论哪种情形,结论都成立.

9·33 在平面上给定一个有限点集,其中每点的两个坐标都是整数.能否把此集合中的每点都染上红蓝两色之一,使得与纵、横坐标轴平行的任一条直线上所含的红点与蓝点的个数至多相差1个?说明理由.

(第27届国际数学奥林匹克,1986年)

[**解**] 题中要求的染色是可以实现的.对此,我们用归纳法来证明.当点数$n = 1$时,命题显然成立.设当$n = k$时命题成立,往证当$n = k + 1$时命题也成立.

(1) 若存在一条平行于坐标轴的直线l_1,其上有奇数个点,则将其上的点去掉一点A.于是由归纳假设知对其余的k点可作满足要求的染色.因l_1上去掉A后剩下偶数个点,故其上红蓝两色点的个数必然相同.因而对l_1来说,无论将点A染上红色或是蓝色都符合要求.故只须考虑点A所在的另一条平行于坐标轴的直线.若该直线上红蓝两色点数相等,则点A可随便染色;若两种点数不相等,则其差为1,只要将点A染上点数少的一种颜色就可以了.

(2) 如果每条平行于坐标轴的直线上都有M中的偶数个点.我们去掉$A \in M$之后,按归纳假设可作满足要求的染色.设A所在的分别平行于横轴和纵轴的两条直线是l_1和l_2.注意,当横向计数时,不计l_1上的点时,红蓝两种点的个数相等;当纵向计数时,不计l_2上的点,红蓝两种点的个数也相等.由此可见,不计点A时,l_1与l_2上的两种点数或同为红点比蓝点多1,或蓝点比红点多1.无论哪种情形,只要将A染成点数少的那种颜色就满足要求.这就证明了命题当$n = k + 1$时也成立.

9·34 已知$\triangle ABC$为正三角形,其边长为整数h.考虑满足条件

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{h}(n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC})$$

的所有点M的集合S,其中n和m都是整数且$0 \leqslant n, m \leqslant h$,且$n + m \leqslant h$.将$S$中的每点都涂上蓝,白,红三色之一.使得

(1)$S \cap AB$中的点不涂蓝色;

(2)$S \cap AC$ 中的点不涂白色;

(3)$S \cap BC$ 中的点不涂红色.

求证存在一个正三角形,它的顶点属于 S,边长为 1 而顶点的涂色互不相同.

(第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年)

[证] 将3边 AB,AC,BC 都h 等分,过每个分点都引另两边的平行线,则这些平行线将 $\triangle ABC$ 划分成一些边长为 1 的正三角形.显然,S 中的点恰是这些三角形的顶点.

考察每个小正三角形的端点异色的边的条数 k.如果 3 个顶点同色,则 $k=0$;如果3个顶点中恰有两点同色,则 $k=2$;如果3个顶点互不同色,则 $k=3$.

再考察所有小正三角形所对应的 k 的总和的奇偶性.如果小三角形的边不在大三角形的周界上,则这条边还属于另一个小三角形.因而它或者被计数 2 次,或者被计数 0 次.边 AB 上的点都是白点或红点且 A 红 B 白,所以 AB 上有奇数条端点异色的小边(即小正三角形的边).同理,BC 和 AC 上也各有奇数条端点异色的小边.于是端点异色的小边的总数为奇数.从而至少有 1 个小正三角形的端点异色的边的条数为奇数,当然只能为 3,即这个三角形的 3 个顶点的颜色互不相同.

9·35 平面上给定 1988 个点,其中任何 4 点都不共线.将其中的 1788 个点涂上蓝色,其余的 200 个点涂成红色.求证存在一条直线,它将平面分成两部分,每部分都含有 894 个蓝点和 100 个红点.

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)

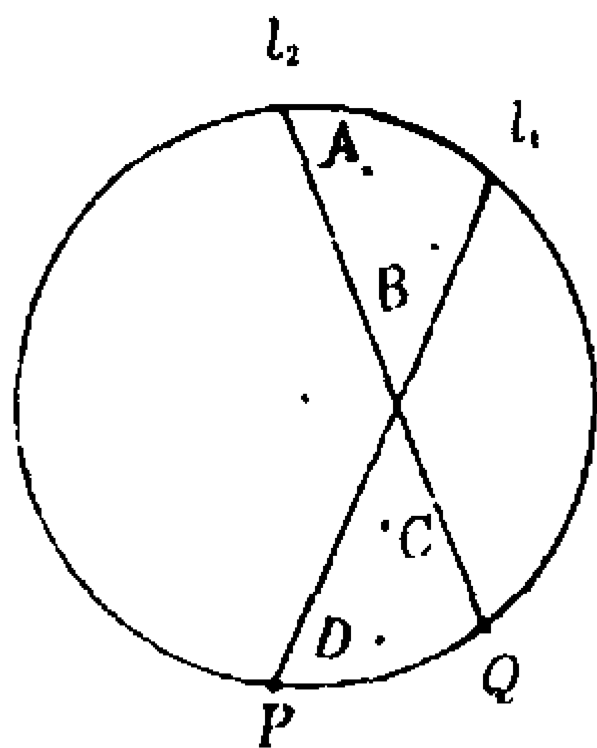
[证] 首先作一个大圆,使给定的 1988 个点都在圆内.然后过任何两个给定点都作一条直线,它们与大圆的交点称为特殊点,大圆上其余的点称为普通点.

下面证明过每个普通点都可以作一条直线,使得直线两侧各有 994 个给定点,并且将这 1988 个点分成点数相等的两个子集的分法是惟一的.设点 P 是任一普通点.把点 P 与 1988 个给定点连起来得到 1988 条射线,我们可以按照这些射线与大圆过点 P 的切线的夹角从小到大来为给定点编号.于是,过编号为 994,995 的两点的射线所构成的夹角中的任意一点与点 P 的连线都把 1988 个给定点均分在直线的两侧.显然,将 1988 个给定点用过点 P 的直线均分为两个子集的分法还

是惟一的(直线可以不同,但两个子集的分法是惟一的).

上述论证表明,每个普通点都惟一地对应于一种分法.容易看出,当普通点沿着圆周移动时,如果不越过任何特殊点,则对应的分法不变;如果越过特殊点,则相应的分法也随之发生变化.下面证明相邻的(即两点间只有1个特殊点)两种不同分法所分成的两个子集只有一对点不同,所谓一对不同指增加1个新点同时减少1个旧点.

设点 P 和 Q 是两个普通点,它们所对应的两种分法是相邻的,设 l_1,l_2 是分别过点 P 和 Q 的直线,把给定的1988个点均分成两部分.如果两种子集至少有两对元素不同,那么存在右图所示的 A,B,C,D4点.因为4点不共线,故其中必有3点不共线,不妨设 A,C,D3点不共线.从而直线 AC 与 AD 不重合,二者与 $\overset{\frown}{PQ}$ 的交点也不重合,即 $\overset{\frown}{PQ}$ 上至少有两个特殊点.此与从属于点 P 和 Q 的分法相邻的条件矛盾.



从而证明了两种相邻分法所分成的子集各只有一对元素不同.

设点 P 为任一个普通点,l 为过点 P 的满足要求的划分直线,并设 l 交大圆于另一点 Q.又设 l 的左侧有 x 个蓝点.当点 P 作为普通点从 P 出发连续变化到点 Q(不计越过的特殊点)时,相应的分法也连续地变化到从属于点 Q 的分法.但这种分法与点 P 对应的分法相同,只是左右两侧的集合互换,即点 Q 分线左侧的集合有 $1788-x$ 个蓝点.由于每次相邻分法的变动只相差1点,故变动中必有一种分法,分线左侧的集合中恰含894个蓝点.显然,这种分法即为所求.

9·36 将边数为奇数的凸多边形的每个顶点都涂上一种颜色,且任意两个相邻顶点异色.试证对上述任何一种涂色法,都可用互不相交的对角线将多边形分成若干个三角形,使得剖分中所用的每条对角线的两个端点都不同色.

(匈牙利数学奥林匹克,1978年)

[证1] 设多边形的边数为 $n=2k+1,k\in N$,并对 k 使用数学归纳法来证明.

当 $k=1$ 时,$n=3$.结论显然成立.设结论于 $k=m$ 时成立.当 $k=m+1$ 时,设给定的凸 $2m+3$ 边形已按要求涂好颜色,则必有1个顶点 A,它的两个相邻顶点异色.若不然,则每个顶点的两个相邻顶点都

同色.由于顶点数为奇数,故所有顶点都同色,此与已知矛盾.将顶点 A 的两个相邻顶点间连 1 条对角线,则它的两个端点异色并将原多边形分成 1 个三角形与 1 个凸 $2m+2$ 边形.

如果在凸 $2m+2$ 边形中有 1 个顶点 B,它的两个相邻顶点异色,则这两个异色点间所连的对角线又分出 1 个三角形和 1 个凸 $2m+1$ 边形.于是由归纳假设知结论成立.如果在凸 $2m+2$ 边形中的每个顶点的两个相邻顶点都同色,则这 $2m+2$ 个顶点恰好交替地涂有两种颜色,且顶点 A 的两个相邻顶点恰好分别涂有这两种颜色.按已知,顶点 A 与它的两个邻点均不同色.从而顶点 A 与另外的 $2m+2$ 个顶点均不同色.于是用从顶点 A 发出的所有对角线将多边形剖分成三角形即满足题中要求.这就证明了结论于 $k=m+1$ 时成立.

[证 2]　像证 1 中一样地对 k 使用数学归纳法来证明.

当 $k=1$ 时,结论显然成立.设结论于 $k=m$ 时成立.考察 $k=m+1$ 的情形.因为 $2m+3$ 为奇数,而相邻顶点异色,故知这 $2m+3$ 个顶点至少涂有 3 种不同颜色.设其中顶点数最少的一种是红色.记所给的多边形为 $A_1A_2\cdots A_{2m+3}$.

(1) 若多边形顶点中只有 1 个红点,记为 A_i,则两个三点组 (A_{i-2},A_{i-1},A_i) 和 (A_i,A_{i+1},A_{i+2}) 中的各 3 点都互不同色.从而对角线 $A_{i-2}A_i$, A_iA_{i+2} 将所给多边形分成两个三角形和 1 个凸 $2m+1$ 边形.由归纳假设知结论成立.

(2) 设多边形顶点中至少有两个红点.考察两个相邻红顶点(指中间夹有的顶点都是其他颜色的)间夹有的其他颜色的顶点的情形.

(i) 若有两个相邻红顶点 A_i 和 A_j $(i<j)$ 间至少夹有 3 个顶点,则三点组 (A_i,A_{i+1},A_{i+2}) 和 (A_{j-2},A_{j-1},A_j) 中的各 3 点都互不同色.从而像(1)中一样地知结论成立.

(ii) 若任何两个相邻红顶点间都至多夹有两个顶点,则由红顶点数最少性即知每两个红顶点间都恰好夹有两个顶点.设 A_1 是红顶点,于是 A_4 也是红顶点,且三点组 (A_1,A_2,A_3), (A_4,A_5,A_6) 中的各 3 点都互不同色.从而像(1)中一样地知结论成立.这就证明了结论于 $k=m+1$ 时也成立.

9·37　设自然数 $n\geqslant 3$.考虑一个圆周上的 $2n-1$ 个不同的点所成的集合 E.如果将 E 中的一些点涂成黑色,使得至少有两个黑点,以

它们为端点的两条弧之一的内部恰含 E 的 n 个点，则称这种涂色法是“好的”. 若 E 的 k 个点涂成黑点的每一种涂色法都是好的，求 k 的最小值.

(第 31 届国际数学奥林匹克，1990 年)

[解 1] 按逆时针方向，将给定的 $2n-1$ 个点顺次记为 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n-1}$ 并约定当 $k > 2n-1$ 时，$A_k = A_{k-2n+1}$. 对于任意点 A_i，与它相隔 n 个点的点恰有两个，即 A_{i+n+1} 与 A_{i+n-2}. 我们把这两个点称为 A_i 的“关联点”. 显然，若有一对黑点互为关联点，则该种涂色法就是好的.

首先，我们证明 k 的最小值不大于 n. 若不然，则存在一种将 E 中 n 个点涂黑的涂色法不是好的. 这时，每个黑点的两个关联点都是无色的，所以，共有 $2n$ 个无色点(包括重复计数). 但是，每个无色点至多是两个黑点的关联点，因而至少有 n 个不同的无色点，于是总点数至少为 $2n$，此不可能.

其次，如果我们将前 $n-2$ 个点涂黑而其余点不涂色，则其中任何两个黑点都不是关联点对. 可见，所求的 k 的最小值不小于 $n-1$.

下面，我们考察 $n = 3, 4, 5$ 的情形，以便从中获得在一般情形下关于 k 的最小值的信息.

当 $n = 3$ 时，$2n-1 = 5$. 显然，当且仅当两点相邻时，二者为关联点对. 所以，当把两个不相邻的点涂黑时，涂色法不是好的. 可见，所求的 k 的最小值为 $3 = n$.

当 $n = 4$ 时，$2n-1 = 7$. 当且仅当两点中间隔一点时，二者为关联点对. 所以，当把 A_1, A_4, A_5 三点涂黑时，任何两个黑点都不是关联点对. 可见，这时所求的 k 的最小值为 $4 = n$.

当 $n = 5$ 时，$2n-1 = 9$. 将 9 个已知点分成 3 组：

$$\{A_1, A_4, A_7\}, \{A_2, A_5, A_8\}, \{A_3, A_6, A_9\}.$$

不难看出，任何一点的两个关联点都恰是与它同组的另两点. 如果对 9 点中的 4 点染色，则由抽屉原理知，必有两个黑点属于同一组，从而二者为一关联点对. 可见，这时所求的 k 的最小值为 $4 = n-1$.

上述讨论表明，k 的最小值有时是 n，有时是 $n-1$，视 $2n-1$ 能否被 3 整除而定. 下面我们就分别来加以证明.

(1) 当 $3 \mid (2n-1)$ 时，设 $2n-1 = 3m$ 并将给定点分成 3 组：

$$S_i = \{A_j \mid j = 3k + i, k = 0,1,\cdots,m-1\}, i = 1,2,3.$$

注意到 m 为奇数,便知

$$n-2 = 3 \cdot \frac{m-1}{2} = 3\left[\frac{m}{2}\right], n+1 = 3\left(\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)$$

都是 3 的倍数,因而 A_{i+n+1} 与 A_{i+n-2} 都与 A_i 属于同一组,每点与它的两个关联点都在同一组中.若将 $n-1 = 3\left[\frac{m}{2}\right]+1$ 个已知点涂黑,则由抽屉原则知 3 组中必有一组中至少有 $\left[\frac{m}{2}\right]+1$ 个黑点.于是像第一段论证一样地可以证明,这组中必有两个黑点是关联点对.可见,任何将 $n-1$ 个点涂黑的涂色法都是好的.所以,所求的 k 的最小值为 $n-1$.

(2) 当 $3 \nmid (2n-1)$ 时,设 $2n-1 = 3m \pm 1$.易见,m 为偶数.令

$$S = \{A_j \mid j = 3k+1, k = 0,1,2,\cdots,n-2\},$$

则 S 中任何点的关联点都不在 S 中.事实上,由 $2n-1 = 3m \pm 1$ 可推得

$$\begin{cases} n-2 = \dfrac{3m}{2} - 1, \\ n+1 = \dfrac{3m}{2} + 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} n-2 = \dfrac{3m}{2} - 2, \\ n+1 = \dfrac{3m}{2} + 1, \end{cases}$$

4 个数均不是 3 的倍数.所以,若 $A_i \in S$,则它的两个关联点 A_{i+n+1} 和 A_{i+n-2} 都不在 S 中.现将 S 中的 $n-1$ 个点全部涂黑,则这种涂色法不是好的.所以,这时所求的 k 的最小值为 n.

综上,我们得到

$$k_{\min} = \begin{cases} n-1, & \text{当 } 3 \mid (2n-1), \\ n, & \text{当 } 3 \nmid (2n-1). \end{cases}$$

[解 2] 像解 1 中一样,我们将 $2n-1$ 个给定点依次记为 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n-1}$ 并引入关联点的概念.现于每对关联点间连一条线,则得到一个图 G,其中每点的度数都是 2.因此,偶图 G 是一个圈或若干个互不相交的圈之并.由对称性知每个圈都有相同的顶点数.所以,互不相交的圈的数目一定是奇数.由于任何一点的两个关联点间夹有两个点,故知 A_i 与 A_{i+3} 在同一圈上,所以圈的数目至多 3 个.若恰有 3 个圈,则由于每个圈的顶点数都相同,故有 $3 \mid (2n-1)$.反之,若 $3 \mid (2n-1)$,则 $3 \mid (n-2), 3 \mid (n+1)$.因此,以如下 3 组顶点

$\{1,4,\cdots,2n-3\},\{2,5,\cdots,2n-2\},\{3,6,\cdots,2n-1\}$
中任何一组点为顶点的子图都是一个圈.由此可见,图 G 可分解为3个圈当且仅当 $3\mid(2n-1)$.当 $3\nmid(2n-1)$ 时,图 G 是一个圈.

显然,一种涂色法是好的,当且仅当图 G 中有一对相邻顶点同为黑点.当 $3\nmid(2n-1)$ 时,图 G 是一个圈,其中最多可选出 $n-1$ 个顶点两两不相邻.所以,若把这样一组 $n-1$ 个点涂黑,则涂色法不是好的;若把任何 n 个点涂黑,其中必有两个顶点相邻,所以涂色法总是好的.由此可知,所求的 k 的最小值为 n.当 $3\mid(2n-1)$ 时,图 G 有3个圈,每个圈有 $m=\frac{1}{3}(2n-1)$ 个顶点.任何一个圈中最多可选出 $\left[\frac{m}{2}\right]$ 个顶点两两不相邻.所以,若将某个圈中的 $\left[\frac{m}{2}\right]+1$ 个顶点涂黑,则必有两个顶点相邻.故当将 $n-1=3\left[\frac{m}{2}\right]+1$ 个点涂黑时,由抽屉原理知3个圈中至少有一个圈上的黑点数至少为 $\left[\frac{m}{2}\right]+1$,从而知这样的涂色法总是好的.如果将前 $n-2$ 个已知点涂黑,则任何两个黑点都不是图中的相邻顶点,故这种涂色法不是好的.所以,这时所求的 k 的最小值为 $n-1$.

综上,我们得到,$k_{\min}=n$,当 $3\nmid(2n-1)$;$k_{\min}=n-1$,当 $3\mid(2n-1)$.

9·38 把正 n 边形的每条边和每条对角线都涂上一种颜色,使得这些线段中有公共点的任何两条线段都涂有不同的颜色.问最少需要几种颜色?

(第19届全苏数学奥林匹克,1985年)

[解] 设 A,B,C 是正 n 边形的相邻三个顶点:考察从 B 引出的 $n-1$ 条线段及对角线 AC,这 n 条线段两两都有公共点,所以至少需要 n 种颜色.

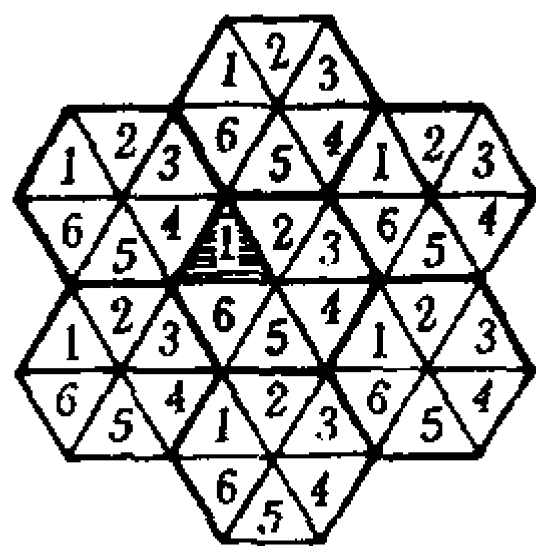
另一方面,正 n 边形的所有边和对角线恰可分成 n 组平行线段.每组线段涂上同一种颜色,n 种颜色就够了.故知满足题中要求的涂色法最少要用 n 种颜色.

9·39 将正三角形的一边涂上红色,再将正三角形关于它的一条边作对称映射,将映射所得的三角形再作类似的映射,如此继续下去,一直到某一步后,三角形又映射回到了原来的位置,求证此时三角形的

红边也回到了原来的位置.

（第 25 届莫斯科数学奥林匹克，1962 年）

［证］ 设右图中有阴影线的正三角形为给定三角形，粗实线所表示的边为红边. 于是视三角形位置及红边位置的不同，所有三角形共有 6 种不同情形，分别编号为 1,2,3,4,5,6. 按题中规定作映射，可以看出，各种编号的三角形的排列是有规律的，不管怎样映射，每个位置的三角形的编号是不变的. 所以，只要回到原来位置，编号当然是 1 号，红边也恰好回到原处.



9·40 将一个 99 边形的边依次涂色为红，蓝，红，蓝，…，红，蓝，黄. 每条边涂一种颜色. 然后允许进行如下操作：在保证任何相邻两边都不同色的条件下，每次可改变一条边的颜色. 问能否经过若干次操作而使 99 条边的涂色状态变为红，蓝，红，蓝，…，红，黄，蓝？

（第 23 届美国数学奥林匹克，1994 年）

［解］ 将99边形的99条边依次编号为1,2,…,99. 定义函数 $f(i)$ 如下：当 $i-1, i, i+1$ 这3条边中第1条与第3条同色时，令 $f(i)=0$；当这 3 条边的颜色依次为红黄蓝，黄蓝红或蓝红黄时，令 $f(i)=1$；当这 3 条边的颜色依次为红蓝黄，蓝黄红或黄红蓝时，令 $f(i)=-1$.

考察操作前后和数 $S=\sum\limits_{i=1}^{99} f(i)$ 的变化情形. 注意，仅当第 $i-1$ 与第 $i+1$ 条边同色时，才能将第 i 条边改变颜色. 当第 i 条边改变颜色时，又仅仅影响到 $f(i-1)$ 与 $f(i+1)$ 的值，而其他的诸 $f(j)$ 都保持不变. 当写出 $i-2, i-1, i, i+1, i+2$ 5 条边的颜色时，变化情况如下：

蓝红蓝红蓝 $\longleftrightarrow$ 蓝红黄红蓝，
蓝红蓝红黄 $\longleftrightarrow$ 蓝红黄红黄，
黄红蓝红黄 $\longleftrightarrow$ 黄红黄红黄，
黄红蓝红蓝 $\longleftrightarrow$ 黄红黄红蓝.

这里只列出了第 $i-1$ 与 $i+1$ 条边均为红色的情形，均为蓝色或黄色的情形可由此轮换得出. 易见，操作前后 $f(i-1)+f(i+1)$ 的值不变，即

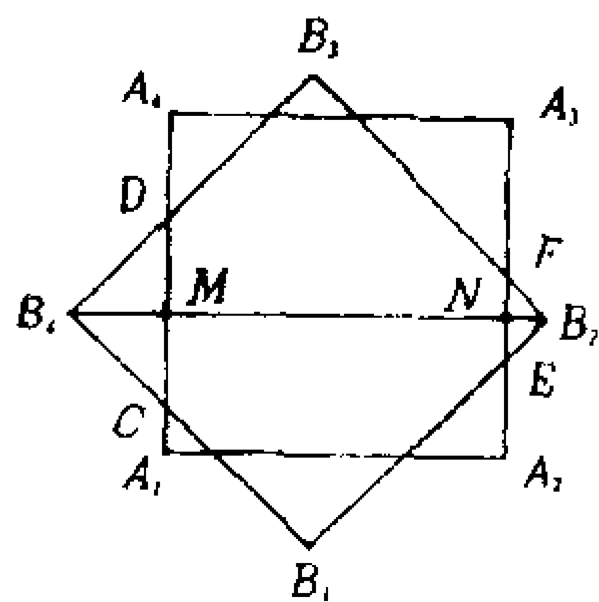
在允许操作之下，和数 S 的值是不变量.

因为初始状态所对应的和数 $S_0 = -3$，而希望达到的终结状态所对应的和数 $S_1 = 3$，所以不可能实现.

9·41　设两个相同的正方形相交成一个八边形，其中一个正方形的边是蓝色的，而另一个的边是红色的. 求证八边形的蓝色边长之和等于红色边长之和.

（第 20 届全苏数学奥林匹克，1986 年）

[证]　设正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 是蓝色的. 红正方形的对角线 B_4B_2 与两条蓝边的交点分别为 M, N（右图）. 这时，$\triangle B_4CD \backsim \triangle B_2FE$ 且 B_4M，B_2N 分别为这两个三角形中直角的平分线. 记 $\dfrac{CD}{B_4M} = \lambda$，则 $CD + EF = \lambda(B_4M + B_2N)$. 当蓝正方形沿直线 A_1A_2 滑动时，$B_4M + B_2N$ 保持不变，



从而 $CD + EF$ 也保持不变，故 4 条蓝边长度之和不变. 而 4 条红边的长度之和不变是显然的.

通过上述的平移，我们可使两个正方形的中心重合在一起. 这时由对称性知蓝边长度之和与红边长度之和相等. 从而平移之前两者长度之和也相等.

9·42　已知凸多面体的每个侧面都是三角形. 试证可以将它每条棱都涂上红蓝两色之一，使得从多面体的任一顶点走到任一另外顶点，可以只沿着红棱走，也可以只沿着蓝棱走.

（第 21 届全苏数学奥林匹克，1987 年）

[证]　设 A 为多面体的一个顶点，由它共引出 n 条棱 AA_j，$j = 1, 2, \cdots, n$. 把棱 AA_1 涂成蓝色，而其余的 $n-1$ 条棱都涂成红色，把非封闭的折线 $A_1A_2\cdots A_n$ 涂成蓝色，棱 A_1A_n 涂成红色. 容易验证，这 $n+1$ 个点间的染色符合题中要求.

下面我们逐步把涂色扩展出去，即依次给与已涂色部分相邻的侧面上尚未涂色的部分涂色. 如果这个侧面只有一条棱已涂色，则给另两条未涂色的棱涂上不同的颜色. 如果已涂色的棱有两条，则第三条棱可任涂一种颜色. 这样继续下去，直到涂完为止. 易见，这样的涂色满足题中要求.

9·43　将一个凸多边形各边的外侧都涂上颜色，再作该多边形的若干条对角线，将这些对角线的一侧也涂上颜色，即贴着这些线段的一侧画上彩色窄条．试证在由这些对角线从原多边形中所分出的那些多边形中，至少有一个多边形的各边的外侧都是涂了颜色的（多边形顶点处的涂色允许从内部开始）．

（第24届莫斯科数学奥林匹克，1961年）

［证］　我们关于对角线的条数使用数学归纳法．当对角线条数为0时，结论显然成立．设结论当对角线条数 $n = k$ 时成立．当 $n = k + 1$ 时，设想是先作出 k 条对角线时再添1条所成．由归纳假设知在前 k 条对角线作出并涂好颜色后，有一个多边形的各边的外侧都是涂了颜色的，记这个多边形为 M．当引出第 $k + 1$ 条对角线并一侧涂了颜色后，如果这条对角线与 M 不交，则 M 仍为满足要求的多边形．如果这条对角线与多边形 M 相交，则它必把 M 分成两个多边形．将对角线涂色一侧的多边形去掉，另一侧的多边形的各边的外侧都是涂了颜色的，这就完成了归纳证明．

9·44　公园里有 mn 条小路和若干块草坪，每条小路都连接着两块草坪．已知可以将每条小路都涂上 m 种颜色之一，使得自每块草坪所连出的小路中都没有同色的．求证存在一种涂色法，使得涂有每种颜色的小路都恰有 n 条．

（原苏联教委推荐试题，1989年）

［证］　对于每一种使得从每块草坪连出的所有小路互不同色的涂色法，设 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ 是分别被涂成各种颜色的小路的条数，令

$$f(s) = |s_1 - n| + |s_2 - n| + \cdots + |s_m - n|$$

并称之为偏差函数．因为所有这样的着色法只有有限多种，故可从中选出一种使 $f(s)$ 取最小值的着色法来．下面我们就来证明，对于这种着色法，必有 $f(s) = 0$，即每种颜色的小路都恰有 n 条．

若不然，则存在编号为 i 和 j 的两种颜色，使得 $s_i > n, s_j < n$．将每块草坪视为一点而每条小路都是连结其中两点的线段，于是得到一个有 mn 条边的 m 染色的图．考察其中涂有 i 和 j 两种颜色的边所构成的子图．按题意，从每个顶点引出的涂有 i 和 j 色的边至多各1条．因此，这个子图可以分解为若干个圈或（非封闭的）链，它们之间没有公共顶点，且在每条圈和链上，两种颜色的边交替排列．这样，每条圈上，涂有

i 色和 j 色的边数相等,每条链上,两种颜色的边数之差至多为 1. 由于 $s_i > n > s_j$,故必存在一条链,其上的 i 色边比 j 色边多 1 条. 将这条链上的边的涂色情形互换,结果是 j 色边比 i 色边多 1 条,这将导致 $f(s)$ 减少 2,矛盾. 这就证明了 $f(s) \leqslant 0$.

9·45　一直线上有 k 个点,对某两点 A,B,以 AB 为直径作圆,每一个圆涂上 n 种颜色的一种,如果每两个互相外切的圆涂色均不相同,所给的 k 个点不涂颜色,证明:$k \leqslant 2^n$.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1988 年)

[证 1]　对每一点 A,有一相应集合 S_A:

$$S_A = \{\text{过 } A \text{ 并且在 } A \text{ 左方的圆所涂的颜色}\}.$$

由于颜色共 n 种,所以 S_A 至多有 2^n 种,如果 $k > 2^n$,则由抽屉原理,必有两点 A,B,使得

$$S_A = S_B.$$

不妨设 B 在 A 的左方. 考虑以 AB 为直径的圆 C,由 S_A 的定义,圆 C 所涂的颜色 $\in S_A$,从而也就有 $\in S_B$,因而必有一个过 B 并且在 B 左方的圆与圆 C 的涂色相同,这两个圆是外切的. 与题设两个外切圆的涂色不同相矛盾.

所以 $k \leqslant 2^n$.

[证 2]　设 $k = 2^n + 1$ 个点为

$$A_1, A_2, \cdots, A_k.$$

自 A_j 向 $A_i (j > i)$ 引一条弧 $\overrightarrow{A_jA_i}$,就形成了一个竞赛图,这个图是一个完全有向图,图中的弧涂上 n 种颜色(弧 $\overrightarrow{A_jA_i}$ 与以 A_iA_j 为直径的圆的颜色相同). 要证明图中有三点 $A_i, A_j, A_k (i < j < k)$,$\overrightarrow{A_jA_i}$ 与 $\overrightarrow{A_kA_j}$ 同色.

用数学归纳法.

$n = 1$ 时,结论显然成立.

假设命题在 $n - 1$ 时成立.

对于 n,将 $2^n + 1$ 个点分为两个集合 M_1 和 M_2. M_2 中每一个点均有一条从其他点引向该点的红色的弧,M_1 中的点则不是这样.

(1) 若 $|M_2| \geqslant 2^{n-1} + 1$.

如果在 M_2 中有一条红色的弧 $\overrightarrow{A_jA_i}$，那么必有指向 A_j 的红弧 $\overrightarrow{A_kA_j}$（A_k 不一定在 M_2 中），则结论成立，如果在 M_2 中没有红色的弧，则由归纳假设结论成立.

(2) 若 $|M_1| \geqslant 2^{n-1}+1$.

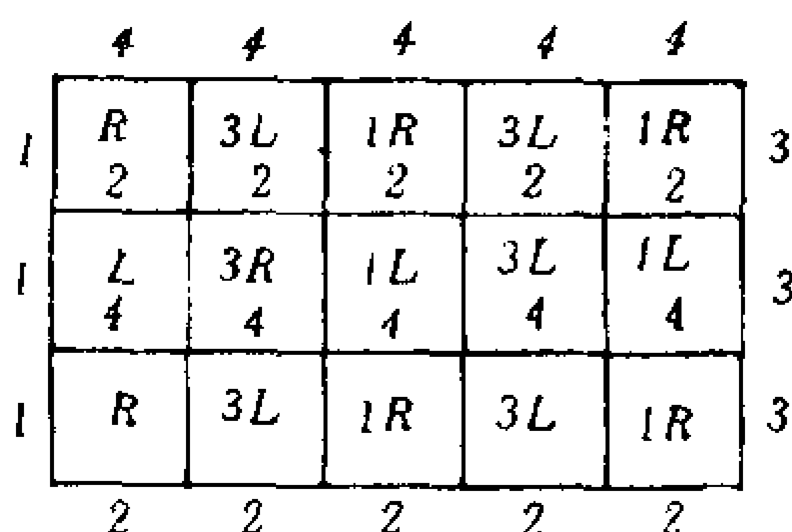
则由于 M_1 中任两点 $A_i, A_j (i<j)$ 之间的弧 $\overrightarrow{A_jA_i}$ 不是红色，所以结论成立.

由以上可知，$k \leqslant 2^n$.

9·46 有四种颜色和无数多个边长为 1 的小正方形. 在小正方形的边上涂色，使得每个正方形的各边的颜色互不相同，并将同一颜色的边粘在一起. 问 m 和 n 是怎样的数时，由这些小正方形可以粘成 $m\times n$ 个方块的矩形，且使矩形的每一边都涂有同一种颜色，而四边的颜色又互不相同.

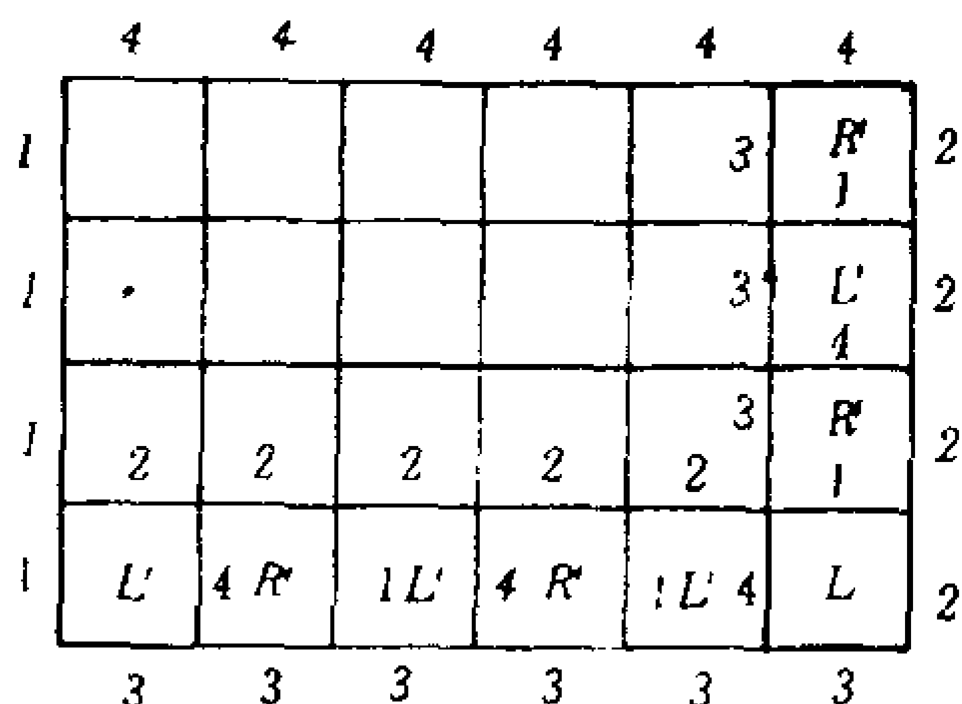
（第 18 届全苏数学奥林匹克，1984 年）

[解] 因为每个正方形都是每种颜色的边各一条，故当使用 $m\times n$ 个矩形时，未粘之前每种颜色的边数都是 mn，当然具有相同的奇偶性. 每两个正方形粘在一起时，该种颜色的边数就减少 2，但奇偶性不变. 由此可知，无论怎样粘连，四种颜色的数目始终具有相同的奇偶性. 这意味着 m 与 n 具有相同的奇偶性.



(a)

将正方形的 4 边按左旋顺序依次涂上第 1,2,3,4 种颜色，我们称之为左旋块，记为 L. 类似地定义右旋块并记为 R. 将左旋块和右旋块中 3 和 4 两种颜色互换所得的涂色正方形分别称之为次左旋块和次右旋块，分别记为 L' 和 R'.



(b)

当 m 和 n 都是奇数时，我们可以相间地使用 L 和 R，粘接成 $1\times n$ 的长条，其 4 边涂色的顺序与两端正方形相同. 然后再将左旋长条与右旋长条

相间地粘接起来即得满足要求的 $m \times n$ 矩形. 参看图(a).

当 m 和 n 都是偶数时,先像上面一样地粘好 $(m-1)\times(n-1)$ 矩形. 然后用 R' 和 L' 块粘成 $1\times(n-1)$ 和 $(m-1)\times 1$ 的长条,再加一个 L(或 R) 块即可粘接成 $m \times n$ 矩形且满足题中要求. 参看图(b).

综上可知,当 m 和 n 奇偶性相同时,可以粘接成满足要求的 $m \times n$ 矩形.

9·47　联邦 AB 由 A 和 B 两个共和国组成,每一条道路都连结着属于不同共和国的两个城市. 已知由每一个城市都至多可通向 10 个城市,试证在联邦 AB 的地图上,可将每条道路都涂上 10 种颜色之一,使得出自任一城市的任何两条道路都涂有不同的颜色.

(圣彼得堡数学奥林匹克,1990 年)

[证 1]　我们对涂色道路的条数进行归纳. 对第 1 条道路进行满足要求的涂色是显然的. 设已对 k 条道路进行了满足要求的涂色. 考察第 $k+1$ 条道路. 设这是连结着 $x \in A$ 和 $y \in B$ 的一条道路. 按已知,发自 x 城和 y 城的道路都至多被涂上了 9 种颜色. 如果两城的道路涂色中都缺少同一种颜色,则只要把第 $k+1$ 条路涂上这种颜色就行了. 如果两城所缺少的颜色各不相同,不妨设从 x 城连出的道路中有 1 号色而没有 2 号色的;由 y 城连出的道路中有 2 号色而没有 1 号色的.

我们来考察这样一条路线:它始发于 x 城,交替地涂有 1 号色和 2 号色且包含的道路条数最多. 显然,它不可能两次穿过同一个城市. 设它的终点是 z 城,则 $z \neq y$. 事实上,由于这条路线是 1 号色与 2 号色交替的而每条道路都连着不同共和国的各一个城市,故当沿这条路线前进时,1 号色的路都是由 A 走向 B 而 2 号色的路都是由 B 走向 A. $y \in B$ 没有 1 号色的路,因而这条路线不能到达 y. 又因 z 是终点,所以 z 城的道路涂色中,也只有 1 号色(若 $z \in B$)或 2 号色(若 $z \in A$)之一,否则又可继续延长下去. 这样一来,我们可将这条路线上的 1 号色与 2 号色互换,使换后的涂色仍然满足题中要求. 但这时 x 城与 y 城都没有 1 号色,于是只要把第 $k+1$ 条路涂上 1 号色就行了. 这就完成了归纳证明.

[证 2]　考察联邦 AB 地图上的道路的任何一种涂色法(可以不必满足题中要求而只是每条路都涂上 10 种颜色之一). 对于图中的每个城市 C_i,我们把自 C_i 连出的涂有不同颜色的道路对的数目 c_i 称为 C_i 城

的指标,并将所有城市的指标之和称为这种涂色法的指标.因为所有不同的涂色法只有有限多种,故其中必有指标最大的一种.我们断言,这种涂色法必然满足题中要求.

若不然,则在这种涂色法中必有某个城市 C,使自它发出的道路中至少有两条同色,不妨设都是 1 号色.由于每个城市至多发出 10 条路,故自 C 城发出的道路的涂色中至少缺少 1 种颜色,不妨设没有 2 号色.考察这样的一条路线,从 C 城沿 1 号色的路出发,交替地涂有 1 号色与 2 号色,且包含最多可能的道路,即直到某城再不能沿新的道路前进为止.将这条路线上的 1 号色与 2 号色互换,则得到一种新的涂色法.这时,与原图指标相比,C 城的指标至少增加 1;路线外的城市及路线经过的城市的指标不变;终点 D 城的指标不减.因而,新涂色法的指标至少比旧涂色法大 1,矛盾.

9·48 将凸多面体的每条棱都涂上红黄两色之一.两边异色的面角称为奇异面角.某顶点 A 处的奇异面角的个数称为该顶点的奇异度,并记为 S_A.求证总存在两个顶点 B 和 C,使得 $S_B+S_C\leqslant 4$.

(中国国家集训队选拔试题,1991 年)

[证] 将凸多面体的红色棱标上数 1,黄色棱标上数 0.定义任意一个面角的度数为该面角两边标数之和模 2 所得的余数 0 或者 1.于是一个面角为奇异面角的充分必要条件是其度数为 1.任取一顶点 A,由于在计算 A 处所有面角度数之和时,从 A 发出的每条棱的标数都用了两次,从而 A 处所有面角度数之和为偶数.于是顶点 A 的奇异度 S_A 为偶数.同理可证,任一面所包含的奇异面角的个数也是偶数.

假设凸多面体有 k 个顶点 $A_1,A_2,\cdots,A_k$,有 j 个面 $M_1,M_2,\cdots,M_j$ 和 t 条棱.设面 M_i 所包含的棱数为 $t_i(i=1,2,\cdots,j)$.显然 $\sum\limits_{i=1}^{j}t_i=2t$.令 M_i 所含的奇异面角数为 $\tilde{S}_{M_i}$,由于它是偶数,从而有

$$\tilde{S}_{M_i}\leqslant 2\left[\frac{t_i}{2}\right].$$

又因 $t_i\geqslant 3$,故得

$$\tilde{S}_{M_i}\leqslant 2t_i-4.$$

在上式中对 i 从 1 到 j 求和便得,凸多面体所有奇异面角数应满足

$$\sum_{i=1}^{j}\widetilde{S}_{M_i}\leqslant 2\sum_{i=1}^{j}t_i-4j=4(t-j).$$

由欧拉公式可得 $t-j=k-2$. 于是有

$$\sum_{i=1}^{j}\widetilde{S}_{M_i}\leqslant 4k-8.$$

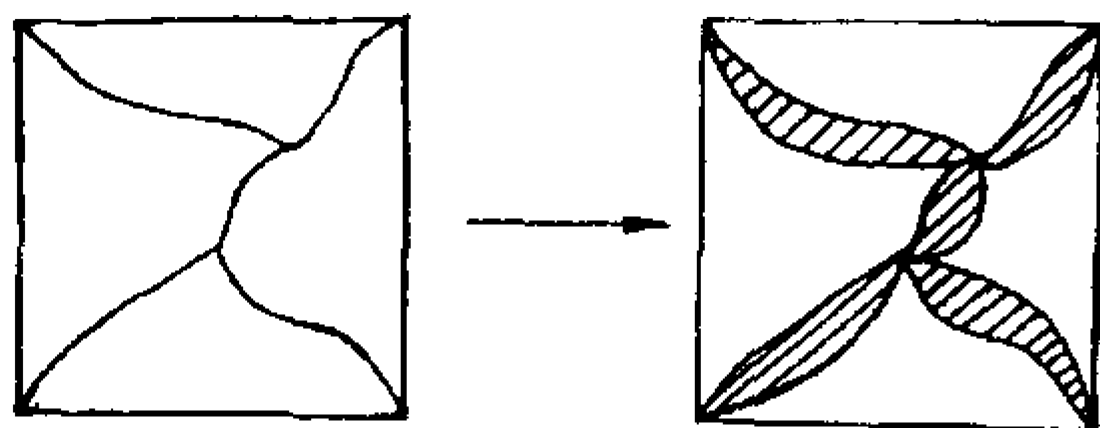
又因 $S_{A_1},S_{A_2},\cdots,S_{A_k}$ 都是偶数,故必存在 $k_1,k_2,k_1\neq k_2$,使得 $S_{A_{k_1}}\leqslant 2$, $S_{A_{k_2}}\leqslant 2$,故有

$$S_{A_{k_1}}+S_{A_{k_2}}\leqslant 4.$$

9·49 在一个正方形的岛屿上分布着若干个国家. 能否将这些国家划分得更小,使得不出现新的国境线交点,而又可以只用两种颜色来为这个岛屿的地图着色?

(第 36 届莫斯科数学奥林匹克,1973 年)

[解] 可以做到, 只要将每两个相邻的国境线交点间再连一条"复线"即可. 见下图.



9·50 一张纸被染上了墨渍. 对于墨渍中的每一点都确定出它到墨渍边界点的最大距离和最小距离. 在一切点的最小距离中取最大值,在一切点的最大距离中取最小值,并比较二者的大小. 如果这两个值相等,墨渍应具有什么形状?

(第 36 届莫斯科数学奥林匹克,1973 年)

[解] 设墨渍中各点到墨渍边界点的最小距离的最大值 r_1 在点 A 达到,而各点到边界点的最大距离的最小值 r_2 在点 B 取得. 则以 A 为心以 r_1 为半径的圆含于墨渍内部,以 B 为圆心以 r_2 为半径的圆包含着墨渍. 所以有 $r_2\geqslant r_1$. 如果 $r_2=r_1$,则两圆重合,这意味着墨渍恰为一个圆面.

9·51 把两个大小不等的纸圆盘都均分成 1965 个扇形. 在每个圆盘上都任意选出 200 个扇形染成红色,把大小圆盘的圆心钉在一起,并

使上面的扇形与下面的扇形全都一一对齐.旋转小圆盘,使其转过扇形的圆心角的整数倍,而大圆盘保持不动.求证至少有60种情形可使上下两个圆盘上重合的红色扇形对的个数不多于20个.

(第28届莫斯科数学奥林匹克,1965年)

[证] 若不然,则至多有59种情形重合红色扇形对的个数不多于20个.当将小圆盘旋转一周时,共有1965个不同位置,除了上述59种之外,其余1906种情形中,每种至少有21个红色扇形对,共有不少于 $1906\times 21 = 40026$ 个红色扇形对.但另一方面,当小扇形旋转一周后,每个小红扇形与每个大红扇形都恰好配对一次,故总共有40000个红色扇形对,矛盾.

9·52 在平面上任作 n 条直线,它们将平面分割成一些区域.试证可以将每个区域都涂上两种颜色之一,使得每两个有公共边的相邻区域都不同色.

(第11届莫斯科数学奥林匹克,1948年)

[证] 当 $n = 1$ 时,只要将两个区域涂上不同颜色便满足要求.

设结论当 $n = k$ 时成立.当 $n = k+1$ 时,从 $k+1$ 条直线中先拿掉一条,则余下 k 条直线.由归纳假设知可作满足要求的涂色.再把拿掉的一条直线放回去.这时,保持这条直线一侧的所有区域的涂色不变而将另一侧的所有区域都改换成与原色不同的另一种颜色.这样作出的涂色满足题中要求,故由归纳法知于任何 $n\in N$,命题的结论都成立.

9·53 一欧氏平面被有限个圆分成了若干个区域,对所分的每个区域分别涂以红色或蓝色,求证能使任何两个相邻区域涂的颜色不同.(凡有共用弧作为边界的两个区域称为相邻的区域)

(第23届美国普特南数学竞赛,1962年)

[证] 对平面上每一个被圆分成的区域,分别数一数它位于多少个圆的内部,若它位于奇数个圆的内部就涂成红色,若它位于偶数个圆的内部就涂成蓝色,这种涂色方法即能符合问题的要求.

若平面上只有两个圆划分形成的区域,则命题显然正确.

假定平面被 n 个圆分成若干个区域后,命题也正确($n\geqslant 2$),则在基础上再增加一个圆,即得到 $n+1$ 个圆(记为 C_{n+1})划分原平面成更多区域的情形.

组合卷

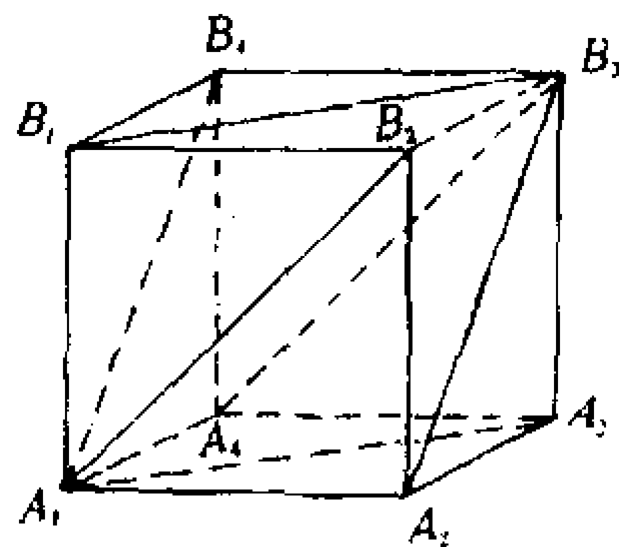
考察原来的某个区域 D 被 C_{n+1} 分成的两个子域 D_1, D_2，它们共有 C_{n+1} 的一段圆弧作为边界，因而其中有且仅有一个(不妨设为 D_1) 位于 C_{n+1} 里面，由此得知 D_1 比 D_2 多位于一个圆里面，因此命题对 $n+1$ 个圆的情形正确.

于是由数学归纳法，本题对所有自然数 $n>1$ 成立.

9·54　将正方体的每一个侧面都用两个具有公共斜边的全等的直角三角形贴上，其中一个三角形是白色的，另一个是黑色的. 问能否适当安排黑白两色，使得正方体的每一顶点处的白角之和与黑角之和相等?

(第 21 届莫斯科数学奥林匹克，1958 年)

[解]　选取正方体的一组相对顶点 A_1, B_3，由这两点出发，在它们所在面中各引 3 条对角线 A_1A_3, A_1B_2, A_1B_4 和 B_3B_1, B_3A_2, B_3A_4. 将 $\triangle A_1A_2B_2, \triangle A_1A_4A_3, \triangle A_1B_1B_4, \triangle B_3A_2A_3$, $\triangle B_3B_4A_4$ 和 $\triangle B_3B_2B_1$ 贴上白色三角形，其余部分都贴上黑色三角形，则 $A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_4$ 处都有黑白直角各一个，而锐角总是黑白成对出现，故知这一涂色法满足要求.



9·55　两个直径不同的圆盘都被分成 $2n$ 个相等的扇形，给每个扇形都涂上黑白两色之一，使得每个圆盘上都恰好有 n 个白色扇形和 n 个黑色扇形. 将两个圆盘的圆心重合，并用一根轴穿过圆心. 这时，小圆盘的边界(圆周) 的两侧各有一种颜色：内侧是小圆盘上的颜色，外侧是大圆盘上的颜色. 于是整个圆周被分成两部分：一部分圆周的内外异色，另一部分则内外同色. 试证能够适当地转动小圆盘，使得第一部分圆弧的长度之和不小于周长的一半.

(第 22 届莫斯科数学奥林匹克，1959 年)

[证]　若不然，则无论将小圆盘转动到什么位置，第一部分圆弧的长度之和都小于周长之半. 设开始时内外圆盘上的扇形一一对正. 然后每次将小圆盘逆时针转动角度 $\frac{\pi}{n}$，共转动 $2n-1$ 次. 对于 $2n$ 个不同位置，每次第一部分圆弧的长度之和都小于周长之半，共小于周长的 n 倍.

另一方面，小圆盘上的每个扇形，都与大圆上的所有扇形各相遇一次. 因此小圆盘上一个扇形的圆弧，在 24 个不同位置对第一部分圆弧

长度总和的贡献恰为周长之半，从而第一部分圆弧的长度总和应为周长的 n 倍，矛盾.

9·56 在一张矩形的纸上分布有16个黑点，对于每一对点都进行如下操作：用线段连结这两点，并以此线段为对角线作出边与矩形纸的边平行的矩形，然后将此矩形染成红色(注意，黑色可以透过红色). 问所涂出的图形具有多少条边(要求给出由于点的不同分布而得到的一切答案)?

(第33届莫斯科数学奥林匹克，1970年)

[解] 将矩形纸放正并从16个黑点中取出最上，最下，最左，最右的点各1点(若有两点相同则任取1点)，然后以4点为顶点作一个凸四边形 $ABCD$. 分别以 AB，BC，CD，DA 为对角线作红矩形，则4个红矩形恰好并成一个大红矩形，即为过上，下两点作水平线，过左右两点作竖直线所围成的矩形. 显然，其他黑点都在这个大红矩形内部或边上. 因此以其他两点连线为对角线的红矩形都被这个大红矩形所覆盖，故知所涂出的红色图形为矩形，有4条边.

我们指出，当16个黑点的凸包为三角形或为一条斜线段时，上面所选的最上，最下，最左，最右4点中，可以有两点重合，或两对点分别重合，但结论是一样的，即所得的图形有4条边. 当16个黑点在一条水平线或竖直线上时，所得的矩形退化为线段，当然只有1条.

9·57 托尔贝格岛的形状是一个多边形，岛上分布着好几个国家，每一个国家的形状都是一个三角形，并且每两个接壤的国家都具有完整的公共边界(即一个三角形的顶点不落在另一个的边上). 试证可以用三种颜色来为这个岛屿的地图着色，使得每个国家的版图都涂着一种颜色，而任何两个接壤的国家都涂有不同的颜色.

(第32届莫斯科数学奥林匹克，1969年)

[证] 我们对岛上国家数 n，即三角形的个数 n 使用数学归纳法来证明.

当 $n=1,2,3$ 时，结论显然成立. 设当 $n=k$ 时命题成立. 当 $n=k+1$ 时，从 $k+1$ 个三角形中选一个靠边的三角形，即三角形的一边是它们并集多边形的边界. 于是由归纳假设知，余下的 k 个三角形可以用三种颜色着色，使得每两个有公共边的三角形都涂有不同颜色. 考察上面选出的三角形. 因为它至多与其他三角形中的两个相邻，其上至多涂

有两种颜色,故可将所选的三角形涂上第三种颜色就可以了.这就完成了归纳证明.

9·58　有一个正方体,一个同样大小的带盖的正方体盒子和六种颜色.每种颜色只涂正方体的一面及盒子的一面.试证可用适当的方式将正方体放到盒子里,使得正方体的每一面和盒子的与它紧贴的那一面的颜色都不相同.

(第19届全苏数学奥林匹克,1985年)

[证]　设A和B分别是盒子底面和盖子的颜色.正方体的六个面两两相对分成三组,总有一组中的两面的颜色均与A,B不同,设为C和D.其余两种颜色记为E,F.将D面放在盒子底面上并使立方体的E面紧贴盒子的F面.则正方体的六面与盒子紧贴的六面的颜色每组都不同色.

9·59　在一张面积为1的纸板的每一面上都画了分布有10个国家的地图,并在其中一面用10种不同颜色给10个国家的版图各着一种颜色.试证可以用同样的10种颜色给另一面的10个国家各着一种颜色,使得纸板两面涂有相同颜色的区域的面积之和不小于0.1.

(基辅数学奥林匹克,1972年)

[证]　设第1面的10个国家是$A_1,A_2,\cdots,A_{10}$,另一面的10个国家是$B_1,B_2,\cdots,B_{10}$.用$S_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant 10)$来表示两面地图分别所绘的$A_i$与$B_j$国的版图的公共部分的面积.于是有

$$\begin{aligned}1=S&=(S_{11}+\cdots+S_{110})+(S_{21}+\cdots+S_{210})+\cdots+(S_{101}+\cdots+S_{1010})\\&=(S_{11}+S_{22}+\cdots+S_{1010})+(S_{12}+S_{23}+\cdots+S_{910}+S_{101})\\&\quad+\cdots+(S_{1k}+S_{2k+1}+\cdots+S_{10k-1})+\cdots+(S_{110}+S_{21}+\cdots\\&\quad+S_{109}),\end{aligned}$$

上式右端10项中,后面9个括号都是对第1个括号中的S_{ij}保持前一个下标不动而对后一个下标进行轮换而得到的.由于10项之和为1,故其中必有1项的值不小于0.1.设为

$$S_k=S_{1k}+S_{2k+1}+\cdots+S_{10k-1}\geqslant 0.1.$$

显然,只须将$B_k,B_{k+1},\cdots B_{10},B_1,\cdots,B_{k-1}$依次涂上$A_1,A_2,\cdots,A_{10}$的颜色就可以了.

9·60　已知$n(n>2)$条直线把平面分成若干个区域,其中的一些区域被涂上颜色,使得任何两个涂色区域都没有公共边.求证涂色区域

的数目不超过$\frac{1}{3}(n^2+n)$.

(第 19 届全苏数学奥林匹克,1985 年)

[证] 如果给定的 n 条直线两两平行,结论显然成立.设有 k 条边的涂色区域的个数为 m_k,$k=2,3,\cdots,n$.因为每条直线被其他直线分割成至多 n 部分(线段或射线),因此,n 条直线互相相交至多分成n^2个部分.由已知,每个部分至多是一个涂色区域的边,故有

$$2m_2+3m_3+\cdots+nm_n\leqslant n^2. \quad ①$$

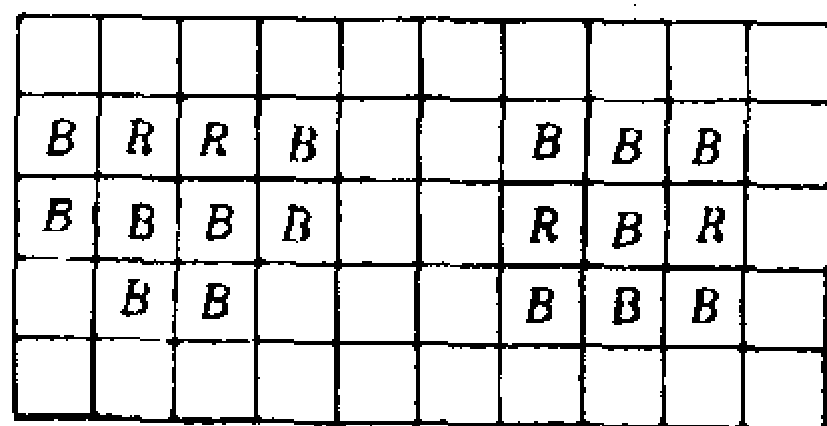
又因每条直线上只有两端的射线部分才可能是有两条边的涂色区域的边,故有 $m_2\leqslant n$.从而由 ① 就有

$$m_2+m_3+\cdots+m_n\leqslant\frac{m_2}{3}+\frac{1}{3}(2m_2+3m_3+\cdots+nm_n)$$
$$\leqslant\frac{1}{3}n(n+1).$$

9·61 已知一张无穷大方格纸的每个方格都涂上了红蓝两色之一,使得在任何 2×3 个方格所构成的矩形中都恰有两个红格.问由 9×11 个方格构成的矩形中包含有多少个红格?

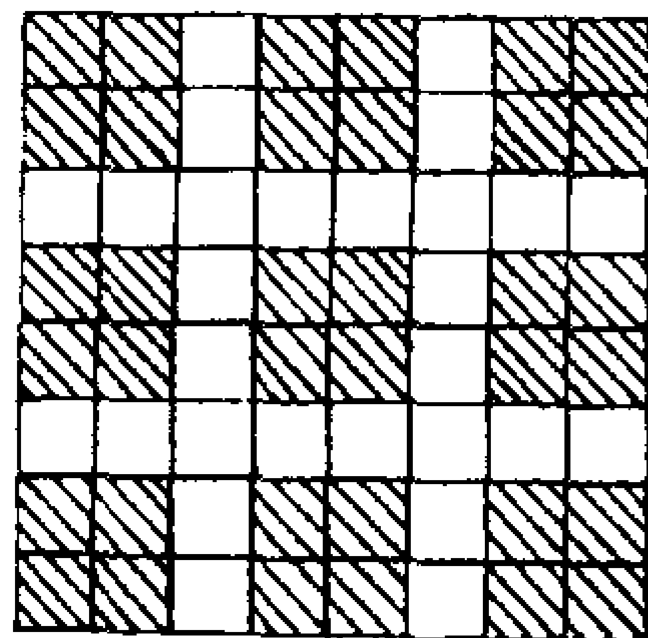
(第 14 届全苏数学奥林匹克,1980 年)

[解] 我们用 R 和 B 来分别表示红格与蓝格.如果在某个 1×3 矩形中有 2 个红格则两个红格或相邻或中间隔着 1 格(见图).无论哪种情形,都必导致某个 2×3 矩形中至多 1 个红格,此与已知矛盾.故知每个 1×3 矩形中恰有 1 个红格,从而 9×11 矩形中有 33 个红格.



9·62 在 8×8 的方格表中染黑了 8 个(内部)互不相交的 2×2 的正方形,求证存在 1 个 2×2 的正方形,它与 8 个黑正方形都不相交.

(第 19 届全俄数学奥林匹克,1993 年)



[证] 任何一个 2×2 的正方形恰与下图所示的 9 个阴影正方形中的 1 个相交.因此,8 个黑正方形至多与 8 个阴影所示的正方形相交.从而至少有 1 个阴影所示的正方形与 8 个黑正方形均

不相交,这个 2×2 的正方形即为所求.

9·63 在 $n\times n$ 的表格中的每一格都涂上 $n-1$ 种颜色的一种,如果在某行(列)中至少有两格是涂同一种颜色的,那么就允许将该行(列)的所有格都涂该种颜色,问能否经过若干步后,表格中的所有格都涂成一种颜色.

(第 17 届全俄数学奥林匹克,1991 年)

[**解**] 由于每行有 n 格,而颜色数是 $n-1$,因此在同一行中至少有两格是涂相同颜色的,由题设,可以把每行的所有格都涂成与这两格相同的颜色.

由于表格有 n 行,而颜色数是 $n-1$,则一定有两行是涂相同颜色的,例如都是蓝色.因此在表中每一列都有两格是蓝色,由题设所有各列都能涂上蓝色.

因此,经过若干步之后,表格中所有格都涂成一种颜色.

9·64 两块完全相同的国际象棋棋盘(8×8 个方格)重合在一起,现将其中一块绕中心旋转 45°.如果每个方格的面积为 1,求这两块棋盘的所有黑格的相交部分的总面积.

(第 15 届全苏数学奥林匹克,1981 年)

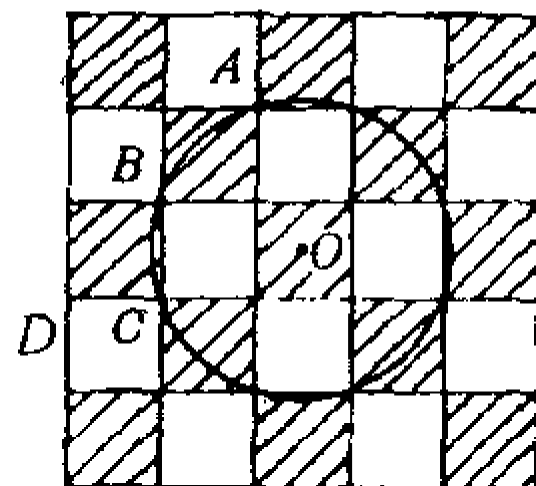
[**解**] 两块棋盘的相交图形是正八边形,其面积为 $128(\sqrt{2}-1)$.这个正八边形可分成 4 部分:(白,白),(白,黑),(黑,白),(黑,黑),分别记它们的面积为 S_1,S_2,S_3,S_4.因为将一块棋盘绕中心旋转 90° 时,恰好两种颜色的方格互换.故当将两块棋盘同时绕中心旋转 90° 时,上述 4 部分的次序恰好颠倒过来,故得 $S_1=S_4,S_2=S_3$.又当将两块棋盘反向旋转 45° 且将上下两块交换位置时,相当于一块不动而另一块旋转 90°,这就可以证明 $S_1=S_3$,从而 4 部分面积都相等,故得 $S_4=32(\sqrt{2}-1)$.

9·65 在通常的国际象棋棋盘(小方格的边都视为黑色)上作圆,使得它整个位于黑色部分中,求其半径的最大值.

(第 13 届莫斯科数学奥林匹克,1950 年)

[**解**] 为使整个圆都位于黑色部分中,圆必须经过它与之相交的每个黑格的两个顶点.而且,具有公共顶点的两个黑格中,两个顶点不能同为对角线的两个端点,例如图中的 A,B,D,因为这三点共线不能作圆.所以,最大的圆就是过 A,B,C 三点的圆 O.

设方格边长为1,则线段 AB,BC 的垂直平分线交于点 O(见图).圆 O 的半径为



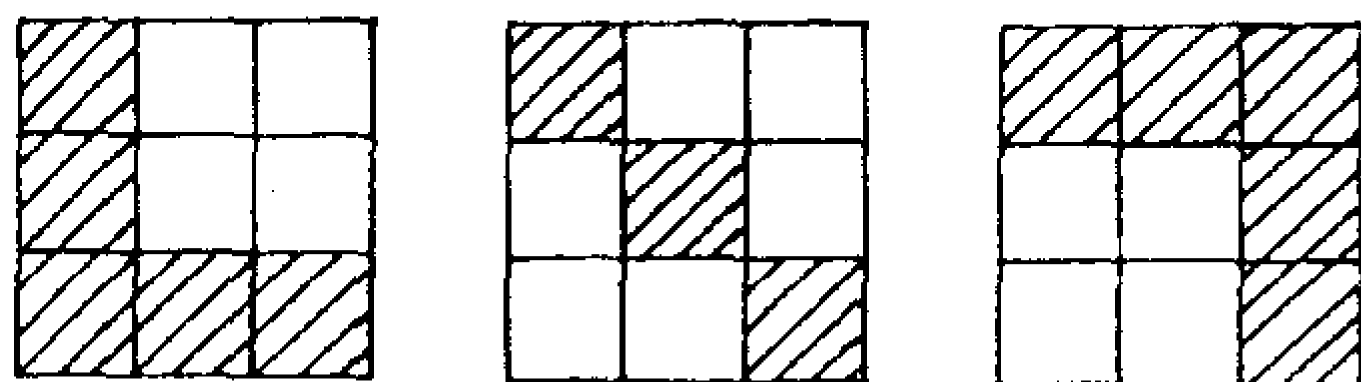
$$r=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{10}.$$

9·66 设 $3\times3\times3$ 的正方体由14块白的和13块黑的单位正方体砌成.我们将沿着一个方向排成一列的3个小方块称为一个小柱,它们可以是横向的,纵向的或竖向的小柱.问能否在每一个这样的小柱中,都恰有奇数个白色正方块或都恰有奇数个黑色正方块?

(第40届莫斯科数学奥林匹克,1977年)

[解] 如果每个小柱中都有奇数个白方块,则9个横向小柱中共有奇数个白方块,此与正方体中共有14个白方块矛盾.故知不能在正方体的每一个小柱中都有奇数个白方块.

正方体的每个小柱中都有奇数个黑方块,可以将黑方块这样来安排:上,中,下三层分别为:



9·67 在一条直线上给定 n 个不同点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,$n\geqslant4$,并将这些点中的每点都涂上4种颜色之一,且4种颜色都用上.试证直线上必有一线段,它含有4种颜色的点,其中两种颜色的点各恰有1个,而另两种颜色的点至少各有1个.

(前捷克斯洛伐克数学奥林匹克,1977年)

[证] 选取使 $\{A_1,A_2,\cdots,A_i\}$ 中4种颜色的点都有的最小下标 i,则点 A_i 的颜色与前 $i-1$ 点的颜色都不相同,否则去掉点 A_i 后仍满足要求.然后选取使 $\{A_j,A_{j+1},\cdots,A_i\}$ 中4种颜色的点都有的最大下标 j,则点 A_j 的颜色与后 $i-j$ 个点的颜色都不相同.这样一来,点 A_{j+1},$A_{j+2},\cdots,A_{i-1}$ 的颜色都是异于 A_j,A_i 的另两种颜色.可见,线段 A_jA_i 即为所求.

9·68 在规格为 10×20 的方格表中填入200个不同的数.在每一

行中用红色标出两个最大的数，在每一列中用蓝色标出两个最大的数．求证表中有不少于3个数，它们既被用红色，又被用蓝色所标出．

（第39届莫斯科数学奥林匹克，1976年）

［证］ 首先，表中的200个数中最大的两个数显然既被红色，又被用蓝色所标出．

(1) 如果这两个数既不同行又不同列，则表中第3大的数也必满足要求．

(2) 如果这两个最大数同行，则不与这两个数同行的所有数中最大的1个既红又蓝．

(3) 如果这两个最大数同列，则不与这两个数同列的所有数中最大的1个既红又蓝．

综上可知总有3个数既红又蓝．

9·69 在7×7的方格表中有19个方格涂成了红色．称一行或一列是红的，如果该行或该列中至少有4个红格．问该方格表中最多有多少个红色的行和列？

（第18届全俄数学奥林匹克，1992年）

［解］ 首先我们指出，红色的行和列不多于8个．若不然，红色的行和列至少9个，则其中必或有5条红行或有5条红列，不妨设为前者．由于每条红行中至少有4个红格，故知表上至少有20个红格，此与已知矛盾．

其次，当我们将表格中的某个4×4的正方形的16个方格全部涂红时，便得到4条红行和4条红列，共8条．这表明有19个红格时，确可使红行与红列的条数达到8．所以，所求的最大值为8．

9·70 将3×7方格纸的每个小方格都涂上黑白两色之一，试证其中必有一个以网格线为边的矩形，它的角上的4个方格同色．

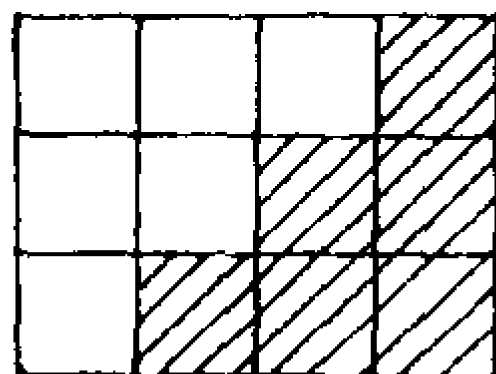
（匈牙利数学奥林匹克，1986年）

［证1］ 先看第1行的7个方格．由抽屉原理知其中必有4个方格同色，不妨设前4个方格都是白色．然后看第2行的前4格．若其中有两个白格，则二者与第1行中同列的两个白格一起便是满足要求的同色4格．否则，其中至少有3个黑格，不妨设前3个方格都是黑色．最后看第3行的前3格．由抽屉原理知其中必有两格同色．显然，不论这两个同色方格是白色还是黑色，都可以找到所要求的矩形．

［证 2］ 考察 7 列中每列的 3 个方格. 由抽屉原理知每列中均有两格同色. 再由抽屉原理又知,7 列中必有 4 列同色的两格具有相同的颜色. 不妨设前 4 列中各有两个白格. 一列中两个白格的位置按行来看只有 3 种不同情形:(1,2),(1,3),(2,3). 故由抽屉原理知 4 列中必有两列属于上述 3 种情形中的同一种. 显然,这两列中的 4 个白格即为所求.

［证 3］ 7 列中若有两列涂色方式相同,则结论显然成立. 以下设 7 列的涂色方式各不相同.

因为每列 3 个方格,每格可以有黑色或白色,所以,不同的涂色方式只有 8 种. 这就是说,纸上 7 列方格中,只有一种涂色方式没有出现. 这样一来,右图中的 4 列至多有 1 列不出现. 换句话说,右图中的前两列与后两列总有两列出现,从而必有所要求的矩形.



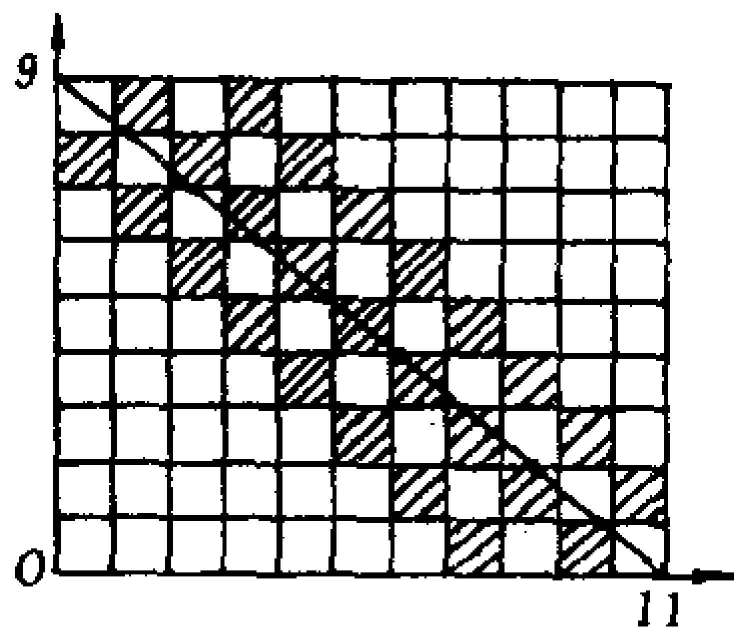
9·71 将一个矩形方格板像国际象棋棋盘那样地涂上黑白色,于是矩形的对角线也被分成黑色与白色的线段. 已知每个方格的边长为 1,如果矩形的大小是(1)100×99;(2)101×99,求白色线段长度之和与黑色线段长度之和的比.

(第 20 届全苏数学奥林匹克,1986 年)

［解］ (1) 因为图形是中心对称的,且对角线上的白色线段与黑色线段恰好分别对称,故知比值为 1.

(2) 直接计算黑白线段的长度过于复杂. 但因是计算比值,故可把它们都投影到一条边上来计算.

为了看清数量之间的变化规律,我们先看 11×9 的矩形. 这时,对角线与 10 条水平网格线的交点的横坐标依次为



$$0, \frac{11}{9}, \frac{22}{9}, \frac{33}{9}, \cdots, \frac{88}{9}, \frac{99}{9} = 11.$$

这 10 个交点在横轴上的投影分别落在 10 条小线段中,中间的小线段中没有投影点. 故知白色线段的投影长度依次为

$$\frac{9}{9}, \frac{7}{9}, \frac{5}{9}, \frac{3}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{3}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{9}{9}.$$

由上述分析论证可知,在 101×99 的矩形中,白色线段的投影长度

依次为

$$\frac{99}{99},\frac{97}{99},\frac{95}{99},\cdots,\frac{3}{99},\frac{1}{99},\frac{1}{99},\frac{3}{99},\cdots,\frac{97}{99},\frac{99}{99}.$$

其和为 $Lw=\frac{5000}{99}$.因而,黑色线段投影长度之和 $L_b=101-Lw=\frac{4999}{99}$.故得所求的比值为$\frac{5000}{4999}$.

9·72 在两个大小都是 1982 × 1983 的方格纸的每个小方格中都涂上红蓝两色之一,使得每行和每列方格中都恰有偶数个蓝格.把这两张方格纸叠放在一起时,发现其中有一个蓝格与红格重叠,求证至少还有 3 个小格,它们都是两个异色方格叠在一起.

(基辅数学奥林匹克,1983 年)

[证] 我们指出,在异色方格相重叠的方格所在的行中,至少还有一个方格是异色格重叠的.若不然,则在这一行的两张方格纸上的蓝格是一对一地叠合在一起的.这样一来,两张纸的这一行中蓝格数必为一奇一偶,此与已知矛盾.

同理,这两个异色方格重叠格所在的列,也至少还各有 1 个方格是异色方格重叠在一起的.从而证明了至少还有 3 个方格,它们都是异色方格叠在一起的.

9·73 将正方形 $ABCD$ 划分成n^2 个相等的小方格,把相对顶点 A 和 C 涂红,B 和 D 涂蓝,其他结点都任意涂上红蓝两色之一,求证恰有 3 个顶点同色的小方格的个数必为偶数.

(中国初中数学联赛,1991 年)

[证 1] 注意,正方形的顶点是 1 个小方格的顶点,正方形边上非顶点的结点是两个小方格的公共顶点,正方形内的每个结点恰为 4 个小方格的公共顶点.由于 4 个角点 2 红 2 蓝,所以,所有小方格的蓝顶点的总数必为偶数.从而,恰有 3 个顶点同色的小方格即蓝顶点数为奇数 (1 或 3) 的小方格的总数必为偶数.

[证 2] 将小方格编号为 $1,2,\cdots,n^2$.将红蓝结点分别标上数 0 和 1,并将每个小方格的 4 个顶点的标数之和填在方格中.显然,当且仅当方格恰有 3 个顶点同色时,方格中的数为奇数.记第 i 个方格中的数为 a_i 并考察 $S=a_1+a_2+\cdots+a_{n^2}$.易见,在和数 S 中,正方形内每个结点所标的数都加了 4 次;对正方形顶点所标的数各加 1 次;对正方形边

上非顶点的结点所标的数各加2次.因为4个顶点2红2蓝,所以S为偶数.从而$\{a_1,a_2,\cdots,a_{n^2}\}$中奇数的个数为偶数,即恰有3个顶点同色的小方格的个数为偶数.

[证3] 如果除正方形的4个顶点之外的结点不全是红色,则任选一个蓝结点改为红色而其余结点全都不变.这时,以此点为顶点的每个小方格或由恰有3个顶点同色变为不是恰有3个顶点同色,或者相反.因为这个结点是2个或4个小方格的公共顶点,故知恰有3个顶点同色的小方格的个数的改变值为偶数.这表明在改变1个顶点颜色的情况下,恰有3个顶点同色的小方格的个数的奇偶性不变.当把所有非正方形顶点的蓝结点全都变为红点时,奇偶性仍不变.但这时恰有3个顶点同色的小方格共有两个,故原来必有偶数个.

9·74 设长方体的长,宽,高分别为正整数m,n,r且$m\leqslant n\leqslant r$.将长方体的表面涂上红色后切成棱长为1的正方体.已知不带红色的正方体的个数与两面带红色的正方体个数之和,减去一面带红色的正方体的个数得1985,求m,n和r的值.

(中国初中数学联赛,1985年)

[解] 将没有红色,有一面红色,有两面红色的正方体的个数分别记为k_0,k_1和k_2.

(1) 设$m=1$.于是$k_0=k_1=0$.当$n\leqslant 2$时,$k_2=0$,此与$k_0-k_1+k_2=1985$矛盾,故知$n>2$.这时有

$$k_2=(n-2)(r-2)=1985.$$

因为$1985=1\times 1985=5\times 397$,而397为素数,所以得到两组解(1,3,1987),(1,7,399).

(2) 设$m=2$.这时$k_0=0$.由长方体的对称性知k_1和k_2都是偶数,其差当然不能是1985,矛盾.故知此时无解.

(3) 设$m\geqslant 3$.这时有

$k_0=(m-2)(n-2)(r-2)$,

$k_1=2(m-2)(n-2)+2(n-2)(r-2)+2(r-2)(m-2)$,

$k_2=4(m-2)+4(n-2)+4(r-2)$.

按已知$k_0-k_1+k_2=1985$,故有

$(m-2)(n-2)(r-2)+4[(m-2)+(n-2)+(r-2)]-2[(m$

$-2)(n-2)+(n-2)(r-2)+(r-2)(m-2)]=1985.$

化简后得到

$$(m-4)(n-4)(r-4)=1977.$$

这是一个关于m,n,r的不定方程,我们要求的是使$r\geqslant n\geqslant m\geqslant 3$的正整数解组.因为$1977=1\times1\times1977=1\times3\times659$而659为素数,故有

$$\begin{cases}m-4=-1,\\n-4=-1,\\r-4=1977,\end{cases}\quad\begin{cases}m-4=1,\\n-4=1,\\r-4=1977,\end{cases}\quad\begin{cases}m-4=1,\\n-4=3,\\r-4=659.\end{cases}$$

由此得到3组解(3,3,1981),(5,5,1981)和(5,7,663).总结起来,共有5组解(1,3,1987),(1,7,399),(3,3,1981),(5,5,1981)和(5,7,663).

9·75　由同样大小的小正方体砌成一个长方体,它的有公共顶点的三个面涂上颜色,结果恰好半数的小正方体至少有一面涂上了颜色.问涂有颜色的小正方体有多少个?

(第19届全苏数学奥林匹克,1985年)

[解]　设小正方体的边长为1,长方体的大小是$m\times n\times k(k\leqslant n\leqslant m)$.显然,未涂色的小正方体的个数是$(m-1)(n-1)(k-1)$.由已知有

$$mnk=2(m-1)(n-1)(k-1).\qquad①$$

由①可得$2<k<5$.这样一来,余下的工作是当$k=3,4$时,分别求m,n的不定方程①的整数解.

当$k=3$时,①式变为

$$mn-4n-4m+4=0.\qquad②$$

不难看出,$4<n<8$.于是得到②的三组解为(5,16),(6,10),(7,8).

当$k=4$时,①式变为

$$mn-3m-3n+3=0,\qquad③$$

由③易见,$4\leqslant n<6$.于是得到③的两组解(4,9)和(5,6).

由上面所得②和③的共5组解得知,涂了色的小正方体的个数的可能值有5个:60,72,84,90,120.

9·76　在一个由面积为1的方格构成的足够大的国际象棋棋盘上引出一条不自交的闭折线,折线的每条边都位于网格线上.已知在折线

内部有 k 个黑色方格，求折线所围成的最大面积.

（第 36 届莫斯科数学奥林匹克，1973 年）

［解］ 在国际象棋棋盘上，每个黑格与 4 个白格相邻，故 k 个黑格共有 $4k$ 个白色邻格. 另一方面，因为折线是不自交的，而且每边都在网格线上，故我们可以用一条每边都平行于网格线的折线将 k 个黑格的中心都连起来. 显然，这条折线交替穿过黑格与白格. 于是 k 个黑格之间至少有 $k-1$ 个白格，每个白格恰与 k 个黑格中的两格相邻. 可见在上面的邻格计数过程中，至少有 $k-1$ 个白格各计数两次. 从而知折线所围的面积不超过 $4k+1$.

显然，当所围的 k 个黑格在一行中时，所围的最大面积恰为 $4k+1$.

9·77 自然数 k 取什么值时，可以用棱长为 1 的白色与黑色小正方块组成一个棱长为 k 的正方体，使对任何小方块恰好有两个相邻（指二者有公共面）的小方块与它同色？

（第 9 届全苏数学奥林匹克，1975 年）

［解］ 设有一个棱长为 k 的正方体满足要求，即每个小正方块的所有相邻方格中都恰有两个与它同色. 对于任何两个同色的相邻正方块，我们将二者的中心用线段连结. 这样一来，我们得到一个有 k^3 个顶点的图，且图中每个顶点都是 2 度的，即每点都引出两条线. 从而这个图可以分解若干个互不相交的圈，即封闭折线. 因为这样的封闭折线中，每两条相邻线段都成直角，且每条线段都平行于正方体的棱，故它的周长必为偶数，从而它通过的小正方体的中心也有偶数个. 因而整个大正方体由偶数个小立方体砌成，故知 k 为偶数. 换句话说，凡奇数 k 都不满足题中要求.

对于偶数 k，我们用 $2\times2\times1$ 的黑色和白色的长方体相间的砌成 $k\times k\times k$ 的立方体即可.

综上可知，所有偶数 k 都满足题中要求.

9·78 在无限宽广的方格纸上的每一格，任意涂上给定的 n 种颜色（$n\geqslant2$）的一种. 求证总可以找到四个同色的方格，以其中心为某矩形的顶点，且矩形的边与网格线平行.

（第 12 届全俄数学奥林匹克，1986 年）

［证］ 在方格纸上划出宽度为 $n+1$ 个格的水平带状区域，即区

域上的每一纵列有 $n+1$ 个格．由于给定的颜色为 n 种，所以每列上出现的颜色不超过 n 种，由抽屉原理，每列中同色的方格不少于 2 个．

由于带状区域的列数是无限的，而每列格子上涂色的区域是有限的(至多有 n^{n+1} 种)，再次运用抽屉原理，总存在两列的涂色方式是相同的，因此可在这两列中找到四个(每列两个)同色的格子，其中心为顶点的四边形是一个矩形，且它的边与网格线平行．

9·79 在一张无穷大的方格纸上，共有 n 个格子被染成了黑色．试证可以从这张格纸上剪下有限个正方形，使它们满足下列两个条件：

(1) 所有黑格都在所剪下的诸正方形中；

(2) 在所剪下的任一正方形中，黑格子的面积之和不小于这个正方形面积的 $\frac{1}{5}$ 且不大于这个正方形面积的 $\frac{4}{5}$．

(第 5 届全苏数学奥林匹克，1971 年)

[证] 首先，从方格纸上剪下一个 $2^n\times 2^n$ 的大正方形 K_0，使得它包含着全部 n 个黑格且使白格的总数至少是黑格数目的 4 倍．可见，黑格的面积之和不大于 K_0 面积的 $\frac{1}{5}$．然后把 K_0 均分成 4 个正方形 K_1，K_1 中含有 $2^{n-1}\times 2^{n-1}$ 个方格．而且在每个 K_1 中所含黑格的面积之和不超过 K_1 面积的 $\frac{4}{5}$．如果这 4 个 K_1 中有的满足条件(2)，则把它选出来；如果某 K_1 中没有黑格，则把它去掉．而对这两种情形之外的 K_1，再重复进行上述过程，即把它们中的每个都均分为 4，…，直到没有正方形可分或直到得到 2×2 的正方形为止．这时把没有黑格的去掉，而把有 1，2，3 个黑格小正方形选出来就可以了．

9·80 能否把一个矩形方格表的每个方格都涂上白色与黑色之一，使得白格与黑格的数量相等，但在每一行和每一列中都有一种颜色的方格多于 $\frac{3}{4}$？

(第 15 届全苏数学奥林匹克，1981 年)

[解] 如果在 $m\times n$ 方格表的某一行(或列)中白格占大多数，则称这一行(列)是白的；在相反的情况下则称为是黑的．设 p,q 分别是白行和黑行的数目，r,s 分别是白列与黑列的数目且使 $p+q=m$，$r+s=n$．不妨设 $p\leqslant q$．

设在每行每列中其他颜色的方格都不到$\frac{1}{4}$. 我们把这种方格称为"反色格". 由假设知,无论是按行计算还是按列计算,反色格的总数都小于$\frac{1}{4}mn$. 另一方面,p个白行与s个黑列之交的ps个方格以及q个黑行与r个白列之交的qr个方格中的每个方格都或者是所在行的反色格或者是所在列的反色格,二者恰居其一,故得$ps+qr<\frac{1}{2}mn$. 因$p\leqslant q$,故有$r\leqslant s$. 这样一来,白格总数小于

$$pr+\frac{1}{4}qn+\frac{1}{4}sm=\frac{1}{2}mn-\frac{1}{2}p\left(\frac{n}{2}-r\right)-\frac{1}{2}r\left(\frac{m}{2}-p\right)\leqslant\frac{1}{2}mn,$$

此与已知矛盾. 故知所要求的涂色法是不能实现的.

9·81 在一张规格为$n\times n$的方格板上码放黑白两色的正方块,并且每个正方块恰好占一个方格的位置. 首先任意码放了第1层正方块,随后想起了限制条件:每个黑方块应与偶数个白方块相邻,每个白方块应与奇数个黑方块相邻. 在码放第2层时就应使第1层的所有方块满足这种条件. 如果对于第2层的所有方块,条件已被满足,则不必再码放第3层. 否则,就要再码放第3层方块,以使第2层的所有方块满足条件,这样继续下去. 试问是否存在一种码放第1层方块的方法,使得这个过程永无完结?

(第28届莫斯科数学奥林匹克,1965年)

[解] 假设存在一种初始放置状态,可以使得这个过程永无完结.

首先,我们注意如下两个事实:

(1) 一层中黑白方块的不同放置状态只有有限多种;

(2) 在码放过程中,如果有连续两层和另外的连续两层相同,则必会导致周期性.

由(1)可知,连续两层黑白方块的不同放置状态也只有有限多种. 因而在无限码放过程中,必存在两个自然数i和j,不妨设$i<j$,使得第i,$i+1$层方块分别与第j,$j+1$层相同. 由此及(2)便知,码放过程是以$j-i$为周期的. 利用周期性往前倒推,便知,第$i-1$层与第$j-1$层黑白方块相同,第$i-2$层与第$j-2$层相同,…,第1层与第$j-i+1$层

相同.记 $k=j-i$,于是第 $k+1$,$k+2$ 层分别与 1,2 两层相同.由于第 1 层中的黑白块仅与第 2 层相邻已经满足题中要求,故知第 $k+1$ 层也是只与第 $k+2$ 层相邻便满足要求,从而第 k 层必与第 $k+1$ 层相同,否则将破坏奇偶性.再由对称性又知,第 $k-1$ 层必与第 $k+2$ 层相同.这样一来,第 k,$k-1$ 层分别与第 1,2 两层相同.从而第 k 层仅与 $k-1$ 层相邻就满足题中要求.按题中规定,码放过程到此为止,矛盾.故知无论怎样选择黑白块的初始状态,码放过程都不会永无完结.

9·82　在方格纸上有 17 个涂色的单位方格,试证可以用一些矩形来覆盖它们,使得这些矩形的周长之和不超过 100,而且不同矩形中的任何两个点之间的距离不小于 $\sqrt{2}$.

（第 50 届莫斯科数学奥林匹克,1987 年）

[证]　我们来证明本题的加强命题:在方格纸上有 n 个涂色的矩形(都以网格线为边),它们的周长之和为 l,必可用一些矩形来覆盖它们,使得这些矩形的周长之和不超过 $l+2(n-1)$,而且不同矩形中的任何两点之间的距离不小于 $\sqrt{2}$.

对于两个以网格线为边的矩形 R_1 和 R_2,如果存在点 $P\in R_1$,$Q\in R_2$(包括边界),使得 $PQ<\sqrt{2}$,则称矩形 R_1 和 R_2 是关联的.易见,对于两个以网格线为边的关联矩形,总可将点 P 和 Q 取在各自所在矩形的边或顶点上,使得 $PQ=0$ 或 1.显然,对于两个涂色的关联矩形,按题中要求,只能用 1 个矩形来覆盖.下面就用归纳法来证明加强命题.

当 $n=1$ 时,命题显然成立.设命题于 $n\leqslant k$ 时成立.当 $n=k+1$ 时,如果所给的 $k+1$ 个矩形互不关联,则用这些矩形本身来覆盖便满足要求,结论当然成立.以下设两个涂色矩形 R_1 和 R_2 是关联的.设包含 R_1 和 R_2 的最小矩形为 R,则因可取 $P\in R_1$,$Q\in R_2$,使 $PQ=0$ 或 1,故知 R 的周长不超过 R_1 与 R_2 的周长之和加 2.如果矩形 R 与其余 $k-1$ 个涂色矩形中的某个有公共点,则又可取包含二者的最小矩形,且新矩形的周长不超过原来两个矩形的周长之和.继续下去,直到所得矩形与其他涂色矩形互不相交为止,当然可能只余下一个矩形.应用归纳假设便得所欲证.

9·83　能否将 1990×1990 的方格表中的每个小方格都涂上黑白两色之一,使得关于表格中心对称的两个方格涂有不同的颜色而在表

的每一横行和每一纵列方格中，涂有黑白两色的方格都各占一半？

（第 24 届全苏数学奥林匹克，1990 年）

[解] 假设我们已经将方格表涂好颜色且满足题中的要求．将黑格写上 $+1$，白格写上 -1 并用平行于网格线的十字线将表格分成规格为 995×995 的 4 个正方形，分别记之为 A_1,A_2,A_3 和 A_4（见右图）．这四个正方形表格中的每个都有奇数个方格，故其中所写的整数之和不为零．因为关于表格中心对称的方格中涂有不同的颜色，所以正方形 A_1 和 A_4 中数的总和为零，正方形 A_2 和 A_3 中数的总和也为零．这样一来，A_1 与 A_4，A_2 与 A_3 中各有一个所填数之和为正．由于关于行和列的条件是对称的，故不妨设 A_1 和 A_2 中的数之和都为正．

A_1	A_2	995
A_3	A_4	995
995	995	

另一方面，每行中黑格与白格数目相等，所填数之和当然为零，矛盾．所以，满足要求的涂色法不存在．

9·84 一个 $n\times n$ 棋盘的每一个小方格都被涂上 m 种颜色中的一种，且任意两行都不能涂成完全一样的，然后对某列上的所有小方格重新涂上白色．证明：能够选择这样一列，使得这样重新涂上白色之后，任意两行仍然没有完全一样的．

（加拿大数学奥林匹克训练题，1991 年）

[证] 若不然，把任何一列涂成白色之后都会有两行变成相同．

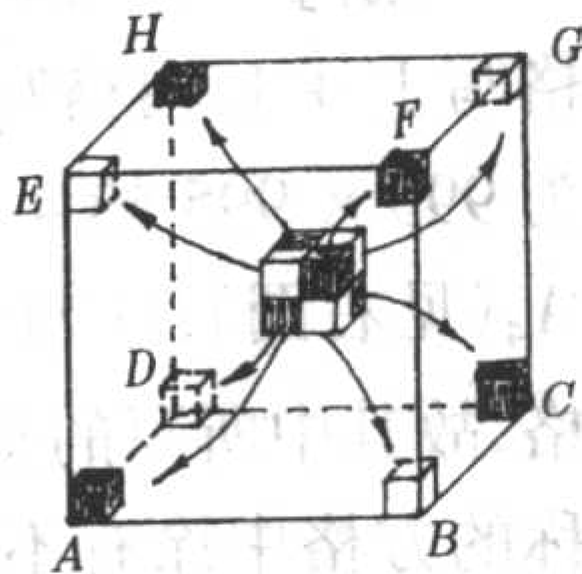
用 n 个点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 表示第 $1,2,\cdots,n$ 行．把第 i 列涂成白色（$i=1,2,\cdots,n$）后，相同的两行所对应的点之间连一条线，并标上数字 i（如果有两个以上的行相同，只取其中两行）．这样就得到了一个 n 个顶点，n 条边的图．这个图一定有一个圈，不妨设 $v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k}v_{i_1}$，且设 v_{i_1} 与 v_{i_2} 的第 j 列上的小方格的颜色不同，而由于对每一列涂上白色之后，只连了一条边，故 $v_{i_2},v_{i_3},\cdots,v_{i_k},v_{i_1}$ 在第 j 列上的小方格颜色相同，由此得出矛盾．从而命题得证．

9·85 棱长为10的正方体是由500个黑色单位正方体和500个白色单位正方体砌成的，两色正方体相间地摆放，即每两个相贴的面均为异色．现从中取出 100 个单位正方体，使得 300 个平行于正方体的棱的 $1\times1\times10$ 的小柱体的每一个之中，都恰好缺掉1个单位正方体．求证所

取出的黑色单位正方体的个数是 4 的倍数.

（第 54 届莫斯科数学奥林匹克，1991 年）

[证]　设想将已知的大正方体划分为 $2\times2\times2$ 的 125 个小正方块，每块中恰有黑白各 4 个单位正方体. 将每块中的 8 个单位正方体按它们在正方块中的不同位置分别划入用大正方体的相应顶点命名的集合之中（参看上图）. 这样一来，我们就把 1000 个立方块均分成 8 组：M_A，M_B，M_C，M_D，M_E，M_F，M_G，M_H，其中 M_A，M_C，M_F 和 M_H 全由黑色单位正方体组成而另 4 个集合全由白色单位正方体所组成.



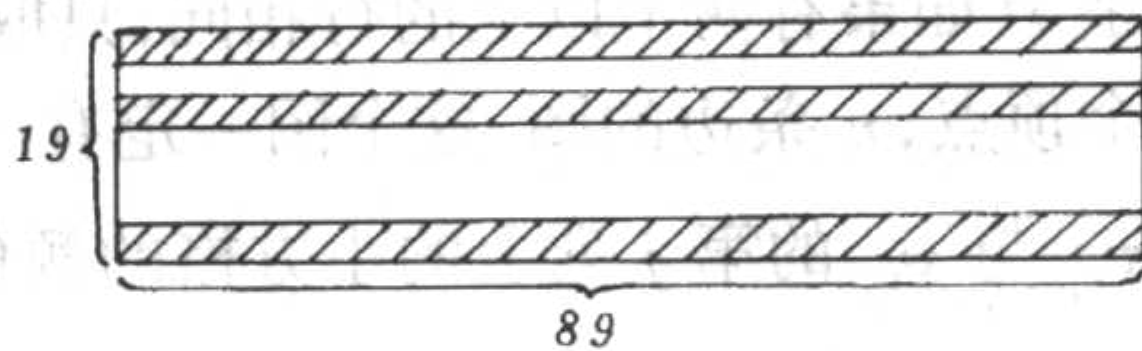
下面我们证明一个加强命题：在取出的 100 个单位正方体中，分别属于 M_A，M_C，M_F，M_H 的正方体的个数全都相等（由此立知，选取的黑色单位正方体的个数是 4 的倍数）.

为证此，我们注意，$M_A\cup M_B$ 是由 25 条平行于棱 AB 的 $1\times1\times10$ 的柱体中的所有单位立方体组成的，而每条这样的柱中恰取出 1 个单位立方体，故知从 $M_A\cup M_B$ 中恰取出 25 个立方体. 同理，从 $M_B\cup M_C$ 中也恰好取出 25 个单位立方体. 故知从 M_A 和 M_C 中所取出的单位立方体的个数相等. 同理可证从 M_F，M_H 中所取的单位立方体的个数也都与它们相等.

9·86　在 19×89 的矩形方格表中，最多可以涂黑多少个小方格，才能使得在任何 2×2 的正方形中都至多有两个黑格？

（原苏联教委推荐试题，1989 年）

[解]　将矩形中的 19 行方格的所有奇数行方格全部涂黑如右图所示，则显然满足题中要求且共有 890 个黑格. 由此可知，所求的黑格个数的最大值不小于 890.

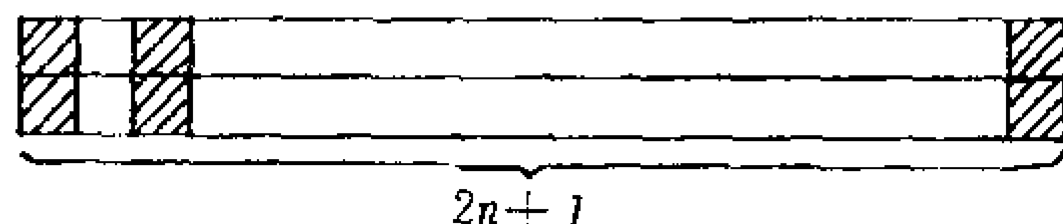


(a)

下面我们来证明，在满足题中要求的条件下，表格中的黑格个数不能多于 890. 为此，我们首先指出，用数学归纳法容易证明，在 $2\times(2n+1)$ 的矩形方格表中，在满足题中要求的前提下着色，表格中至多有 $2(n+1)$ 个黑格，并且只有按图(b) 中所示的方式着色，才能使表格中恰有 $2(n+1)$ 个黑

格.

再用数学归纳法来证明,在$(2m+1)\times(2n+1)$的矩形表格中$(n\geqslant m)$,如果涂黑某些方格后满足题中要求,则黑格数不大于$(m+1)(2n+1)$.



(b)

当$m=0$时,命题显然成立.设命题于$m=k$时成立.当$m=k+1$时,在$(2k+3)\times(2n+1)$矩形表格上方分出一条$2\times(2n+1)$的带子.如果带子中的黑格数不超过$2(n+1)-1=2n+1$,则由归纳假设知在下方的$(2k+1)\times(2n+1)$的表格中黑格数不超过$(k+1)(2n+1)$,从而整个$(2k+3)\times(2n+1)$表格中的黑格数不多于$(k+2)(2n+1)$,即命题成立.如果带子中黑格数不少于$2(n+1)$,则由上段讨论知黑格数恰为$2(n+1)$且只能像图(b)所示那样来涂色.这时,我们可将$(2k+3)\times(2n+1)$矩形表格的第1行方格剪下,其中恰有$(n+1)$个黑格.余下的$(2k+2)\times(2n+1)$矩形表格划分成$k+1$条$2\times(2n+1)$的带形表格,于是每个带形中至多有$2(n+1)$个黑格.从而整个表格中的黑格数不超过$(n+1)+(2k+2)(n+1)=(2k+3)(n+1)\leqslant(k+2)(2n+1)$,即命题于$m=k+1$时成立.

综上可知,在满足题中要求的涂色法中,表格中最多有890个黑格.

9·87 已知8个单位正方体的48个表面正方形中有任意的n个涂上黑色,其余的面涂上白色.用这8个单位正方体总可以砌成一个大正方体,使其表面上的24个单位正方形中,黑白两色的正方形各占一半.求n的所有可能值.

(中国天津市代表队测验题,1992年)

[解] 首先,我们将8个单位正方体涂色如下:前5个正方体的每个之上都有2个白面和4个黑面且两个白面相对;第6个正方体则涂成2黑4白且两个黑面相对;后两个正方体的所有面都涂上白色.这时,8个正方体的48个表面正方形中有22个黑的和26个白的.由于在上述涂色方式中,黑面与黑面相对,白面与白面相对,所以无论怎样砌成大正方体,其表面上总是恰有11个黑正方形和13个白正方形,即无法满足题中要求.可见,$n\geqslant23$.同理可证,$n\leqslant25$.

下面我们来证明,当$23\leqslant n\leqslant25$时,总可以砌出满足要求的大正方体.

先将 8 个单位正方体以某种方式拼成大正方体.显然,只须讨论它不满足题中要求的情形.不妨设表面上黑色正方形的个数 $m \leqslant 11$.

然后注意,将任一单位正方体绕通过它中心且垂直于一组相对面的直线旋转 90° 时,总有一个原在大正方体表面的单位正方形转入内部,而与这面相对的单位正方体则由大正方体内部转到表面上来.所以,在这一操作之下,m 的改变值为 1,0,-1 之一.又因总可对一个单位正方体进行 3 次绕不同轴的转动而使它的 3 个位于表面的正方形与内部的 3 个正方形互换,所以总可用 24 次转动而将大正方体的 24 个表面正方形与内部的互换.这时,大正方体表面上的黑色单位正方形的个数为 $m' = n - m \geqslant 12$.若 $m' = 12$,问题就解决了.以下设 $m' > 12$.记第 i 次转动后,表面上的黑色正方形的个数为 m_i,于是有 $|m_{i+1} - m_i| \leqslant 1$.因为 $m_0 = m \leqslant 11$,$m_{24} = m' > 12$,故知必有 m_{i_0},$1 \leqslant i_0 \leqslant 23$,使 $m_{i_0} = 12$.可见,经 i_0 次转动后所得到的正方体便满足要求.

综上可知,n 的所有可能值为 23,24 和 25.

9·88　在 10×10 的国际象棋棋盘上任取 46 个互不相邻的小方格,求证其中至少有 30 个小方格同色.

(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年)

[证 1]　首先证明下面的引理:

引理　在 5×5 的正方形棋盘内任意去掉 4 个方格后,余下部分中至少有 15 个方格是彼此相连的.

引理的证明　从 5×5 的棋盘中去掉 4 个方格,其上至少有 1 行和 1 列的各 5 个方格均未被去掉.若还有 1 行或 1 列方格是完整的,则结论显然成立.否则,另外的 4 行和 4 列都各被去掉 1 个方格.这表明去掉的 4 个方格既不同行也不同列.这样一来,没有方格被去掉的那一行所在的连通部分中,至少有 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ 个方格.

回到原题的证明.将棋盘分成 25 个 2×2 的正方形,每个 2×2 的正方形视为一个大方格.将选定的 46 个方格标上星号,于是每个大方格中至多有 2 个星号.因而至少有 21 个大方格中各有两个星号,且这两个星号所在的方格同色.由引理知,这 21 个大方格中至少有 15 个彼此相邻.再由已知条件又知,相邻两个大方格中的 4 个星号所在的 4 个方格同色.从而这 15 个大方格中的共 30 个星号所在的方格都同色.

9·89　一张 100×100 的方格纸上涂了 100 种颜色,其中每个方格或者

涂上了其中的一种颜色,或者没有涂色.如果每一行和每一列格子中所涂的颜色全都不同,则涂色称为合格的.如果已按合格的方式为(1)100^2-1,(2)100^2-2,(3)100 个方格涂了色,能否继续为其余方格全都涂上颜色,使得整张方格纸上的涂色是合格的?

(第 36 届莫斯科数学奥林匹克,1973 年)

[解] (1) 这时方格纸上只余 1 个空格尚未涂色.因为已涂的颜色是合格的,故这个空格的颜色是惟一确定的,当然可以涂上这种颜色而使整张表的涂色是合格的.

(2) 这时方格纸上有两个未涂色的方格.虽然比(1)仅仅多了 1 个空格,但情况发生了根本性的变化,即对某些合格的涂色情形,无法继续为两个空格着色,使之仍然是合格的.例如我们用如下的 4×4 的小方格表去拼成 100×100 的大方格表.我们把上面第 1 个方格表称为异常的,后面的方格表称为正常的,而且是依次用连续 4 个自然数轮换排成的.共有 25 种正常的 4×4 数表.显然,用它们按轮换的方式可拼成 100×100 的方格表,且当用颜色去代替号数时,涂色是合格的.当将左上角的由{1,2,3,4}组成的正常数表换成异常数表时,相应的涂色仍是合格的.后 98 个数表中各有 100 个,若想使两个空格填上数后所得的数表仍是合格的,只能分别填入 1 和 2.但显然,两格中只能分别填上 1 和 2.但因第 1 列有 1,第 1 行有 2,故左上角的空格无论填入 1 还是填入 2 都是不行的.

	3	4	2
3	1	2	4
4	2	1	3
1	4	3	

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

5	6	7	8
6	7	8	5
7	8	5	6
8	5	6	7

(3) 这时也不一定能继续涂色,使整张方格纸上的涂色是合格的.例如见如下涂色表所对应的数表:从第 1 行第 2 个方格到最后,依次填数 1,2,…,99,而将第 1 列第 2 方格填入 100.则这个数表是合格的.但左上角的方格中无论填哪一个数都不能使数表继续是合格的.

9·90 将一个 $2\times n$ 个方格的带形的某些格中染上颜色,使得任何 2×2 的方格中都没有完全染上颜色,以 P_n 来记所有满足条件的不同染色法的数目.求证 P_{1989} 能被 3 整除,并求能整除 P_{1989} 的 3 的最高次幂.

(捷克和斯洛伐克数学奥林匹克,1989 年)

[证] 以 a_n 表示 $2\times n$ 带形的满足题中条件且最后两格都染色的所有不同染色法的数目.

以 b_n 表示最后两格没有全染色的染色法的数目,则有

$$P_n = a_n + b_n. \quad ①$$

由题中条件,任何 2×2 的四个方格都不能全部染色,则有递推关系式

$$a_n = b_{n-1}. \quad ②$$

又 $$b_n = a_{n-1} + a_{n-1} + a_{n-1} + b_{n-1} + b_{n-1} + b_{n-1},$$

即 $$b_n = 3(a_{n-1} + b_{n-1}). \quad ③$$

由 ②,③ 得

$$a_n = b_{n-1} = 3(a_{n-2} + b_{n-2}),$$

所以 $$a_n = 3(a_{n-2} + a_{n-1}) \quad ④$$

$$b_n = 3(b_{n-2} + b_{n-1}). \quad ⑤$$

由 ①,④,⑤ 得

$$P_n = 3(a_{n-1} + a_{n-2}) + 3(b_{n-1} + b_{n-2})$$

$$P_n = 3(P_{n-1} + P_{n-2}). \quad ⑥$$

容易看出,$P_1 = 4$, $P_2 = 15$.

于是由 ⑥ 可递推地计算出 P_n 的值.

当 $n \geqslant 3$ 时,P_n 总是 3 的倍数.

特别地有 $$3 \mid P_{1989}.$$

因为 $P_1 = 4, P_2 = 15, P_3 = 3\times 19,$

$P_4 = 3(3\times 19 + 15) = 3^2(19+5).$

于是 $3 \nmid P_1, 3 \mid P_2, 3 \mid P_3$ 且 $9 \nmid P_3$, $9 \mid P_4$.

因此可以用数学归纳法证明:

$$\left.\begin{array}{l} 3^{k-1} \mid P_{2k-1}, \\ 3^k \nmid P_{2k-1}, \\ 3^k \mid P_{2k}. \qquad k = 1,2,\cdots \end{array}\right\} \quad ⑦$$

且

因为 $k = 2$ 时,⑦ 式成立.

假设 $k = m$ 时,⑦ 式成立.

则当 $k = m+1$ 时,由 ⑥

$$P_{2m+1} = 3(P_{2m} + P_{2m-1}),$$

$$P_{2m+2} = 3(P_{2m+1} + P_{2m}).$$

由归纳假设知,⑦式中第一式对 $k = m+1$ 成立,利用这一结果及归纳假设又可证明 ⑦ 式中第二式对 $k = m+1$ 成立.

于是 ⑦ 式对所有 k 成立.

当 $k = 1989$ 时,

$$1989 = 2 \times 994 + 1,$$

所以,能整除 P_{1989} 的 3 的最高次幂为 3^{994}.

9·91　在一张无穷大的方格纸上将其中 n 个方格涂成黑色. 在时刻 $t = 1,2,\cdots$,按以下规则把所有方格重新涂色:使每个方格 k 都涂上前一时刻三个方格(即格子 k 本身,右邻方格与上邻方格)中多数方格所涂有的颜色(如果这三个方格中至少有两个是黑(白)色,则 k 就涂成黑(白)色). 试证

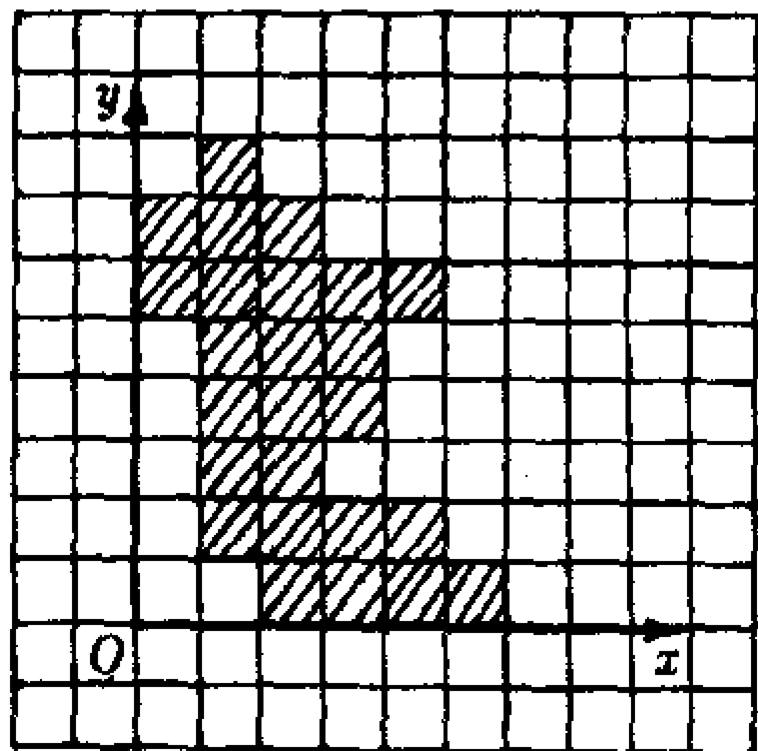
(1) 经过有限时间后,在纸上不再有黑格子;

(2) 黑格子的消失不晚于时刻 $t = n$.

(第 7 届全苏数学奥林匹克,1973 年)

[证]　(1) 我们总可以在方格纸上作一个以网格纸为边的 $m \times m$ 的正方形,使得 n 个黑格都在正方形内. 然后将 $m \times m$ 正方形中的白格都涂成黑色. 注意,现在每次按规则改涂颜色所得到的黑格比原来同次改涂颜色所得到的黑格绝不会少. 而这个 $m \times m$ 的黑正方形只须经过 $2m - 1$ 次改涂后就全变成白色了.

(2) 用 M_t 表示有 n 个黑格的方格纸经 t 次改涂后所有黑格的集合. 我们用数学归纳法来证明. 当 $n = 1$ 时,结论显然成立. 设结论于 $n < k$ 时成立. 当方格纸上有 k 个黑格时,我们在方格纸上作一个以网格线为坐标轴的坐标系,使所有黑格都在第一象限内且至少有一格黑格的下底在 x 轴上,至少有一个黑格的左边在 y 轴上(见右图). 注意,在改涂颜色的过程中,左边的黑格对右邻方格的颜色没有影响;下边的方格对上邻方格的颜色也没有影响. 因此,当我们仅考虑除去最低一行中黑格之外的黑格时,黑格的数目不超过 $k - 1$. 于是由归纳假设知经过 $k - 1$ 次改涂后,除最低一行之外,其他地方没有黑格. 同理,关于列进行同样的论证可知,经过 $k - 1$ 次改涂后,除了最左一列之外,其他地方也没有黑格. 将二者结合起来便知,经过 $k - 1$ 次改涂之后,方格纸上至多还有一个黑格,就是第一象限左下角的方格,亦即 M_{n-1} 至多有一个格子. 从而 M_n 必为空集,这就完成了归纳证明.



9·92　为 $2m \times n$ 的矩形方格纸的每个方格都涂上蓝绿两种颜色之一,且使两种颜色的格子数相等,同时使左下角的方格是蓝色,右上角的方格是绿色.把所有蓝格子的中心彼此用线段连结起来,同时把所有绿格子的中心彼此用线段连结起来.求证可在每条线段上都标上箭头,使所得的诸向量之和等于零向量.

(第 26 届独联体数学奥林匹克,1992 年)

[证]　令 $S = mn$,将问题分为 S 为奇数和 S 为偶数两种情形来分别证明.

(1) 设 S 为奇数.这时我们证明,可以标上箭头,使得所有蓝向量之和为零,所有绿向量之和亦为零(两个蓝格中心之间所连的向量称为蓝向量,绿向量定义类同).

将 S 个蓝格中心任意编号为 $A_1, A_2, \cdots, A_S$,并按下述方式标上箭头:若 k 为奇数,则 $A_j \to A_{j+k}$;若 k 为偶数,则 $A_{j+k} \to A_j$, $j = 1,2,\cdots,S$.这里约定 $A_{S+i} = A_i$.我们记

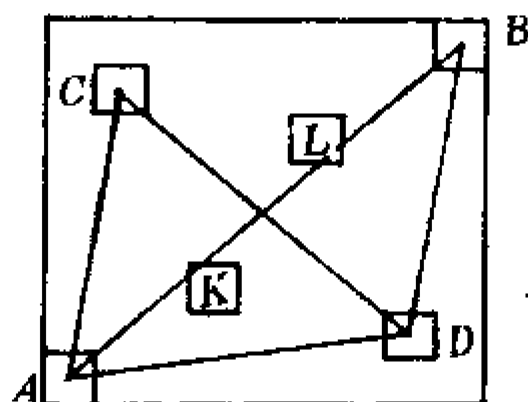
$$\vec{a}_{jk} = \begin{cases} \overrightarrow{A_jA_{j+k}}, & \text{当 } k \text{ 为奇数,} \\ \overrightarrow{A_{j+k}A_j} & \text{当 } k \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

对任意 k, $1 \leqslant k < \dfrac{S}{2}$,考察 S 个向量的集合

$$M_k = \{\vec{a}_{jk} \mid j = 1,2,\cdots,S\}.$$

对于每个中心点 A_j,恰有 M_k 中 1 个向量指向它,也恰有 1 个向量离开它.因而当 $(k,S) = h$ 时,这 S 个向量恰组成 h 个互相没有公共顶点的首尾相接的向量圈.因为每个向量圈中所有向量之和为零向量,所以 M_k 中所有向量之和为零向量.从而所有蓝向量之和为零向量.同理,所有绿向量之和也是零向量.

(2) 设 S 为偶数.把矩形左下角和右上角方格的中心分别记为 A 和 B,把其余蓝格与绿格的中心分别记为 $A_1, A_2, \cdots, A_{S-1}$ 和 $B_1, B_2, \cdots, B_{S-1}$.像 (1) 中一样地为连结 $A_1, A_2, \cdots, A_{S-1}$ 及 $B_1, B_2, \cdots, B_{S-1}$ 的线段标上箭头,则所有这些向量之和为零向量.这样一来,只须再证可为所有形如 AA_j, BB_j $(j = 1,2,\cdots,S-1)$ 的线段标上箭头,使相应的向量之和为零向量.



任取一对关于矩形中心对称的方格,设其中心为 C 和 D.若两个方格异色,例如点 C 是蓝格中心,D 是绿

格中心，则因四边形 $ADBC$ 为平行四边形，故有 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{0}$. 若两个方格同色，不妨设都是蓝色，则有 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}$. 由于蓝格数与绿格数相等，故对称蓝格的对数与对称绿格的对数相等. 而对于每对对称的绿格，设其中心为 K,L，又有 $\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{BA}$. 从而有 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{0}$. 这就证明了

$$\sum_{j=1}^{S-1}(\overrightarrow{AA_j}+\overrightarrow{BB_j})=\overrightarrow{0}.$$

9·93　工厂制造的玩具呈圆环状，上面串有 3 颗红珠和 7 颗蓝珠. 问能制造出多少种不同的这种玩具?(如果两个玩具上的红蓝珠子在圆环上的排列顺序相同或将一个翻过来后和另一个的排列顺序相同，都视为同一种)

（第 26 届莫斯科数学奥林匹克，1963 年）

［解］　3 颗红珠将 7 个蓝珠分成 3 组. 当然，可能有一组或两组的蓝珠数为零. 故知所求的不同种数恰等于将 7 分为 3 个非负整数之和的所有不同分法数. 对 7 的分法只有下列 8 种：$7+0+0$，$6+1+0$，$5+2+0$，$5+1+1$，$4+3+0$，$4+2+1$，$3+3+1$，$3+2+2$. 故知工厂共能制造出 8 种不同玩具.

9·94　已知一组球，每个球染成红色或蓝色，每色至少有一个球，每个球重 1 磅或 2 磅，每种重量至少有一个球，证明有两个球具有不同的重量和不同的颜色.

（第 2 届加拿大数学奥林匹克，1970 年）

［证］　不失一般性，可设第 1 个球是红色的，第 2 个球是蓝色的.

如果这两个球具有不同的重量，则本题得证.

如果这两个球具有相同的重量，由题设，则还有第三个球与这两个球重量不同，不论第三个球是红色还是蓝色，总能和第一个或第二个球有不同颜色和不同重量，本题也得证.

9·95　已知在国际象棋棋盘上放着 8 枚棋子，使在每条水平线与竖直线上各有一枚棋子. 求证在棋盘上的所有黑格中共有偶数枚棋子.

（第 23 届全苏数学奥林匹克，1989 年）

［证］　将行自上而下编号，列按自左至右编号为 1，2，…，8. 这样

一来，每个方格就有两个编号，将二者加起来，因为左上角的方格为白格，故这时白格的两号码之和为偶数；黑格对应于奇数. 既然所放的 8 枚棋子每行每列都恰有一枚，故它们所对应的数之和为偶数，从而对应于奇数的黑格中的棋子必有偶数枚.

9·96　某工厂生产由 6 种不同颜色的纱织成的双色布. 在这个工厂生产的所有双色布中，每种颜色至少与 3 种其他颜色搭配. 求证可以选出 3 种双色布，它们含有全部 6 种颜色.

（匈牙利数学奥林匹克，1957 年）

[证 1]　将 6 种颜色用 1,2,…,6 编号并设工厂生产的双色布之一为 56 色. 如果工厂还生产{12,34}或{13,24}两种双色布，则结论成立. 否则，不妨设工厂不生产 12 和 13 两种布. 因为每种颜色要与其他 3 种颜色搭配生产双色布，故工厂必生产 14,15,16 这 3 种双色布.

若工厂生产双色布 23，则{14,23,56}满足要求. 若工厂不生产 23，则因也不生产 12，故工厂必生产双色布 25；又因工厂不生产 13，故工厂必生产 36. 于是{14,25,36}满足要求.

[证 2]　用 6 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 来分别代表 6 种不同颜色，且当两种不同颜色搭配生产一种双色布时，就在相应两点间连一条线段. 于是得到一个有 6 个顶点的图，其中每个顶点的度数都不小于 3，即每点至少引出 3 条边. 这样，问题就化为证明图中存在 3 条线段，它们两两之间没有公共端点.

设 A_1A_2 是图中的一条边. 因为每点至少引出 3 条边，故在以 A_3，A_4,A_5,A_6 为顶点的子图中，每点至少引出一条边. 不妨设 A_3A_4 为其中一条边.

考察顶点 A_5 和 A_6. 每点度数都不小于 3. 若 A_5A_6 存在，则 $\{A_1A_2,A_3A_4,A_5A_6\}$ 即为所求. 若 A_5A_6 不存在，则 A_5 和 A_6 每点都至少向前 4 点引出 3 条线. 从而每点必与前两条线段之一构成一个三角形.

(1) 若两个三角形有一条公共边，不妨设为 $\triangle A_5A_1A_2$ 和 $\triangle A_6A_1A_2$. 这时，$\{A_5A_1,A_6A_2,A_3A_4\}$ 便满足要求.

(2) 若两个三角形没有公共边，不妨设为 $\triangle A_5A_1A_2$ 和 $\triangle A_6A_3A_4$. 这时可取两个三角形之间的一条连线，设为 A_5A_4. 于是，

$\{A_5A_4, A_1A_2, A_3A_6\}$ 便满足要求.

9·97　910瓶红、蓝墨水，排成130行，每行7瓶，证明不论怎样排列，红、蓝墨水瓶的颜色次序必定出现下述两种情况之一种：

(1) 至少有三行完全相同.

(2) 至少有两组(四行)，每组的两行完全相同.

(中国北京市数学竞赛，1990年)

[证]　910瓶红、蓝墨水，排成130行，每行7瓶，每个位置有红、蓝墨水两种可能. 所以有

$$2^7 = 128$$

种不同的排列方式.

对于130行，取其中的129行就可以知道必有两行A行和B行，墨水瓶的排列颜色次序相同.

这样剩下128行.

(1) 若这128行每两行颜色，次序都彼此不同，则必有一行C，与A，B两行的颜色同次序.

于是出现了三行完全相同.

(2) 若这128行有两行颜色次序相同，设为C，D，则有两组，每组两行，A和B一组，C和D一组颜色次序完全相同.

9·98　一副围棋共有180个白子和181个黑子，把这些围棋子全部排在一条直线上，证明必定可以找到两个黑子，使得它们中间(不包括其自身)恰有178个或181个围棋子.

(中国浙江省数学夏令营，1990年)

[证]　先将排在一条直线上的361个棋子编号，依次为$x_1, x_2, \cdots, x_{361}$，其中$x_i$表示黑子或白子在第$i$个位置.

考察下面两组数对：

第一组：$(x_1, x_{180}), (x_2, x_{181}), (x_3, x_{182}), \cdots, (x_{181}, x_{360}), (x_{182}, x_{361})$，共182对.

这一组每一对棋子中恰有178个棋子.

第二组：$(x_{183}, x_1), (x_{184}, x_2), \cdots, (x_{360}, x_{178}), (x_{361}, x_{179})$，共179对.

这一组每一对棋子中恰有181个棋子.

由于$x_1, x_2, \cdots, x_{361}$中表示黑子的有181个，所以第一组和第二组

中共有 $181\times2=362$ 个黑子,而两组共有 $182+179=361$ 对,由抽屉原理,在第一组或第二组中必有一对全是黑子.

若第一组中有同黑的一对棋子,则这两个黑子中间恰有 178 个棋子.

若第二组中有同黑的一对棋子,则这两个黑子中间恰有 181 个棋子.

9·99 在 8×8 的国际象棋棋盘的 64 个方格中标定 16 个方格,使得每一行和每一列都恰好标定两个方格.求证可以把 8 枚黑子和 8 枚白子放在标定的方格中,每格放一枚,使得每一行和每一列都恰有一枚黑子和一枚白子.

(匈牙利数学奥林匹克,1933 年)

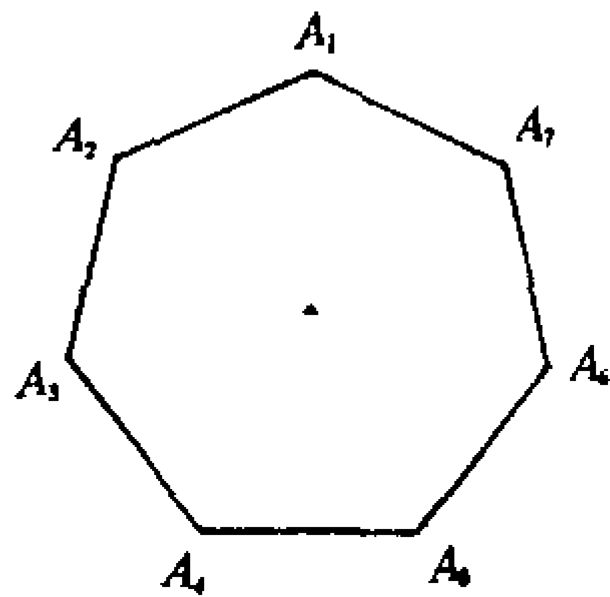
[证] 用方格的中心点来代表方格并在同行或同列的每两个标定方格的中心点(以下称为标定点)之间连一条线段,于是每个标定点都恰连出两条线段.这样,我们得到了一个有 16 个顶点且每点度数都为 2 的偶图.因此,这个图可以分解为一个或几个互不相交(没有公共顶点)的圈.因为每个圈的边都是水平与竖直交替出现的,故每个圈都有偶数条边,从而也有偶数个顶点.

在每个圈的顶点交替放上黑子与白子,则黑子数与白子数相等,都是 8 枚.而且同一行或同一列的两个标定点是同一圈上的相邻顶点,当然是放有一枚黑子与一枚白子,这说明上述放法满足题中要求.

9·100 在正七边形的每个顶点都放置一枚黑色或白色的棋子,求证存在 3 个顶点是一个等腰三角形的 3 个顶点且 3 点所放的棋子同色.

(基辅数学奥林匹克,1972 年)

[证 1] 7 枚棋子分为两种不同颜色,由抽屉原理知,其中必有 4 枚棋子同色,而这 4 枚棋子的位置必有两个是相邻的.不妨设 A_1 和 A_2 都是白子.



因为 $\triangle A_1A_2A_3$,$\triangle A_1A_2A_5$ 和 $\triangle A_1A_2A_7$ 都是等腰三角形,故若 A_3,A_5,A_7 这 3 个顶点中有 1 个顶点放的是白子,则它与 A_1,A_2 这 3 个顶

点即为所求.否则,$A_3,A_5,A_7$3 点放的都是黑子而 $\triangle A_3A_5A_7$ 为等腰三角形,故 $A_3,A_5,A_7$3 点即为所求.

[**证 2**]　像证 1 中一样地可证 7 枚棋子中必有 4 枚同色,不妨设为白色.

将正七边形的所有对角线都连出来并将共 21 条线段分成如下 7 组:

$A_1:\{A_2A_7,A_3A_6,A_4A_5\}$,　$A_2:\{A_1A_3,A_4A_7,A_5A_6\}$,

$A_3:\{A_2A_4,A_1A_5,A_6A_7\}$,　$A_4:\{A_3A_5,A_2A_6,A_1A_7\}$;

$A_5:\{A_4A_6,A_3A_7,A_1A_2\}$,　$A_6:\{A_5A_7,A_1A_4,A_2A_3\}$,

$A_7:\{A_1A_6,A_2A_5,A_3A_4\}$.

易见,每组中的 3 条线段互相平行.每组中的 3 条线段共 6 个顶点,没有用到的 1 个顶点我们写在组前作为组的代号.显然,代号点与组中任意 1 条线段的两个端点恰为等腰三角形的 3 个顶点.

因为 4 个白点(即白子所在的点)间共可连 6 条线段,且其中至多有一组两条线段平行,故这 6 条线段至少属于 5 个不同的组.而 4 个白点又作为 4 个不同组的代号,所以必有一个以白点为代号的组中,有 1 条线段的两个端点均为白点.显然,这 3 个顶点即为所求.

[**证 3**]　由抽屉原理知,7 枚棋子中必有 4 枚同色,设它们所在的顶点为 A,B,C,D.

将正七边形的所有对角线都连出来.易见,图形中的 21 条线段只有 3 种不同长度.但 4 个点 A,B,C,D 之间连有 6 条线段,故由抽屉原理知至少有两条线段长度相等.进一步地,或者有 3 条线段长度相等,或者6条线段可分成3组,每组中的两条线段相等.若为后者,则长度最短的一组的两条线段是正七边形的两条边.如果这两边没有公共端点,则二者恰为一个等腰梯形的两腰.这时,等腰梯形的两条对角线相等,但上底和下底不相等(作为正七边形顶点的 4 个顶点不能构成矩形),矛盾.故这两条等长的边必有公共端点,从而构成一个等腰三角形.若为前者,则 3 条等长线段中必有两条有公共端点,问题同样地解决.

9·101　桌上放有 n 个纸板正方形和 n 个塑料正方形,其中任何两个纸板正方形都没有公共点,包括没有公共的边界点,在塑料正方形之间也是如此.已知这些纸板正方形的顶点集合与这些塑料正方形的顶

点集合重合,问是否一定有某个纸板正方形与塑料正方形重合?

(第40届莫斯科数学奥林匹克,1977年)

[解] 设点 A 是这 $2n$ 个正方形的凸包的一个顶点.按已知,它既是一个纸板正方形 S 的顶点,又是一个塑料正方形 T 的顶点.由于 S 与 T 的并集在点 A 的张角小于 $180°$,所以,若 S 与 T 不重合,则必有 S 的一个顶点落在 T 的内部.又因这个顶点也是某个塑料正方形的顶点,从而导致两个塑料正方形有公共点,矛盾.可见,S 与 T 必重合.

9·102 将一张 100×100 的方格纸的上沿与下沿相粘连,左沿与右沿相粘连,做成"轮环状"(形如轮胎).试问能否在其上选取50个方格,每个方格各放1枚棋子,而棋子有红、蓝、绿三色,使得每枚红子至少可出击两枚蓝子(位于具有公共边的两格中的异色棋子可以互相攻击),每枚蓝子至少可出击两枚绿子,每枚绿子至少可出击两枚红子?

(圣彼得堡数学奥林匹克,1990年)

[解] 如果可以放置50枚棋子满足题中要求,设其中红,蓝,绿棋子的个数分别为 a,b,c,红蓝,蓝绿,绿红相邻棋子对的个数分别为 x,y,z.由于每枚红子至少可出击两枚蓝子,故有 $2a\leqslant x$.又因每枚蓝子都至少可出击两枚绿子,故至多与两枚红子相邻,所以有 $x\leqslant 2b$.同理有

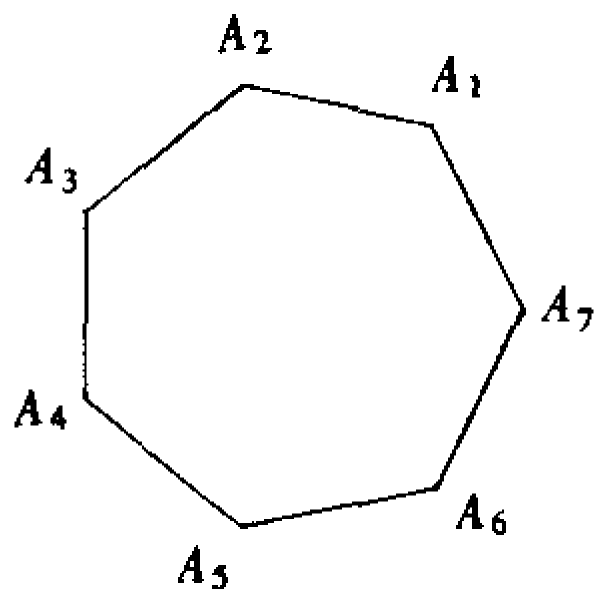
$$2a\leqslant x\leqslant 2b\leqslant y\leqslant 2c\leqslant z\leqslant 2a.$$

由此可得 $a=b=c$.但 $a+b+c=50$ 不是3的倍数,矛盾.这表明题中的要求是不能实现的.

9·103 将平面上每点都涂上红、蓝两色之一,求证存在一个3个顶点同色的三角形,它的两个内角分别为 $\frac{2\pi}{7}$ 和 $\frac{4\pi}{7}$,且这两个角的夹边长为1996.

(中国北京市高中数学竞赛,1996年)

[证1] 在二染色平面上作一个边长为1996的正七边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$,由抽屉原理知,7个顶点中必有4个顶点同色.同色4点中必有两点是相邻顶点,不妨设 A_1 和 A_2 都是红点.



(1)若 A_4 和 A_6 中有1个是红点,不妨设 A_4 为红点,则$\triangle A_1A_2A_4$ 即为所求.

(2)若 A_4 和 A_6 都是蓝点，A_3 和 A_7 中有 1 个蓝点，不妨设 A_3 为蓝点，于是 $\triangle A_3A_4A_6$ 即为所求．若 A_3 和 A_7 都是红点，则 $\triangle A_1A_3A_7$ 即为所求．

综上可知，满足题中要求的三角形总是存在．

[证 2] 像证 1 中一样地可以证明正七边形的 7 个顶点中至少有 4 个顶点同色，且同色 4 点中至少有两点是相邻顶点．不妨设 7 个顶点中至少有 4 个红点且 A_1 和 A_2 都是红点．

(1)若有 4 个相邻红点，不妨设为 A_1, A_2, A_3 和 A_4，于是 $\triangle A_1A_2A_3$ 即为所求．

(2)设有 3 个相邻红点而且没有 4 个相邻红点，不妨设 A_1, A_2, A_3 都是红点，但 A_4, A_7 是蓝点．这时 A_5 和 A_7 中至少有 1 个红点，不妨设 A_5 为红点，于是 $\triangle A_2A_3A_5$ 即为所求．

(3)设没有 3 个相邻红点，于是 A_3, A_7 都是蓝点，这时，A_4, A_5 和 A_7 中至少有 2 个红点，从而 A_4 和 A_6 中至少有 1 个红点，不妨设 A_4 为红点，于是 $\triangle A_1A_2A_4$ 即为所求．

综上可知，满足题中要求的三角形总是存在．

9·104 将 $(n-1)\times(n-1)$ 的方格表的 n^2 个结点中的每个都涂上红、蓝两色之一，求使表中每个方格都恰有两个红色顶点的不同涂色方案的种数．这里说两个涂色方案不同，指的是在这两个方案中，至少有 1 个顶点两者异色．

（第 37 届国际数学奥林匹克预选题，1996 年）

[解] 将第 1 行的 n 个结点中的每点都涂上红、蓝两色之一，共有 2^n 种不同的涂色方案，以下分两种情形来分别计数．

(1)第 1 行中任何两个相邻结点都异色，即红蓝相间地涂色．有两种不同的涂色方案．这时不难发现，第 2 行结点的涂色也必须红蓝相间的涂色，又是共有两种不同的涂色方案，依此类推，每行结点都是只有红蓝相间的两种涂色方案．由乘法原理知整个方格表共有 2^n 种不同的涂色方案．

(2)第 1 行结点中有两个相邻结点同色，共有 2^n-2 种不同的涂色方案．在给第 2 行结点涂色时，容易看出，第 1 行同色的两个相邻结点下方第 2 行的两个相邻结点也必须同色，且与第 1 行的两个结点异色．由此立即推知，第 2 行的每个结点都与第 1 行的同列结点异色，这样一

来，第2行结点只有惟一的方案可以满足要求.同理可知，后面每行结点的涂色方案都是惟一确定的.所以，这种情形共有 2^n-2 种不同的涂色方案.

由加法原理知，满足题中要求的不同涂色方案共有 $2^{n+1}-2$ 种.

9·105　能否将 n 棱柱的每条棱都涂上3种颜色之一，使得每个面上都有3种不同颜色的棱且每个顶点处都汇聚着颜色各异的棱？试就 $n=1995$ 和 $n=1996$ 的情形给出解答.

（第58届莫斯科数学奥林匹克，1995年）

［**解**］　(1)当 $n=1995$ 时可以做到.首先，将上底的1995条边按1,2,3的次序循环涂色.然后将下底的诸边涂成与上底对边相同的颜色.这时，每条侧棱的两个端点处的已涂色的两条棱的颜色分别相同.显然，只要为之涂上另一种颜色就可以了.

(2)当 $n=1996$ 时，因1996不是3的倍数，所以不行.

若不然，设存在满足题中要求的涂色方式.由于下底中必然3种颜色俱全，所以必有连续3条边分别涂有3种不同颜色.不妨设1,2,3号边分别涂有1,2,3号颜色.因为每个顶点引出的3条棱互相异色，所以由1,2号边之间的顶点引出的侧棱必为3号色，由2,3号边之间的顶点引出的侧棱为1号色.从而与下底2号边相对的上底2号边必涂有2号色.由此可知，上底1,3两号边分别涂有1,3两号颜色.又因每个侧面3色俱全，而3号边全为3号色，2与3号边之间的棱为1号色，从而3,4号边之间的棱为2号色.这又导致上、下底的4号边都是1号色.这样一来，上下底的边只能是1,2,3色循环出现.由于1996不能被3整除，此不可能.

9·106　在坐标平面上，具有整数坐标的点构成单位边长的方格的顶点，并将这些方格相间地涂上黑白两种颜色，就像国际象棋棋盘那样.

对于任意一对正整数 m 和 n，考察一个直角三角形，它的顶点都是整点，两条直角边的长度分别为 m 和 n 且两条直角边都在这些正方形的边上，即都在网格线上.

设 S_1 表示这个三角形区域中所有黑色部分的总面积，S_2 表示白色部分的总面积.令 $f(m,n)=|S_1-S_2|$.

(1)当 m 和 n 同为正偶数或同为正奇数时，计算 $f(m,n)$ 的值；

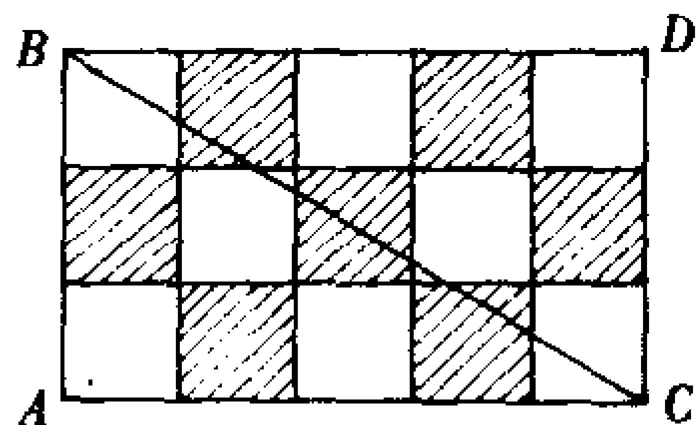
(2)求证对所有正整数 m 和 n,都有

$$f(m,n)\leqslant\frac{1}{2}\max\{m,n\};$$

(3)求证不存在常数 c,使对所有正整数 m 和 n,都有 $f(m,n)<c$.

(第 38 届国际数学奥林匹克,1997 年)

[**解**] (1)设$\triangle ABC$ 为一个直角三角形,它的 3 个顶点都是整点且两条直角边都在网格线上,$\angle A=90^\circ$,$AB=m$,$AC=n$.考察图(a)中的矩形 $ACDB$.



(a)

对于任一多边形 P,将区域 P 中所有黑色部分的总面积和白色部分的总面积分别记为 $S_1(P)$和 $S_2(P)$.

注意,当 m 和 n 同时为偶数或者同时为奇数时,矩形 $ACDB$ 的着色关于矩形的中心为中心对称.因此有

$$S_1(\triangle ABC)=S_1(\triangle BCD),S_2(\triangle ABC)=S_2(\triangle BCD).$$

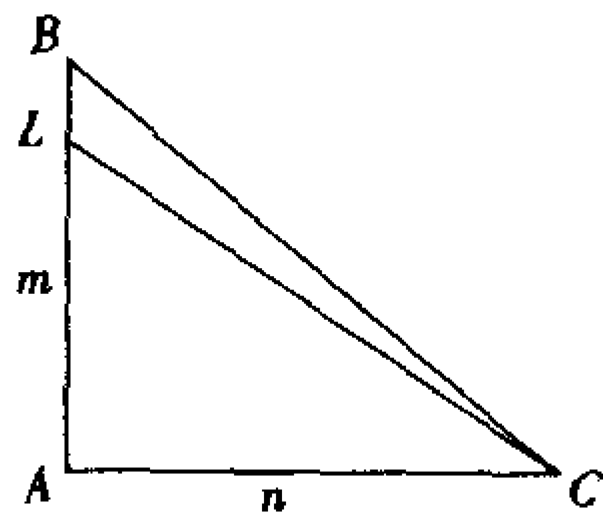
由此可得

$$\begin{aligned}f(m,n)&=|S_1(\triangle ABC)-S_2(\triangle ABC)|\\&=\frac{1}{2}|S_1(ACDB)-S_2(ACDB)|.\end{aligned}$$

因为当 m 和 n 同为偶数时,矩形 $ACDB$ 中的黑格与白格个数相等,而当 m 和 n 同为奇数时,白格比黑格多 1 个,所以有

$$f(m,n)=\begin{cases}0,当\ m,n\ 均为偶数,\\ \frac{1}{2},当\ m,n\ 均为奇数.\end{cases}$$

(2)如果 m 和 n 同奇偶性,则由(1)知(2)中结论成立,故只须再讨论 m 和 n 具有不同奇偶性的情形.不妨设 m 为奇数而 n 为偶数,如图(b)所示.在边 AB 上取点 L,使 $AL=m-1$.



(b)

因为 $m-1$ 和 n 都是偶数,故由(1)中结果有 $f(m-1,n)=0$,即有 $S_1(\triangle ACL)=S_2(\triangle ACL)$.从而有

$$f(m,n)=|S_1(\triangle ABC)-S_2(\triangle ABC)|$$

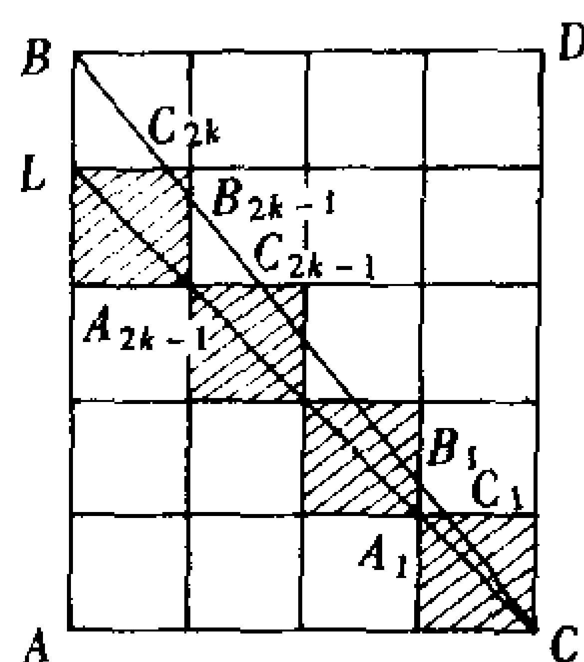
$$= |S_1(\triangle LBC) - S_2(\triangle LBC)| \leqslant S_{\triangle LBC}$$

$$= \frac{n}{2} \leqslant \frac{1}{2}\max\{m, n\}.$$

(3)为证$\{f(m,n)\}$的无界性,我们来计算$f(2k+1,2k)$的值.如同在(2)中一样,在边AB上取点L,使$AL=2k$.因为$f(2k,2k)=0$,故有$S_1(\triangle ACL)=S_2(\triangle ACL)$,所以

$$f(2k+1,2k) = |S_1(\triangle LCB) - S_2(\triangle LCB)|.$$

注意,$S\triangle LCB = k$.不妨设线段LC全在黑格中(见图(c)).于是$\triangle LCB$的白色部分由$2k$个三角形



(c)

$$\triangle A_iB_iC_i, i=1,2\cdots,2k-1, \triangle LBC_{2k}$$

组成,其中每个三角形都与$\triangle ABC$相似.它们的总面积

$$S_2(\triangle LBC) = \frac{1}{2}\frac{2k}{2k+1}\left\{\left(\frac{2k}{2k}\right)^2 + \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{2k}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{4k(2k+1)}\{1^2+2^2+\cdots+(2k)^2\} = \frac{4k+1}{12}.$$

由此可得,$\triangle LBC$的黑色部分的总面积

$$S_1(\triangle LBC) = k - \frac{1}{12}(4k+1) = \frac{1}{12}(8k-1).$$

最后得到

$$f(2k+1,2k) = \frac{1}{6}(2k-1).$$

这就表明$\{f(m,n) | m,n\in N\}$无界,即(3)成立.

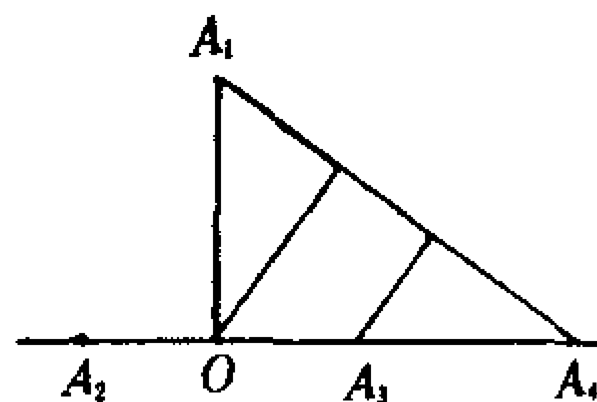
第十章　点　集

10·1　在平面上给定 n 个点，已知连结其中任何两点的直线上都含有另一个给定点，求证这 n 个点共线.

（前民主德国数学奥林匹克，1972 年）

［证］　设 $M=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，$S=\{1,2,\cdots,n\}$. 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 不共线，则对任意 $i,j\in S$，必有 $k\in S$，使 A_i,A_j,A_k 不共线. 记 A_i 到直线 A_jA_k 的距离为 $d_{ijk}>0$，并令

$D=\{d_{ijk}\mid i,j,k\in S$ 且 A_i,A_j,A_k3 点不共线$\}$，则 D 是一个有限的正实数集. 不妨设 d_{123} 为 D 中的最小元. 按已知，必有 $A_4\in M$，使 A_4 在直线 A_2A_3 上. 过点 A_1 作 $A_1O\perp A_2A_3$ 于 O. 不妨设在直线 A_2A_3 上，点 A_4 与 A_3 在点 O 同侧（如图）. 于是有 $d_{341}<d_{123}$，矛盾.



10·2　平面上给定 $n(n\geqslant 3)$ 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，其中任何 3 点都不共线. 用 α 表示所有角 $\angle A_iA_jA_k$ 的最小值，其中 A_i,A_j,A_k 是 3 个不同的给定点. 对每个 n，求 α 的最大值，并确定当这些点怎样分布时取到最大值.

（前南斯拉夫数学奥林匹克，1974 年）

［解］　考察 n 个给定点为一个正 n 边形的 n 个顶点的情形. 这时，正 n 边形的每个内角为$\frac{n-2}{n}180°$. 连结对角线 A_1A_j，$j=3,4,\cdots,n-1$，则 $\angle A_2A_1A_n$ 被分成 $n-2$ 个相等的角. 于是每个角都是$\frac{180°}{n}$，而且

易见，$\alpha=\frac{180^\circ}{n}$. 所以，所求的 α 的最大值不小于$\frac{180^\circ}{n}$.

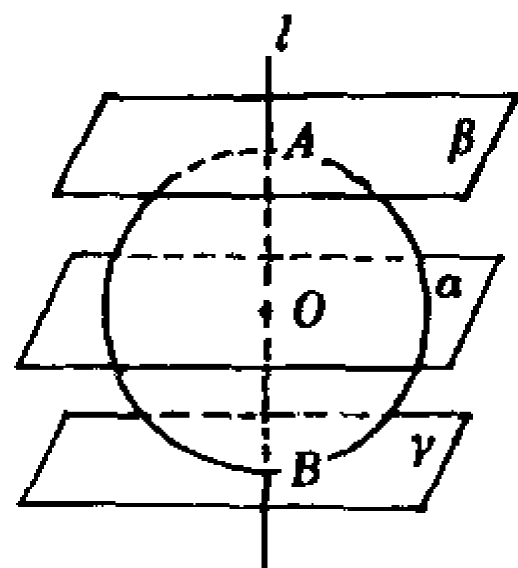
另一方面，设 n 个给定点的凸包是 m 边形，其中 $3\leqslant m\leqslant n$. 于是这个凸 m 边形的内角和为 $(m-2)180^\circ$，其中的最小内角不超过 $\frac{m-2}{m}180^\circ$. 设这个最小内角为 $\angle A_1A_2A_3$. 于是其他 $n-3$ 个给定点都在角内. 作射线 A_2A_j，$j=4,5,\cdots,n$，则这些射线将 $\angle A_1A_2A_3$ 分成 $n-2$ 个角，其中的最小角不超过 $\frac{(m-2)}{m(n-2)}180^\circ$. 因为 $m\leqslant n$，故有 $\frac{m-2}{m}\leqslant\frac{n-2}{n}$，从而有 $\frac{m-2}{m(n-2)}180^\circ\leqslant\frac{180^\circ}{n}$，即有 $\alpha\leqslant\frac{180^\circ}{n}$.

综上可知，所求的 α 的最大值为$\frac{180^\circ}{n}$，且在 n 个点为正 n 边形的 n 个顶点时取得.

10·3　在球外部的空间中分布着 9 个点. 证明在球面上能找到一个点，使从此点看到 9 点中的点数不多于 3.

（第 12 届全俄数学奥林匹克，1986 年）

[证]　首先注意到一个明显的事实：



设 α 为过球心 O 的任意一个平面，此时平面 α 把空间分为两个半空间，而 l 为过球心 O 且与平面 α 垂直的直线，l 交球于 A，B 两点，又分别过 A，B 作平面 α 的平行平面 β 和 γ，且它们分别与球面切于 A，B.

显然，点 A 看不到平面 α 上的点和点 B 所在半空间的所有点.

下面证明问题本身.

设已知点为 $A_1,A_2,\cdots,A_9$，过 O 及 A_1，A_2 作平面 α，则 $A_3,A_4,\cdots,A_9$ 这七个点分别落在平面 α 上或被平面 α 所分成的两个半空间内. 显然必有一个半空间有不多于三个点，设点 A 在这个半空间内，则 A 就是所求的点.

10·4　在平面上有 100 个点：$O,A_1,A_2,\cdots,A_{99}$，其中任何 3 点都不共线. 如果存在一条直线，它经过点 O 且在该直线的一侧有 48 个点，问是否存在一条直线，它也经过点 O，但在此直线的一侧有 (1) 49 个点？(2) 47 个点？

（基辅数学奥林匹克，1978 年）

[解] (1) 在直线一侧有 49 个点的直线是存在的. 设过点 O 且在一侧有 48 个点的直线为 l. 若在 l 上除点 O 外还有 1 点 A_i，则只要将 l 稍加转动，使得点 A_i 转到直线 l 有 48 点的一侧即可. 以下设直线 l 上除点 O 外没有给定点，于是另一侧有 51 个点. 让直线 l 绕点 O 顺时针转动. 由于任何 3 点不共线，故直线 l 在转动过程中，每次都是越过 1 个点. 这样一来，开始时直线 l 两侧点数之差为 3，而 l 每越过 1 点时，差值增加 ± 2. 当直线 l 转过 $180°$ 时，l 两侧的点刚好对调，差值变为 -3. 从而在转动过程中，必有差值为 1 的时候. 这时点数少的一侧恰有 49 点.

(2) 在直线一侧有 47 点的直线不一定存在，或者说在某种情况下不存在. 考虑极坐标平面上的单位圆. 记极点为 O，在圆周上取点 $A_i(1, \alpha_i)$，其中

$$\alpha_i = \begin{cases} \dfrac{i-1}{49}\pi, i = 1,2,\cdots,49, \\ \pi + \dfrac{i-49}{51}\pi, i = 50,51,\cdots,99. \end{cases}$$

不难验证，当 $1 \leqslant i \leqslant 25$ 或 $75 \leqslant i \leqslant 99$ 时，经过点 A_i 的直径两侧分别有 50 和 48 个点；当 $26 \leqslant i \leqslant 74$ 时，经过点 A_i 的直径的两侧都有 49 个点. 由此可知，过点 O 的任何一条直线都不能使其一侧只有 47 个点.

10·5 给定空间中的 n 个点，其中的任意三点都是有一个内角大于 $120°$ 的三角形的顶点. 试证可以用 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 来标记这些点，使得每个 $\angle A_iA_jA_k$ 都大于 $120°$，其中 $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$.

(第 3 届全苏数学奥林匹克，1969 年)

[证] 将 n 点中两两连线中最长的一条记为 A_1A_n，并按其余各点与 A_1 的距离从小到大标记为 $A_2, A_3, \cdots, A_{n-1}$，亦即有 $A_1A_2 < A_1A_3 < \cdots < A_1A_{n-1} < A_1A_n$.

我们指出，这样的编排必可实现，即不会出现 $A_1A_i = A_1A_j (i \neq j)$ 的情形. 若不然，必存在 $i \neq j$，使 $\angle A_1A_iA_j = \angle A_1A_jA_i$. 于是由已知，$\angle A_iA_1A_j > 120°$. 另一方面，因为 A_1A_n 最长，故 $i < j < n$ 且 $\angle A_1A_iA_n > 120°$，$\angle A_1A_jA_n > 120°$. 因而 $\angle A_iA_1A_n < 60°$，$\angle A_jA_1A_n < 60°$. 因为三面角的任一平面角小于另两个平面角之和，故有 $\angle A_iA_1A_j < 120°$，矛盾.

由上述论证可知，$\angle A_iA_1A_j < 120°$. 又因当 $i < j$ 时，$A_1A_i <$

A_1A_j，故必有 $\angle A_1A_iA_j > 120°$. 于是当 $1 < i < j < k \leqslant n$ 时，便有 $\angle A_1A_iA_j > 120°$，$\angle A_1A_iA_k > 120°$. 由于三面角(包括退化为平面上一点引出 3 条射线的情形)的三个平面角之和不大于 360°，故有 $\angle A_jA_iA_k < 120°$. 又因 $\angle A_1A_kA_i < 60°$，$\angle A_1A_kA_j < 60°$，所以 $\angle A_iA_kA_j < 120°$. 从而得到 $\angle A_iA_jA_k > 120°$.

10·6　空间中给定 5 点，其中任何 4 点都不共面. 求证其中必有两点，使得过这两点的直线穿过以另外 3 点为顶点的三角形的内部.

（前南斯拉夫数学奥林匹克，1973 年）

［证］　从 5 点中任取 4 点，以它们为顶点作出一个四面体. 不难看出，这个四面体的 4 个面所在的 4 个平面将整个空间分成 15 部分，四面体是其中之一. 另外的 14 部分可以分成 3 组：

(1)4 个三面角，其顶点分别在四面体的 4 个顶点且分别与四面体的 4 个内三面角对顶，即其 3 个面角与内三面角的 3 个面角对应成对顶角；

(2) 四面体的每个内三面角无限伸展后减去四面体后所得的区域，共有 4 个；

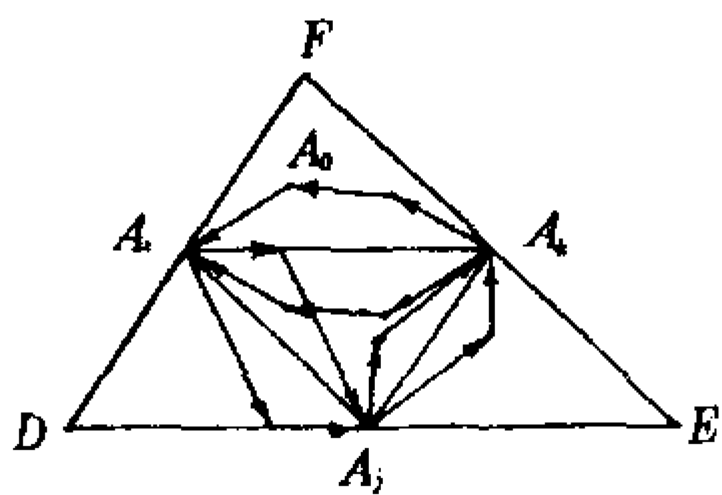
(3) 分别以四面体的 6 条棱为底棱的 6 个“劈形”区域，其中每个区域都是这样构成的：首先将四面体的以一条棱为公共边的两面向形外方向延伸，构成一个位于四面体外的二面角，然后同向延伸四面体的另两面，二者所夹的上述二面角的内部即为一个劈形区域.

如果第 5 点在四面体内或在前两类区域之一中，则只要将它与所在区域所属的三面角的角顶连一条直线即满足题中要求. 如果第 5 点在第 3 类区域之一中，设这个劈形区域的底棱为 A_3A_4，则直线 A_3A_4 必穿过 $\triangle A_5A_1A_2$.

10·7　在平面上给定点 A_0 和 n 个向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ 且使 $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n = \vec{0}$. 这组向量的每一个排列 $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_n}$ 都定义一个点集：$A_1, A_2, \cdots, A_n = A_0$，使得 $\vec{a}_{i_1} = \overrightarrow{A_0A_1}$，$\vec{a}_{i_2} = \overrightarrow{A_1A_2}$，$\cdots$，$\vec{a}_{i_n} = \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$. 求证存在一个排列，使由它定义的所有点 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ 都在以 A_0 为角顶的某个 60° 角的内部和边上.

（第 24 届全苏数学奥林匹克，1990 年）

[证]　因为$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n=\vec{0}$,故可将它们适当放置,使得其端点构成凸多边形$A_0A_1\cdots A_{n-1}$.设$\triangle A_iA_jA_k(0\leqslant i<j<k\leqslant n-1)$是以点$A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}$中三点为顶点的所有三角形中面积最大的一个.过$\triangle A_iA_jA_k$的每个顶点分别引它的对边的平行线,三线相交得到$\triangle DEF$.易证,折线$A_iA_{i+1}\cdots A_j$完全含在$\triangle A_iA_jD$中(包括边界在内);折线$A_jA_{j+1}\cdots A_k$完全含在$\triangle A_jA_kE$中;折线$A_kA_{k+1}\cdots A_i$完全含在$\triangle A_kA_iF$中.将折线$A_iA_{i+1}\cdots A_j$中的向量按反序放置,则所得的折线与折线$A_iA_{i+1}\cdots A_j$关于线段$A_iA_j$的中点中心对称,因而完全含在$\triangle A_iA_jA_k$中.将折线$A_jA_{j+1}\cdots A_k$和$A_kA_{k+1}\cdots A_i$也分别作同样处置之后,就得到一条完全含在$\triangle A_iA_jA_k$之中的闭折线.将$\triangle A_iA_jA_k$的不超过$60^\circ$的内角的顶点平移到$A_0$,就得到了向量组的满足题中要求的排列.



10·8　已知单位正方体内有1985个点,求证从中可以选出32个点,使得以它们为顶点的每条闭折线的周长都小于$8\sqrt{3}$.

(第26届国际数学奥林匹克候选题,1985年)

[证]　将正方体的每条棱4等分,过分点作正方体的面的平行平面,将正方体分成64个棱长为$\frac{1}{4}$的小正方体.因为$1985=64\times31+1$,故由抽屉原理知必有一个小立方体中(包括周界)含有32个已知点,其中每两点间连线的长度不超过$\frac{1}{4}\sqrt{3}$,而长度等于$\frac{1}{4}\sqrt{3}$的线段至多4条,从而以这32点为顶点的封闭折线的周长小于$32\times\frac{1}{4}\sqrt{3}=8\sqrt{3}$.

10·9　已知$\triangle ABC$中,$\angle C=90^\circ$.求证对于$\triangle ABC$内的任意n个点,必可适当记为$P_1,P_2,\cdots,P_n$,使得

$$P_1P_2^2+P_2P_3^2+\cdots+P_{n-1}P_n^2\leqslant AB^2.$$

(中国国家集训队选拔试题,1986年)

[证]　我们证明如下的加强命题:

$$AP_1^2+P_1P_2^2+\cdots+P_{n-1}P_n^2+P_nB^2\leqslant AB^2.\qquad①$$

当$n=1$时,因为$\angle C=90^\circ$,故$\angle AP_1B\geqslant90^\circ$,所以有$AP_1^2+P_1B^2\leqslant$

AB^2,即①式成立.设 $n<k$ 时①式成立,证 $n=k$ 时①式也成立.

过点 C 引 $CD\perp AB$ 于 D,不妨设 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BDC$ 中都有给定的点.否则,若 k 个给定点都在 $\triangle ADC$ 内,则可从点 D 引 AC 的垂线,这样一直进行下去,直到把 k 个给定点分在两个三角形中为止.

设 $\triangle ADC$ 内有 $s(s<k)$ 个点,$\triangle BDC$ 内有 $k-s$ 个点.由归纳假设知可将 $\triangle ADC$ 内的 s 个点标号为 $1,2,\cdots,s$,将 $\triangle BDC$ 内的 $k-s$ 个点标号为 $s+1,\cdots,k$,使得

$$AP_1^2+P_1P_2^2+\cdots+P_{S-1}P_S^2+P_SC^2\leqslant AC^2, \quad ②$$

$$CP_{S+1}^2+P_{S+1}P_{S+2}^2+\cdots+P_{k-1}P_k^2+P_kB^2\leqslant BC^2. \quad ③$$

又因 $\angle P_SCP_{S+1}<\angle ACB=90^\circ$.故有

$$P_SP_{S+1}^2<P_SC^2+CP_{S+1}^2. \quad ④$$

将②,③,④结合起来即得①,这就完成了归纳证明.

10·10　在一个边长为 1 的正方形内,任意给定 9 个点,试证明在以这些点为顶点的各个三角形中,必有一个三角形,它的面积不大于 $\frac{1}{8}$.

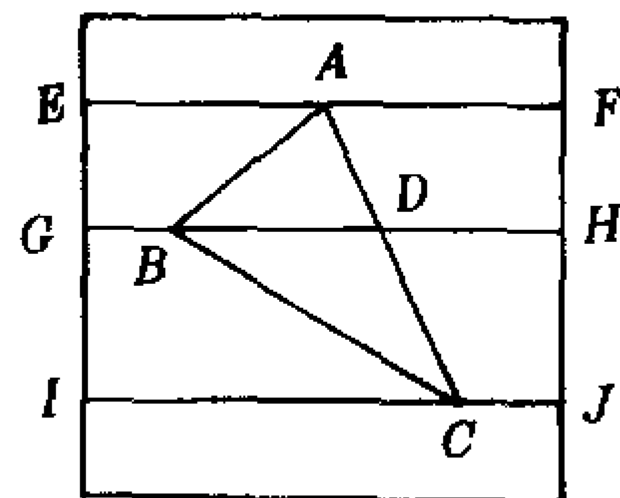
(中国北京市数学竞赛,1963 年)

[证]　用对边中点的连线将正方形分成四个面积为 $\frac{1}{4}$ 的小正方形,把 9 个点分成四部分,那么,至少有一个小正方形的内部或边界上至少有三个给定的点.令这三点为 A,B,C.我们只要证明 $\triangle ABC$ 的面积不大于面积为 $\frac{1}{4}$ 的小正方形的面积的一半即可.

(1) 如果 A,B,C 三点共线,则 $\triangle ABC$ 的面积为 0,结论显然正确.

(2) 如果在 $\triangle ABC$ 中,有一边平行于小正方形的一边,则结论也是显然的.

(3) 如果 $\triangle ABC$ 的三边都不平行于这个小正方形,那么过这三个顶点作三条直线 EF,GH,IJ 平行于这个小正方形的一条边,如图,由于 $\triangle ABC$ 的三边与小正方形的边不平行,则必有一边与这三条直线中的一条相交,不妨设 GH 交 AC 于 D.这时有



$$
\begin{aligned}
S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDC} \\
&\leqslant \frac{1}{2} S_{GHFE} + \frac{1}{2} S_{GHJI} \\
&\leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

由以上,必存在三点构成的三角形的面积不大于$\frac{1}{8}$.

10·11 在边长为1的正方形的内部及边上任取101个点,其中任何3点都不共线.求证其中必存在3点,以它们为顶点的三角形的面积不大于0.01.

(第27届莫斯科数学奥林匹克,1964年)

[证] 用平行于底边的49条平行线将正方形均分成50个矩形,于是每个矩形的面积为0.02.101个点分布在50个矩形(包括边界)中,由抽屉原理知,必有一个矩形中有3点.这3点为顶点的三角形的面积不超过矩形面积之半.当然不超过0.01.

10·12 在正1981边形的顶点中任意标定64个顶点,求证必存在一个梯形,其4个顶点都是标定点.

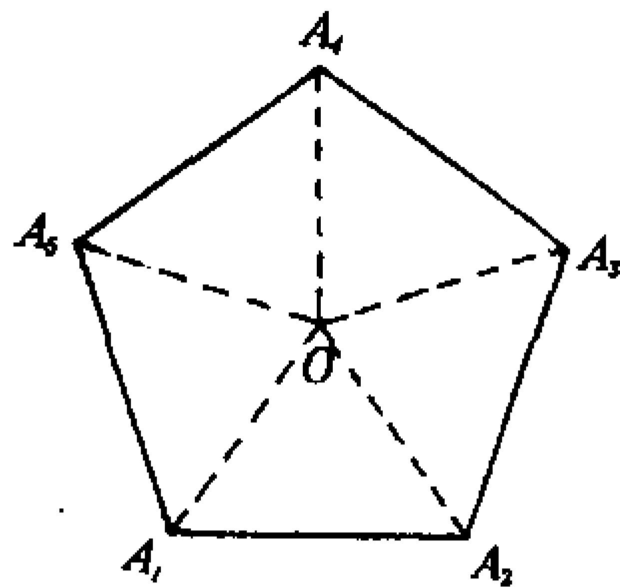
(第44届莫斯科数学奥林匹克,1981年)

[证] 易见,正1981边形的所有边和对角线可以分成1981组平行线.64个标定点中每两点之间连1条线共有$C_{64}^2 = 32 \times 63 = 2016$条线.于是由抽屉原理知其中必有两条$AB \parallel DC$,从而四边形$ABCD$为梯形(因$A,B,C,D$都是正1981边形的顶点,故四边形$ABCD$不能是矩形).

10·13 怎样在平面上放置6个点,使得其中的任何3点都是一个等腰三角形的3个顶点?

(基辅数学奥林匹克,1979年)

[解] 取6点为正五边形的5个顶点及中心O即可.



对于这6点中的任何3点,若其中有点O,则点O到其余两点距离相等,当然构成一个等腰三角形.若不含点O,则为正五边形的3个顶点.这

时，若3点相连，显然构成一个等腰三角形；若3点不相连，则必有两点相连而第3点与二者均不相连.在这样3点为顶点的三角形中，有两条边是正五边形的对角线，当然也是等腰三角形.

10·14　设平面上有1990个相异的点，是否可以作一个正三角形，使其中995个点在内部，其余995个点在外部.

（中国浙江省数学夏令营，1990年）

[解]　建立直角坐标系xOy，使得y轴与1990个已知点中任意两点的连线均不平行，则1990个已知点的横坐标均不相同.

按照横坐标的大小，顺次设为$A_i(x_i,y_i)$，$i=1,2,\cdots,1990$，且

$$x_1<x_2<\cdots<x_{1990}.$$

作直线$l:x=\frac{x_{995}+x_{996}}{2}$，则$l$的两侧各有995个已知点.不难看出，只要作一个充分大的正三角形，使其一边在l上，必能包含l一侧的995个已知点.

10·15　在棱长为13的正方体内取定1956个点.问能否在此正方体中框出一个棱长为1的小正方体来，使得在它的内部没有被选定的点？

（第19届莫斯科数学奥林匹克，1956年）

[解]　用三组分别平行于正方体的面的平面将大正方体均分成$13\times13\times13=2197$个棱长为1的小正方体.由抽屉原理知，总有一个分出的棱长为1的正方体内不含取定点.

10·16　设A和B是平面上的两个不交点集，$A\cup B$中的任何3点都不共线.如果A和B中之一至少有5个点，则必存在一个三角形，它的3个顶点同在A中或B中，且内部不含另一集合中的点.

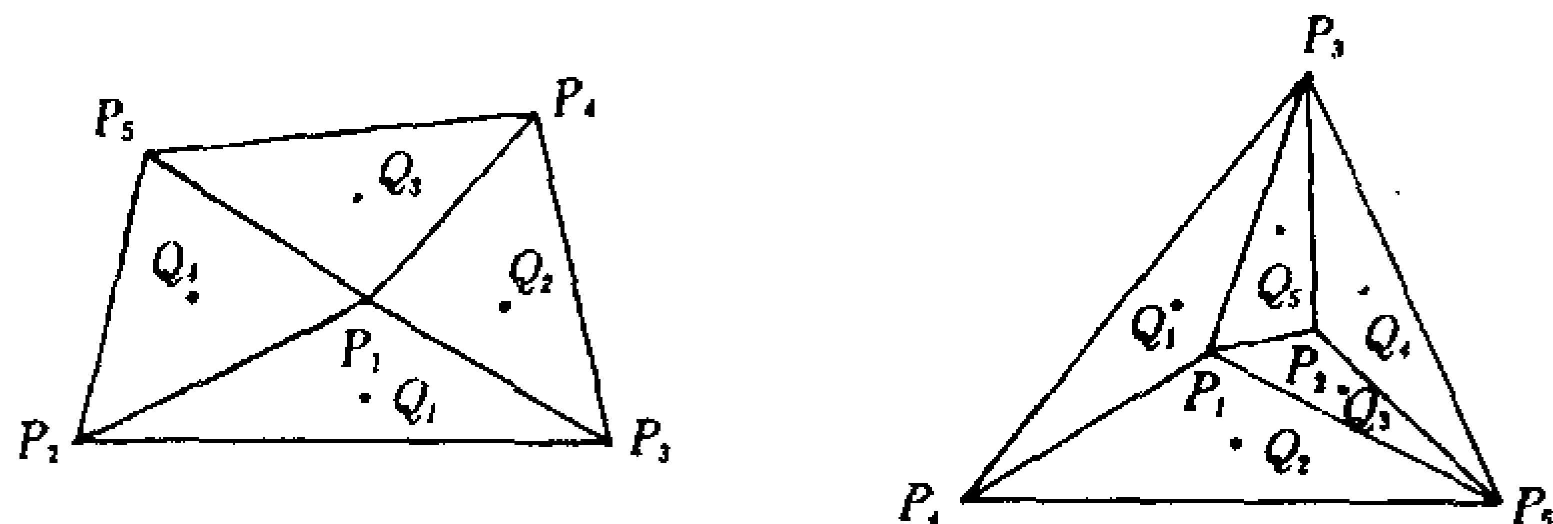
（第26届国际数学奥林匹克候选题，1985年）

[证]　不妨设$|A|\geqslant5$.设P_1,P_2,P_3,P_4,P_5是A中5点且这5点的凸包中不含A的其他点.

(1) 设5点的凸包为五边形$P_1P_2P_3P_4P_5$.考察$\triangle P_1P_2P_3$，$\triangle P_1P_3P_4$和$\triangle P_1P_4P_5$.若三者之中有一个内部不含B中的点，则该三角形即为所求.若3个三角形中的每个都含有B中的点，则五边形内至少含B的3个点，从中任取3点便满足要求.

(2) 设5点的凸包为四边形，且点P_1在凸四边形$P_2P_3P_4P_5$之中.考察4个三角形：$\triangle P_1P_2P_3$，$\triangle P_1P_3P_4$，$\triangle P_1P_4P_5$和$\triangle P_1P_5P_2$.若4

个三角形之一中没有 B 中的点，则该三角形即为所求. 若4个三角形中的每个内部都含 B 的点，则可在每个三角形中取一个 B 的点，依次记为 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. 不妨设 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 和 $\triangle Q_1Q_3Q_4$ 内部不交. 由于点 P_1 至多在1个三角形的内部，故上述两个三角形总有1个满足要求(见左下图).

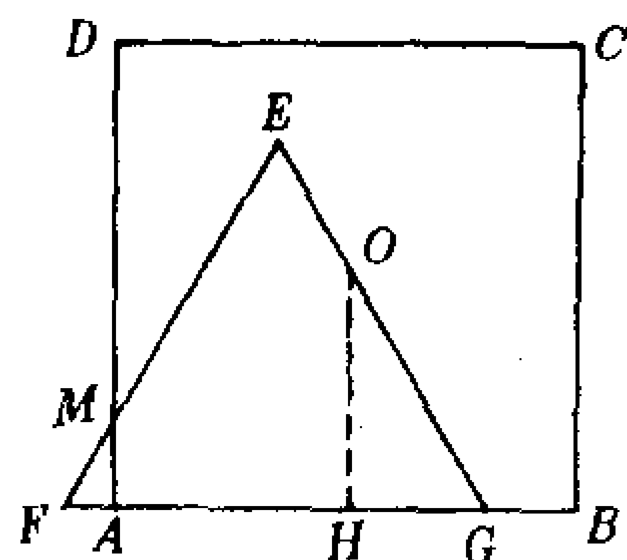


(3) 设点 P_1 和 P_2 含在 $\triangle P_3P_4P_5$ 之中，考察5个 $\triangle P_1P_3P_4$, $\triangle P_1P_4P_5$, $\triangle P_1P_2P_5$, $\triangle P_2P_5P_3$ 和 $\triangle P_1P_2P_3$ 则类似的讨论可知结论成立.

10·17　在边长为12的正方形中分布着1990个点，求证可以用一个边长为11的正三角形盖住其中至少498个点.

(原苏联教委推荐试题，1990年)

[证]　由于 $1990 = 497\times 4 + 2$，故由抽屉原理知，只须证明边长为12的正方形可被4个边长为11的正三角形所覆盖.



我们将边长为11的三角形的一条边放在正方形 $ABCD$ 的边 AB 所在的直线上，使三角形的另一条边过正方形的中心 O(见图). 于是有

$$GB = HB - HG = 6 - \frac{6}{\sqrt{3}} = 6 - 2\sqrt{3},$$

$$FA = FG - AG = 11 - (12 - GB) = GB - 1 = 5 - 2\sqrt{3},$$

$$AM = FA\cdot\sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 6 > 6 - 2\sqrt{3} = GB.$$

这样一来，将 $\triangle EFG$ 绕点 O 分别旋转 $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$，又得到3个边长为11的正三角形. 显然，这4个三角形覆盖了正方形 $ABCD$.

10·18　$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 为平面上 n 个不同的点，每个 $\triangle P_iP_jP_k$ $(i\neq j\neq k\neq i)$ 的面积不超过1. 证明存在一个三角形，满足:

(1) 它的面积不超过4.

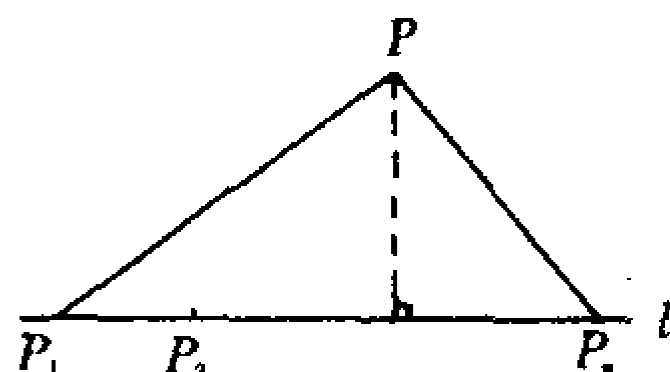
(2)$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 都在这个三角形的内部或边界上.

(澳大利亚数学奥林匹克,1991 年)

[证] 若 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 在同一条直线 l 上,且设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 按顺序排列.

在 l 外取一点 P,使 P 到直线 l 的距离不大于 $\frac{8}{P_1P_n}$,则 $\triangle PP_1P_n$ 的面积不大于

$$\frac{1}{2}\times P_1P_n\times\frac{8}{P_1P_n}=4,$$



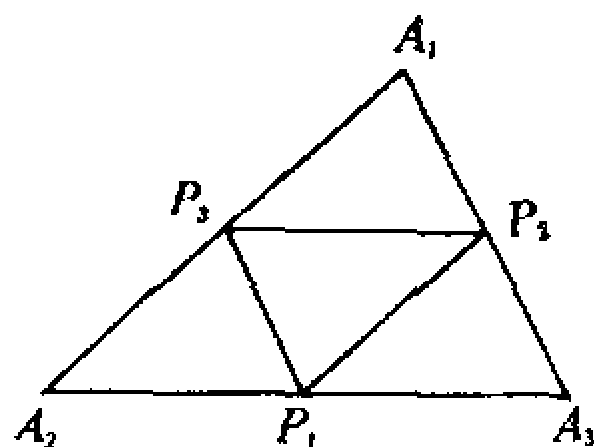
此时 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 都在 $\triangle PP_1P_n$ 的边上.

因而 $\triangle PP_1P_n$ 即为所求.

若 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 不全在同一条直线上,不妨设在所有的 $\triangle P_iP_jP_k$ 中,$\triangle P_1P_2P_3$ 的面积最大.

过 $\triangle P_1P_2P_3$ 的顶点分别作对边的平行线,构成 $\triangle A_1A_2A_3$,则

$$S_{\triangle A_1A_2A_3}=4S_{\triangle P_1P_2P_3}\leqslant 4.$$



对任意的 P_i,由于

$$S_{\triangle P_iP_2P_3}\leqslant S_{\triangle P_1P_2P_3}$$

所以 P_i 必与 A_1 在直线 A_2A_3 的同一侧.

同理,P_i 必与 A_2 在直线 A_1A_3 同一侧.

P_i 必与 A_3 在直线 A_1A_2 同一侧.

所以 P_i 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 的内部或边界上.

因此 $\triangle A_1A_2A_3$ 即为所求.

10·19 在平面上给定 $n(n\geqslant 4)$ 个点,其中任何 4 点都是一个凸四边形的 4 个顶点,求证这 n 个点是一个凸 n 边形的 n 个顶点.

(基辅数学奥林匹克,1964 年)

(波兰数学奥林匹克,1968 年)

[证] 设这 n 个点的凸包是多边形 M.若 M 的边数小于 n,则至少有 1 个给定点 P 在多边形 M 内部.当用互不相交的对角线将多边形 M 剖分成若干个三角形时,点 P 必落在某个三角形的内部或边上.设这个三角形为 $\triangle ABC$,则 A,B,C,P4 点不能作为某凸四边形的 4 个顶点,此与已知矛盾.这表明多边形 M 为凸 n 边形,即 n 个给定点为凸 n

边形 M 的 n 个顶点.

10·20 平面上分布着 n 个点,已知对于其中任何 3 点,以它们为顶点的三角形的内部和边上都不含这 n 个点中的其他点,求证可将这 n 个点适当编号为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,使得 $A_1A_2\cdots A_n$ 为凸多边形.

(第 24 届莫斯科数学奥林匹克,1961 年)

[证] 考察给定 n 点的凸包,它必为凸 n 边形.若不然,则至少有一点在凸包内部或边上,这必然导致这点在某个以 3 个给定点为顶点的三角形的内部或边上,矛盾.

因凸包为 n 边形,故只要按这个 n 边形的顶点的顺序编号为 A_1,$A_2,\cdots,A_n$ 即可.

10·21 在平面上给定 5 点,其中任何 3 点都不共线.求证其中必可选出 4 点,它们是某个凸四边形的 4 个顶点.

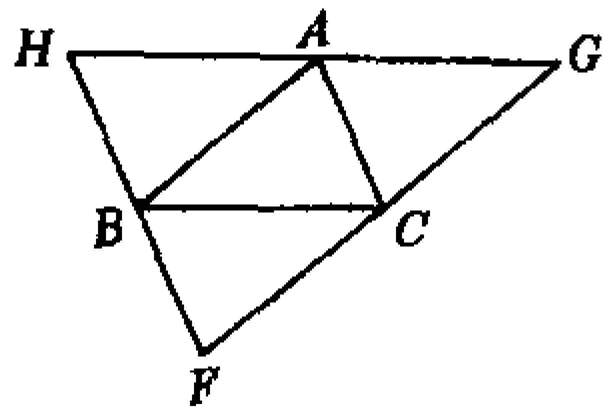
(第 10 届莫斯科数学奥林匹克,1947 年)

(第 23 届美国普特南数学竞赛,1962 年)

(波兰数学奥林匹克,1964 年)

[证 1] 考察 5 个给定点的凸包.如果凸包是五边形或四边形,结论显然成立.当凸包是三角形时,设 D,E 两点含在 $\triangle ABC$ 内.这时直线 DE 恰与 $\triangle ABC$ 的两边相交.于是不与直线 DE 相交的一边的两个端点及 D,E 两点共 4 点即为所求.

[证 2] 以 5 个给定点中的每 3 点为顶点作一个三角形,并设 $\triangle ABC$ 是其中面积最大的一个.分别过点 A,B,C 作对边的平行线,3 条线两两相交得到 $\triangle FGH$(见右图).若另两个给定点 D 和 E 之一在 $\triangle FGH$ 之外,则将导致面积比 $\triangle ABC$ 更大的三角形,矛盾.故 D,E 两点均在 $\triangle FGH$ 的内部或边上.这时,直线 DE 至多与 $\triangle ABC$ 的两条边相交.于是与 DE 不交的一边的两个端点及 D,E 两点共 4 点即为所求.



10·22 设在平面上给出了 1000 个其边平行于坐标轴的正方形,M 是这些正方形中心的集合.试证可以标定其中一些正方形,使得集合 M 的每个点都落在不少于 1 个且不多于 4 个标定正方形中.

(第 11 届全苏数学奥林匹克,1977 年)

[证] 从给定正方形中标定其中最大的一个,记为 K_1.然后再从

中心不在 K_1 中的所有正方形中，标定最大的一个，记为 K_2. 再从中心不在 K_1 和 K_2 中的所有正方形中标定最大的 K_3. 继续这个过程，直到没有正方形可标定时为止. 易见，每个标定正方形的中心，都不在任何其他标定正方形中.

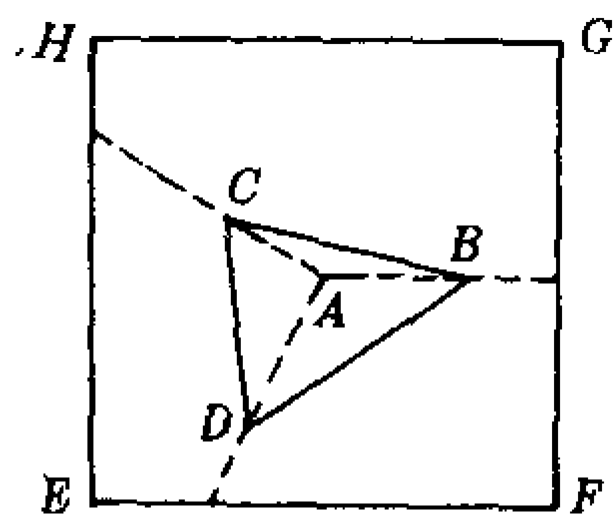
设某个给定正方形的中心 C 落在至少 5 个标定的正方形内. 过点 C 分别作两条坐标轴的平行线，则两条线把平面分成 4 部分. 由抽屉原理知，5 个标定正方形的中心总有两个落在同一部分中. 设这两个中心为 O_1 和 O_2. 不妨设 $CO_1 \leqslant CO_2$，于是 O_1 必含于以 O_2 为中心的标定正方形中，此与标定正方形的选法矛盾.

10·23 设在正方形内部有一个凸四边形，在凸四边形内部有一点 A. 已知正方形和凸四边形的各4个顶点及点 A 共9点中的任何3点都不共线，求证从这 9 点中可以选出 5 个点来，使得它们是某凸五边形的 5 个顶点.

（第 10 届莫斯科数学奥林匹克，1947 年）

［证］ 我们来证明本题的加强命题：在正方形内部有一个三角形，在三角形内部有一点 A，且正方形的4个顶点、三角形的3个顶点及点 A 共 8 点中的任何 3 点都不共线，求证从这 8 点中可以选出 5 个点来. 使得它们是某凸五边形的 5 个顶点.

将正方形和三角形分别记为 $EFGH$ 和 $\triangle BCD$. 连结 AB，AC，AD 并延长与正方形的周界相交，则 3 个交点至多落在正方形的三边上，至少落在正方形的两边上，例如图中边 GH 上没有交点. 这时 A，B，G，H，C5 点即为所求. 如果正方形的两条边上都没有交点，则更存在所要求的 5 点组，而且还不只一组.



10·24 在平面上给定 9 点，其中任何 3 点都不共线，9 点的凸包是四边形，求证 9 点中一定存在 5 点，它们是一个凸五边形的 5 个顶点.

（中国国家集训队训练题，1991 年）

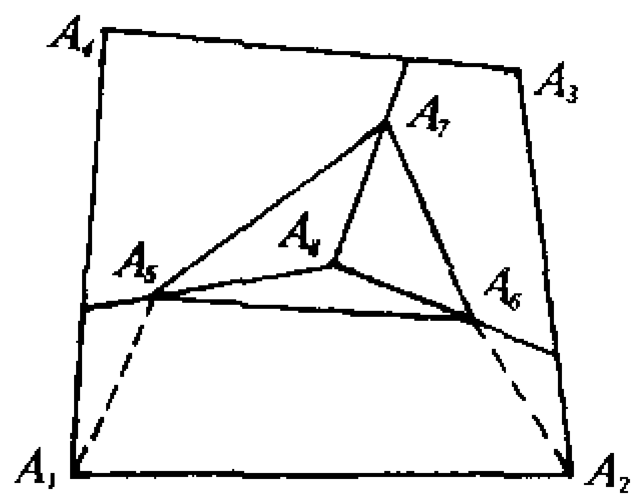
［证］ 设 9 点的凸包是四边形 $A_1A_2A_3A_4$. 再考察内部 5 点 A_5，A_6，A_7，A_8，A_9 的凸包.

(1) 若 5 点的凸包为五边形，则内部 5 点即为所求.

(2) 若 5 点的凸包为三角形，则另两点在这个三角形内. 这时只要

用到其中 1 点就行了.

设点 A_8 在 $\triangle A_5A_6A_7$ 之中,连结 A_8A_5, A_8A_6, A_8, A_7 并分别延长到四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 周界之外. 显然,四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的四边中,至少有 1 条边不与点 A_8 所发出的 3 条射线相交. 例如是 A_1A_2(如右图所示). 易见,五边形 $A_1A_2A_6A_8A_5$ 为凸五边形.



(3) 设内部 5 点的凸包为四边形 $A_5A_6A_7A_8$,于是点 A_9 在它的内部. 连结对角线 A_5A_7,则点 A_9 在两个三角形 $\triangle A_5A_6A_7$, $\triangle A_5A_7A_8$ 之一的内部. 从而化为(2) 的情形.

综上可知,9 点中总有 5 点是一个凸五边形的 5 个顶点.

10·25　设非凸的 n 边形 P 不自交. 我们考察由它的这样的内点构成的集合 T,从这些内点上可以看到 P 的所有顶点. 求证 T 是一个多边形,其边数不大于 n.

(第 35 届莫斯科数学奥林匹克,1972 年)

[证]　作出多边形 P 的 n 条边所在的直线,则每条直线都把平面分成两个半平面. 对于每条边所在的直线,都选取在该边附近多边形内部所在的半平面. 显然,能同时看到该边两个顶点的内点都在所选的半平面内. 由此可见,能看到 n 边形 P 的所有顶点的内点必在所选的 n 个半平面的交集内. 因为每个半平面都是凸集,所以它们的交必为凸多边形. 又因每个半平面的边界直线至多过多边形的一条边. 所以多边形 T 至多有 n 条边.(集合 T 可能为空集)

10·26　在平面上给定 6 点,其中任何 3 点都不共线. 试证在给定的 6 点中可以选出 3 点,使得这 3 点所构成的三角形的最大角不小于 120°.

(匈牙利数学奥林匹克,1958 年)

[证]　考察 6 个给定点的凸包.

(1) 设凸包为凸六边形. 因为凸六边形的内角和为 720°,故它必有一个内角不小于 120°.

(2) 若凸包为凸五边形或凸四边形,则总可用对角线把这个凸多边形剖分成 3 个或 2 个三角形,且原在多边形内部的给定点必在某一个三角形内. 我们就来研究这个内部含有给定点的三角形. 当凸包为三角

形时,这一点成立更是不成问题.

设点 A_4 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 之内,A_1,A_2,A_3,A_4 都是给定点. 连结 A_1A_4,A_2A_4,A_3A_4,则因 $\angle A_1A_4A_2$、$\angle A_2A_4A_3$、$\angle A_3A_4A_1$ 之和为 $360°$,故其中必有一个角不小于 $120°$.

10·27 已知平面上6点中的任何3点都不共线.求证从中必可选出3点作为顶点构成三角形,使得该三角形中至少有一个内角不超过 $30°$.

(第26届莫斯科数学奥林匹克,1963年)

[证] 考察6个已知点的凸包.

(1)若凸包是六边形,则六边形中必有1个内角不小于 $120°$.设这个角是 $\angle ABC$,此处 A,B,C 都是已知点,于是 $\triangle ABC$ 中另两个内角之一不超过 $30°$.

(2)若凸包的边数不超过5,则必有1点 F 含于凸包之内.(如果必要)当用互不相交的对角线将凸包多边形划分为若干个三角形时,点 F 必含于某一个三角形之中. 不妨设点 F 含于 $\triangle ABC$ 之中. 于是 $\angle AFB+\angle BFC+\angle CFA=360°$,3个角中必有1个不小于 $120°$.不妨设 $\angle AFB\geqslant 120°$.于是 $\triangle AFB$ 即为所求.

10·28 在平面上给定5点,其中任何4点中都有3点为一个正三角形的3个顶点,求证5点中必有4点为一个内角为 $60°$ 的菱形的4个顶点.

(保加利亚数学奥林匹克,1985年)

[证1] 在 A,B,C,D4点中,设 $\triangle ABC$ 为正三角形.若结论不成立,则在 B,C,D,E4点中,不能有以 BC 为一边的正三角形,故其中的正三角形或为 $\triangle BDE$,或为 $\triangle CDE$,不妨设为前者.再考察 A,C,D,E4点,其中某3点为正三角形的3个顶点.若此正三角形以 AC 为一边,则与 $\triangle ABC$ 拼成菱形,矛盾;若以 DE 为一边,则又与 $\triangle DBE$ 拼成菱形,矛盾.

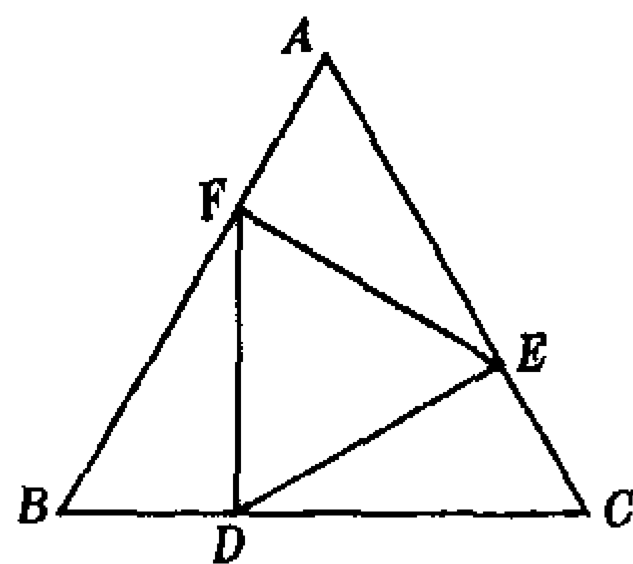
[证2] 5个给定点共可组成5个不同的四点组.按已知,每组中都有3点为一个正三角形的3个顶点(以下简称正三角形),共有5个正三角形(包括重复计数).由于每个正三角形恰属于两个四点组,故知至少有3个不同的正三角形.又因这3个不同的正三角形共属于6个四点组,故由抽屉原理知必有两个正三角形属于同一个四点组.显然,这两

个正三角形拼成一个菱形，且菱形的1个内角为60°.

[证3] 若5点中至多存在两个不同的正三角形，则总可去掉1点（当有两个正三角形时，去掉公共顶点），使余下的4点中没有正三角形，此与已知矛盾. 故5点中至少有3个不同的正三角形. 3个正三角形共有9个顶点，它们都是给定的5点中的点. 由抽屉原理知5点中必有1点，它至多是1个正三角形的顶点. 去掉这一点，余下的4点中有两个不同的正三角形. 显然，二者拼成一个菱形，其内角之一为60°.

10·29　设 S 是正三角形 ABC 三边上所有点的集合（包括 A,B,C 三点），若把 S 任意地分成两个不交的子集，其中是否至少有一个子集中含有某直角三角形的三个顶点？证明你的论断.

（第24届国际数学奥林匹克，1983年）



[解] 在三边 BC,CA,AB 上分别取点 D,E,F，使得 $DC=2BD, AE=2EC, BF=2FA$. 于是 $\triangle BDF,\triangle CED,\triangle AFE$ 都是直角三角形.

设 $S=S_1\cup S_2, S_1\cap S_2=\varnothing$. 由抽屉原理知，$D,E,F$ 三点中至少有两点在同一子集中，不妨设 $D,E\in S_1$. 因为 $DE\perp CA$，故若在 CA 上除点 E 之外还有点属于 S_1，则三点即为一个直角三角形的三个顶点且同在 S_1 中. 若在 $CA-\{E\}$ 上的所有点都属于 S_2，则在 $AB\cup BC-\{A,C\}$ 上只要还有 S_2 的点，就又存在同属于 S_2 的三点满足要求. 否则，必有 B,D,F 三点同属于 S_1. 这就证明了对于 S 的任一分解，总存在某直角三角形的三个顶点同属于一个子集.

10·30　设 S 是由平面上的 n 个点组成的集合（$n\geqslant 3$），其中任何3点都不共线. 试证在平面上存在一个由 $2n-5$ 点组成的集合 M，使得在以 S 中的任何3点为顶点的三角形内部至少有1个 M 中的点.

（第32届国际数学奥林匹克预选题，1991年）

[证] n 个给定点中每两点确定一条直线，这样的直线总共只有有限多条，故可在平面上作一条直线 l_1，使它与上述直线中的任何一条都不平行. 过 l_1 上一点 O 作直线 $l_2\perp l_1$. 取以 l_2 为 x 轴，l_1 为 y 轴的直角坐标系，于是 n 个给定点的横坐标互不相同. 按横坐标从小到大给 n 个给定点编号，记为 $P_1,P_2,\cdots,P_n, P_i=(x_i,y_i), i=1,2,\cdots,n$. 于是有 $x_1<x_2<\cdots<x_n$.

将点 P_i 到直线P_jP_k 的距离记为$d(P_i,P_jP_k)$.因为任何3点都不共线,所以 $d(P_i,P_jP_k)>0$.令

$$d=\min_{1\leqslant j<i<k\leqslant n}\frac{1}{2}d(P_i,P_jP_k),$$

并在平面上取 $2n-4$ 个点所组成的点集

$$T=\{(x_i,y_i\pm d)\mid i=2,3,\cdots,n-1\}.$$

容易看出,对于任何 $\triangle P_sP_tP_m$,不妨设 $1\leqslant s<t<m\leqslant n$,$T$ 中的点 (x_t,y_t-d),(x_t,y_t+d) 中必有1点在 $\triangle P_sP_tP_m$ 的内部.从而知集 T 具有题中要求的性质.

注意,$|T|=2n-4$,比题中要求的条件多了1点.下面我们设法将 T 中点去掉1个,使得它的去掉不影响 T 满足题中要求.考察集 S 的凸包多边形,其上至少有 S 中的3个点,3点中总有1点 P_j,$1<j<n$.因而,(x_j,y_j-d) 和(x_j,y_j+d) 中必有1点不在 S 的凸包内.去掉这一点,余下的 $2n-5$ 点所组成的集合便满足题中的全部要求.

10·31 试证对于任何整数 $n\geqslant 2$,在平面上都存在2^{n-1}个点的集合,使得其中任何3点都不共线且任何 $2n$ 个点都不是某个凸 $2n$ 边形的全部顶点.

(第35届国际数学奥林匹克预选题,1994年)

[证] 我们归纳地构造集合 S_n 如下.首先令 $S_2=\{(0,0),(1,1)\}$.对于 $n\geqslant 2$,设 S_n 已定义好.取实数 M_n 足够大,使对任何(x_i,y_i),(x_j,y_j),(x_k,y_k),$(x_h,y_h)\in S_n$,都有

$$\frac{y_i+M_n-y_j}{x_i+2^{n-1}-x_j}>\frac{y_k-y_h}{x_k-x_h},\qquad ①$$

并令

$T_n=S_n+(2^{n-1},M_n)=\{(x+2^{n-1},y+M_n)\mid(x,y)\in S_n\}$ 和 $S_{n+1}=S_n\cup T_n$.显然,$|S_{n+1}|=2^n$.由于 S_n 中任何3点都不共线,所以 T_n 中任何3点也都不共线.由此及①即知 S_{n+1} 中任何3点都不共线.

设 n 是使S_n 中含有 $2n$ 个点为某个凸 $2n$ 边形顶点的最小自然数.作出这个凸$2n$边形,并在 x 坐标最小与最大的两个顶点之间连一条对角线(或边).于是这条对角线将凸 $2n$ 边形分成两个凸多边形,其中至少有1个凸多边形的边数不小于 $n+1$.不妨设这个凸多边形位于对角线的下方且它的 $n+1$ 个顶点是 $P_1,P_2,\cdots,P_{n+1}$,$x_1<x_2<\cdots<$

x_{n+1}. 由多边形的凸性知

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} < \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, i = 2,3,\cdots,n \quad ②$$

由 n 的最小性又知 $x_1 \in S_{n-1}$, $x_{n+1} \in T_{n-1}$. 于是有 $2 \leqslant k \leqslant n$, 使 $P_k \in S_{n-1}$, $P_{k+1} \in T_{n-1}$. 我们断言, $k = n$. 若不然, $k < n$. 于是由 ② 有

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} < \frac{y_{k+2} - y_{k+1}}{x_{k+2} - x_{k+1}}. \quad ③$$

由 T_{n-1} 定义知存在 (x'_{k+1}, y'_{k+1}), $(x'_{k+2}, y'_{k+2}) \in S_{n-1}$, 使得 $(x_{k+i}, y_{k+i}) = (x'_{k+i} + 2^{n-2}, y'_{k+i} + M_{n-1})$, $i = 1,2$. 从而由 ③ 得到

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} < \frac{y'_{k+2} - y'_{k+1}}{x'_{k+2} - x'_{k+1}},$$

此与 ① 矛盾. 这表明

$$P_i \in S_{n-1}, i = 1,2,\cdots,n,$$

即有 n 个顶点在 S_{n-1} 中. 同理可证有 $n-1$ 个顶点在 S_{n-2} 中. 递推地可证有 3 个顶点在 S_2 中, 此与 $|S_2| = 2$ 矛盾. 从而证明了所有 S_n 中都不存在 $2n$ 个点, 它们是某个凸 $2n$ 边形的全部顶点.

10·32　在平面上(或空间中)给定有限集 K_0, 把 K_0 中的一个点关于另一点作对称映射所得到的一切点都加入 K_0 中, 得到集合 K_1. 类似地可由 K_1 得到 K_2, 由 K_2 得到 K_3, 等等.

(1) 设集合 K_0 由距离为 1 的两点 A 和 B 构成, 问 n 最小取何值时, 在集合 K_n 中存在与 A 相距 1000 的点?

(2) 设集合 K_0 由面积为 1 的正三角形的 3 个顶点组成, 求包含 K_n 的最小凸多边形, 即凸包的面积, $n = 1,2,\cdots$.

以下各小题中均设 K_0 由单位体积的正四面体的 4 个顶点构成.

(3) K_1 的凸包有多少个面及这些面的形状如何?

(4) K_1 的凸包的体积是多少?

(5) 求集合 K_n 的凸包的体积, $n = 1,2,\cdots$.

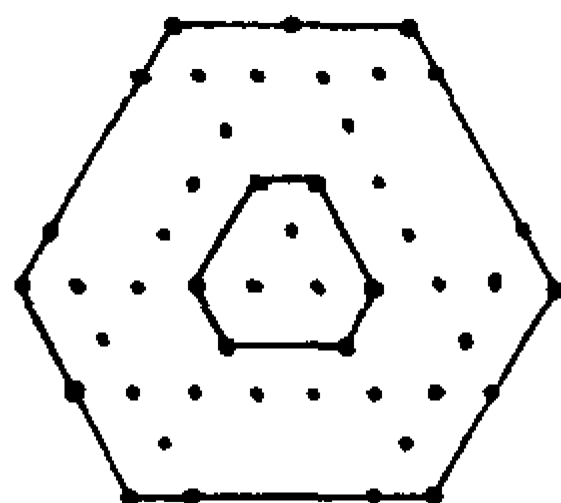
(第 12 届全苏数学奥林匹克, 1978 年)

[解]　(1) 容易看出, 集合 K_n 由直线 AB 上与 A 有整数距离且与线段 AB 中点的距离不超过 $\frac{1}{2} \times 3^n$ 的所有点组成, $n = 1,2,\cdots$. 因为 $\frac{1}{2}(3^6 + 1) = 365 < 1000$ 而 $\frac{1}{2}(3^7 + 1) > 1000$, 故知所求 n 的最小值

为 7.

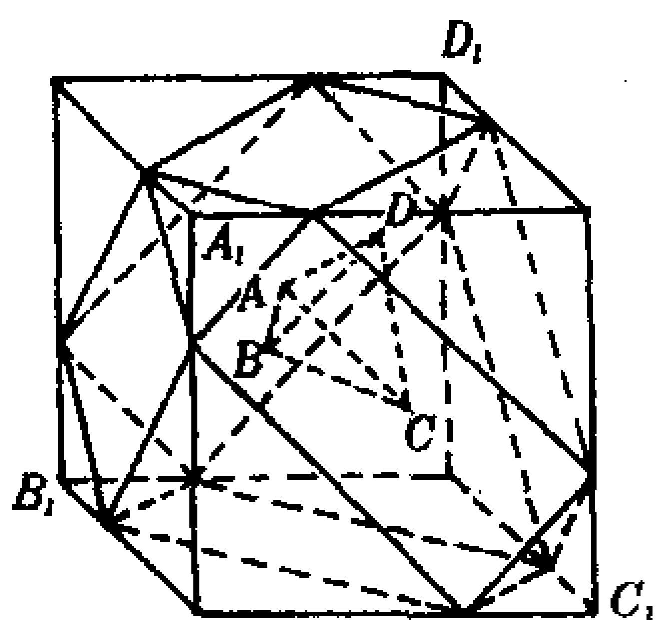
(2)K_n 的凸包是六边形. 任取 K_0 中的两点, 像(1)中那样作 n 次对称映射, 即可得到这六个顶点.

为了证明 K_n 的所有点都在由六个"支点"构成的凸包 H_n 中, 把 H_n 看作为以六边形的3组对边为边界的3个带形之交($n=1,2,\cdots$). 显然, 初始正三角形是3个带形之交, 其中每个带形的两边恰为三角形的一条边及过相对顶点所作的平行线. 而在每次对称映射之后, 3个带形仍映为3个带形, 中心线不变但宽度增大到3倍. 从而3个带形之交, 即 K_n 仍为六边形.



H_n 的面积可通过与 $\triangle ABC$ 同向位似及反向位似的三角形的面积来计算, 它等于 $\frac{1}{2}(3^{2n+1}-1)$.

(3) 除 K_0 的点外, K_1 还包含作为对称映射的象点而来的 12 个点. 可以看出, 这 12 个点就是 K_1 凸包的支点. 我们作立方体 L_0, 使得已知四面体 $ABCD$ 的四个顶点恰为它的一组 4 个互不相邻的顶点. 将 L_0 关于其中心作系数为 3 的同向位似, 得到立方体 L_1 及其相应的不相邻的顶点 A_1, B_1, C_1, D_1. 这时, K_1 凸包的 12 个支点恰在立方体 L_1 的 12 条棱上, 而且每个点都把它所在的棱分成 $1:2$ 两部分, 较短部分以 A_1, B_1, C_1, D_1 之一为端点(参看上图). 如果在 L_1 的每个顶点都用一个平面切去一个锥体, 那么剩余部分的多面体 M_1 就是 K_1 的凸包, 这里所用的平面通过从该顶点发出的 3 条棱上的各一个支点. 这样一来, 易知 M_1 有 14 个面, 其中位于 L_1 的六面上各为一个 $a\times 2a$ 的矩形(a 为正四面体 $ABCD$ 的棱长), 共 6 个矩形, 另有 8 个正三角形, 4 个边长为 a 而另 4 个边长为 $2a$.



(4) 计算 M_1 的体积, 可以从立方体 L_1 的体积($=81$)中减去截下的 8 个锥体的体积$\left(4\times\frac{1}{2}+4\times 4=18\right)$, 故得 M_1 的体积为 63.

(5) 集合 K_n 的凸包 M_n 类似于 M_1, 也是以 12 个支点为顶点的凸多面体, 而这 12 个支点分别是由四面体 $ABCD$ 的顶点对进行 n 次对称映

射所得到的. M_n 的顶点各在立方体 L_n 的一条棱上,并把每一条棱都分成 $(3^n-1):(3^n+1)$ 的两部分,L_n 是将 L_0 关于中心作系数为 3^n 的同向位似而得到的立方体. 类似于(4) 可得,M_n 的体积为 $\frac{1}{2}(5\times 3^{3n}-3^{n+1})$.

10·33 在平面上有100个点,其中任何两点的距离都不超过1,并且任何3点为顶点都构成钝角三角形. 试证能够作出一个半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆,使得所有这些点都在这个圆内或圆周上.

(第24届莫斯科数学奥林匹克,1961年)

[证] 设在100个给定点中,彼此间距离最远的两点是 A,B. 以线段 AB 为直径作圆 S,则因对任何给定点 C,$\triangle ABC$ 为钝角三角形,故点 C 在圆 S 内部,即所有给定点都在圆 S 内部或圆周上. 若 $AB<1$,则圆 S 的以 $\frac{1}{2}$ 为半径的同心圆即为所求.

10·34 在平面上给定25个点,其中任何3点中都有两点间的距离小于1. 求证其中必可选出13个点来,使得它们都位于一个半径为1的圆内.

(第25届莫斯科数学奥林匹克,1962年)

[证] 设在给定的25点中,两点之间距离最大的是 A 和 B. 于是对于任何异于 A,B 的给定点 C,由已知,C 必与 A,B 两点之一的距离小于1. 对于其余23个给定点都是如此,故由抽屉原理知,A,B 两点中必有一点,不妨设为 A,与它距离小于1的点至少有12个. 于是以 A 为心,1为半径的圆中至少有13个给定点.

10·35 在平面上给定 n 个点,其中任何3点都含在一个半径为1的圆内. 求证这 n 个点全都含在同一个半径为1的圆内.

(第7届莫斯科数学奥林匹克,1941年)

[证] 从 n 个给定点中任取3点. 若以3点为顶点构成的三角形是锐角三角形,则过这3点作一个圆;否则就以3点中距离最远的两点间的连线为直径作一个圆. 于是每取一个3点组,就可作出一个圆,共可作出有限多个不同的圆. 设圆 S 是其中半径最大的圆之一,它从属于3点组 $\{A,B,C\}$.

下面往证 n 个给定点中的任何一点都不在圆 S 之外. 若不然,设有

给定点 M 在圆 S 之外.

(1) 若 $\{A,B,C\}$ 中有两点是圆 S 的对径点,设 AB 为圆 S 的直径,则线段 AB 是过 A,B,M 3 点的圆的弦但不是直径,故后者的直径大于圆 S 的直径,此与圆 S 的最大性矛盾.

(2) 若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,则不妨设点 M 与点 C 在直线 AB 同侧.从而过 M,A,B 3 点的圆的直径大于圆 S 的直径,矛盾.

按圆 S 的作法可知,它的半径小于 1,从而与圆 S 同心且半径为 1 的圆即为所求.

10·36　已知平面上有 $2n+3(n\geqslant 1)$ 个点,其中没有三个点共线,也没有四个点共圆,能不能通过它们之中的三点作一个圆,使得其余 $2n$ 个点一半在圆内,一半在圆外?证明你的结论.

(中国北京市数学竞赛,1963 年)

[证]　答案是肯定的.

首先在这 $2n+3$ 个点之中一定可以找到 A,B 两点,使得其余 $2n+1$ 个点都在直线 AB 的一侧.

按任意选定的方向通过每个点作一直线,这样的直线至多有 $2n+3$ 条,其中有一条最靠外,设其为 l_1,若 l_1 上有所设的两点,那么 l_1 便是所求的直线.若 l_1 上只有所设的一点 A,由 A 出发,通过其余的每个点作一射线,这 $2n+2$ 条射线与 l_1 上某一固定射线所夹的角,有一个最小的,这条射线所在的直线就是所要的,不妨设它上边的第二点是 B.

线段 AB 在其余 $2n+1$ 个点张开的角必然各不相等.这是因为已知各点没有四点共圆.

将此 $2n+1$ 个角按大小依次排列为

$$Q_1<Q_2<\cdots<Q_n<Q_{n+1}<Q_{n+2}<\cdots<Q_{2n+1}.$$

而对应于 Q_{n+1} 的点 C,则圆 ABC 即为所求,此时对应于 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 的点都在圆外,对应于 $Q_{n+2},Q_{n+3},\cdots,Q_{2n+1}$ 的点都在圆内.

10·37　在平面上给定一个有 n 个点的点集.已知点集中任何两点都能确定平面的一种运动:当第 1 个点移动到第 2 个点的位置上时,这个点集移动得到的点集仍是它自身.求证这个点集中所有点全都位于同一个圆周上.

(第 27 届莫斯科数学奥林匹克,1964 年)

[证]　设点集中 n 个点的重心为点 O.因为点集在规定的运动下

所得的点集仍然是它自身，故重心 O 是运动的不动点. 由于平面的基本运动只有两种：平移和旋转，而平移没有不动点，故知所规定的运动都是绕重心 O 的旋转. 又因任何两点都规定一个运动，即绕点 O 的旋转，故任何两点距点 O 的距离都相等. 从而 n 个点都在以点 O 为心的同一个圆周上.

10·38　在正 1976 边形中，标出了所有边的中点以及所有对角线的中点，问最多有多少个标出的点在同一个圆周上？

（第 10 届全苏数学奥林匹克，1976 年）

［解］　在正 1976 边形中，共有 987 种长度互不相同的对角线. 其中最长的对角线共有 988 条，它们每条的中点都是正 1976 边形的中心 O. 其余的每种对角线各有 1976 条，它们的中点在一个以 O 为心的圆上. 正 1976 边形的各边中点也在一个以 O 为心的圆上. 这样我们共得到 987 个同心圆，每个圆上都有 1976 个标定点.

任何圆 S，它与这 987 个圆中的每个圆至多交于两点，即使点 O 也在 S 上，圆 S 上也至多有 1975 个标定点. 故知所求点数的最大值为 1976.

10·39　A 是平面上 $n(n \geqslant 2)$ 个点的集合. 求证存在以集合 A 的某两点为直径两端的圆面（含周界）由至少含有集合 A 中的 $\left[\frac{n}{3}\right]$ 个点，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

（日本数学奥林匹克，1991 年）

［证］　对 $n = 2$，结论显然正确.

当 $n \geqslant 3$ 时，考虑把集合 A 中的 n 个点包含在圆内（包括圆周）的所有圆中最小的一个圆，记此最小圆为圆 C.

(1) 若圆 C 上只有集合 A 中的两个点 P, Q. 我们证明这两点恰好是圆 C 直径的两个端点.

用反证法. 若 P, Q 不是直径的端点，设集合 A 中的其余 $n-2$ 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-2}$ 对线段 PQ 的张角满足

$$\angle PA_1Q \leqslant \angle PA_2Q \leqslant \cdots \leqslant \angle PA_{n-2}Q,$$

如果 $\angle PA_1Q > 90^\circ$，则以 PQ 为直径的圆 C' 也包含了 A 中的全部点且半径比圆 C 小，与圆 C 最小矛盾.

如果 $\angle PA_1Q \leqslant 90^\circ$，则过 P, Q, A_1 三点的圆同样也包含了 A 中

的全部点，由正弦定理知，此圆半径比圆 C 的半径小，也与圆 C 最小矛盾.

所以 P,Q 为直径的两个端点，圆 C 是满足题目要求的圆.

(2) 现在设在圆 C 上至少有含 A 的 3 个点.

则从中可选出 3 个点，使得以这 3 点为顶点构成的三角形为直角三角形或锐角三角形.

否则，若圆 C 上任意三点构成的三角形都是钝角三角形，则它们都位于圆 C 的一段劣弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 上，我们可作一个比圆 C 小的圆，它包含劣弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 及 A 中的点，这与圆 C 的最小性矛盾.

设 P,Q,R 为集合 A 中的点，且在圆 C 上，$\triangle PQR$ 为直角三角形或锐角三角形，于是以 PQ,QR,RP 为直径分别作圆，则这三个圆面覆盖了圆 C 及其内部，从而也就覆盖了集合 A 中的 n 个点，因此这三个圆中至少有一个圆含有集合 A 中的至少 $\left[\frac{n}{3}\right]$ 个点.

10·40 空间中给定 n 个点($n\geqslant 5$)，其中任何 4 点都不共面，并且它们还具有如下性质：只要有某个球面经过其中某 4 点，则其余的所有点都位于该球面上或其内部. 求证所有给定点全都位于同一个球面上.

(原苏联教委推荐试题，1988 年)

[证] 在给定点中选取 3 点 A,B,C，使其余的所有点都在平面 ABC 的同一侧. 这是可以办到的. 实际上，只要取 n 个给定点的凸包多面体的任何一个面上的 3 个顶点就行了. 然后任取一个给定点 D，因为 A,B,C,D 不共面，所以过 4 点可以作一个球面 $\sum$. 按已知，其余的所有点都在 $\sum$ 上或其内部.

若有点 E 在球面 $\sum$ 的内部，则点 D 位于 A,B,C,E 4 点所确定的球面的外部，此与已知矛盾. 所以，所有给定点都在球面 $\sum$ 上.

10·41 在平面上任给 5 点，其中任何 3 点不共线，任何 4 点不共圆. 若一圆过其中 3 点且另两点在圆内外各一点，则称之为“好圆”. 若记好圆的个数为 n，求 n 的所有可能值.

(中国国家集训队选拔试题，1991 年)

[解] 在 5 点中任取两点 A,B 并过这两点作一条直线. 若另外 3 点 C,D,E 在直线 AB 的同侧，则考察 $\angle ACB,\angle ADB,\angle AEB$. 不妨设

$\angle ACB < \angle ADB < \angle AEB$. 过 A,B,D3点作圆,则点 C 在圆外而点E 在圆内,即圆 ABD 为好圆. 显然,过 A,B 两点的好圆只此一个. 若 C, D,E 分别在直线AB 的两侧,不妨设 C,D 在直线AB 的上方而E 在下方且有 $\angle ACB < \angle ADB$. 如果 $\angle AEB + \angle ADB < 180°$,则圆 ACB 是惟一好圆;如果 $\angle AEB + \angle ACB > 180°$,则圆 ADB 是唯一好圆;如果 $\angle AEB + \angle ACB < 180°$, $\angle AEB + \angle ADB > 180°$,则圆 ACB, ADB, AEB 都是好圆. 这就是说,过两个固定点的好圆或者 1 个,或者 3 个.

由 5 点共可组成 10 个点对,过每个点对至少有一个好圆,故至少有 10 个好圆(包括重复计数). 每个好圆恰过 3 个点对,所以至少有 4 个不同的好圆,即 $n \geqslant 4$.

设 $n > 4$. 将 5 点中每两点间连结一条线段,则每条线段或是一个好圆的弦,或是 3 个好圆的公共弦. 若恰有 5 个好圆,则它们共有 15 条弦. 由于总共只有 10 条线段且每条线段在上述计数中的贡献为 1 或 3, 10 个奇数之和为偶数,不可能为 15,故 $n \neq 5$. 若至少有 6 个好圆,它们至少有 18 条弦. 这时贡献为 3 的线段至少有 4 条. 4 条线段有 8 个端点,故其中必有两条线段有一个公共端点,不妨设为 AB, AC. 于是圆 ABD, ACD 都是好圆. 这意味着过 A,D 的好圆至少有两个,当然有 3 个. 同理,过 A,E 的好圆也有 3 个.

设 AB,AC,AD,AE 中最短的一条是 AB,于是 $\angle ACB$, $\angle ADB$, $\angle AEB$ 都是锐角. 若点 C,D,E 在直线AB 的同侧,则过 A,B 的好圆只有一个,所以这 3 点必分别在直线 AB 的两侧. 这时,由于 $\angle ACB$, $\angle ADB$, $\angle AEB$ 中任何两个角之和都小于 $180°$,所以过 A,B 两点的好圆不能有 3 个,矛盾.

综上可知,好圆的个数 $n = 4$.

10·42 在平面上给定不在一条直线上的 n 个点,$n \geqslant 3$. 求证当过每两点引一条直线时,至少可引出 n 条不同的直线.

(波兰数学奥林匹克,1968 年)

[证] 当 $n = 3$ 时,不共线的 3 点为三角形的 3 个顶点,恰好可引出 3 条不同的直线,结论成立.

为了完成归纳过渡,我们先给出一个引理:

引理 设 S 为平面上的一个有限点集. 如果过 S 中任何两点的直线上都至少含有 S 中的 3 个点,则 S 中的所有点共线.

这是著名的雪尔维斯特定理，是使用极端原理证明的，这里从略.

设当 $n = k \geqslant 3$ 时结论成立. 当 $n = k + 1$ 时，因为 $k + 1$ 个点不共线，故由引理知，必可从中找出两点，过这两点的直线上不含其他给定点. 不妨设这两点是 A_1 和 A_{k+1}. 因为 $k + 1$ 点不共线，所以，两个 k 点组 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$，$\{A_2, A_3, \cdots, A_{k+1}\}$ 中至少有一个不共线，不妨设为前一组. 于是由归纳假设知 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 间至少可连出 k 条不同直线. 再加上直线 A_1A_{k+1}，便知结论于 $n = k + 1$ 时成立.

10·43　在平面上给定 22 个点，其中任何 3 点都不共线. 试证可以把它们分成 11 对，使得连结每对两点所得的 11 条线段间至少有 5 个不同的交点.

（匈牙利数学奥林匹克，1971 年）

[证]　为证本题，我们要使用如下的著名结果：

引理　在平面上给定 5 点，其中任何 3 点都不共线，则从 5 点中必可选出 4 点，使它们是一个凸四边形的 4 个顶点.

当我们把引理中的 4 点按凸四边形的相对顶点分成两对时，连线恰为该凸四边形的两条对角线，当然有 1 个交点.

作一条直线 l_1，使 22 个给定点都在 l_1 的同侧且任何两个给定点间的连线都不与 l_1 平行. 然后将 l_1 向有点的一侧平行移动，依次得到直线 l_2, l_3, l_4, l_5，使得直线 l_1 与 l_2 之间，l_2 与 l_3 之间，l_3 与 l_4 之间，l_4 与 l_5 之间及 l_5 之外的给定点的个数分别为 5,4,4,4,5.

由引理，从 l_1 与 l_2 之间的 5 点中可以取出 4 点，使它们是一个凸四边形的 4 个顶点. 从而 4 点可以分成两对，使其两条连线有一个交点 P_1. 然后将余下的 1 个点和 l_2 与 l_3 之间的 4 点放在一起共 5 点，于是由引理知从中又可选出 4 点分成两对，使其连线又有一个交点 P_2. 容易看出，交点 P_1 在 l_1 与 l_2 之间，交点 P_2 在 l_2 与 l_3 之间. 这样继续下去，便可得到 5 个互不相重的交点.

10·44　在平面上给定 200 个点，其中任何 3 点都不共线. 能否给这些点从 1 到 200 编上号码，使得当 i 依次取 1,2,…,100 时，过点 i 和 $100 + i$ 的共 100 条直线两两都相交?

（第 33 届莫斯科数学奥林匹克，1970 年）

[解]　首先，在平面上取一条直线 l_1，使 l_1 上有两个给定点且直线 l_1 两侧各有 99 个给定点. 把直线 l_1 取为 x 轴，不妨设它的方向是水

平的并规定逆时针方向的角为正的.

过位于直线 l_1 不同侧的任何两点都作一条直线,则共有 99^2 条直线.以直线 l_1 为始边,选取这些直线中与 l_1 夹角最小的一条直线,记为 l_2.将 l_1 和 l_2 上的各两个给定点分别编号为(1,101)和(2,102).将平面上恰过2或102中一点的所有直线都擦去.再将 l_2 作始边,选取平面上与 l_2 夹角最小的一条直线,记为 l_3.如此继续下去,直到选出直线 l_{100} 为止.分别把直线 l_i 上的两点编号为 $(i,100+i)$,$i=3,4,\cdots,100$,则容易验证,直线 $l_1,l_2,\cdots,l_{100}$ 中的任何两条都相交.

10·45　在平面上给定3点,从中任选两点连一条线并作连线的中垂线,再作出所有各点关于此中垂线的对称点.然后再从已有各点(包括原有的点和对称而来的新点)中选取两点,并重复上述所有过程.这样无限进行下去.求证在平面上存在一条直线,使得到的所有点全都位于此直线的同一侧.

(第31届莫斯科数学奥林匹克,1968年)

[证]　我们证明一个加强命题:得到的所有点都在一个圆周上或一条直线上.由这个命题立即可以推知原命题成立.

如果3个给定点共线,则显然,得到的所有点都在这条直线上.如果3个给定点不共线,则过这3点作圆 S.从3点中任取两点连一条线,当然是圆 S 的一条弦.它的中垂线当然过圆 S 的中心,从而对称点都在圆 S 上.继续作下去时也是如此,即所得到的所有点都在圆 S 上.

10·46　如果点集 H 的任意一点关于点 O 的对称点仍属于 H,则称点 O 为集 H 的对称中心.求证有限点集不可能有两个不同的对称中心.

(匈牙利数学奥林匹克,1935年)

[证]　设点 O 是有限集 H 的对称中心.因 H 为有限点集,故有一点 $A\in H$,它到点 O 的距离最大.于是,当以点 O 为心,OA 为半径作圆 G 时,则集 H 中的所有点都在圆内或圆上,A 关于点 O 的对称点 A' 也在圆 G 上且 $A'\in H$.

如果点 O' 是集 H 的异于点 O 的另一个对称中心,则 AO' 与 $O'A'$ 中至少有一条线段的长度大于 $\frac{1}{2}AA'$,即圆 G 的半径.不妨设 $AO'>\frac{1}{2}AA'$.设点 A 关于点 O' 的对称点为 A'',于是 $AA''=2AO'>AA'$,

即大于圆 G 的直径，故 A'' 不可能在圆 G 之内或圆上，矛盾.

10·47 在空间中是否存在点集 M，使对任一平面 δ，交集 $M\cap\delta$ 都是非空的有限集？

（第 28 届国际数学奥林匹克预选题，1987 年）

[解] 存在. 令

$$M=\{(x,y,z)\mid x=t,y=t^3,z=t^5,t\in R\},$$

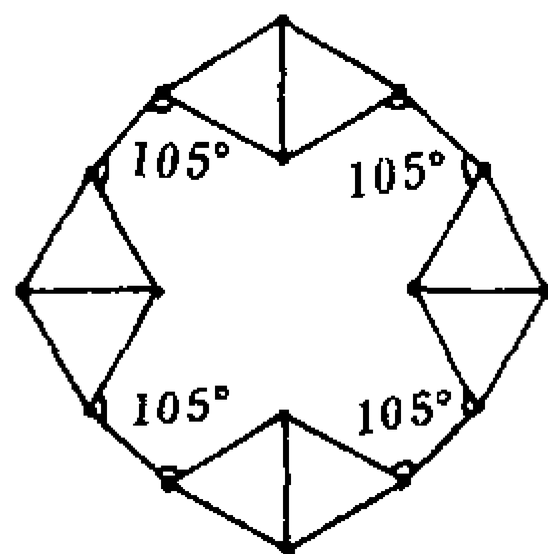
则对任一平面 $\sigma:Ax+By+Cz+D=0$（A,B,C 不全为 0），$M\cap\sigma$ 中的点满足方程

$$At+Bt^3+Ct^5+D=0.$$

这个方程对任何不全为 0 的 A,B,C，总有实数解且解的个数不多于 5，即 $1\leqslant|M\cap\sigma|\leqslant 5$.

10·48 能否在平面上放置有限多个点，使得对于其中每一个点，都恰有 3 个离它最近的点？

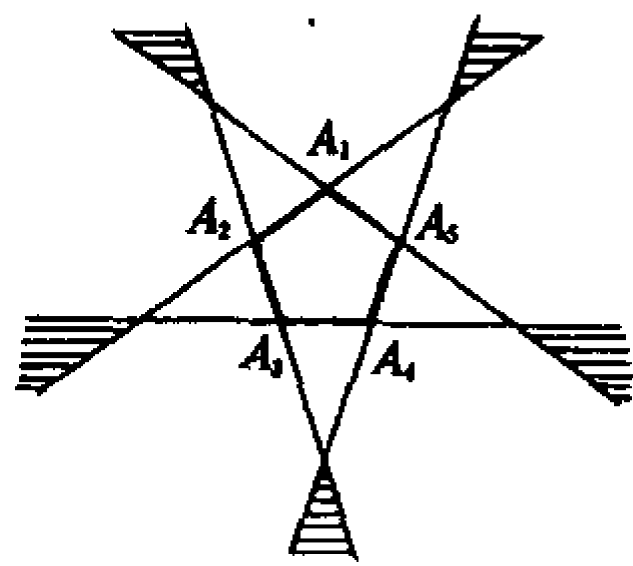
（第 39 届莫斯科数学奥林匹克，1976 年）



[解] 可以做到. 右图中共有 16 个点，其中每个点都恰有 3 个离它最近的点，即有线相连的 3 个点.

10·49 设在平面上给出一个正五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$. 能否在平面上选出一个点集，使它具有如下性质：对于任何一个不在正五边形内部的点，都可以过点集中的某两点连一条线段，使其通过该点；而对于正五边形内部的任何一点，这样的线段则都无法作出？

（第 31 届莫斯科数学奥林匹克，1968 年）



[解] 右图阴影线所示的点集（带边）即满足题中要求. 当然，光要这个集合的边界点而不要内点的点集，也满足题中要求.

10·50 平面上给定一些点，其中任何两点间的距离都大于 2. 设集合 M 的面积小于 π. 求证可以在平面上将集合 M 平移 1 个长度小于 1 的向量，使平移后的集合不含这些给定点.

（前南斯拉夫数学奥林匹克，1973 年）

[证] 设给定 n 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$. 以每个 A_i 为心，1 为半径作

圆面 $S_i, i = 1,2,\cdots,n$,并令

$$V_i = S_i \cap M, i = 1,2,\cdots,n.$$

由于 $A_iA_j > 2, 1 \leqslant i < j \leqslant n$,所以诸 S_i 互不相交.从而诸 V_i 也互不相交.

另一方面,由于 $V_i \subset M, i = 1,2,\cdots,n$,故有 $V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n \subset M$.所以 $V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$ 的面积小于π.将每个圆面 $S_i(i > 1)$ 都平移到与 S_1 重合,于是所有 V_i 都平移到圆面S_1 中.因为 S_1 的面积为 π 而所有 V_i 的面积之和小于π,故存在点 B 位于S_1 的内部,使点 B 既不属于 V_1 也不属于 $V_i(i = 2,\cdots,n)$ 的平移像.由此可见,$|\overrightarrow{BA_1}| < 1$ 且当将集合 M 平移一个向量$\overrightarrow{BA_1}$ 时,给定点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都不在 M 的平移像中.

10·51　在一个正方体的表面上用粉笔标出 100 个不同的点.试证可以用两种不同的方法把方块放到黑色桌子上(并且使两次所放的位置完全重合),使得两次在桌子上留下的粉笔印痕有所不同(如果粉笔点在正方体的棱上或顶点上,也同样产生印痕).

(第 31 届莫斯科数学奥林匹克,1968 年)

[证]　若不然,则所有可能的印痕(共 24 个)都相同.记这 100 个给定点的集合为 S.显然.若有一个顶点属于 S,则 8 个顶点全都属于 S.故 S 中非顶点的点数为 100 或 92.

若有棱上 1 点属于 S,则另 11 条棱上的相应点也属于 S,这 12 个点算作一组;若有某面的中心属于 S,则 6 面的中心都属于 S,这 6 点划为一组;若有某面的非中心内点属于 S,则每面 4 点,6 面共 24 个相应点都属于 S,这 24 点划为一组.但这些组的点数为 6 的倍数,故 S 中非顶点的点数应为 6 的倍数,不可能是 100 或 92,矛盾.

10·52　一个圆内有 6000 个点,其中任三点都不共线.

(1) 能否把这个圆分成 2000 块,使每块恰有三个点,如何分?

(2) 若每块中的三点满足:两两间的距离为整数且不超过 9,则以每块中的三点为顶点作三角形,这些三角形中大小完全一样的三角形至少有多少个?

(中国浙江省高中数学竞赛选拔赛,1989 年)

[解]　(1) 圆内 6000 个点可确定 C_{6000}^2 条直线.

因为 C_{6000}^2 是一个有限数,所以一定存在着圆的一条切线,使它不平行于 C_{6000}^2 条直线中的任何一条.记这条切线为 l.

将 l 在圆上作平行移动,显然 6000 个点将被逐个越过,这是因为,如果 l 同时越过两个点,则连结此两点的直线必与 l 平行,这与 l 取法不合.于是当 l 越过了3个点而还未遇上第4个点时,作圆的一条弦 l_1,同样,当越过第4,5,6个点时作弦 $l_2,\cdots$,如此可作出 1999 条弦,将圆分成 2000 块,每块恰含有三个点.

(2) 首先计算边长为整数,最长边不超过 9 的三角形个数.

设三边长 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant 9$,$a,b,c$ 为正整数.

当 $c=9$ 时,注意到 $a+b>c$,则

$c=9,b=5,a=5$,此时有 1 个三角形.

$c=9,b=6,a=4,5,6$,此时有 3 个三角形.

$c=9,b=7,a=3,4,5,6,7$,此时有 5 个三角形.

$c=9,b=8,a=2,3,\cdots,8$,此时有 7 个三角形.

$c=9,b=9,a=1,2,\cdots,9$,此时有 9 个三角形.

即 $c=9$ 时,可得 25 个三角形.

同理,$c=8$ 时可得 20 个三角形,$c=7,6,5,4,3,2,1$ 时,可得不同三角形的个数依次为:16,12,9,6,4,2,1.

所以边长为整数,且最长边不超过 9 的大小不同的三角形总数是

$$1+2+4+6+9+12+16+20+25=95\text{ 个}.$$

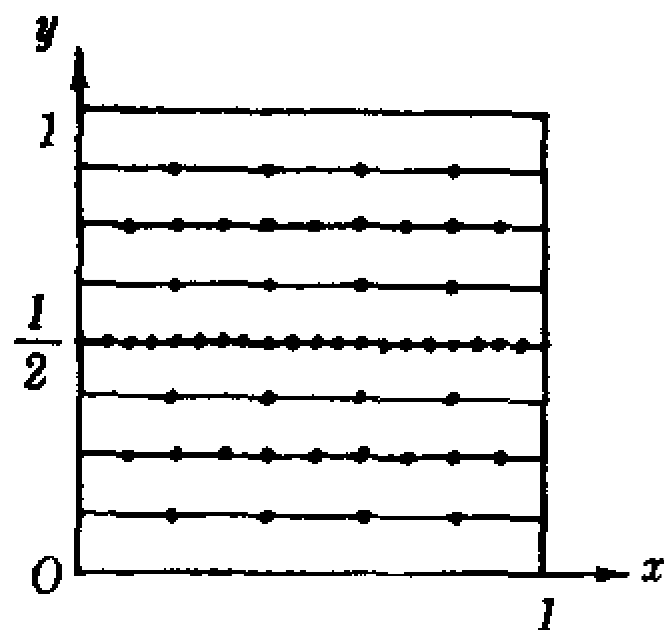
在 2000 个三角形中,大小完全一样的三角形至少有

$$\left[\frac{2000}{95}\right]+1=22$$

个.

10·53 能否把 1965 个点放到边长为 1 的正方形中,使得任何位于正方形内,边分别平行于正方形的边且面积为 $\frac{1}{200}$ 的矩形内部至少含有一个这样的点?

(第 5 届全俄数学奥林匹克,1965 年)



[解] 在正方形 $0\leqslant x,y\leqslant 1$ 中的中位线 $y=\frac{1}{2}$ 上均匀地放置 200 个点 $C_0=$

$\left\{\left(\frac{k}{201},\frac{1}{2}\right) \mid k=1,2,\cdots,200\right\}$. 然后在直线 $y=\frac{1}{4}$ 和 $y=\frac{3}{4}$ 上各放 100 个点，共 200 个点 $C_1=\left\{\left(\frac{k}{101},\frac{1}{4}\right) \mid k=1,2,\cdots,100\right\} \cup \left\{\left(\frac{k}{101},\frac{3}{4}\right) \mid k=1,2,\cdots,100\right\}$. 依次进行下去，当 $m=2,3,\cdots,7$ 时，在每条直线 $y=(2l-1)2^{-m-1}, 1 \leqslant l \leqslant 2^m$ 上各均匀放置点

$$m_m=\left\{\left(\frac{k}{m_m+1},\frac{2l-1}{2^{m+1}}\right) \mid k=1,2,\cdots,m_m\right\},$$

其中 $m_m=[200 \cdot 2^{-m}]$. 当 $m=7$ 时，在 128 条相应线段上各放一个点. 这样，总共放的点数为

$$\sum_{m=0}^{7} 2^m m_m = 200+2\times 100+4\times 50+8\times 25+16\times 12+32\times 6 + 64\times 3+128=1704.$$

这个过程可参看上图.

容易验证，在所放的这 1704 个点之间，不能再挤进一个面积为$\frac{1}{200}$的任何矩形. 实际上，如果矩形与中位线 $y=\frac{1}{2}$ 相交，则它的底边不大于$\frac{1}{201}$，面积不大于$1\times\frac{1}{201}$；如果它与中位线不交但与直线 $y=\frac{1}{4}$ 或 $y=\frac{3}{4}$ 相交，则它的高不超过$\frac{1}{2}$，底不超过$\frac{1}{101}$，依此类推. 最后，如果矩形与形如 $y=\frac{n}{256}, n=1,2,\cdots,255$ 的直线都不相交，则它的高不大于$\frac{1}{256}$.

10·54　对任意自然数 $n \geqslant 3$，在欧氏平面上都存在 n 个点，使得其中任何两点间的距离是无理数而每三点构成的三角形非退化且有有理面积.

（第 28 届国际数学奥林匹克，1987 年）

［证］　考察点列$(i,i^2), i=1,2,\cdots,n$，则其中任意两点(i,i^2)和(j,j^2)之间的距离为

$$\sqrt{(i-j)^2+(i^2-j^2)^2}=|i-j|\sqrt{1+(i+j)^2}.$$

由于 $i+j<\sqrt{1+(i+j)^2}<i+j+1$，故知这个夹在两个相继正整

数之间的根式的值是无理数，从而两点间的距离是无理数.

对于这个点列中的任意三点(i,i^2)，(j,j^2)和(k,k^2)，由于它们是同一条抛物线$y=x^2$上的三点，当然不共线，即此三点组成的三角形为非退化的，它的面积为

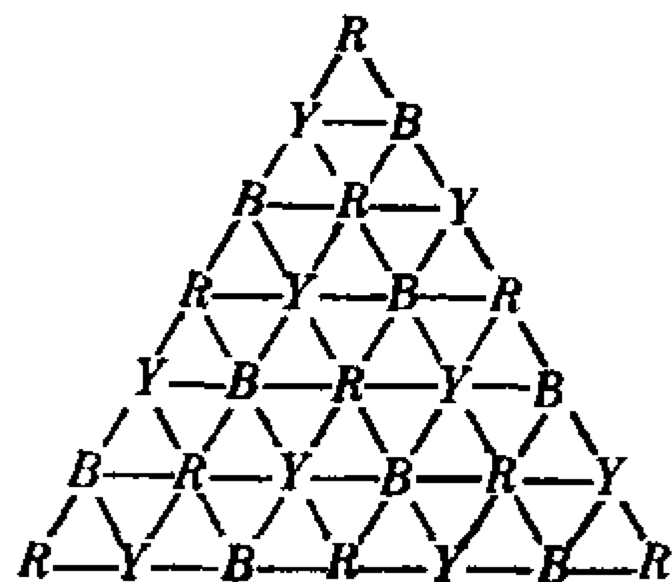
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & i^2 & 1 \\ j & j^2 & 1 \\ k & k^2 & 1 \end{vmatrix}$$

的绝对值，当然是一个有理数.

10·55　将边长为n的正三角形用平行于其边的直线把它分成n^2个边长为1的小正三角形. 试证存在$n\in N$，使在这些小正三角形的顶点中可以选出$1993n$个顶点，其中的任何3点都不是某正三角形的3个顶点(这种正三角形的边不一定平行于大正三角形的边).

(第19届全俄数学奥林匹克，1993年)

[证]　将已划分成n^2个小正三角形的网络的每个结点都涂上红(R)，黄(Y)，蓝(B)3种颜色之一(如图所示). 容易看出，网络中每个边长为1的正三角形的3个顶点的颜色都互异，而且网络中任何成正三角形顶点的3个结点的颜色或互异或全相同.



将3种颜色的结点中个数最少的一种颜色的结点去掉，并称这种操作为“淘汰”，则剩下的两种颜色的结点不少于$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(n+1)(n+2)>\frac{n^2}{3}$个. 以这些结点为顶点的任意正三角形的3个顶点颜色都相同，且边长不小于$\sqrt{3}$.

下面分开考察所剩两种颜色的结点的集合. 显然，每种颜色的结点集合都是边长为$\sqrt{3}$的正三角形网络的一部分. 像上面一样地进行三染色并进行“淘汰”，至少剩下$\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{n^2}{2}$个点，由它们所构成的正三角形的边长至少为$(\sqrt{3})^2=3$. 这样继续下去，在进行了$k$次淘汰之后，剩下的结点数不少于$\left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot\frac{n^2}{2}$，且它们所构成的正三角形的边长不小于$(\sqrt{3})^k$.

设 $n=3^m$，则在进行了 $k=2m+1$ 次淘汰之后，所余的结点中的任何 3 个点都不能是某正三角形的 3 个顶点，而这时点数不少于

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2m+1}\cdot\frac{n^2}{2}=\left(\frac{4}{3}\right)^m\cdot\frac{n}{3}.$$

可见，为使点数不少于 $1993n$，只须

$$\left(\frac{4}{3}\right)^m\geqslant 3\times 1993.$$

由此解得 $m\geqslant\log_{\left(\frac{4}{3}\right)}3\times 1993$. 从而知只要

$$n>3^{\log_{\left(\frac{4}{3}\right)}(3\times 1993)},$$

即可按上述程序选出 $1993n$ 个点满足题中要求.

10·56　在平面上给定一个有限点集，其中任何 3 点都不共线，并且对于集中的任何 3 点 A,B,C，$\triangle ABC$ 的垂心也在此集之中. 求所有这样的集合.

（第 18 届全俄数学奥林匹克，1992 年）

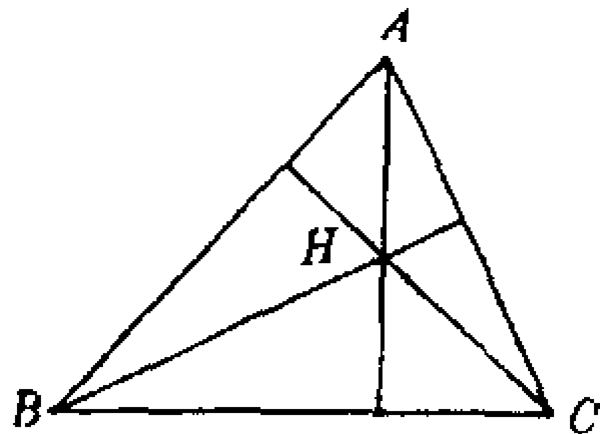
[解]　设点集 M 满足题中要求并考察点集 M 的凸包.

(1) 设凸包多边形的边数不少于 5，则必有 1 个内角是钝角. 设 A，B，C 是该多边形的 3 个相邻顶点且 $\angle ABC$ 为钝角，于是 $\triangle ABC$ 的垂心在三角形外，也在凸包多边形外，当然无法属于 M，矛盾. 可见，M 的凸包至多有 4 条边.

(2) 设 M 的凸包为四边形. 若四边形有 1 个内角是钝角，则像(1)中一样地可导出矛盾. 由此可知凸包为矩形. 易见，任何矩形的 4 个顶点所成的集合满足要求.

如果集 M 还有一点 E 在凸包矩形 $ABCD$ 之内，则点 E 和矩形的一组相对顶点 A，C 所构成的 $\triangle ACE$ 为钝角三角形. 易证，它的垂心在矩形之外，矛盾. 故知凸包为矩形且满足题中要求的点集 M 只此一种，即矩形的 4 个顶点所成的集合.

(3) 设 M 的凸包为三角形. 由(1)知，当然不能是钝角三角形. 若凸包 $\triangle ABC$ 为直角三角形，则直角顶点 C 又是垂心，故这时集 $\{A,B,C\}$ 满足题中要求，而且由(2)的证明知，$\triangle ABC$ 内不能再有 M 的点. 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则垂心 $H\in M$. 这时，点 A,B,C 分别为 $\triangle HBC$，$\triangle HCA$，



$\triangle HAB$ 的垂心. 可见,点集 $\{A, B, C, H\}$ 满足题中要求.

若 M 中还有第5点 D,不妨设 D 在 $\triangle HBC$ 之内,这将导致 $\triangle DBC$ 的垂心在 $\triangle ABC$ 之外,矛盾.

综上可知,满足题中要求的至少有 3 点的点集共有 3 种:

(i) 任何矩形的 4 个顶点所构成的点集;

(ii) 直角三角形的 3 个顶点所构成的点集;

(iii) 锐角三角形的 3 个顶点及垂心所构成的点集.

10·57 设 $n, k \in N$, S 是平面上 n 个点的集合,满足条件

(1) S 中任何三点都不共线;

(2) 对 S 中每一点 P, S 中至少存在 k 个点与 P 距离相等.

求证 $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

(第 30 届国际数学奥林匹克,1989 年)

[证 1] 对于 S 中任意两点 A_i, A_j,由(1)知在线段 A_iA_j 的垂直平分线上至多有 S 的两个点. 于是,在所有这样的垂直平分线上总共至多有 S 的 $2C_n^2$ 个点(包括重复计数). 于是有

$$2C_n^2 \geqslant nC_k^2,$$

亦即有

$$k^2 - k - 2(n-1) \leqslant 0.$$

解得 $k \leqslant \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 8(n-1)}) < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

[证 2] 考察以 S 中任意两点为端点的线段. 一方面,这种线段共有 C_n^2 条. 另一方面,对每点 $A_i \in S$, $i = 1, 2, \cdots, n$,有一个以 A_i 为心的圆,其上至少有 S 的 k 个点. 从而这个圆至少有 C_k^2 条弦,它们的端点都在 S 中. n 个圆至少有 nC_k^2 条这样的弦,而每两个圆至多有一条公共弦,所以,端点属于 S 的线段至少有 $nC_k^2 - C_n^2$. 于是有

$$C_n^2 \geqslant nC_k^2 - C_n^2,$$

$$2(n-1) \geqslant k(k-1).$$

由此解得 $k \leqslant \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 8(n-1)}) < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

10·58 设 O_{xyz} 是空间直角坐标系, S 是空间中一个有限点集, S_x, S_y, S_z 分别是 S 中所有点在 O_{yz} 平面, O_{zx} 平面和 O_{xy} 平面上的正投

影所成的集合.求证

$$|S|^2 \leqslant |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|.$$

注　所谓一个点在一个平面上的正投影是指由点向平面所作垂线的垂足。

(第33届国际数学奥林匹克,1992年)

[证1]　设共有 n 个平行于 O_{xy} 平面的平面上有 S 中的点,这些平面分别记为 $M_1, M_2, \cdots, M_n$.对于平面 M_i,$1 \leqslant i \leqslant n$,设它与 O_{yz},O_{zx} 平面分别交于直线 l_y 和 l_x,并设 M_i 上有 m_i 个 S 中的点.显然,$m_i \leqslant |S_z|$.设 M_i 上的点在 l_x,l_y 上的正投影的集合分别为 A_i 和 B_i,记 $a_i = |A_i|$,$b_i = |B_i|$,则有 $m_i \leqslant a_i b_i$.又因 $\sum_{i=1}^{n} a_i = |S_y|$,$\sum_{i=1}^{n} b_i = |S_x|$,$\sum_{i=1}^{n} m_i = |S|$,故由柯西不等式有

$$\begin{aligned}
|S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z| &= (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdot |S_z| \\
&\geqslant (\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \cdots + \sqrt{a_n b_n})^2 \cdot |S_z| \\
&= (\sqrt{a_1 b_1 |S_z|} + \sqrt{a_2 b_2 |S_z|} + \cdots + \\
&\quad \sqrt{a_n b_n |S_z|})^2 \\
&\geqslant (m_1 + m_2 + \cdots + m_n)^2 = |S|^2.
\end{aligned}$$

[证2]　如果 S 中任何两点的坐标的任一分量都不相同,则 $|S| = |S_x| = |S_y| = |S_z|$,所求证的不等式显然成立.

设存在两点 $A, B \in S$,二者至少有一个坐标相同,不妨设第3个坐标相同,即有 $z_a = z_b$,但第2个坐标不同且 $y_a < y_b$.以下用数学归纳法来证明.

设当点数 $n < k$ 时结论成立.当 $n = k$ 时,

令
$$S_1 = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in S, y \leqslant y_a\},$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in S, y > y_a\}.$$

则 S_1 与 S_2 均非空且 $S_1 \cup S_2 = S$,$S_1 \cap S_2 = \varnothing$,故有 $|S_1| < k$,$|S_2| < k$.于是由归纳假设有

$$\begin{aligned}
|S_1|^2 &\leqslant |S_{1x}| \cdot |S_{1y}| \cdot |S_{1z}|, \\
|S_2|^2 &\leqslant |S_{2x}| \cdot |S_{2y}| \cdot |S_{2z}|,
\end{aligned} \qquad ①$$

其中的 $S_{1x}, S_{1y}, S_{1z}, S_{2x}, S_{2y}, S_{2z}$ 的定义与 S_x, S_y, S_z 相同.注意到

$$|S_{1y}| \leqslant |S_y|, |S_{2y}| \leqslant |S_y|, \qquad ②$$

$$|S_{1x}| + |S_{2x}| = |S_x|, |S_{1z}| + |S_{2z}| = |S_z|, \qquad ③$$

由 ① 和 ② 便有

$$2|S_1||S_2| \leqslant 2(|S_{1x}| \cdot |S_{1y}| \cdot |S_{1z}| \cdot |S_{2x}| \cdot |S_{2y}| \cdot |S_{2z}|)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant 2|S_y|(|S_{1x}| \cdot |S_{2z}| \cdot |S_{1z}| \cdot |S_{2x}|)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant |S_y|(|S_{1x}| \cdot |S_{2z}| + |S_{1z}| \cdot |S_{2x}|). \qquad ④$$

由 ③ 和 ④ 便得

$$|S|^2 = (|S_1| + |S_2|)^2 = |S_1|^2 + |S_2|^2 + 2|S_1| \cdot |S_2|$$

$$\leqslant |S_y|(|S_{1x}| \cdot |S_{1z}| + |S_{2x}| \cdot |S_{2z}| + |S_{1x}| \cdot |S_{2z}| + |S_{2x}| \cdot |S_{1z}|)$$

$$= |S_y|(|S_{1x}| + |S_{2x}|)(|S_{1z}| + |S_{2z}|)$$

$$= |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|.$$

这就完成了归纳证明，因 $n = 1$ 时结论显然成立.

[证 3] 不妨设 S 中的点都是整点，用 V_{ij} 表示 S 中形如 (x, i, j) 的所有点的集合，即 S 中在 O_{yz} 平面上的投影为 (i, j) 的所有点的集合. 显然有

$$S = \bigcup_{(i,j) \in S_x} V_{ij}.$$

由柯西不等式

$$|S|^2 \leqslant \sum_{(i,j) \in S_x} 1^2 \times \sum_{(i,j) \in S_x} |V_{ij}|^2 = |S_x| \sum_{(i,j) \in S_x} |V_{ij}|^2.$$

令

$$X_{ij} = \{(a, b) \mid a, b \in V_{ij}\}, (i, j) \in S_x,$$

$$X = \bigcup_{(i,j) \in S_x} X_{ij},$$

则 $|X| = \sum_{(i,j) \in S_x} |V_{ij}|^2$. 定义映射 $f: X \longrightarrow S_y \times S_z$ 如下：

$$f((x, i, j), (x', i, j)) = ((x, j), (x', i)),$$

容易看出，f 是单射. 因而

$$|X| \leqslant |S_y| \cdot |S_z|,$$

从而得到

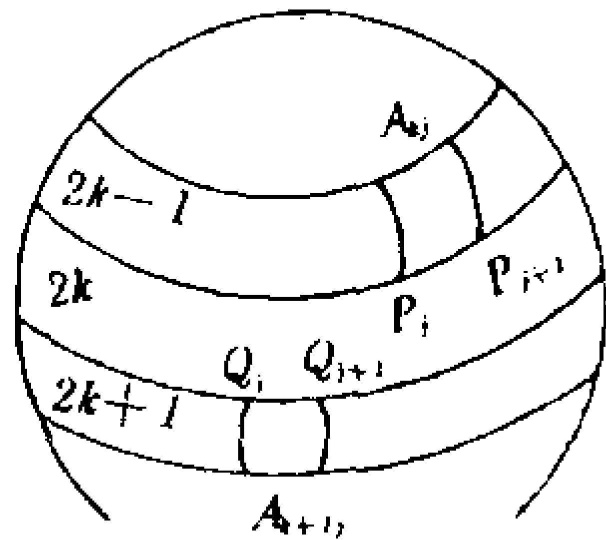
$$|S|^2 \leqslant |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|.$$

10·59　在球面上给定 n 个点. 试证可将球面分成 n 个全等的区域,使得每个区域中恰含 1 个给定点.

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)

[证]　n 个给定点两两连线共有 C_n^2 条,这些连线的垂直平分面在球面上截得的大圆至多 C_n^2 个. 此外,过每两点作大圆也是至多有 C_n^2 个. 由于这两种圆只有有限多个,故可作一条直径,使它的两个端点都不在上述这些大圆上. 记这条直径为 MN.

分别以点 M 和 N 为南北极,在球面上建立起像地球仪那样的经纬坐标系. 由选法知 n 个给定点的经度和纬度分别互不相同. 因此,可以作出 $2n-2$ 条纬线圈,将球面分成 $2n-1$ 个环带并从北向南依次编号为 $1,2,\cdots,2n-1$,其中 1 号和 $2n-1$ 号区域为球冠,使得每个奇数号环带内恰含 1 个给定点而每个偶数号环带内不含给定点.



对于每个 $1 \leqslant k \leqslant n$,用经线将第 $2k-1$ 号环带等分成 n 份,使给定点在其中一份的内部. 将这 n 个区域依次记为 $A_{k1},A_{k2},\cdots,A_{kn}$,使给定点所在的区域为 A_{kk}. 这样一来,所有奇数号环带已划分完毕. 对于偶数号环带,第 $2k$ 号环带的上下两个环带已划分好,因此 $2k$ 号环带的上下边界上各有 n 个分点和 n 段圆弧. 将其上的分点按相邻环带中 n 个区域的编号次序依次记为 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 和 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$. 对每个 $1 \leqslant j \leqslant n$,作球面上过 P_j,Q_j 两点的大圆弧将两点连结,于是这 n 条弧将第 $2k$ 号环带划分成 n 个区域: $B_{k1},B_{k2},\cdots,B_{kn}$.

令　$$\Omega_i = A_{1i} \cup B_{1i} \cup A_{2i} \cup B_{2i} \cup \cdots \cup B_{2n-2i} \cup A_{2n-1i},$$
$$i = 1,2,\cdots,n,$$

则这 n 个集合都是连通的且彼此都全等,每个区域中恰含 1 个给定点.

10·60　在空间中是否存在不在同一平面上的有限点集 M,使对 M 中的任意两点 A,B,都存在 M 中的另外两点 C,D,使直线 $AB \parallel CD$ 但二者不重合.

(第 15 届国际数学奥林匹克,1973 年)

[解 1]　取 M 是某正方体的所有顶点,中心,各面中心以及各棱

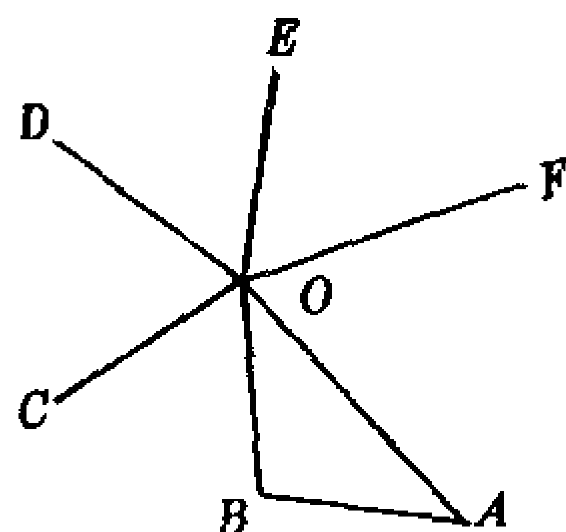
的中点所组成的 27 个点的集合即满足题中要求.

[解 2] 取 M 是某正方体的 8 个顶点及正方体的中心关于一组相对侧面的两个对称点共 10 个点的集合即满足题中的要求.

10·61 令 n 为大于 5 的整数, n 个共面的点中,每两个的距离均不相等,将每一点与和它距离最近的点用线段相连.证明没有一个点与多于 5 个点相连.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1988 年)

[证] 假设有点 O 与 6 个点 A,B,C,D,E,F 相连,并且这 6 个点是依顺时针排列的.



设 $\angle AOB = \min\{\angle AOB, \angle BOC, \angle COD, \angle DOE, \angle EOF, \angle FOA\}$,

则 $\angle AOB \leqslant 60°$.

又设 $OA > OB$.

这时 OA 不是 O 与它最近的点的连线.

又因为 $\angle AOB \leqslant 60°$,则 $OA > AB$,所以 OA 也不是 A 与到它最近的点的连线.因此 O,A 不能用线相连,即 O 点至多与 5 个点相连.

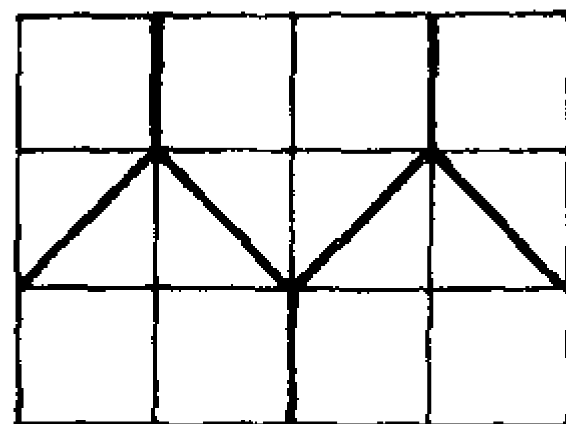
10·62 在半径为 1 的圆周上标出 100 个点,试证在圆周上可以找到这样的点,它到所有标定点的距离之和大于 100.

(第 33 届莫斯科数学奥林匹克,1970 年)

[证] 取给定圆的一条直径的两个端点 A 和 B.于是从这两点到任何异于 A,B 的标定点的距离之和都大于 2.因而从 A,B 两点到 100 个标定点的距离之和大于 200.从而 A,B 两点中至少有 1 点,从它到 100 个标定点的距离之和大于 100.

10·63 已知在 3×4 的矩形中有 6 个点,求证其中必有两点,它们之间的距离不大于 $\sqrt{5}$.

(第 15 届全苏数学奥林匹克,1981 年)



[证] 用右图所示的粗实线把 3×4 矩形分成 5 部分.由抽屉原理知 6 点中总有两点在一个区域中.这两点距离当然不大于 $\sqrt{5}$.

10·64 平面上最少要有多少个点,才能使得它们两两之间的距离值能分别取到 1,2,4,8,16,32,64 中的每一个值?

(第 45 届莫斯科数学奥林匹克,1982 年)

[解]　取8个点$A_1,A_2,\cdots,A_8$,使得$A_1A_2=1,A_2A_3=2,A_3A_4=4,\cdots,A_7A_8=64$便满足要求.可见,所求的最少点数不多于8.

取7条线段,其长分别为1,2,4,8,16,32,64.显然,其中任何一组线段都不能组成封闭折线.因此,当尽可能将它们首尾相接时,端点数总比线段数多1,即至少有8个不同端点.

所以,最少要有8个点才能满足题中要求.

10·65　设A和B是平面α上的两点,且在直线AB的同侧有n个不同的点$P_1,P_2,\cdots,P_n$,求证由A和B到$P_i(i=1,2,\cdots,n)$的距离所构成的集合中,不同元素的个数不小于$\sqrt{n}$.

(第31届国际数学奥林匹克候选题,1990年)

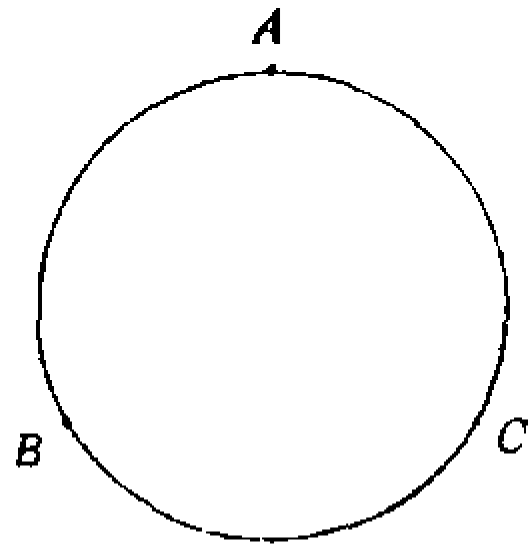
[证]　设点A到诸P_i的不同距离共有r个,点B到诸P_i的不同距离共有s个.于是诸P_i都位于以A为心的r个半圆上,也都位于以B为心的s个半圆上.因为这两组半圆都位于连心线AB的同一侧,故它们之间共有rs个交点.显然,每个P_i都属于这些交点的集合,故有$n\leqslant rs$.于是有$\max\{r,s\}\geqslant\sqrt{n}$,即点$A$和$B$到诸$P_i$的不同距离的个数不小于$\sqrt{n}$.

10·66　有$3n(n>1)$个点等分一个圆周,从这$3n$个点中任取$n+2$个点.

求证在所取的点中,总可以找到两点,使得在这个圆周上的连接这两点的两段弧都大于圆周的$\frac{1}{3}$.

(中国江苏省苏州市数学竞赛,1990年)

[证]　在$n+2$个取点中任取一点A,以A为一个分点,将圆周三等分,另外两个分点设为B,C.



(1)若$\overset{\frown}{BC}$内有所取的点,设其中一点为D,则$\overset{\frown}{ABD}$和$\overset{\frown}{ACD}$都大于圆周的$\frac{1}{3}$.

(2)若$\overset{\frown}{BC}$内没有所取的点,则$n+2$个点必有一部分在$\overset{\frown}{AB}$上,另一部分在$\overset{\frown}{AC}$上.

因为$\overset{\frown}{AB}$上(包括A,B两点)至多有$n+1$个点,所以至少有一点在$\overset{\frown}{AC}$上,或者相反,在$\overset{\frown}{AB}$上至少有一点.

设$\overset{\frown}{AB}$上距A最远的点为E，$\overset{\frown}{AC}$上距A最远的点F. 这时，$\overset{\frown}{EAF}$上共有$n+2$个所取的点，且$\overset{\frown}{EAF} > \frac{1}{3}$圆周.

若E,F不同时在B,C的位置上，则$\overset{\frown}{EBCF} > \frac{1}{3}$圆周.

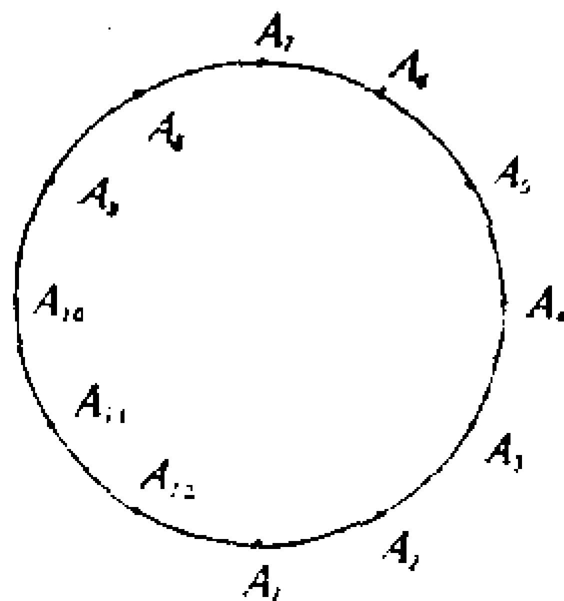
若E,F分别在B,C位置上，则$\overset{\frown}{AB}$或$\overset{\frown}{AC}$内有所取的点D，不妨$\overset{\frown}{AC}$内有所取的点D，显然有$\overset{\frown}{BAD} > \frac{1}{3}$圆周，$\overset{\frown}{BCD} > \frac{1}{3}$圆周.

综合以上，结论成立.

10·67　在平面上有12个点，其中任何两点之间的距离都不超过3厘米. 是否一定可以从这12点中选出4个点，使得这4点中的任何两点之间的距离都不超过2厘米?

（基辅数学奥林匹克，1977年）

［解］　不一定. 例如我们在直径为3的圆上依次取12个点$A_1,A_2,\cdots,A_{12}$，使得它们是圆内接正十二边形的12个顶点. 显然，这12点中的任何两点之间的距离都不超过3.



另一方面，易见

$$A_1A_2 < A_1A_3 = 1.5 < \frac{3}{\sqrt{2}} = A_1A_4 < A_1A_5 < A_1A_6 < A_1A_7 = 3.$$

在这12个点的任何4点中，距离最远的两点间的弧上至少还有两点，所以这两点间的距离不小于$A_1A_4 = \frac{3}{\sqrt{2}} > 2$，即这4点不满足题中要求.

10·68　设M为平面上的有限点集，求证其中必有一点，它在M中有不超过3个离它最近的点.

（第39届莫斯科数学奥林匹克，1976年）

［证］　设M中两点间的最小距离为d，将M中的与其他点的最小距离为d的点所构成的集合记为S. 考察S的凸包并设$A \in S$是S凸包多边形的一个顶点. 设与A距离最近的点是$B_1,B_2,\cdots,B_k$且$AB_1,AB_2,\cdots,AB_k$按逆时针方向排列. 于是$B_1,B_2,\cdots,B_k \in S$. 因为$\angle B_jAB_{j+1} \geqslant 60°$，$j=1,\cdots,k-1$，而$\angle B_1AB_k < 180°$，故得$k \leqslant 3$，即与点$A$最近的点不超过3个.

10·69　平面上的4个点间可以连成6条线段，求证其中最长线段与最短线段的比不小于$\sqrt{2}$.

（匈牙利数学奥林匹克，1961年）

［证］　考察4点的凸包.

(1)若凸包为四边形，则它必有一个内角不小于90°，设为$\angle A_1A_2A_3$，并设A_1A_2为$\triangle A_1A_2A_3$的最短边.于是由正弦定理有

$$\frac{A_1A_3}{A_1A_2}=\frac{\sin A_1A_2A_3}{\sin A_1A_3A_2}\geqslant\frac{\sin A_1A_2A_3}{\sin\left(90^\circ-\frac{1}{2}A_1A_2A_3\right)}$$

$$=2\sin\frac{1}{2}A_1A_2A_3\geqslant\sqrt{2}.$$

(2)若凸包为三角形，设点A_4在$\triangle A_1A_2A_3$之内.连结A_1A_4，A_2A_4，A_3A_4，则$\angle A_1A_4A_2$，$\angle A_2A_4A_3$，$\angle A_3A_4A_1$中，至少有一个角不小于120°.不妨设$\triangle A_1A_4A_2$为钝角三角形，其中$\angle A_1A_4A_2\geqslant 120^\circ$.于是像在(1)中一样地可证，$\triangle A_1A_4A_2$中的最长边与最短边之比不小于$\sqrt{3}$.

综上可知，最长线段与最短线段之比不小于$\sqrt{2}$.

10·70　平面上任给5点，它们之间的最大距离与最小距离之比记为λ.求证$\lambda\geqslant 2\sin 54^\circ$并请讨论等号成立的充分必要条件.

（中国高中数学联赛，1985年）

［证］　我们对四种情形分别给出证明.

(1)若5点中有3点共线，则显然有$\lambda\geqslant 2>2\sin 54^\circ$.

以下设任何3点都不共线.

(2)若5点的凸包为凸五边形$ABCDE$，则五边形必有一个内角不小于108°，不妨设$\angle B\geqslant 108^\circ$，且$AB\leqslant AC$.记$\angle B$的补角为$\alpha$，于是有

$$\lambda\geqslant\frac{AC}{AB}=\frac{\sin B}{\sin ACB}\geqslant\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}=2\cos\frac{\alpha}{2}\geqslant 2\cos 36^\circ$$

$$=2\sin 54^\circ.$$

(3)设5点的凸包为凸四边形$BCDE$，则点A必含在$\triangle BCD$或$\triangle BED$中，不妨设为前者.于是$\angle BAC$，$\angle CAD$，$\angle DAB$中至少有一个不小于120°.从而像(2)一样地可证$\lambda>2\sin 54^\circ$.

(4)设两点A，B含在$\triangle CDE$中，于是像(3)一样地可证$\lambda>$

$2\sin 54^\circ$.

综上可知,无论 5 点位置如何,总有 $\lambda \geqslant 2\sin 54^\circ$,而且等号仅可能在情形(2) 中出现,充分必要条件是五边形的最大角等于 108°,即 5 点为某正五边形的 5 个顶点时不等式中等号成立.

10·71 在平面上任意给定 6 点,求证在两两连结这些点所得的线段中,最长线段与最短线段的长度之比不小于$\sqrt{3}$.

(波兰数学奥林匹克,1966 年)

[证] (1) 若有 3 个给定点共线,不妨设 A_2 在线段 A_1A_3 上且 $A_1A_2 \leqslant A_2A_3$,于是 A_1A_3 与 A_1A_2 之比不小于 2,结论当然成立.

(2) 若有 3 个给定点为一个三角形的 3 个顶点且三角形有一个内角不小于 120°,则由正弦定理知这时结论也成立.

考察 6 个给定点的凸包.

(3) 若凸包为六边形,即 6 个给定点为凸六边形的 6 个顶点,则因六边形内角和为 720°,故必有一个内角不小于 120°. 因而由(2) 知这时结论成立.

(4) 若 6 个给定点的凸包为五边形,不妨设点 F 在凸五边形 $ABCDE$ 之内. 将五边形 $ABCDE$ 用对角线 AC,AD 分成 3 个三角形,则点 F 必在其中一个三角形的边上或内部. 若为前者,则由(1) 知结论成立,故可设点 F 在 $\triangle ABC$ 的内部. 连结 FA,FB,FC,则 $\angle AFB$,$\angle BFC$,$\angle CFA$ 中至少有一个角不小于 120°. 从而由(2) 知结论成立.

(5) 当 6 个给定点的凸包为四边形或三角形时,像(4) 一样地可证本题结论成立.

综上可知,最长线段与最短线段的长度之比不小于$\sqrt{3}$.

10·72 已知圆周上有 $3k$ 个点,它们把圆周分成 $3k$ 段弧,其中长度为 1,2,3 的各有 k 条. 求证这些点中必有两点为对径点(即两点连线为直径).

(第 16 届全苏数学奥林匹克,1982 年)

[证] 把所有给定点涂成黑色. 然后增加新的分点,把圆周全都分成长为 1 的弧,并把这些新的分点涂成白色. 若结论不成立,则每个黑点的对径点均为白色.

任取一条长度为 2 的弧 AC,则 A 和 C 为黑点,其中点 B' 为白点. 于是点 B' 的对径点 B 为黑点. 考察长度为 $3k-1$ 的弧 $\overset{\frown}{AB}$. 设在其上长

度为 1,2,3 的弧分别有 n_1,n_2,n_3 条.因为长度为 1 的弧的两个端点的对径点都是白点,故在 $\overset{\frown}{BC}$ 上将有 n_1 条长度为 3 的弧,从而有 $n_3=k-n_1$.又因 $n_1+2n_2+3n_3=3k-1$,故有 $2n_2+2n_3=2k-1$,两端奇偶性矛盾.

10·73　给定平面的 n 个相异点.证明其中距离为单位长的点对少于 $2\sqrt{n^3}$ 对.

（第 39 届美国普特南数学竞赛,1978 年）

[证]　对于平面上的点集 $\{P_1,\cdots,P_n\}$.

令 e_i 表示与 P_i 相距为单位长的点 P_j 的个数,不妨设 $e_i\geqslant 1$,则相距为单位长的点对的对数是

$$E=\frac{e_1+e_2+\cdots+e_n}{2}.$$

设 C_i 是以点 P_i 为圆心,以 1 为半径的圆.

因为每对圆至多有 2 个交点,故所有的 C_i 至多有

$$2C_n^2=n(n-1)$$

个交点.

点 P_i 作为 C_j 的交点出现 $C_{e_j}^2$ 次.因此

$$\begin{aligned}n(n-1)&\geqslant\sum_{j=1}^{n}C_{e_j}^2\\&=\sum_{j=1}^{n}\frac{e_j(e_j-1)}{2}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(e_j-1)^2\end{aligned}\qquad ①$$

由柯西不等式及 ① 式得

$$\begin{aligned}\left[\sum_{j=1}^{n}(e_j-1)\right]^2&\leqslant n\cdot\sum_{j=1}^{n}(e_j-1)^2\\&\leqslant n\cdot 2n(n-1)\\&<2n^3.\end{aligned}$$

于是有

$$\sum_{j=1}^{n}(e_j-1)<\sqrt{2}\cdot\sqrt{n^3}.$$

$$E=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}e_j}{2}$$

$$< \frac{n + \sqrt{2n^3}}{2}$$

$$< 2\sqrt{n^3}.$$

于是问题得证.

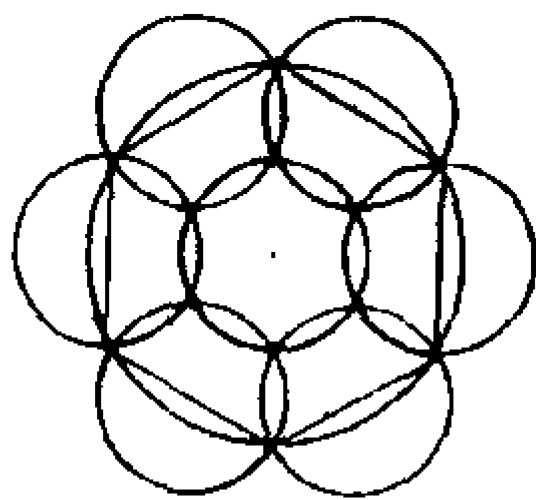
10·74　在平面上给定 8 点,它们都在某圆的圆内或圆周上,求证其中必有两点的距离小于圆的半径.

(匈牙利数学奥林匹克,1965 年)

[证 1]　8 点中至少有 7 点不与圆心重合.过不与圆心重合的 7 点各作一条圆的半径.若 7 条半径中有两条重合,则意味着这条半径上有两个非圆心的已知点,它们之间的距离当然小于半径.

以下设 7 条半径互不相同.于是它们把以圆心为顶点的周角分成 7 个角,从而其中必有 1 个角小于 60°.这个角两边上各有一个已知点,这两点间的距离便小于半径.

[证 2]　作这个圆的内接正六边形,使得正六边形的顶点都不是给定点.以正六边形的每条边为直径分别作 6 个圆,然后再以圆心为心,以给定圆的半径之半为半径作一个圆,则这 7 个圆覆盖了给定圆且它们的半径都是大圆半径之半.



现在,7 个小圆盖住了大圆内或圆上的 8 个点.我们约定,当给定点位于中心小圆与某边上小圆的相交部分(包括边界)时,把给定点算在边上的小圆中.由抽屉原理知,必有一个小圆中有两个给定点且当这个小圆为中心小圆时,给定点不在边界上;当给定点在边上小圆时,给定点不是小圆与大圆的交点.故知位于同一小圆中的两点间的距离小于大圆的半径.

10·75　在平面上给定 $n(n \geqslant 3)$ 个点,d 是其中两点之间距离的最大值,距离等于 d 的两点之间的连线称为这个 n 点集的直径.求证这个点集中的直径不多于 n 条.

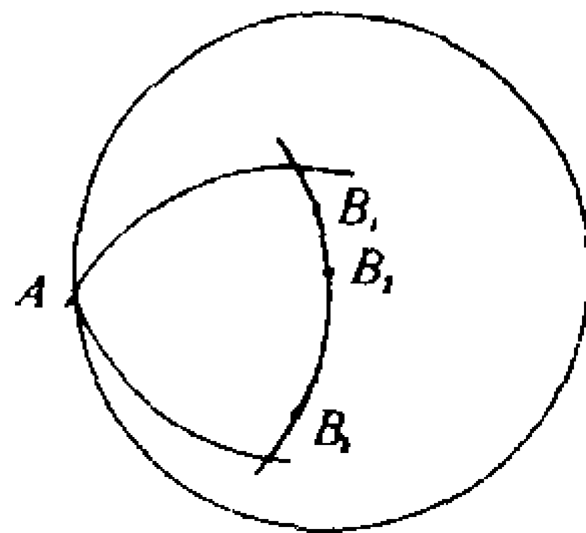
(第 7 届国际数学奥林匹克,1965 年)

[证]　设由给定点 A 引出的直径有 $k(k \geqslant 3)$ 条:$AB_1, AB_2, \cdots, AB_k$.于是有

$$AB_j = d, j = 1, 2, \cdots, k,$$

$$B_iB_j \leqslant d, 1 \leqslant i < j \leqslant k.$$

故知 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 都在以 A 为心，以 d 为半径的圆周的某条度数不超过 $60°$ 的圆弧上，不妨设这条弧的两个端点分别为 B_1 和 B_k. 因 d 为直径，故 n 个已知点全部落在分别以 A,B_1,B_k 为心，d 为半径的 3 个闭圆盘的交集 S 上. 由于 B_2 在 $\overset{\frown}{B_1B_k}$ 上，故集合 S 与以 B_2 为心，d 为半径的圆周只有一个公共点 A，S 中的其他点全在此圆内部，这意味着由 B_2 引出的直径只有一条. 同理可证，由 $B_3,\cdots,B_{k-1}$ 所引出的直径也都只有一条. 从而当把 A 和 $B_2,\cdots,B_{k-1}$ 这 $k-1$ 个点视为一组时，由它们所引出的直径总数恰为 $2(k-1)$. 对于每个引出直径不少于 3 条的点，都按上述原则构成一个点组. 容易看出，每个点组中只有一点引出的直径数不小于 3，其他各点均只引出 1 条直径. 所以，这样的点组两两不交. 显然，所有这样的点组分好之后，余下的点中每点至多引出两条直径. 可见，n 个已知点至多引出 $2n$ 条直径. 但在这个计数过程中，每条直径被计数两次，故知点集中至多有 n 条直径.



10·76　试证在半径为 1 的圆周上存在 1975 个点，使其中任意两点间的直线距离都是有理数.

（第 17 届国际数学奥林匹克，1975 年）

［证］　设给定圆周是坐标平面上的单位圆，记点 P_i 的幅角为 $2\theta_i$，则有

$$P_iP_j = |2\sin(\theta_i - \theta_j)| = 2|\sin\theta_i\cos\theta_j - \sin\theta_j\cos\theta_i|.$$

由此可见，只要选取 $\theta_i, i = 1,2,\cdots,1975$，使得 $\sin\theta_i,\cos\theta_i$ 都是有理数就可以了.

对于任意 $n \in N$，我们有

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^2 = 1.$$

因而，当 $\sin\theta_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$ 时，$\cos\theta_n = \pm\dfrac{2n}{n^2+1}$，二者都是有理数. 所以，只要令

$$\theta_n = \operatorname{arctg}\frac{n^2-1}{2n}, n = 1,2,\cdots,1975.$$

则这些 θ_n 所对应的点 P_n 便满足题中要求且都在上半圆上.

10·77　设坐标平面上有一个多边形 M,且 M 的面积大于 n.求证在 M 中必定存在 $n+1$ 个点,$P_j=(x_j,y_j)$,$j=1,2,\cdots,n+1$,使得其中任何两点 P_i,P_j 的对应坐标之差 x_i-x_j 和 y_i-y_j 都是整数.

（中国国家集训队选拔试题,1988 年）

［证］　用平行于坐标轴且与坐标轴距离为整数的所有直线把坐标平面划分成方格表,每个方格的面积为 1.将多边形 M 涂上红色,并将所有涂有红色的正方形都平移到同一个正方形上.可以证明,此正方形堆中必有一点在竖直方向上至少有 $n+1$ 层上被涂上了红色.若不然,则这个正方形的每一点至多在 n 层上被涂上红色,这意味着这些正方形中被涂红的面积之和不超过 n,即 M 的面积不大于 n,矛盾.

设在点 P,在竖直方向上有 $n+1$ 层被涂上了红色.用一根针竖直扎在 P 点上并穿透 $n+1$ 层涂有红色的正方形.于是在至少 $n+1$ 个正方形上各得到一个红点.然后将这些正方形移回原处,则在 M 中得到至少 $n+1$ 个点.显然,其中任何两点的坐标之差都是整数.

10·78　在直线上依次给定 n 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,使线段 A_1A_2,$A_2A_3,\cdots,A_{n-1}A_n$ 的长度都不大于 1.求证对每个自然数 $k<n-1$,总可以将 $A_2,A_3,\cdots,A_{n-1}$ 中的 $k-1$ 个点涂成红色,使红点将线段 A_1A_n 所分成的 k 条小线段中,任何两条的长度之差都不超过 1.

（第 13 届全苏数学奥林匹克,1979 年）

［证］　考察集合 $M=\{A_2,A_3,\cdots,A_{n-1}\}$ 的所有 $k-1$ 元子集.对于每个这样的 $k-1$ 元子集 S,记它的点将线段 A_1A_n 分成的 k 条小线段中的最短一条的长度为 m,k 条线段中长度为 m 的线段条数为 $p\geqslant 1$,长度大于 $m+1$ 的线段条数为 q.这样一来,M 的每个 $k-1$ 元子集 S 就对应于一组指标 (m,p,q).

显然,若有某 $k-1$ 元子集 S 所对应的 $q=0$,则 S 便满足题中要求.否则,每个 S 所对应的 q 都大于 0.由于 $k-1$ 元子集只有有限多个,故指标 m 的最大值 m_0 存在.对于第 1 指标 $m=m_0$ 的所有集合,取其第 2 指标 p 的最小值 p_0.然后对于前两个指标为 $m=m_0,p=p_0$ 的所有子集,取其第 3 指标 q 的最小值 q_0.于是 $q_0>0$.以下设 S 是对应于指标组 (m_0,p_0,q_0) 的子集之一.为简单计,把这组指标仍然记为 (m,p,q).

这时,有红点 A_i,A_j,A_s,A_t,使得 $A_iA_j=m$,$A_sA_t>m+1$,且这

两条线段之间不再有这两类线段中的任何一条. 不妨设线段 A_sA_t 在 A_iA_j 的右方.

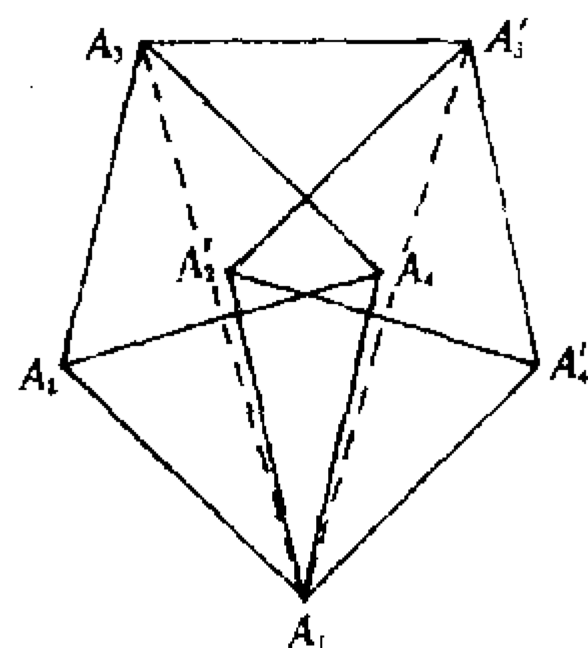
(1) 设 $A_j = A_s$. 因为 $A_sA_t - A_iA_j > 1$, 所以点 A_s 与线段 A_iA_t 中间的距离大于 $\frac{1}{2}$, 故知必有非红点的给定点 A_x, 它与 A_iA_t 中点的距离比 A_s 近. 令 $S' = S - \{A_s\} \cup \{A_x\}$, 则 $A_iA_j < A_iA_x$, $A_xA_t < A_sA_t$. 因此, M 的 $k-1$ 元子集 S' 对应的指标组或为 $(m, p-1, x)$, 或为 (m_1, x, x), 其中 $m_1 > m$. 无论哪种情形, 都与集 S 的选法矛盾.

(2) 设点 A_j 在 A_s 左方, 线段 A_jA_s 被红点分成 h 条线段, $h \geqslant 1$. 设 A_x 是 S 中恰在 A_s 左方的红点, 而 A_y 是位于 A_s 右方且使 $A_yA_t \leqslant m+1$ 的第 1 个非红点. 显然有 $A_yA_t > m$, 令 $S' = S - \{A_s\} \cup \{A_y\}$. 考察线段 A_xA_y. 若 $A_xA_y \leqslant m+1$, 则 S' 对应于 $(m, p, q-1)$, 矛盾; 若 $A_xA_y > m+1$, 则 A_jA_x 被红点分成的线段条数为 $h-1$. 再用 A_xA_y 代替 A_sA_t 重复上述程序并一直进行下去, 则或在某一步出现矛盾, 或者化为两条线段有公共点的情形. 由(1) 知后者也将导致矛盾. 这就完成了全部证明.

10·79　能否在平面上取 7 个点, 使得在其中的任何 3 点中, 必有两点间的距离为 1?

(基辅数学奥林匹克, 1978 年)

[解]　设点 A_1, A_2, A_3, A_4 是一个内角为 $60°$, 边长为 1 的菱形的 4 个顶点, 其中 A_1 和 A_3 是锐角的顶点. 将这个菱形绕点 A_1 旋转, 得到菱形 $A_1A'_2A'_3A'_4$, 使得 $A_3A'_3 = 1$. 我们指出, $\{A_1, A_2, A'_2, A_3, A'_3, A_4, A'_4\}$ 满足题中要求.



事实上, 对于这 7 点中的任何 3 点, 都至少有两点同属于下列两个四点集之一: $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, $T = \{A_1, A'_2, A'_3, A'_4\}$. 不妨设 S 中有两点. 在由 S 中的点组成的 6 个点对中, 两点间的距离有 5 个是 1, 而不是 1 的只有 A_1A_3. 故当点对不是 (A_1, A_3) 时, 这两点的距离为 1. 若 3 点中恰有两点属于 S 且恰为 A_1 和 A_3, 则因点 $A_1 \in T$, 故 3 点中也有两点属于 T. 类似地可证, 这两点间的距离或为 1 或为 $A_1A'_3 \neq 1$. 若为前者, 问题已经解决; 若为后者, 则 3

点为 A_1, A_3, A'_3，其中 $A_3A'_3 = 1$，这就完成了证明.

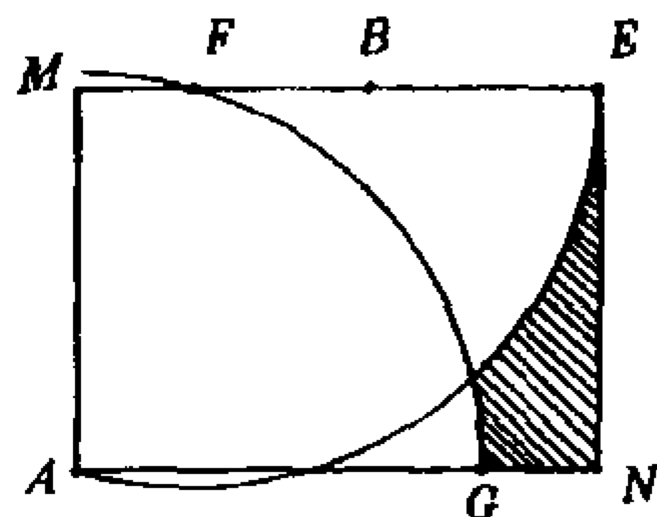
10·80　在规格为 3×4 的矩形中分布着 4 个点.求证其中必有某两点间的距离不大于$\frac{25}{8}$.

（第 47 届莫斯科数学奥林匹克，1984 年）

[证]　取矩形的一个顶点为原点，一对邻边为坐标轴，并使 x 轴是水平的，y 轴指向上方.我们把 x 坐标最大，x 坐标最小，y 坐标最大，y 坐标最小的点分别称为右点，左点，上点和下点.显然，当右点移到矩形的右边，左点移到左边，上点移到上边，下点移到下边时，各点间的距离不会变小.因此只须分别考虑下列几种情形.

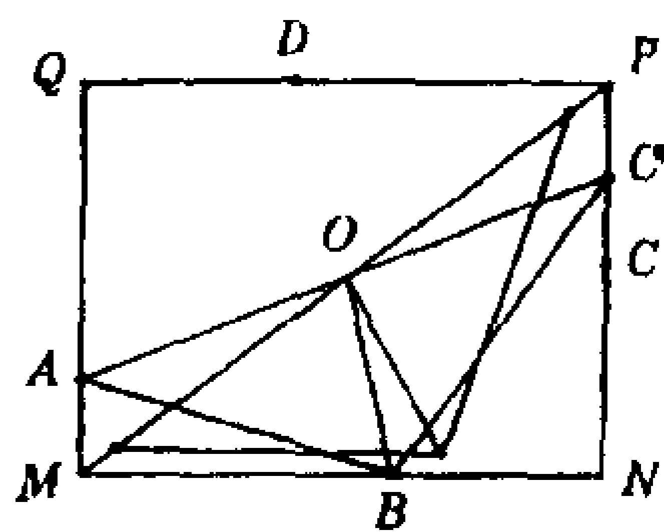
(1)4 个给定点中有两点位于矩形的一组相对顶点上.这时，分别以这两点为心，以$\frac{25}{8}$ 为半径的圆覆盖了整个矩形，故第 3 个给定点必然与前两点之一的距离不大于$\frac{25}{8}$.

(2)4 个给定点中有 1 点 A 位于矩形的顶点，矩形的不以点 A 为端点的两边上各有一点.以 A 为心，$\frac{25}{8}$ 为半径作圆，与矩形的上，下两边分别交于 F 和 G，易见 $MF = GN = \frac{7}{8}$.不妨设边 ME 上的给定点 B 落在线段 EF 内部.以点 B



为心，$\frac{25}{8}$ 为半径作圆.当点 B 从点 E 开始向点 F 运动时，圆 A 与圆 B 之并盖住矩形的部分随之减小.所以，两圆没有盖住的部分是上图中阴影所示部分的子集.另两点若有一点被两圆之并盖住，则结论显然成立；若两点都在阴影所示区域中，它们的距离也不大于$\frac{25}{8}$.

(3) 矩形的 4 个顶点都不是给定点，于是 4 条边上各有 1 个给定点.不妨设 AM, AQ, CN, CP 这 4 条线段中 AM 最短.在线段 CP 上取点 C'，使 $C'P = AM$.当以点 C' 代替 C 时，$AC' \geqslant AC, BC' \geqslant BC$.然后将 $\triangle ABC'$ 绕矩形对角线交点 O 旋转，使边 AC' 落在 MP 上.这时点 B 落



在矩形内部(见上图). 这样一来, 又可化为(1) 中的情形(不考虑点 D).

综上可知,总有两点间的距离不大于$\frac{25}{8}$.

10·81 已知整个空间被划分成 3 个集合,求证其中必有一个集合,使得对每个 $a>0$,该集合中都有两个点,它们之间的距离为 a.

(第 24 届国际数学奥林匹克候选题,1983 年)

[证] 设空间被分成的 3 个集合是 M_1,M_2,M_3. 若结论不成立,则存在 3 个正数 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$,使对 $i=1,2,3$,集合 M_i 中的任何两点间的距离都不等于 a_i.

作等腰三角形 ABC,使得 $AB=a_2=AC$, $BC=a_1$. 过 $\triangle ABC$ 的外心 O 作平面ABC 的垂线,并在垂线上取点 D,使 $DA=DB=DC=a_3$. 于是得到四面体 $ABCD$.

(1) 设集合 M_1,M_2,M_3 都非空. 将上述四面体平移,使点 $D\in M_3$. 于是由反证假设知 $A,B,C\notin M_3$. 若以点 D 为心,以 a_3 为半径的球面与 M_2 不交,则 $B,C\in M_1$,但 $BC=a_1$,此与反证假设矛盾,故球面必与 M_2 相交. 于是可以将四面体绕点 D 旋转,使得 $A\in M_2$. 这样一来,由反证假设知 $B,C\in M_1$,又导致矛盾.

(2) 若 M_1,M_2,M_3 中有 1 个是空集,不妨设 M_3 是空集. 易见,这时只要考察等腰三角形 ABC,并使点 $A\in M_2$ 就可以导出矛盾.

10·82 在平面上给定 100 个点,试证存在有限多个圆,使得

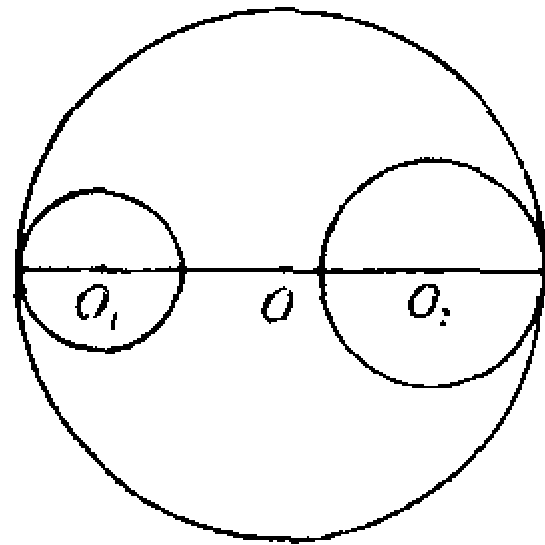
(1) 每个给定点都在某个圆内;

(2) 属于不同圆内的任何两点间的距离都大于 1;

(3) 所有圆的直径之和小于 100.

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1977 年)

[证] 首先,分别以每个给定点为心,作一个直径为$\frac{1}{200}$ 的圆. 显然,作出的 100 个圆满足条件(1) 和(3).



如果这些圆中存在两个圆 O_1 和 O_2,它们之间的距离不大于 1,则用覆盖这两个圆面的最小圆面来代替二者(见图). 于是圆的个数减少 1 而直径之

和至多增加 1. 如果这些圆中还存在两个圆,它们之间的距离不大于 1,则又可重复上述过程. 这样继续下去,直到任何两圆之间的距离都大于 1 为止. 因为开始时共有 100 个圆,而每代换一次圆的个数就减少 1,故至多进行 99 次代换后必然停止. 这时条件(2) 成立. 又因开始时 100 个圆的直径之和为 0.5,而每代换一次直径和至多增加 1,故最后的直径和不超过 $0.5 + 99 = 99.5 < 100$,即条件(3) 成立.

10·83　将长度为 3^n 的一条线段三等分,并将其中的第 1 和 3 两部分称为"标定的". 再将每条标定线段三等分,仍将其中的第 1 和 3 两部分称为标定的. 如此下去,直到分出长度为 1 的标定线段为止. 将每条标定线段的端点都称为"标定点". 试证对任何整数 $k(1 \leqslant k \leqslant 3^n)$,都能找到一对标定点,使二者的距离等于 k.

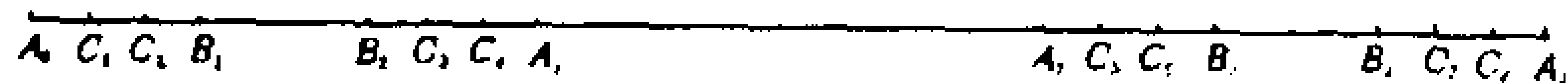
(第 21 届莫斯科数学奥林匹克,1958 年)

[证]　显然,当 $k = 3^n$ 时,可选所给线段的两个端点,这两点当然都是标定点. 当 $k < 3^n$ 时,我们将 k 写成共有 n 位数字的三进表示式

$$k = a_1 a_2 \cdots a_n,$$

其中 $a_j \in \{0,1,2\}, j = 1,2,\cdots,n$.

下面我们用逐步加长选定区间的办法,使经过 j 次选取后,所选区间的长度恰为 $a_1 a_2 \cdots a_j 0 \cdots 0$(后面共有 $n - j$ 个零),且两个端点都是标定点.



具体选法如下:

$$a_1 = 0, [A_0, A_0] \begin{cases} a_2 = 0, [A_0, A_0], \\ a_2 = 1, [A_0, B_1] \longrightarrow [B_1, B_2], \\ a_2 = 2, [A_0, B_2], \end{cases}$$

$$a_1 = 1, [A_1, A_2] \begin{cases} a_2 = 0, [A_1, A_2], \\ a_2 = 1, [A_1, B_3], \\ a_2 = 2, [A_1, B_4], \end{cases}$$

$$a_1 = 2, [A_0, A_2] \begin{cases} a_2 = 0, [A_0, A_2], \\ a_2 = 1, [A_0, B_3] \longrightarrow [B_1, B_4], \\ a_2 = 2, [A_0, B_4]. \end{cases}$$

第一次选取的区间长度等于 a_1 且所选区间至少一端外面与标定区间相邻.第2次选取时,原来所选区间的端点算起,在邻接的标定线段内选取一段线段长度为 a_2.若两段接起来后的线段两端均不与标定线段相邻,则将它平移 a_2 所在位数的一个单位.例如上表中 $[A_0,B_1]$ 平移至 $[B_1,B_2]$,$[A_0,B_3]$ 平移至 $[B_1,B_4]$ 就是这样处理的.这样一来,所选的线段长度为 $a_1a_20\cdots0$(共 $n-2$ 个零)且至少有一方与标定线段相邻.从而又可继续进行下去,直到最后,选出一个长度为 $a_1a_2\cdots a_n$ 的线段,它的两个端点都是标定点,即为所求.

10·84　在半径为1的圆周上,任意给定两个点集 A 和 B,它们都由有限段互不相交的弧组成,其中 B 的每段弧的长度都等于 $\frac{\pi}{m}$,m 是个自然数.用 A^j 表示将集合 A 沿逆时针方向在圆周上转动 $\frac{j\pi}{m}$ 弧度所得的集合,$j=1,2,\cdots$.求证存在自然数 k,使得

$$l(A^k\cap B)\geqslant\frac{1}{2\pi}l(A)l(B),$$

其中 $l(X)$ 表示组成点集 X 的互不相交的弧段的长度之和.

(第4届中国中学生数学冬令营,1989年)

[证]　我们把圆周上的点集 E 沿顺时针方向在圆周上转动 $\frac{j\pi}{m}$ 弧度所得到的集合记为 E^{-j}.于是有 $l(A^j\cap B)=l(A\cap B^{-j})$.

设 $b_1,\cdots,b_n$ 是组成 B 的弧段.由已知,它们两两不交且每段长度都是 $\frac{\pi}{m}$,因此有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2m}l(A^j\cap B)&=\sum_{j=1}^{2m}l(A\cap B^{-j})=\sum_{j=1}^{2m}l(A\cap(\bigcup_{i=1}^{n}b_i^{-j}))\\&=\sum_{j=1}^{2m}\sum_{i=1}^{n}l(A\cap b_i^{-j})\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2m}l(A\cap b_i^{-j})\\&=\sum_{i=1}^{n}l(A\cap(\bigcup_{j=1}^{2m}b_i^{-j})).\end{aligned}\qquad①$$

因为 $l(b_i)=\frac{\pi}{m}$,所以 $\bigcup_{j=1}^{2m}b_i^{-j}$ 恰是整个圆周,从而有

$$l(A \cap (\bigcup_{j=1}^{2m} b_i^{-j})) = l(A). \qquad ②$$

将②代入①即得

$$\sum_{j=1}^{2m} l(A^j \cap B) = nl(A). \qquad ③$$

按重叠原理,由③便知至少存在一个 $k, 1 \leqslant k \leqslant 2m$,使得

$$l(A^k \cap B) \geqslant \frac{n}{2m} l(A) = \frac{1}{2\pi} l(B) l(A).$$

10·85　试证对每个 $m \in N$,在平面上都存在一个非空点集 S 具有如下的性质:对于任一点 $A \in S$,都恰有 S 中的 m 个点,使它们中的每点与 A 的距离都是1.

(第13届国际数学奥林匹克,1971年)

[证]　我们将用借助于向量组的构造法来完成本题的证明.对于 $m \in N$,将构造一个有 2^m 个点的集合,使之满足题中要求.

首先,我们用归纳法来构造向量集合 $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_m\}$,使它们满足下列条件:

(1) $|\vec{u}_i| = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \cdots, m$;

(2) $0 \neq |c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_m\vec{u}_m| \neq \frac{1}{2}$,其中 $c_i \in \{0, 1, -1\}$, $i = 1, 2, \cdots, m$,且至少有两个 c_i 异于零.

事实上,只要令

$$\vec{u}_i = \left(\delta_i, \sqrt{\frac{1}{4} - \delta_i^2}\right), 0 \leqslant \delta_i \leqslant \frac{1}{2},$$

便可使上述条件(1)成立.

若向量 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_k$ 已经满足 $m = k$ 的条件(1)和(2),则固定它们后再定义向量

$$\vec{u}_{k+1} = \left(\delta_{k+1}, \sqrt{\frac{1}{4} - \delta_{k+1}^2}\right), 0 \leqslant \delta_{k+1} \leqslant \frac{1}{2},$$

使对所有系数组 $(c_1, c_2, \cdots, c_{k+1})$,其中 $c_i \in \{-1, 0, 1\}$ 且至少有两个 c_i 异于零,都成立表达式

$$0 \neq |c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_k\vec{u}_k + c_{k+1}\vec{u}_{k+1}| \neq \frac{1}{2}.$$

由于上式仅是有限多个条件而参数 $\delta_{k+1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 却有无限多种选

法，所以总是能办到的.

其次，我们用上面构造的向量集合来定义有 2^m 个点的点集 S. 考虑 2^m 个向量

$$\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2+\cdots+\alpha_m\vec{u}_m,$$

其中 $\alpha_i\in\{-1,1\}, i=1,2,\cdots,m$. 将它们的起点都放在坐标平面的原点并把它们的终点的集合记为 S. 则点集 S 就满足题中的要求.

第一，这 2^m 个点互不相同. 若其中有两点重合，则意味着相应的两个向量相等，这与条件(1)或(2)矛盾.

第二，任取 $A\in S$，设它所对应的向量的系数组为 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$，$\beta_i\in\{-1,1\}, i=1,2,\cdots,m$. 设与系数组 $(\beta_1,\cdots,\beta_{i-1},-\beta_i,\beta_{i+1},\cdots,\beta_m)$ 对应的点为 $B_i\in S$，则因 B_i 与 A 所对应的系数组中恰有一个系数不同，故由条件(1)便知，B_i 与 A 的距离为 $|2\beta_i\vec{u}_i|=2|\vec{u}_i|=1, i=1,2,\cdots,m$. 这说明 S 中有 m 个点与 A 的距离均为 1.

对于任何点 $C\in S-\{B_1,B_2,\cdots,B_m,A\}$，它所对应的系数组与 A 的系数组的系数中至少有两个不同. 由条件(2)知 C 与 A 的距离不为 1. 这就证明了集合 S 满足题中要求.

10·86 求所有整数 $n>3$，使得在平面上存在 n 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 及实数 $r_1,r_2,\cdots,r_n$，满足下列两个条件

(1) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任何 3 点都不共线；

(2) 对于每个三点组 $\{A_i,A_j,A_k\}$，$1\leqslant i<j<k\leqslant n$，$\triangle A_iA_jA_k$ 的面积 $S_{ijk}=r_i+r_j+r_k$.

（第 36 届国际数学奥林匹克，1995 年）

[解] 为方便计，我们先来给出两个引理.

引理 1 如果某个凸四边形的 4 个顶点依次为给定点 A_i,A_j,A_k 和 A_h，则相应的 4 个实数满足关系式

$$r_i+r_k=r_j+r_h.$$

引理 1 的证明连结对角线 A_iA_k 和 A_jA_h，于是有

$$S_{ijk}+S_{ikh}=S_{ijh}+S_{jkh}.$$

因此有

$$2r_i+r_j+2r_k+r_h=r_i+2r_j+r_k+2r_h.$$

由此即得 $r_i+r_k=r_j+r_h$.

引理 2　若有 5 个给定点 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 满足题中的条件，则相应的 5 个实数 r_1,r_2,r_3,r_4,r_5 中至少有两个数相等.

引理 2 的证明考察 5 点的凸包.

(i) 设凸包是五边形. 不妨设其顶点依次为 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5. 于是四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 和 $A_1A_2A_3A_5$ 都是凸四边形. 由引理 1 有

$$r_2+r_4=r_1+r_3=r_2+r_5.$$

故得 $r_4=r_5$.

(ii) 设凸包是四边形，不妨设点 A_5 位于四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内部且是在 $\triangle A_2A_3A_4$ 内部. 于是四边形 $A_1A_2A_5A_4$ 也是凸四边形. 由引理 1 有

$$r_1+r_3=r_2+r_4=r_1+r_5.$$

故得 $r_3=r_5$.

(iii) 设凸包是 $\triangle A_1A_2A_3$，即 A_4,A_5 位于 $\triangle A_1A_2A_3$ 的内部. 于是有

$$S_{124}+S_{234}+S_{341}=S_{125}+S_{235}+S_{351}.$$

因此有

$$2r_1+2r_2+2r_3+3r_4=2r_1+2r_2+2r_3+3r_5.$$

故得 $r_4=r_5$. 这就完成了引理 2 的证明.

由引理 1 和引理 2 可以证明，所有整数 $n\geqslant 5$ 都不满足题中的要求. 若不然，设五点组 $\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$ 满足题中的条件，于是由引理 2 知，相应的 5 个实数 r_1,r_2,r_3,r_4,r_5 中必有两数相等，不妨设 $r_4=r_5$.

(a) 设点 A_1,A_2,A_3 在直线 A_4A_5 的同侧，于是按已知有

$$S_{124}=S_{125},S_{234}=S_{235}.$$

由此可得 $A_1A_2\parallel A_4A_5$，$A_2A_3\parallel A_4A_5$，从而 A_1,A_2,A_3 三点共线，此与条件(1) 矛盾.

(b) 设 A_1,A_2 在直线 A_4A_5 的同侧而 A_3 在另一侧. 这时有

$$S_{124}=S_{125}.$$

因此有 $A_1A_2\parallel A_4A_5$. 由此又可得到

$$S_{145}=S_{245}.$$

从而有 $r_1=r_2$. 又因 A_3,A_4,A_5 在直线 A_1A_2 的同侧，所以像(a) 中一

样地又可导出矛盾.这就证明了所有 $n \geqslant 5$ 都不能满足题中的要求.

当 $n=4$ 时,取单位正方形的 4 个顶点分别为 A_1, A_2, A_3, A_4,取 $r_1=r_2=r_3=r_4=\frac{1}{6}$.容易验证,这 4 点和 4 个实数满足题中的要求.

综上可知,满足题中要求的整数只有 1 个 $n=4$.

10·87 在平面上给定无穷多个点.已知它们两两之间的距离都是整数,求证这些点都在一条直线上.

(第 19 届美国普特南数学竞赛,1958 年)

[证] 若不然,则存在 3 点 A, B, C,使 3 点不共线且 $AB=r$ 和 $AC=s$ 都是整数.设点 P 是任一给定点.则由三角不等式有

$$|PA-PB| \leqslant AB=r,$$

即 $|PA-PB|$ 是整数 $0,1,2,\cdots,r$ 中之一.因此,点 P 或位于直线

$H_0=$ 直线 AB 的垂直平分线,

$H_r=$ 直线 AB

上,或落在双曲线

$$H_i=\{X \mid |XA-XB|=i\}, i=1,2,\cdots,r-1$$

之一上.同理,点 P 又或者位于直线

$K_0=$ 线段 AC 的垂直平分线,

$K_s=$ 直线 AC

之一上,或者落在双曲线

$$K_j=\{X \mid |XA-XC|=j\}, j=1,2,\cdots,s-1$$

之一上.由此可知,任一给定点必落在集合

$$H_i \cap K_j, i=0,1,\cdots,r, j=0,1,\cdots,s \qquad ①$$

之一上.由于直线 AB 与 AC 不重合,所以任一 H_i 与任一 K_j 都不相同.从而知 ① 中每个集合都不多于 4 点,故知集合

$$M=\bigcup_{i,j}(H_i \cap K_j)$$

的点数不多于 $4(r+1)(s+1)$,此与给定点有无穷多个矛盾.

10·88 设点 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 都位于单位球面上,求 $\min\{A_iA_j \mid 1 \leqslant i<j \leqslant 5\}$ 的最大值并确定取得最大值的所有情形.

(第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年)

[**解**] 记球心为O.由于5点都在球面上,故可以用$\angle A_iOA_j$的大小来代替距离A_iA_j.显然,当取5点为球的内接正八面体的5个顶点时,便有

组合卷

$$\min\{\angle A_iOA_j \mid 1\leqslant i<j\leqslant 5\}=\frac{\pi}{2}, \quad ①$$

$$\min\{A_iA_j \mid 1\leqslant i<j\leqslant 5\}=\sqrt{2}. \quad ②$$

设A_1,A_2,A_3,A_4,A_5都在单位球面上且使得

$$\min\{\angle A_iOA_j \mid 1\leqslant i<j\leqslant 5\}\geqslant\frac{\pi}{2}, \quad ③$$

则5点中必有两点为对径点.事实上,设点A_5为南极,则由③知另4点均在北半球(包括赤道).取以球心O为原点的直角坐标系,使点A_5为$(0,0,-1)$,而点A_1在平面$y=0$上且使$x>0$,即点A_1在上半空间两个卦限的分界面上.于是由抽屉原理知,必有1个卦限中(包括边界)含有两个给定点.由③知,两点中必有1点位于该卦限的"角落"(即球面上赤道与卦限界面的交点),而另一点则位于与它相对的径线上.这样一来,这两点中的每点都是两个卦限的公共点.同理,点A_1,A_2,A_3,A_4每点都是两个卦限的公共点,即它们分别位于将北半球分为4个卦限的4条径线上.若其中有1点不在赤道上,则它的两个邻点都在赤道上(各在一个卦限的角落),恰为一对对径点.

由于总有两点为对径点,设为A_1,A_2,于是任意第3点A_3都不能使$\angle A_1OA_3>\frac{\pi}{2}$,$\angle A_2OA_3>\frac{\pi}{2}$同时成立.由此可知$\min\angle A_iOA_j$的最大值为$\frac{\pi}{2}$.当5点取得最大值时,其中必有两点为对径点.当以这两点为两极时,另3点均在赤道上且两两对球心O的张角都不小于$\frac{\pi}{2}$.

10·89 坐标平面上两个坐标x和y都是有理数的点称为有理点.试证所有有理点(x,y)可以分成两个点集A和B,使得集A与任一条平行于y轴的直线仅有有限多个公共点,集B与任一条平行于x轴的直线仅有有限多个公共点.

(中国国家集训队测验题,1989年)

[**证**] 将所有非负有理数排成一个数列.对于任一有理点(x,y),若$|y|$在数列中的项数不超过$|x|$的项数号码,则$(x,y)\in A$;若

$|y|$的项数大于$|x|$的项数号码，则$(x,y)\in B$.容易验证，这样定义的 A 和B 满足题中的全部要求.

10·90　在三维欧氏空间内任意给定 9 个整点(坐标都为整数的点).求证其中至少有两点连接的线段上也存在整点.

(第 32 届美国普特南数学竞赛，1971 年)

[证]　将空间的整点的坐标按奇偶数分类，则只可能分成下列 8 类：

(奇，奇，奇)，(奇，奇，偶)，　(奇，偶，奇)，(奇，偶，偶)，

(偶，奇，奇)，(偶，奇，偶)，　(偶，偶，偶)，(偶，偶，偶).

因此，在给定的 9 个已知点中，至少有某两点(设为 P 和Q)的同名坐标具有相同的奇偶性.于是线段 PQ 的中点显然是一个整点.

10·91　已知空间中一个凸多面体的所有顶点都是整点，此外，在多面体的内部，面上和棱上都不再有其他整点，求证多面体的顶点不超过 8 个.

(第 40 届莫斯科数学奥林匹克，1977 年)

[证]　若不然，任取多面体的 9 个顶点.每个顶点有 3 个整数坐标，按奇偶不同分类只有 8 类.故由抽屉原理知有两个顶点的坐标奇偶性全都相同.从而连结这两个顶点的线段的中点也是整点，而这点显然在多面体的内部，面上或棱上，此与已知矛盾.

10·92　三维空间中所有整点(3 个坐标都为整数的点)的集合记为 T.两个整点(x,y,z)和(u,v,w)当且仅当$|x-u|+|y-v|+|z-w|=1$时称为相邻.求证存在 T 的一个子集S，使对每个 $P\in T$，点 P 以及P 的所有邻点中恰有一点属于S.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题，1985 年)

[证]　显然，两个整点相邻，当且仅当两点的各 3 个坐标中的两对分别相等，而第 3 个坐标相差 1.

令　$S=\{(x,y,z)\mid 7\mid x+2y+3z\}$，

则S满足题中要求.事实上，对于任何$(u,v,w)\in T$，它有6个邻点$(u\pm1,v,w)$，$(u,v\pm1,w)$，$(u,v,w\pm1)$.这 7 点所对应的 7 个整数

$$u+2v+3w+j,\ j=-3,-2,-1,0,1,2,3$$

中，恰有一个是 7 的倍数，从而相应的整点属于 S，即 S 满足题中要求.

10·93　设在整点平行四边形(即 4 个顶点都是整点的平行四边形)

的内部或边上还有另外的整点.求证这个平行四边形的面积大于1.

(匈牙利数学奥林匹克,1941年)

[证] 我们先来考察整点三角形的面积.设非退化三角形的3个顶点分别为

$$P_i(x_i, y_i), i = 1,2,3,$$

其中 x_i, y_i 都是整数.于是三角形的面积

$$S = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|,$$

其中绝对值号内的数为非0整数,故 $S \geqslant \frac{1}{2}$.

按已知,整点平行四边形的内部或边上还有另外的整点.若在内部,则将它与平行四边形的4个顶点分别连线,可将平行四边形分成4个整点三角形,于是平行四边形的面积不小于2.若另外整点在边上,则将它与不在该边的两个顶点连线而将平行四边形分成3个整点三角形,故知平行四边形的面积不小于$\frac{3}{2}$,当然大于1.

10·94 在坐标平面上,横纵坐标都是整数的点称为整点.设 $P_i(x_i, y_i)(i = 1,2,\cdots,6)$ 都是整点且满足:

(1) $|x_i| \leqslant 2, |y_i| \leqslant 2, i = 1,2,\cdots,6$;

(2) 任何3点不共线.

试证在以 $P_1, P_2, \cdots, P_6$ 中三点为顶点的所有三角形中,必有一个三角形的面积不大于2.

(中国高中数学联赛,1992年)

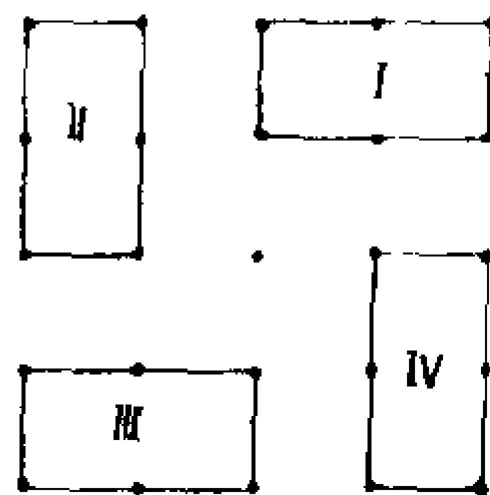
[证1] 设存在6个整点 $P_1, P_2, \cdots, P_6$ 满足条件(1)和(2),但以它们中任何三点为顶点的三角形的面积都大于2.

若6点中至多有1点在 x 轴上,则由抽屉原理知上半平面 $y > 0$ 和下半平面 $y < 0$ 中至少有一个半平面,不妨设为上半平面中至少有3个给定点.显然,以其中3点为顶点的三角形的面积不大于2,矛盾.这意味着 x 轴上恰有两个给定点.同理,y 轴上也恰有两个给定点.这4点(可能有重复)中若包含原点,则另外还有两点,这3点所成的三角形的面积不大于2,矛盾.故知 x 轴与 y 轴上的各两点分别为$(-2,0)$,$(2,0)$,$(0,-2)$和$(0,2)$.

这样一来,第5点不在坐标轴上,无论它在哪一象限,都可与该象

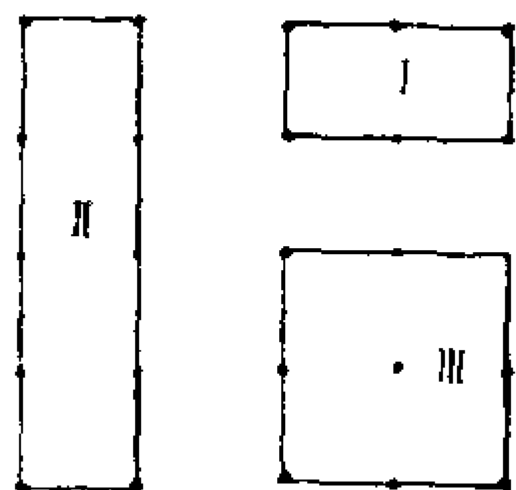
限边上的两点构成一个面积不大于 2 的三角形，矛盾.

[证 2] 令 $S=\{(m,n)\mid m,n=0,\pm1,\pm2\}$，则 $P_i\in S,i=1,2,\cdots,6$. 将 S 中除原点以外的 24 点分成 4 组如图(a) 所示. 由抽屉原理知 4 组中必有 1 组，其中至多有 1 个给定点；不妨设第 Ⅰ 组中至多有 1 个给定点.



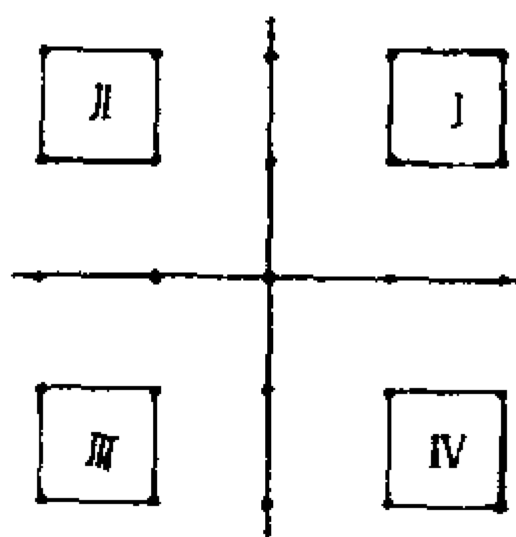
(a)

再把 S 中的 25 点分成 3 组如图(b) 所示. 既然第 Ⅰ 组中至多有 1 个给定点，则其余至少 5 点分属于 Ⅱ、Ⅲ 两组. 由抽屉原理知必有一组中含有 3 个给定点. 显然，以它们为顶点的三角形的面积不大于 2.



(b)

[证 3] 令 $S=\{(m,n)\mid m,n=0,\pm1,\pm2\}$，则 $P_i\in S,i=1,2,\cdots,6$. 将 S 中的除坐标轴上的点之外的 16 点分成 4 组，每个象限中的 4 点为一组，如图(c) 所示. 因为给定 6 点中至多有 4 点在坐标轴上，故至少有两点在 4 个正方形上. 由抽屉原理知，至少有一个正方形，不妨设为正方形 Ⅰ，其上至少有 1 个给定点.



(c)

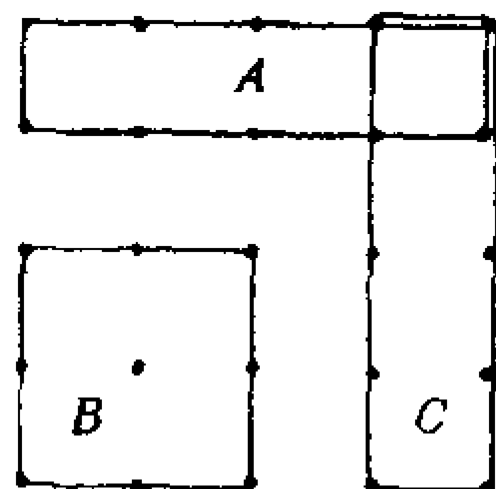
再将 S 中的 25 个点分成 3 组如图(d) 所示：

$A=\{(m,n)\mid m=0,\pm1,\pm2,n=1,2\}$，

$B=\{(m,n)\mid m=-2,-1,0,n=-2,-1,0\}$，

$C=\{(m,n)\mid m=1,2,n=0,\pm1,\pm2\}$.

注意，这时上述第 Ⅰ 组的点既属于 A 又属于 C，故 A,B,C3 组中至少共有 7 个给定点. 由抽屉原理知必有一组中至少含有 3 个给定点，以它们中 3 点为顶点的三角形的面积不大于 2.

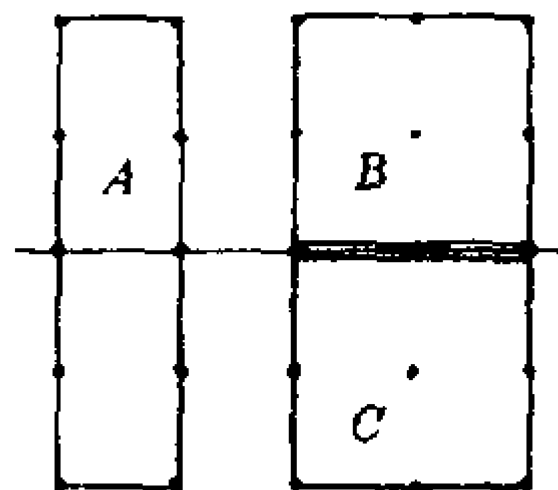


(d)

[证 4] 如果 x 轴上没有给定点，则像证 1 中第 2 段那样可证结论成立.

设 x 轴上至少有 1 个给定点，不妨设在正半轴(包括原点) 上至少有 1 点. 于是可像图(e) 所示那样将 S 中的 25 点分成 3 组，其中正半轴上的 3 点既属于

B 又属于 C. 这样一来, A,B,C 3个集合中共含有7个给定点,故由抽屉原理知其中必有一个集合中至少含有3个给定点.



(e)

[证5] 令

$S=\{(m,n)\mid m,n=-2,-1,0,1,2\}$,

$A_1=\{(m,n)\mid m=-2,-1,0,1,2;n=1,2\}$,

$A_2=\{(m,n)\mid m=-2,-1,0,1,2;n=-2,-1\}$,

$A_3=\{(m,n)\mid m=-2,-1;n=-2,-1,0,1,2\}$,

$A_4=\{(m,n)\mid m=1,2;n=-2,-1,0,1,2\}$,

$A_5=\{(m,n)\mid m,n=0,1,2\}$,

$A_6=\{(m,n)\mid m=-2,-1,0;n=0,1,2\}$,

$A_7=\{(m,n)\mid m,n=-2,-1,0\}$,

$A_8=\{(m,n)\mid m=0,1,2;n=-2,-1,0\}$.

容易看出, S 中的25个整点中每点至少属于 $A_1,A_2,\cdots,A_8$ 中的3个集合,从而每个给定点也至少属于这8个集合中的3个集合. 这样一来,8个集合中至少共有18个给定点(包括重复计数). 于是由抽屉原理知其中必有1个集合中至少含有3个给定点.

10·95 试证在平面上存在一个圆,其内恰好有1982个整点.

(第45届莫斯科数学奥林匹克,1982年)

[证] 取点 $P\left(\sqrt{2},\frac{1}{3}\right)$,则所有整点到点 P 的距离各不相同.

事实上,若有整点 $(a,b),(c,d)$,使得

$$(a-\sqrt{2})^2+\left(b-\frac{1}{3}\right)^2=(c-\sqrt{2})^2+\left(d-\frac{1}{3}\right)^2, \quad ①$$

则有

$$2(c-a)\sqrt{2}=c^2-a^2+d^2-b^2+\frac{2}{3}(b-d). \quad ②$$

若 $c\neq a$,则②式左端为无理数而右端为有理数,矛盾. 故必有 $c=a$. 从而②式化为

$$d^2-b^2+\frac{2}{3}(b-d)=0,$$

$$(d-b)\left(d+b+\frac{2}{3}\right)=0. \qquad ③$$

由于 d 和 b 都是整数，故 ③ 式右端第 2 个因子不为零，所以有 $d=b$，即有 $(a,b)=(c,d)$.

将所有整点到点 P 的距离从小到大排成一行有

$$d_1, d_2, \cdots, d_{1982}, d_{1983}, \cdots,$$

取 r，使 $d_{1982}<r<d_{1983}$，则当以点 P 为圆心，以 r 为半径作圆时，所得的圆内恰有 1982 个整点.

10·96 在坐标平面上求作一个凸集，使得它含有无限多个整点，但它与任何一条直线的交集至多含有限多个整点.

（前捷克斯洛伐克数学奥林匹克，1982 年）

[解] 在坐标平面上令

$$M=\{(x,y)\mid \sqrt{2}x-1\leqslant y\leqslant \sqrt{2}x\},$$

则 M 满足题中要求. 事实上，对于任何 $n\in Z$，直线 $x=n$ 与 M 的交为长度为 1 的线段，其上当然有 1 个整点. 从而 M 中含有无穷多个整点. 另一方面，当 $k=\sqrt{2}$ 时，直线 $y=kx+b$ 至多含有 1 个整点. 否则，对于其上的两个整点 (x_1,kx_1+b) 和 (x_2,kx_2+b)，我们有

$$\left|(\sqrt{2}x_1+b)-(\sqrt{2}x_2+b)\right|=\sqrt{2}\left|x_1-x_2\right|.$$

这意味着 $\sqrt{2}$ 为无理数，矛盾. 当 $k\neq\sqrt{2}$ 时，直线 $y=kx+b$ 与集合 M 之交是 1 条线段，其上的整点当然至多有有限多个.

10·97 设 K 是坐标平面上的凸区域，它关于原点对称且面积大于 4. 求证在 K 内存在一个整点 $(m,n)\neq(0,0)$.

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题，1985 年）

[证] 用与坐标轴距离为偶数的两组平行线，将坐标平面分成内部不交的边长为 2 的正方形. 记位于第 1 象限且以原点为 1 个顶点的 2×2 的正方形为 Q. 将其他所有与 K 有交的正方形都平移到正方形 Q 上. 因为 Q 的面积为 4 而 K 的面积大于 4，所以 K 在诸正方形中的部分将出现重叠，即 K 中存在两个不同的点 A 和 B，使得二者的纵坐标之差与横坐标之差均为偶数. 由于 K 关于原点对称，故点 A 关于原点的对称点 $A'\in K$. 又因 $B\in K$，K 为凸集，故线段 $A'B$ 含在 K 中，特别地，$A'B$ 的中点 $M\in K$. 易见，M 为整点且 M 不是原点.

10·98 求最大正整数 n，使在坐标平面上存在 n 个整点，其中任

何3点都构成一个三角形，且三角形的重心不是整点.

（第19届国际数学奥林匹克候选题，1977年）

[解] 设点(x_1,y_1);(x_2,y_2),(x_3,y_3)是3个整点，则以它们为顶点的三角形的重心的坐标为

$$\left(\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)\right).$$

容易验证，下列8个整点

$(0,0),(0,3),(3,1),(3,4),(1,0),(1,3),(4,1),(4,4)$中的任何3点都构成一个三角形且其重心不是整点. 故知所求的最大正整数$n\geqslant 8$.

另一方面，我们来证明，任何9个整点都不满足题中的条件. 若不然，设有9个整点满足题中的条件. 对于整点(x,y)，设x,y除以3的余数为r_1,r_2，此处r_1和r_2为非负整数，则称整点(x,y)为(r_1,r_2)型的. 这样，我们就把平面上的全部整点分成了9类. 由于同类中的3点为顶点的三角形的重心也是整点，故上述9个整点中的任何3点都不属于同一类. 因此，这9点至少分属于这9类中的5类. 从5类中各选1点，得到5个互不同类的点，这5点的横坐标只有3个不同值:0,1,2. 若5点中有3点横坐标相同，则因互不同类，纵坐标必分别为0,1,2，从而以这3点为顶点的三角形的重心为整点，此不可能，故5点的横坐标必然分别取3个值，且个数分别为2,2,1. 因为重心是否整点是平移不变的，故不妨设对应于个数1的整点为$(0,0)$，于是另外4个整点的横坐标有两个为1，两个为2. 将横坐标为1和2的6类分成3组

$$\{(1,1),(2,2)\},\{(1,0),(2,0)\},\{(1,2),(2,1)\}.$$

由抽屉原理知另外4点中必有两点属于同一组. 这两点加上点$(0,0)$所构成的三角形的重心为整点，矛盾.

综上可知，所求的最大正整数$n=8$.

10·99 在坐标空间中给定37个整点，其中任何3点都不共线，求证其中必有3点，使得以它们为顶点的三角形的重心也是整点.

（第19届国际数学奥林匹克候选题，1977年）

[证1] 令每个整点(x,y,z)都对应于一个三元数组$(r(x),r(y),r(z))$，其中$r(x)$是x除以3的非负余数，$r(y)$,$r(z)$的意义与此相同. 因为$r(x)\in\{0,1,2\}$，故由抽屉原理知37个给定整点中至少

有13个点所对应的 $r(x)$ 相同. 同理,这13个点中至少有5个点所对应的 $r(y)$ 相同,亦即有5个整点所对应的 $r(x),r(y)$ 都相同. 考察这5点所对应的 $r(z)$ 的值. 若有3点对应同一个值,则这3点便满足题中要求. 若对应于每个值的点至多两个,则对应于0,1,2的点至少各有1个. 显然,这样的3个点便满足题中要求.

[证2] 像证1中一样地将整点 (x,y,z) 对应于三元数组 $(r(x),r(y),r(z))$. 如果给定的37个整点中有3个点对应于同一个三元数组,则以这3点为顶点的三角形的重心也是整点. 如果对应于任一三元数组的整点至多两个,则37个给定点中至少有19个整点,它们所对应的三元数组互不相同.

因为不同的三元数组共有27个,可以将它们分成互不相交的9组:

$$\{(i,j,0),(i,j,1),(i,j,2)\},\ i,j=0,1,2.$$

由抽屉原理知上述19个整点中必有3点,它们对应的3个三元数组属于9组中的同一组. 易见,这3点便满足题中要求.

10·100 设 S 是一个非空点集,它的所有点都是整点. 此外,还给定一组有限多个有整数坐标的非零向量组. 已知当将向量组中的所有向量的起点都放在 S 中的任一点时,它们的终点中属于 S 的比不属于 S 的多. 求证 S 必为无穷点集.

(第21届全苏数学奥林匹克,1987年)

[证] 设 S 为有限点集,于是其中必有两点 A 和 B,使 A 的纵坐标是所有点的纵坐标中最大的且在纵坐标同为最大的所有点中,A 的横坐标最大;B 的纵坐标是所有点的纵坐标中最小的且在纵坐标同为最小的所有点中,B 的横坐标最小.

首先把给定的所有向量的起点都放在点 A,按已知,满足 $y>0$ 和 $y=0,x>0$ 的向量数少于半数. 然后再把所有向量都放在点 B,又知 $y<0$ 和 $y=0,x<0$ 的向量也少于半数,矛盾.

10·101 设 S 为平面上所有整点的集合. 求证对于 S 中的任何3点 A,B,C,都有异于它们的第四点 $D\in S$,使得线段 AD,BD,CD 的内部不含 S 中的点. 对于 S 中的任何4点,同样的结论是否成立?

(第30届国际数学奥林匹克候选题,1989年)

[解] 不妨设点 A,B,C 的坐标分别为 $(a_1,a_2),(b_1,b_2)$ 和 $(0,0)$. 令 $d=(a_2,b_2)$,于是 $a_2=a'_2d,b_2=b'_2d,a'_2,b'_2\in Z$ 且 $(a'_2,$

$b'_2)=1$.由此有$(a'_2-b'_2,b'_2)=1$.取整数s,使得

$$s\,b'_2\equiv 1(\bmod\ a'_2-b'_2)$$

并令$y=da'_2b'_2s+1$,则有

$$(y,y-a_2)=(y,y-b_2)=1,$$

$$\begin{aligned}(y-a_2,y-b_2)&=(y-a_2,a_2-b_2)\\&=(1+a'_2d(b'_2s-1),a_2-b_2)\\&=(1,a_2-b_2)=1.\end{aligned}\qquad ①$$

由 ① 和中国剩余定理,有整数x满足

$$\begin{cases}x\equiv 1(\bmod\ y),\\x\equiv a_1+1(\bmod\ y-a_2),\\x\equiv b_1+1(\bmod\ y-b_2).\end{cases}$$

于是整点(x,y)满足条件

$$(x,y)=(x-a_1,y-a_2)=(x-b_1,y-b_2)=1.\qquad ②$$

把点(x,y)记为D.因为两个整点(x_1,y_1),(x_2,y_2)的连线内部无整点的充分必要条件是$(x_2-x_1,y_2-y_1)=1$,所以由 ② 知线段AD,BD,CD内部均不含S中的点.

取S中的4个点:$A(0,0)$,$B(0,1)$,$C(1,0)$,$D(1,1)$.对于任一点$P(x,y)\in S$,数对(x,y)的奇偶性必于$(0,0)$,$(0,1)$,$(1,0)$,$(1,1)$之一相同,从而点P与这点的连线中点属于S.这表明4点时结论不再成立.

10·102　设L是坐标平面中的一个子集.定义如下:

$$L=\{(41x+2y,59x+15y)\mid x,y\in Z\}.$$

试证每个以原点为中心,面积等于1990的平行四边形至少包含集L中的两个点.

(第31届国际数学奥林匹克候选题,1990年)

[证]　设F是以$(0,0)$,$(41,59)$,$(43,74)$,$(2,15)$为顶点的平行四边形,它的4个顶点都属于L,且F中其他点都不属于L.将F在坐标平面上向各方向平移,便形成以F为基本区域的网络,网络的结点都是L中的点.F的面积

$$S_F=\begin{vmatrix}0&0&1\\41&59&1\\2&15&1\end{vmatrix}=497.$$

设 P 是以原点为中心,面积等于 1990 的平行四边形.以原点为中心,相似比为$\frac{1}{2}$的位似变换.记平行四边形 P 的位似象为P',则 P' 的面积为 $1990\times\frac{1}{4}=497\frac{1}{2}>497$.这样一来,当将平行四边形 P' 被网络所分成的诸块都平移到基本区域 F 中时,必有两点重叠.设这两点是 $D'_1(x_1,y_1)$ 和 $D'_2(x_2,y_2)$.由于平移是沿网格线移动的,所以点 $M(x_1-x_2,y_1-y_2)\in L$.

另一方面,因为 $D'_1,D'_2\in P'$,所以 $D_1(2x_1,2y_1),D_2(2x_2,2y_2)\in P$.又因 P 是以原点为心的平行四边形,所以 $D_3(-2x_2,-2y_2)\in P$.从而线段 D_1D_3 的中点 $M\in P$,且 $M\neq(0,0)$.这就证明了平行四边形 P 中至少含有 L 中的两个点.

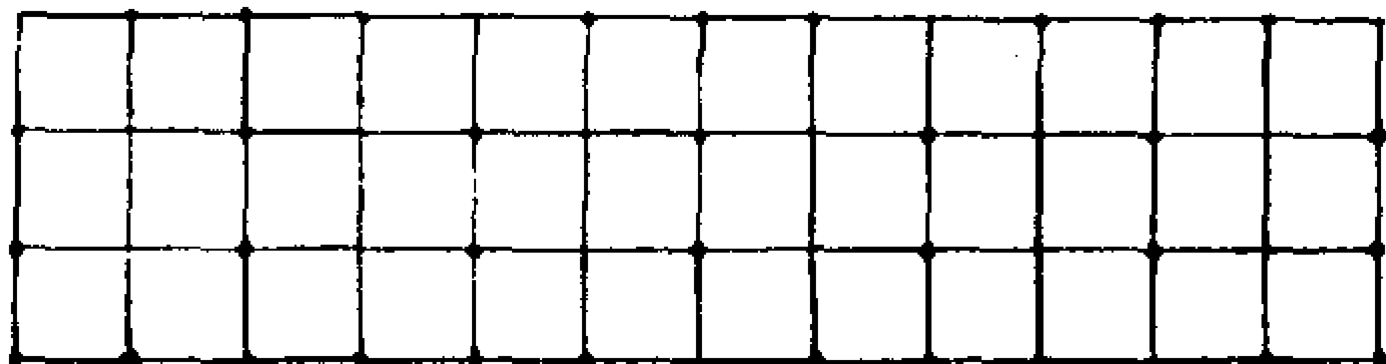
10·103　在坐标平面上给定点集

$$S=\{(x,y)\mid x=1,2,\cdots,1993,y=1,2,3,4\}.$$

已知 $T\subset S$ 且 T 中任何 4 点都不是某个正方形的 4 个顶点,求 $|T|$ 的最大值.

(中国国家集训队选拔试题,1993 年)

[**解**]　按下图所示的方式选取点集 T_0,具体方法是以 4 列为周期,每 4 列都是选取 10 个点.因为 $1993=4\times498+1$,故 $|T_0|=10\times498+3=4983$,且 T_0 中任何 4 点都不是某个正方形的 4 个顶点.可见,所求的 $|T|$ 的最大值不小于 4983.



下面证明,对于任何 $T\subset S$,$|T|=4984$,点集 T 都不能满足题中要求.

引理 1　对于集合 $S_1=\{(x,y)\mid x,y=1,2,3\}$ 的任一 7 元子集 M,其中总有 4 点是一个正方形的 4 个顶点.

只要注意集合 S_1 中有一列 3 点全在 M 中,很容易完成引理的证明,这里从略.

引理 2　对于集合 $S_2=\{(x,y)\mid x=1,2,3,4,y=1,2,3\}$ 的任

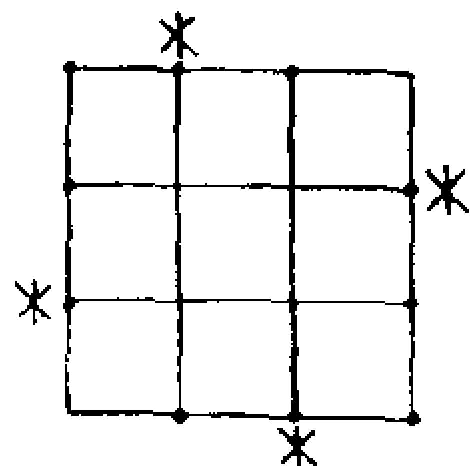
一9元子集 M,其中总有4点是某个正方形的4个顶点.

引理2的证明　若不然,则由引理1知,集合 S_2 的第1列和第4列的各3点全在 M 中.另外3点分属于 S_2 的中间两列,总有一列中至少有 M 中的两点.易见,无论这两点在哪一列和怎样分布,总是与第1列或第4列中的相应两点构成一个正方形的4个顶点,矛盾.

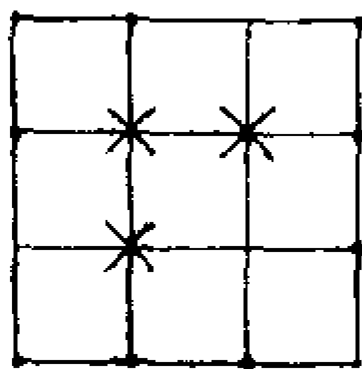
引理3　设 $S_3=\{(x,y)\mid x,y=1,2,3,4\}$,则 S_3 的任一11元子集中总有4点是某个正方形的4个顶点.

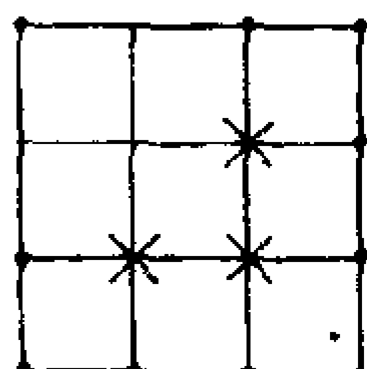
引理3的证明　S_3 的16个点排成4行4列的点阵.设有 $M\subset S_3$,$|M|=11$ 且 M 中任何4点都不是一个正方形的4个顶点.于是由引理2知,S_3 的第1,4两行和1,4两列中的每行每列都至少含 M 中的3点,而3点中显然至少有1点是"角点".从而 S_3 中的4个角点至少有两个在 M 中,至多有3个在 M 中.

(1) 设 M 中恰含两个角点,这时两个角点必为大正方形的一组相对顶点,不妨设为(1,4)和(4,1).由于另两个角点不在 M 中,故边上的另外8点全在 M 中.从而标有 * 号的4点是一个正方形的4个顶点,矛盾.

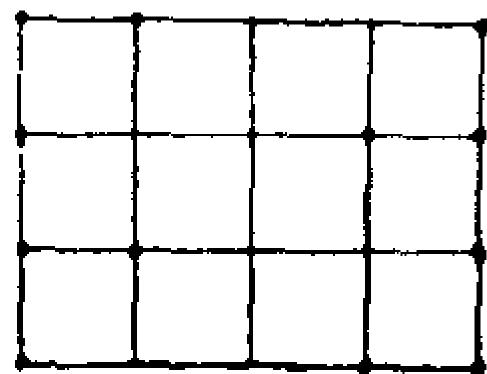


(2) 设 M 中恰含3个角点.不妨设右下方的角点不在 M 中.这时第1,4两行和第1,4两列上 M 中的点的分布只有两种不同情形如下.这时每个图中已各有9点.若在第1列或第1行上再取一点,则必导致4点是一个正方形的4个顶点,矛盾.故知 M 的另两点只能取在内部4点之中.于是无论哪个图中,M 都有1点取在画"×"的位置上,从而又导致4点是一个正方形的4个顶点,矛盾.这就完成了引理3的证明.





回到原题的证明.设有 $T\subset S$,$|T|=4984$,但是 T 中任何4点都不是一个正方形的4个顶点.由引理3知,点集 S 中的任何连续4列组成的 4×4 的子集中都至多含 T 的10点.从而每连续4列中都恰含 T 的10点且第1列的4点全在 T 中.这又导致第5列的4点也全在 T 中.这样一来,第2,3,4这3列中还有 T 的6点.显然,任



何一列中若有 T 的3点,都将导致有4点是一个正方形的4个顶点.故第2,3,4列的每列中都恰有 T 的两点.

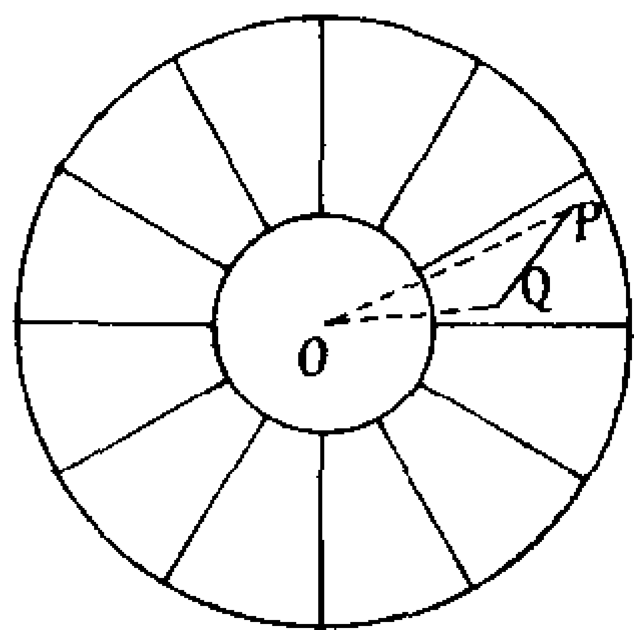
易见,第2或4列的两点若相邻或为上下两端点,都将导致有4点是一个正方形的4个顶点.故两列的各两点都只能是该列中的1,3两点或2,4两点且两列又不相同.不妨设4点如上图所示.这样一来,T 的点无论在第3列的哪个位置,都导致有4点是一个正方形的4个顶点,矛盾.

综上可知,所求的 $|T|$ 的最大值为4983.

10·104 在半径为1的圆内任给14个点,求证其中必有两点的距离小于0.72.

(中国上海市高中数学竞赛,1993年)

[证] 以0.36为半径,作已知单位圆的同心圆,然后将圆环分成12等份.这样共得到13部分:一个小圆内部(小圆周划给外面诸部分)和12个全等的曲边梯形(如图).



14个给定点分布于13个区域中,由抽屉原理知其中必有两点落在同一个区域中.这两点就满足题中的要求.

事实上,如果小圆内有两个已知点,则两点间的距离小于直径0.72.如果两点 P 和 Q 落在同一个曲边梯形中,连结 PQ、OP、OQ,由余弦定理有

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP\cdot OQ\cdot\cos\angle POQ.$$

记 $OP = p, OQ = q, \angle POQ = Q$,于是 $0.36 \leqslant p, q \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6}$.不妨设 $p \geqslant q$,于是又有

$$\begin{aligned} PQ^2 &= p^2 + q^2 - 2pq\cos\theta \leqslant p^2 + q^2 - 2pq\cos\frac{\pi}{6} \\ &= p^2 + q^2 - \sqrt{3}pq = (p-q)^2 + (2-\sqrt{3})pq \\ &\leqslant (1-q)^2 + (2-\sqrt{3})q = q^2 - \sqrt{3}q + 1 \\ &= \left(q - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leqslant (0.867 - 0.36)^2 + 0.25 \\ &= 0.507^2 + 0.25 = 0.507049 < 0.72^2. \end{aligned}$$

故得 $PQ<0.72$.

10·105 设平面上的有限点集 S 中至少有 3 个点,对于 S 中任意两个不同的点 A 和 B,线段 AB 的垂直平分线都是集 S 的一条对称轴.求所有这样的点集 S.

(第 40 届国际数学奥林匹克,1999 年)

[解] 显然,每个正 n 边形的 n 个顶点所成的集合都满足题中的要求,其中 $n=3,4\cdots$.下面我们来证明,这些点集就是满足题中要求的全部点集.

设有 n 点集 $S=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$满足题中要求,其中 $n\geqslant 3$.设点集 S 的重心为 M.对于任意的 $1\leqslant i<j\leqslant n$,因为线段 A_iA_j 的垂直平分线 l 为点集 S 的对称轴,即在关于直线 l 的反射变换之下集 S 不变.所以重心 M 关于 l 与自己对称,即点 M 在直线 l 上.从而有 $A_iM=A_jM$.再由 i 和 j 的任意性即得 $A_1M=A_2M=\cdots=A_nM$.这表明 S 中的 n 个点都在以重心 M 为圆心的一个圆上.从而这 n 个点是一个圆内接多边形当然是一个凸 n 边形的 n 个顶点.不妨设这个凸 n 边形为 $A_1A_2\cdots A_n$.

考察线段 A_1A_3.它的垂直平分线 l_1 过重心 M.这时点 A_2 在直线 A_1A_3 的一侧,而点 $A_4,\cdots,A_n$ 都在直线 A_1A_3 的另一侧.既然 l_1 为 S 的对称轴.所以点 A_2 只能与它自己对称,即点 A_2 在直线 l_1 上.从而有 $A_1A_2=A_2A_3$.同理可证

$$A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=\cdots=A_{n-1}A_n=A_nA_1.$$

由此可知,S 中的 n 个点恰为一个正 n 边形的 n 个顶点.

综上可知,满足题中要求的所有点集就是平面上的所有正 n 边形的 n 个顶点所成的集合,其中 $n=3,4,\cdots$.

10·106 在平面上是否存在两个不交的无限点集 A 和 B 满足下列条件:

(1)在 $A\cup B$ 中,任何 3 点都不共线,任何两点间的距离都不小于 1;

(2)任何一个顶点都在 B 中的三角形的内部都有 A 中的点,任何一个顶点都在 A 中的三角形的内部也都有 B 中的点?

(第 37 届国际数学奥林匹克预选题,1996 年)

[解] 这样的两个点集不存在.

若不然,设存在满足题中要求的点集 A 和 B. 我们把 $A\cup B$ 中的点称为标定点.

引理 对任意自然数 $n\geqslant3$. 都存在一个以标定点为顶点的多边形,使在它的内部及边界上共有 n 个标定点.

引理的证明 任取 n 个标定点,设它们的凸包为多边形 $P_1P_2\cdots P_m$,于是 $m\geqslant3$. 因为任何两个标定点之间的距离都不小于 1,故以每个标定点为心,以 1 为直径的圆两两不交. 因此,凸包多边形的内部及边界上所含的标定点只有有限多个. 不妨设点数 $k>n$.

考察直线 P_1P_2 并设多边形在射线 P_1P_2 的左侧,将射线 P_1P_2 绕点 P_1 逆时针转动,由于任何 3 个标定点都不共线,所以在转动过程中,每次只有 1 个标定点越过射线到右侧. 等到有 $k-n$ 个点越过射线后就停止转动,于是射线左侧恰有 n 个点. 显然,这 n 个点的凸包多边形即为所求.

回到原题的证明,在上面的引理中取 $n=9$,且设对应的多边形的内部及边界上的 9 个标定点中 A 中的点多于 B 中的点.

(i)设 9 个标定点中至少有 6 点属于 A,于是 B 中的点至多 3 个. 取 A 中的 6 点 $A_1,A_2,\cdots,A_6$.

若$\{A_1,A_2,\cdots,A_6\}$的凸包为六边形,不妨设为六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. 这时, 4 个三角形 $\triangle A_1A_2A_3$, $\triangle A_3A_4A_5$, $\triangle A_5A_6A_1$ 和$\triangle A_1A_3A_5$ 的内部互不重叠,不可能都含有 B 中的点.

若凸包为五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$, 则 $\triangle A_1A_2A_6$, $\triangle A_2A_3A_6$, $\triangle A_3A_4A_6$, $\triangle A_4A_5A_6$ 中不可能都含有 B 中的点.

若凸包为四边形 $A_1A_2A_3A_4$, 则 $\triangle A_1A_2A_5$, $\triangle A_2A_3A_5$, $\triangle A_3A_4A_5$, $\triangle A_4A_1A_5$ 中不可能都含有 B 中的点.

若凸包为$\triangle A_1A_2A_3$, 不妨设 A_5 在$\triangle A_1A_2A_4$ 的内部. 于是$\triangle A_1A_2A_5$, $\triangle A_2A_4A_5$, $\triangle A_4A_1A_5$ 和$\triangle A_2A_3A_4$ 的内部互不重叠,不可能都含有 B 中的点.

无论哪种情形,都与反证假设矛盾.

(ii)9 个标定点中有 5 个 A 中的点 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5.

若$\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$的凸包为五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$, 则

$\triangle A_1A_2A_3$,$\triangle A_3A_4A_5$,$\triangle A_3A_5A_1$ 中至少各含 B 中 1 点,分别记为 B_1,B_2,B_3.这时,$\triangle B_1B_2B_3$ 中不含 A 中的点,矛盾.

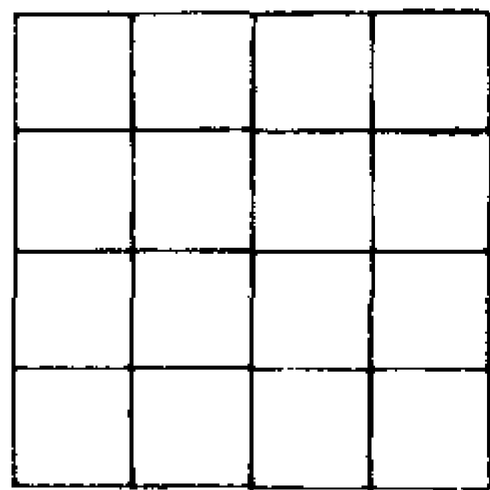
若凸包为四边形 $A_1A_2A_3A_4$,则 $\triangle A_1A_2A_5$,$\triangle A_2A_3A_5$,$\triangle A_3A_4A_5$ 和 $\triangle A_4A_1A_5$ 中各含 B 中一点 B_1,B_2,B_3,B_4,但这 4 点的凸包中至多含 A 中 1 点,矛盾.

若凸包为 $\triangle A_1A_2A_3$,不妨设 A_5 在 $\triangle A_1A_2A_4$ 中.于是 $\triangle A_2A_3A_4$,$\triangle A_3A_1A_4$,$\triangle A_1A_2A_5$,$\triangle A_2A_4A_5$,$\triangle A_4A_1A_5$ 中不可能都含 B 中的点.

综上可知,题中要求的点集 A 和 B 不存在.

第十一章　各种集合问题

11·1　在右图所示的方格网中，每一孔的尺寸是 1×1. 问能否把这个网表示为以下集合的并集：



(1) 每条长度都为 5 的 8 条折线.

(2) 每条长度都为 8 的 5 条折线？

（第 17 届全苏数学奥林匹克，1983 年）

［解］（1）上面 4 条横线每条左端点连一节竖线；右面 4 条竖线的下端点向左方连一节横线，即得 8 条长为 5 的折线.

（2）除去正方形的 4 个顶点外，边界上的 12 个结点每点引出 3 条线，故它们都应是折线的端点，但 5 条折线只有 10 个端点. 所以要把图形分成 5 条折线是不可能的.

11·2　能否在平面上放置 1000 条线段，使得每一条线段的端点都严格地位于其他线段的内部？

（第 31 届莫斯科数学奥林匹克，1968 年）

［解］　因为只有有限条线段，故可适当选取直角坐标系，使坐标轴不与任何一条已知线段平行.

1000 条线段至多有 2000 个不同端点. 取其中 x（或 y）坐标最大的端点，则它不能是任何一条已知线段的内点. 所以，题中要求的放置法是不能实现的.

11·3　在长度为 1 的线段上标出了一些区间，不论是同一区间还是不同区间中的任何两点的距离都不等于 0.1，求证所标出的区间的长度之和不超过 0.5.

（第 42 届莫斯科数学奥林匹克，1979 年）

［证］ 将线段用分点 $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{10}$ 等分为10个小区间 $[x_{i-1}, x_i)$，$i = 1,2,\cdots,10$. 我们把这10个小区间称为标准区间并从1到10编号. 易见，已标定的区间的长度都不超过0.1，且其中每一区间至多与两个标准区间相交. 现将奇数号的标准区间向右平移0.1，将偶数号区间向左平移0.1. 原有的标定区间随之平移，所得的各部分与原来的所有区间互不相交. 故知所有标定区间的长度之和的2倍不超过1.

11·4　设集合 M 是由一条直线上 k 段互不相交的线段组成的，且对任何长度不大于1的线段，都可放在直线上，使其两个端点都属于 M，求证组成集合 M 的 k 段线段的长度之和不小于 $\frac{1}{k}$.

（第17届全苏数学奥林匹克，1983年）

［证］ 设 k 条线段依次为 $[a_i, b_i]$ 且当 $i < j$ 时，$b_i < a_j$，$1 \leqslant i < j \leqslant k$. 令 $d_i = b_i - a_i$，则要证的结论是

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \geqslant \frac{1}{k}. \qquad ①$$

令

$$M_{ij} = [a_j - b_i, b_j - a_i], 1 \leqslant i < j \leqslant k,$$
$$M_{ii} = [0, d_i], i = 1,2,\cdots,k.$$

易见，集合（线段）M_{ij} 的长度为 $d_i + d_j$. 按已知，对于任何长度 l 不超过1的线段，都可把它放在直线上，使其两个端点都在 M 中. 如果它的两个端点都在 M 的同一段线段 $[a_i, b_i]$ 中，则 $l \in M_{ii}$；如果它的两个端点分属于两条线段 $[a_i, b_i]$ 与 $[a_j, b_j]$，$i < j$，则 $l \in M_{ij}$. 这意味着 $[0,1] \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k} M_{ij}$. 因而有

$$\sum_{i=1}^{k} d_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (d_i + d_j) \geqslant 1.$$

由此即得①式.

11·5　已知在半径为 $n \in N$ 的圆内有 $4n$ 条长度为1的线段，l 为某条直线，求证必有另一条直线，它或者平行于 l，或者垂直于 l，且至少和圆内的两条已知线段相交.

（比利时数学奥林匹克，1977年）

［证］ 设直线 $l' \perp l$，则每条长度为1的线段在直线 l 和 l' 上的投影之和不小于1. 从而 $4n$ 条已知线段在直线 l 和 l' 上的投影长度的总

和不小于 $4n$. 因此,两条直线 l 与 l' 中至少有 1 条,不妨设 l 上的投影长度之和不小于 $2n$. 因 $4n$ 条线段都在圆内,所以直线 l 上至少有 1 点 P,它至少在某两条线段的投影上. 显然,过点 P 所作直线 l 的垂线就至少与两条给定线段相交,即它满足题中的要求.

11·6　设 M 是一个八面体棱长的集合,这个八面体的所有面都是全等的四边形,求证 M 至多有 3 个元素.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

[证]　显然,这个八面体共有 16 条棱. 由欧拉公式知,它有 10 个顶点.

设 v_i 是引出 i 条棱的顶点数,于是有

$$\begin{cases} v_3 + v_4 + \cdots = 10, & ① \\ 3v_3 + 4v_4 + \cdots = 32. & ② \end{cases}$$

从两式中消去 v_3,得到

$$v_4 + 2v_5 + 3v_6 + \cdots = 2. \qquad ③$$

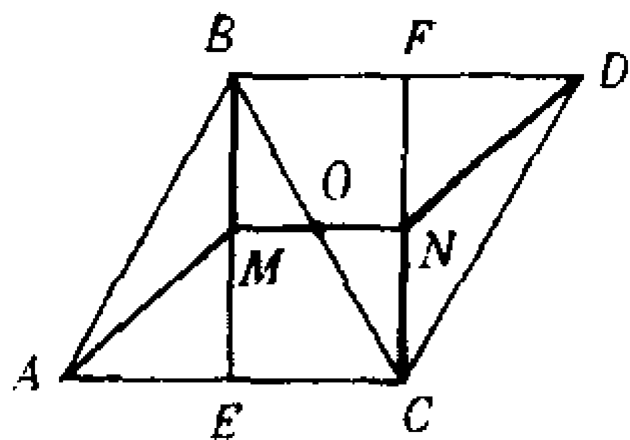
因此有 $v_4 \leqslant 2, v_5 \leqslant 1; v_i = 0, i = 6, 7, \cdots$. 从而再由 ① 得 $v_3 > 0$.

若结论不成立,则 M 有 4 个元素. 因为八面体的所有面都是全等的四边形,故每个面的 4 条边都互不相同. 设 A 是引出 3 条棱的顶点,以 A 为顶点的 3 个面分别为 $ABCD, ADEF, AFGB$. 记 $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$. 因为 $ABCD$ 和 $AFGB$ 全等,AF 与 AB 相邻,故 $AF = b$ 或 d;又因 $ABCD$ 和 $ADEF$ 全等,故 $AF = c$ 或 a,矛盾.

11·7　能否在棱长为 1 的正四面体的表面上选取一个由若干条线段组成的有限集,使得四面体的任何两个顶点都可用由这个集中的某些线段组成的折线来连接且这个集中线段的长度之和小于 $1 + \sqrt{3}$?

(波兰数学奥林匹克,1975 年)

[解]　可以做到. 例如可选取 6 条线段的集合 $\{AM, BM, MO, ON, CN, DN\}$,其中点 M, N, O 分别为 BE, CF 和棱 BC 的中点而 BE 和 CF 分别为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 的高. 当将这 6 条线段所在的四面体的两个侧面铺平时,这 6 条线段的位置如图所示.



显然,四面体的任何两个顶点都可用由这组线段中的某几条所组成的折线来连接. 因而,只须再验证 6 条线段的长度之和小于 $1 + \sqrt{3}$. 这时,

$MO+ON=\frac{1}{2}$，$BM+CN=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又因 $AM=DN$，故只须再证 $AM<\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}$. 由勾股定理有

$$AM^2=AE^2+EM^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{7}{16}<\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2.$$

两边开平方即得所欲证.

11·8　已知一条直线上的一组线段，它们的长度之和小于 1. 试证对于此直线上的任何一个 n 点集，总可以将 n 个点沿直线平移一个长度不超过 $\frac{n}{2}$ 的向量，使得平移后的 n 点中的任何一点都不属于任何一条已知线段.

（波兰数学奥林匹克，1973 年）

［证］　设 M 是已知线段的并集，则 M 的长度小于 1. 设 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是直线上的 n 个已知点，并用 I_i 表示以 P_i 为中点，长度为 n 的线段. 易见，$M\cap I_i$ 是长度和小于 1 的若干条线段的并集.

设 φ_i 表示以向量 $\overrightarrow{P_iP_1}$ 为位移的平移，$i=1,2,\cdots,n$. 因为在平移之下线段长度不变，故有 $\varphi_i(I_i)=I_1$. 令

$$I=\bigcup_{i=1}^{n}\varphi_i(M\cap I_i),$$

则 I 是长度之和小于 n 的线段的并集，且 $I\subset I_1$. 因为 I_1 长度为 n，所以存在点 $Q_1\in I_1-I$.

记以向量 $\overrightarrow{P_1Q_1}$ 为位移的平移为 φ，则 φ 便满足题中的要求. 若不然，必有 P_{i_0}，使 $\varphi(P_{i_0})\in M$. 又因 $\varphi(P_{i_0})\in I_{i_0}$，故有 $\varphi(P_{i_0})\in M\cap I_{i_0}$. 于是按平移 φ 和 φ_{i_0} 的定义便知

$$\begin{aligned}Q_1&=\varphi(P_1)=\varphi(\varphi_{i_0}(P_{i_0}))=\varphi_{i_0}(\varphi(P_{i_0}))\\&\in\varphi_{i_0}(M\cap I_{i_0})\subset I,\end{aligned}$$

此与 $Q_1\notin I$ 矛盾.

11·9　在三维空间中给定一点 O 及由总长等于 1988 的若干条线段组成的有限集 A，试证存在一个平面与集 A 不相交且到点 O 的距离不超过 574.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题，1988 年）

[证]　以点 O 为原点建立直角坐标系并将所给的线段分别向 3 条坐标轴投影. 设 A 中共有 n 条线段且它们在 3 条轴上的投影长分别为 $x_i, y_i, z_i, i = 1,2,\cdots,n$. 记 $x = \sum_{i=1}^{n} x_i, y = \sum_{i=1}^{n} y_i, z = \sum_{i=1}^{n} z_i$. 于是由柯西不等式有

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_ix_j + y_iy_j + z_iz_j) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(x_j^2 + y_j^2 + z_j^2)} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}\right)^2 \\ &= 1988^2. \end{aligned} \quad ①$$

不妨设 $x = \min\{x, y, z\}$, 于是由 ① 有

$$x \leqslant \frac{1988}{\sqrt{3}} < 2 \times 574.$$

从而在 x 轴上的区间 $[-574, 574]$ 内必有一点不在 n 条给定线段的投影上. 过这点作与 x 轴垂直的平面便满足题中的要求.

11·10　考虑一条直线上的若干个子集的有限组, 其中每个子集都是两个闭区间的并集, 并且任何 3 个子集都有 1 个公共点. 求证这条直线上存在一点, 它属于这个有限组中的至少一半子集.

(第 12 届美国数学奥林匹克, 1983 年)

[证]　显然, 只须证明在直线上的 $2n+1$ 个子集中必存在 $n+1$ 个子集, 其交集非空. 设这 $2n+1$ 个子集分别为

$$E_i = [a_i, b_i] \cup [c_i, d_i], i = 1,2,\cdots,2n+1,$$

其中 $a_i < b_i \leqslant c_i < d_i$. 不妨设 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_{2n+1}$.

考察点 b_{n+1}.

(1) 若对所有 $i > n+1$, 均有 $a_i \leqslant b_{n+1}$, 则

$$b_{n+1} \in [a_i, b_i] \subset E_i, i = n+1, n+2, \cdots, 2n+1,$$

$$b_{n+1} \in \bigcap_{i=n+1}^{2n+1} E_i.$$

由此可见, 点 b_{n+1} 即为所求.

(2)若有 $i_0 > n+1$,使得 $a_{i_0} > b_{n+1}$,则对所有 $i \leqslant n+1$,均有$[a_i, b_i] \cap E_{i_0} = \varnothing$.由已知,对任何 $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n+1$,均有$[C_{i_1}, d_{i_1}] \cap [c_{i_2}, d_{i_2}] \cap E_{i_0} \neq \varnothing$,当然更有$[c_{i_1}, d_{i_1}] \cap [c_{i_2}, d_{i_2}] \neq \varnothing$.令 $d = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n+1} d_i$,则显然有

$$d \in \bigcap_{i=1}^{n+1} [c_i, d_i] \subset \bigcap_{i=1}^{n+1} E_i.$$

可见,点 d 即为所求.

综上可知,直线上总存在1点,它属于有限组中的至少一半子集.

11·11 在平面上给定7条直线,其中任何两条都不平行,求证必能从中选出两条直线,使二者之间的夹角小于26°.

(第26届莫斯科数学奥林匹克,1963年)

[证] 若不然,则任何两条直线的夹角都不小于26°.

设第1条直线与第2条直线的交点为 M,并将另外5条直线都平移到过点 M,于是任何两条直线移动前后的交角不变.但移动后的7条直线交于一点 M,它们把以 M 为顶点的周角分成7对内部互不重叠的对顶角.由于任何两条直线的交角都不小于26°,故这些直线交成的14个角的总和不小于

$$14 \times 26^\circ = 364^\circ > 360^\circ,$$

矛盾.

11·12 能否在直线上划定一组长度均为1的闭区间,使得它们两两之间没有公共点,但任何无穷等差数列(任何公差和任何首项)都总有某些项落在这些区间上?

(第18届莫斯科数学奥林匹克,1955年)

[解] 令 $I_1 = [1,2]$, $I_2 = \left[2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right]$, $I_3 = \left[3\frac{3}{4}, 4\frac{3}{4}\right]$, $\cdots$, $I_n = \left[n+1-\frac{1}{2^{n-1}}, n+2-\frac{1}{2^{n-1}}\right]$, $\cdots$,并令 I_{-n} 是与I_n 关于原点对称的区间.于是$\{I_n \mid n = \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 就是一组长度均为1的区间,其中 I_n 与 I_{n+1} 之间的距离是$\frac{1}{2^n}$($n > 0$,当 $n < 0$ 也有类似结果).

设$\{a_n\}$是任一无穷等差数列,不妨设公差为 $d > 0$.如果$\{a_n\}$中的任何一项都不落在$\{I_n\}$中的那些区间上,则 $d > 1$.取自然数 k,使得 $k < d \leqslant k+1$,于是 $d - k > 0$.因为当区间的号码 n 趋向无穷时,相邻

区间之间的距离趋于零，故有自然数 N，使当 $n \geqslant N$ 时，从 I_n 开始的 $k+2$ 个区间之间的 $k+1$ 个距离之和小于 $d-k$。这时，若有 $\{a_n\}$ 中的某项 a_m 落在 I_n 与 $I_{n+1}(n > N)$ 之间的空隙中，则从 I_{n+1} 起到 I_{n+k} 止的 k 个区间再加上 $k+1$ 个空隙（包括 I_{n+1} 之前及 I_{n+k} 之后的两个空隙在内）的长度之和小于 d，而从 I_{n+1} 起到 I_{n+k+1} 止加上中间的 k 个空隙的长度之和大于 $k+1$，当然更大于 d。可见 a_{m+1} 必落在 I_{n+k+1} 中。这就验证了区间组 $\{I_n\}$ 满足题中的要求。

11·13　已知 50 条线段在一条直线上，求证下列两条结论至少有一条成立：

(1) 其中某 8 条线段有公共点。

(2) 存在 8 条线段，使它们两两没有公共点。

（第 6 届全苏数学奥林匹克，1972 年）

［证 1］　设 A_1B_1 是 50 条线段中有最小右端点的线段。如果至少有 8 条线段包含有 B_1，则(1) 成立。如果包含 B_1 的线段至多 7 条，则至少有 43 条线段不包含 B_1，显然，它们都在 B_1 的右方。

我们再从余下的至少 43 条线段中选取有最小右端点的线段 A_2B_2。于是可类似地推知或者有 8 条线段含有 B_2，或者在 B_2 右方至少有 36 条线段。继续这样推理，则或者在某一步找到属于 8 条线段的点，或者最后得到 7 条两两不交且在直线上从左向右排列的线段 $A_iB_i(i=1,2,\cdots,7)$ 之后，至少还有一条线段在点 B_7 的右方，这时当然有 8 条线段两两不交，即(2) 成立。

［证 2］　设直线是左右放置的，当线段 a 的左端点在线段 b 的左端点的左方时，我们称线段 a 在 b 的左方。用自然数 $1,2,\cdots,7$ 按如下方式给这 50 条线段编号。首先，将所有线段中最左边的一条编号为 1（如果这样的线段多于 1 条，则任取其中 1 条）。然后在接下去的每一步中，都从所有尚未标号的线段中取出最左边的 1 条，并且这样来给它编号：如果这条线段与所有已标号的线段都不相交，则标上号码 1；如果这条线段与若干条已标号的线段相交，但这些相交线段的标号所构成的集合是 $\{1,2,\cdots,7\}$ 的真子集，则给这条线段标上不同于所有相交线段号码的一个号码；如果在某一步中取出的线段与编号分别为 $1,2,\cdots,7$ 的线段都相交，则因这 7 条线段都在它的左方，故所取线段的左端点属于 8 条线段，即(1) 成立。否则，编号过程可一直进行下去，直到第 50 条线段

编完号码为止.这时由抽屉原理知,其中必有 8 条线段号码相同.这意味着有 8 条线段两两没有公共点,即(2)成立.

11·14 平面上给定一个由有限多条线段组成的集合,所有线段的长度之和为1.求证存在一条直线 l,使得已给的线段在 l 上的投影之和小于 $\frac{2}{\pi}$.

(第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年)

[证] 取一条与任何一条给定线段都不垂直的直线作 x 轴并将所给的线段按照斜率从小到大排成一列

$$a_{-n}, a_{-(n-1)}, \cdots, a_{-1}, a_0, a_1, \cdots, a_m, \qquad ①$$

其中负的下标表示该线段斜率为负,非负下标表示斜率非负.经过平移可将这些线段按①中的次序首尾相接而得到一条折线 AB.记线段 AB 中点为 O.将折线关于点 O 作中心对称,得到一个凸多边形,其周长为 2,每条边与其对称的边平行.

这个多边形的最小宽度,即其中各对平行边之间的距离的最小值记为 d.以点 O 为心,d 为直径的圆一定完全含于凸多边形内,至多与多边形的边相切.从而圆 O 的周长小于多边形的周长,即有 $\pi d < 2$,$d < \frac{2}{\pi}$.

取直线 l 与距离为 d 的一组平行对边垂直,则所有给定线段在 l 上的射影之和不超过 $d < \frac{2}{\pi}$.

11·15 证明在平面上不能有这样 7 条不同的直线,这些直线的交点中,至少有 6 个点每点恰为三条直线的交点,并且至少有 4 个点每点恰为两条直线的交点.

(第 34 届美国普特南数学竞赛,1973 年)

[证] 由于平面上任意两条直线至多有一个交点,所以若有 7 条直线,则至多有 $C_7^2 = 21$ 个交点,即有 21 个不同的直线对.

对于三条直线的交点应对应 3 个不同的直线对,即有 $6 \times 3 = 18$ 个直线对.

对于两条直线的交点,则对应 1 个直线对,即有 $4 \times 1 = 4$ 个直线对.

这时共有 $18 + 4 = 22 > 21$ 个直线对,出现矛盾.

因此,题中要求的 7 条直线不存在.

11·16　能否将整个空间表示成无数条两两异面的直线的并集?

（第 42 届莫斯科数学奥林匹克,1979 年）

[解]　可以做到.先作一条直线 a,再过 a 上的两个不同点,作两条垂直于 a 且互不平行的直线 b 和 c.考察这样的一个平面集合,其中的所有平面都相互平行,都平行于 a 但既不平行于 b 也不平行于 c.在每一个这样的平面上,过它与直线 b,c 的交点连一条直线,则所得的诸直线(包括 a 在内)两两异面.最后,再令空间绕着轴 a 作一切可能的旋转.如此得出的直线的全体即满足题中的要求.

11·17　平面上是否有 100 条不同的直线,它们恰好有 1985 个不同的交点?

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年）

[解]　存在.作直线

$$l_j = \{(x,y) \mid x = j\}, j = 0,1,\cdots,72;$$

$$l_j = \{(x,y) \mid y = j - 73\}, j = 73,74,\cdots,98,$$

则这些直线间的不同交点数为 $73 \times 26 = 1898$.

然后选取第 100 条直线,使它与上述 99 条直线恰有 87 个新的不同交点.为此,应该使它与前 99 条中的 12 条直线交于已有的交点而与其余的 87 条直线交于新的交点.所以我们选这第 100 条直线为直线 $x + y = 5$.相交而得的交点中的$(0,5),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)$是与前 99 条中的 12 条直线($l_j, j = 1,2,3,4,5,6,73,74,75,76,77,78$)的交点,这 6 点已被计数过,而其余交点都是新的.可见,这 100 条直线恰有 1985 个不同的交点.

11·18　试证在三维空间中,自原点引出的两两之间的夹角都不小于$\frac{\pi}{4}$的射线不多于 27 条.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年）

[证]　若不然,则存在 28 条射线,两两之间的夹角都不小于$\frac{\pi}{4}$.以每条射线为中心轴,作以原点 O 为顶点,母线与轴夹角为$\frac{\pi}{8}$的圆锥.于是这些圆锥的内部不相重叠.

以原点 O 为心作一个单位球面,则上述圆锥在球面上截得 28 个内

部互不重叠的球冠. 每个球冠的面积为 $2\pi\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)$. 因为 $\cos\frac{\pi}{8}<0.925$,所以

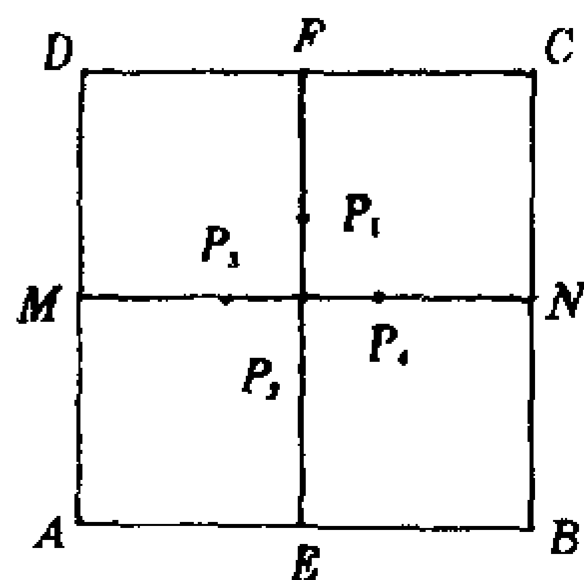
$$28\times2\pi\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)>56\pi\times0.075=4.2\pi>4\pi,$$

矛盾. 因而两两夹角不小于$\frac{\pi}{4}$ 的射线不多于 27 条.

11·19 若 9 条直线中的每一条都把正方形 $ABCD$ 分成两个面积比为 k 的四边形.

求证这 9 条直线中至少有 3 条直线通过同一个点.

(中国福建省福州市高中数学竞赛,1990 年)



[证] 若 $k=1$,则每条把正方形分成两个面积比为 1 : 1 的直线都过正方形的中心,结论显然成立.

若 $k\neq1$,注意到一直线把正方形分成两个四边形,则其面积比为中位线的比.

设 E,N,F,M 分别为正方形 $ABCD$ 的 4 边 AB,BC,CD,DA 的中点.

在 EF,MN 上分别取 P_1,P_2,P_3,P_4(见图),使得

$$\frac{MP_3}{P_3N}=\frac{k}{1},\frac{MP_4}{P_4N}=\frac{1}{k}.$$

$$\frac{FP_1}{P_1E}=\frac{k}{1},\frac{FP_2}{P_2E}=\frac{1}{k}.$$

则过 P_1,P_2,P_3,P_4 的直线把正方形分成面积比为 k 的四边形.

由于有 9 条直线过 $P_1,P_2,P_3,P_4$4 个点,则必有 3 条直线过同一点.

11·20 平面上有 $h+s$ 条直线,其中 h 条是水平线,s 条直线满足

(1) 它们都不是水平线.

(2) 它们中的任意两条都不平行.

(3)$h+s$ 条直线中任何三条直线都不共点,且这 $h+s$ 条直线恰好把平面分成 1992 个区域.

求所有的正整数对(h,s).

(亚太地区数学奥林匹克,1992 年)

[解] 由于一条直线把平面分成两个区域.

若 n 条直线把平面分成a_n 个区域,则 $n+1$ 条直线分成的 a_{n+1} 个区域满足

$$a_{n+1}=a_n+(n+1),$$
$$a_1=2.$$

由此推得

$$a_n=a_1+(2+3+\cdots+n)=1+\frac{n(n+1)}{2}.$$

于是 s 条直线把平面分成 $1+\frac{s(s+1)}{2}$ 个区域.

又 h 条平行线与这s 条直线又分成$h(s+1)$ 个区域(即每加一条水平线,增加 $s+1$ 个区域).所以有

$$h(s+1)+1+\frac{s(s+1)}{2}=1992.$$

$$(s+1)(2h+s)=2\times1991=2\times11\times181.$$

对上述不定方程可列出下表

$s+1$	s	$2h+s$	h
2	1	1991	995
11	10	362	176
22	21	181	80
181	180	22	<0

所以满足要求的正整数对(h,s) 为

$$(995,1),(176,10),(80,21).$$

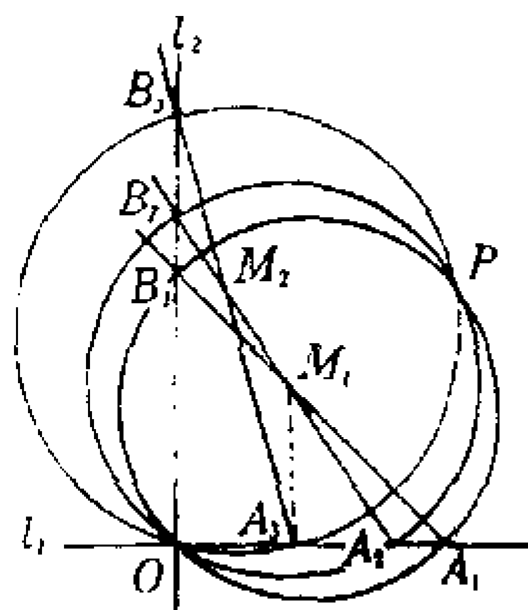
11·21 如果若干条直线分布在一个平面上,其中任何两条不平行,任何 3 条都不共点,则称这组直线是正常分布的.

已知对于任何4条正常分布的直线而言,由其中每3条直线所围成的总共4个三角形的外接圆都共点.问能否存在45条正常分布的直线,使得由其中每 3 条直线所围成的所有三角形的外接圆都共点?

(圣彼得堡代表队选拔试题,1992 年)

[解] 存在.过点 O 作两条互相垂直的直线 l_1 和 l_2.在交角的平分线上取一点 P 并以OP 为直径作圆,与直线 l_1,l_2 分别交于 A_1 和 B_1.

然后在线段 OA_1 内部取点 A_2 并过3点 O,A_2,P 作圆交直线 l_2 于点 B_2. 记直线 A_1B_1 与 A_2B_2 的交点为 M_1. 过点 M_1 作 $M_1A_3 \perp OA_2$ 于点 A_3 并过3点 O,A_3,P 作圆交直线 l_2 于 B_3. 记直线 A_2B_2 与 A_3B_3 的交点为 M_2. 易见, $l_1,l_2,A_1B_1,A_2B_2,A_3B_3$ 这5条直线是正常分布的. 一般地,当已得到直线 $A_{i-1}B_{i-1}$ 与 A_iB_i 的交点 M_{i-1} 时,便过 M_{i-1} 作 $M_{i-1}A_{i+1} \perp OA_i$ 于点 A_{i+1}, 并过3点 O,A_{i+1},P 作圆交直线 l_2 于点 B_{i+1}. 记直线 A_iB_i 与 $A_{i+1}B_{i+1}$ 的交点为 M_i. 这样继续下去,直到得到直线 $A_{43}B_{43}$ 为止. 显然,这45条直线是正常分布的.



往证这45条直线($l_1,l_2,l_{i+2}=A_iB_i, i=1,2,\cdots,43$)中的任何3条直线($l_i,l_j,l_k$)所围成的三角形($ijk$)的外接圆都必过点 P. 首先,考察4条直线 l_1,l_2,l_i,l_j, 其中 $3 \leqslant i < j \leqslant 45$. 按已知,三角形($1\ 2\ i$), ($1\ 2\ j$), ($1\ i\ j$), ($2\ i\ j$) 的外接圆共点. 由作图过程知,三角形($1\ 2\ i$), ($1\ 2\ j$)的外接圆交于点 O 和 P. 因此上述公共点只能是点 O 或点 P. 但是三角形($1\ i\ j$)的外接圆已经与直线 l_1 交于点 A_{i-2},A_{j-2}, 从而不能再过点 O. 故知上述4圆的公共点必为点 P. 再考察4条直线 l_1,l_i,l_j,l_k, 其中 $3 \leqslant i < j < k \leqslant 45$. 由上面结果知三角形($1\ i\ j$), ($1\ i\ k$), ($1\ j\ k$)的外接圆都过点 P 且点 P 为3圆的惟一公共点,因而由已知可知三角形(ijk)的外接圆也过点 P. 这就证明了我们所作出的45条直线满足题中要求.

11·22 在坐标平面上能否存在一个含有无穷多条直线 $l_1,l_2,\cdots,l_n,\cdots$ 的直线族,它满足条件:

(1) 点 $(1,1) \in l_n, n=1,2,\cdots$;

(2) $k_{n+1}=a_n-b_n$, 其中 k_{n+1} 是直线 l_{n+1} 的斜率, a_n 和 b_n 分别是 l_n 在 x 轴和 y 轴上的截距, $n=1,2,\cdots$;

(3) $k_nk_{n+1} \geqslant 0, n=1,2,\cdots$?

并证明你的结论.

(中国高中数学联赛,1988年)

[**解1**] 满足条件(1),(2),(3)的直线族不存在.

若不然,直线 l_n 的方程为

$$y - 1 = k_n(x - 1). \qquad ①$$

由此可得 $a_n = 1 - \frac{1}{k_n}, b_n = 1 - k_n, a_n - b_n = k_n - \frac{1}{k_n} = k_{n+1}$ 都存在，故有 $k_n \neq 0, n = 1,2,\cdots$.

对于 $n \geqslant 1$，我们写

$$k_{n+1} - k_n = -\frac{1}{k_n},$$

$$k_n - k_{n-1} = -\frac{1}{k_{n-1}},$$

……

$$k_2 - k_1 = -\frac{1}{k_1},$$

相加得到

$$k_{n+1} = k_1 - \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}\right). \qquad ②$$

由于 $k_n \neq 0$ 及(3)，有 $k_n k_{n+1} > 0$，可见诸 k_n 同号，不妨设 $k_n > 0$，$n = 1,2,\cdots$. 又因 $k_{n+1} = k_n - \frac{1}{k_n} < k_n$，故有$\frac{1}{k_{n+1}} > \frac{1}{k_n}$，即数列$\left\{\frac{1}{k_n}\right\}$递增. 所以，由 ② 有

$$k_{n+1} < k_1 - \frac{n}{k_1}.$$

由此可知，当 $n > k_1^2$ 时，$k_{n+1} < 0$，矛盾. 所以，满足条件(1)，(2)，(3)的直线族不存在.

[解 2] 满足条件(1)，(2)，(3) 的直线族不存在.

若不然，设满足条件的$\{l_n\}$存在，直线 l_n 的方程为

$$\frac{x}{a_n} + \frac{y}{b_n} = 1, n = 1,2,\cdots. \qquad ③$$

因 l_n 过(1,1)点，故有

$$a_n + b_n = a_n b_n, a_n = \frac{b_n}{b_n - 1}, b_n = \frac{a_n}{a_n - 1}.$$

由此及 ③ 可得

$$k_n = -\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{1 - a_n} = 1 - b_n. \qquad ④$$

由条件(2) 及 ④ 可得

$$k_{n+1}=a_n-b_n=a_n-1+1-b_n=k_n-\frac{1}{k_n}. \quad ⑤$$

因所有 a_n,b_n 都存在，故 $b_n\neq 1$，从而 $k_n\neq 0$. 于是由条件(3)知所有 k_n 同号.

不妨设 $k_n>0,n=1,2,\cdots$，于是由 ⑤ 知 $\{k_n\}$ 为递减数列，从而极限 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=k$ 存在. 因此有

$$\lim_{n\to\infty}(k_n-k_{n+1})=0. \quad ⑥$$

另一方面，由(5) 又有

$$\lim_{n\to\infty}(k_n-k_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}\neq 0,$$

此与 ⑥ 矛盾. 所以，满足题中要求的直线族不存在.

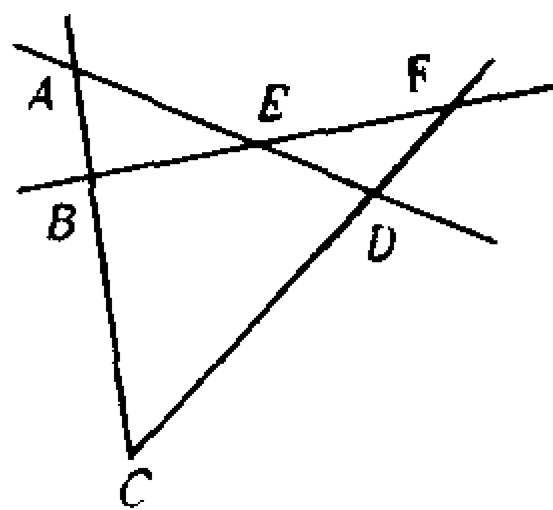
11·23　已知平面上有 4 条直线，其中任何两条都相交，任何三条都不交于一点. 于是在每条直线上都交得 3 个交点，它们从直线上截出两条线段，共得到 8 条线段. 问这 8 条线段的长度能否分别为

(1)1,2,3,4,5,6,7,8?

(2) 互不相同的自然数?

(第 25 届全苏数学奥林匹克，1991 年)

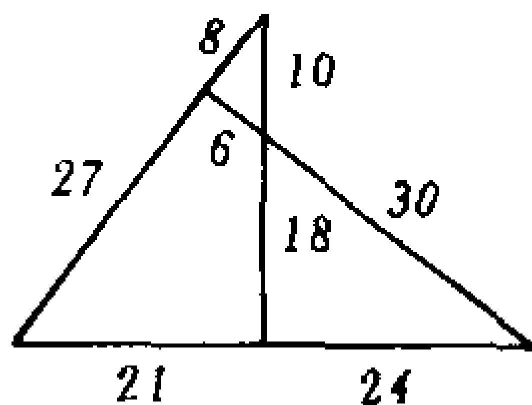
[解]　(1) 若 8 条线段长可以分别为 1,2,3,4,5,6,7,8，则由于三角形中两边之和大于第三边，故知长度为 1 的线段不能作为三角形的边，从而只能是图中 BC 与 CD 之一，不妨设 $BC=1$. 这样一来，因为 BF 与 CF 都是整数，故必等长. 在 $\triangle BFC$ 中应用余弦定理得 $\cos F=1-\frac{1}{2BF^2}$. 再于 $\triangle EFD$ 中应用余弦定理又有



$$ED^2=EF^2+FD^2-2EF\cdot FD+\frac{EF\cdot FD}{BF^2}.$$

由于 $EF<BF,FD<CF=BF$，故上式右端最后一项不是整数，从而 ED 不是整数，矛盾.

(2)8 条线段的长度可以是互不相同的自然数(见右图).



11·24　空间中是否存在满足下列条件的直线集合 M:

(1) 经过空间中的每点都恰好有 M 中的两条直线;

(2) 对于空间中的任何两点，都可用各段均在 M 中的直线之上的折线将两点相连.

(第 18 届全俄数学奥林匹克，1992 年)

［解］ 存在. 下面我们来构造一个这样的集合 M.

在空间引入直角坐标系，让集合 M 由两族直线构成：第 1 族为空间中平行于 x 轴的所有直线；第 2 族这样来构成：对所有实数 a，过平面 $x=a$ 上的所有点在平面上作彼此平行的直线，使得过点 $(a,0,0)$ 的直线在平面 OYZ 上的投影为直线 $z=ay, a\in R$. 易见，两族直线彼此横截且过空间中每点恰有两族的各 1 条直线.

下面我们来验证集 M 中的直线满足条件(2)，即对于空间中任何两点 $P(x_1,y_1,z_1)$ 和 $Q(x_2,y_2,z_2)$，都可用满足题中要求的折线来连结.

(1) 当 $x_1\neq x_2$ 时，第 2 族中分别过点 P 和 Q 的直线 m 和 n 不平行，因此它们在 OYZ 平面上的投影相交，设交点为 $(0,b,c)$. 于是第 1 族中过点 $(0,b,c)$ 的直线与直线 m 和 n 都相交，设交点分别为 M,K. 易见，折线 $PMKQ$ 便满足题中要求.

(2) 当 $x_1=x_2$ 时，点 Q 的坐标为 (x_1,y_2,z_2). 考察点 $S(x_1+1,y_1,z_1)$. 显然，线段 PS 位于第 1 族中过点 P 的直线上. 然后因点 S 与 Q 的 x 坐标不同，于是由(1)知存在满足要求的折线连结点 S 和 Q. 再加上线段 PS 即得所求.

11·25 在平面上给出了 n 条直线 $(n>2)$，其中任何两条都不平行，任何 3 条都不共点. 已知可将平面绕着某点 O 旋转某个角度 $\alpha<180°$，使得每一条所引出的直线都重合于另一条直线的原来位置. 试求所有可能的 n.

(第 34 届莫斯科数学奥林匹克，1971 年)

［解］ (1) 当 n 为奇数时，正 n 边形的 n 条边所在的 n 条直线便满足题中要求，故知大于 1 的奇数 n 都合乎要求.

(2) 若 n 含有大于 1 的奇因数，即 $n=p\cdot q$，其中 $p>1$ 为奇数，$q\geqslant 2$，则可从正 p 边形出发，进行如下加工：在每一个顶点附近都以完全相同的方式切出 $q-1$ 条新边来，且这 $q-1$ 条边加上原来 1 条边共 q 条边中，任何两边夹角都不是 $\frac{2\pi}{q}$ 的整数倍. 于是得到一个 n 边形. 它

的 n 条边所在的 n 条直线满足题中要求.

(3) 设 $n=2^k, k=2,3,\cdots$. 设有 n 条直线满足题中要求. 取定其中 1 条直线为 l_1, 然后将另外 $n-1$ 条直线按逆时针方向与 l_1 夹角从小到大排序为 $l_2, l_3, \cdots, l_n$. 按题中要求, 当这 n 条直线转过 $\alpha<180°$ 角时, 每条直线都恰重合于原来另一条直线的位置. 设这时 l_1 到了原来 l_m 的位置, 则 $(m-1)\mid n, m-1<n$, 故有 $(m-1)\left|\frac{n}{2}=2^{k-1}\right.$, 即当 n 条直线旋转 $180°$ 时, 也重合于原直线组, 从而这些直线必可两两配对, 每对直线平行, 此与题中要求矛盾.

综上可知, 凡大于 2 且不能写成 $2^k(k=2,3,\cdots)$ 形式的所有自然数 n 都满足要求.

11·26　在面积是 5 个平方单位的矩形中, 放置着 9 个面积是 1 的矩形. 求证其中必有两个矩形的重叠部分的面积不小于 $\frac{1}{9}$.

(第 19 届莫斯科数学奥林匹克, 1956 年)

[证]　若不然, 则任何两个矩形的重叠部分的面积都小于 $\frac{1}{9}$.

我们任意给 9 个矩形编号并设想 9 个矩形是依次放上去的. 先放 1 号矩形盖住了大矩形面积为 1 的部分; 然后放 2 号矩形, 大矩形被盖住的部分的面积的增加值大于 $\frac{8}{9}$. 类似地, 当已放好 k 个矩形, 而又放上去 $k+1$ 号矩形时, 大矩形被盖住面积的增加值大于 $\frac{9-k}{9}$. 从而当 9 个矩形都放上去时, 盖住的总面积

$$S>1+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+\cdots+\frac{1}{9}=5,$$

此与已知矛盾.

11·27　设在坐标平面上给出了无穷多个矩形, 它们的顶点的坐标都形如

$$(0,0),(0,m),(n,0),(n,m),$$

其中 m 和 n 都是正整数, 求证总可从这些矩形中选出两个矩形, 使得一个矩形包含在另一个矩形之中.

(匈牙利数学奥林匹克, 1934 年)

[证 1]　我们把矩形位于横轴上的边称为底, 位于纵轴上的边称

为高.

因为矩形的底的长度 n 都是正整数,故其中必有最小的,记为 n_1. 我们任选一个底长为 n_1 的矩形,设其高为 m_1. 另外再取 m_1 个矩形. 如果这 m_1 个矩形中,有一个矩形的高大于 m_1,则这个矩形就含有前面的底为 n_1,高为 m_1 的矩形. 如果所取的 m_1+1 个矩形的高都不大于 m_1,则每个矩形的高的值都是 $\{1,2,\cdots,m_1\}$ 中之一. 由抽屉原理知其中必有两个矩形的高相等,从而底较长的矩形包含底较短的矩形.

[证 2] (1) 如果给定矩形中有两个矩形底相等或高相等,则一定是一个包含另一个.

(2) 设给定矩形中的任何两个矩形的底和高都不相等. 任取一个矩形 R,记其底和高分别为 n 和 m. 于是其他矩形中,底长小于 n 的至多有 $n-1$ 个,高小于 m 的至多有 $m-1$ 个,总共至多有 $n+m-2$ 个. 所给的矩形有无穷多个,故必有一个矩形 R_1 的底大于 n,高大于 m,即有 $R \subset R_1$.

11·28 在平面上给定 n 个矩形,它们的各边都与已知的互相垂直的两条直线平行. 已知这些矩形中的任何两个都有公共点,求证存在一点属于所有这些矩形.

(波兰数学奥林匹克,1970 年)

[证] 取以两条互相垂直的直线为坐标轴的直角坐标系,并将 n 个已知矩形记为 $R_1,R_2,\cdots,R_n$. 记矩形 R_i 的上底和下底纵坐标分别为 y_i 和 y'_i;R_i 的左边和右边的横坐标分别为 x_i 和 x'_i,$i=1,2,\cdots,n$. 令

$$\begin{aligned} x_0 &= \max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}, \\ x'_0 &= \min\{x'_1,x'_2,\cdots,x'_n\}, \\ y_0 &= \min\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}, \\ y'_0 &= \max\{y'_1,y'_2,\cdots,y'_n\}. \end{aligned}$$

因为任何两个矩形都有公共点,故有 $x'_0 \geqslant x_0, y'_0 \leqslant y_0$. 考察点 $P=(x_0,y_0)$,易见对任何 i 都有

$$x_i \leqslant x_0 \leqslant x'_0 \leqslant x'_i, y_i \geqslant y_0 \geqslant y'_0 \geqslant y'_i.$$

这意味着 $(x_0,y_0) \in R_i$,$i=1,2,\cdots,n$,即点 P 属于所有这些矩形.

11·29 求最小正整数 n,使对任给的 n 个边长都是不超过 100 的正整数的矩形中,总存在 3 个矩形 R_1,R_2,R_3,使得 R_1 可放在 R_2 中,

R_2 可放在 R_3 中.

（中国天津市代表队测验题，1992 年）

[解] 将每个矩形对应于坐标平面上的一个整点 (x,y)，其中 x 和 y 分别为矩形的宽和长，$1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 100$.

考察如下的两个集合：

$$S = \{(i, 100 - i + 1) \mid i = 1, 2, \cdots, 50\},$$
$$T = \{(i, 100 - i) \mid i = 1, 2, \cdots, 50\}.$$

这两个集合中每个都有 50 个元素，每个中的 50 个整点所对应的矩形都互不包含（指不能将一个放入另一个之中）. 因此，若从这两个集合中的整点所对应的 100 个矩形中取 3 个矩形，必有两个矩形在同一集合中，这两个矩形便不满足题中要求. 这表明所求的最小正整数 $n \geqslant 101$.

当有 101 个矩形时，考察如下的 50 个各在一条曲尺形折线上的整点集合：

$$M_i = \{(i,i), (i+1,i), \cdots, (100-i+1, i), (100-i+1, i+1), \cdots, (100-i+1, 100-i+1)\}, i = 1, 2, \cdots, 50.$$

易见，$|M_i| = 203 - 4i$ 且每个 M_i 中的任何两个整点所对应的矩形都是小的可以放入大的. 给定的 101 个矩形分属于这 50 个集合，由抽屉原理知其中必有 3 个矩形所对应的整点属于同一个集合，这 3 个矩形便满足题中要求.

综上可知，所求的最小正整数 $n = 101$.

11·30 在平面上给定有限多个多边形，其中每两个多边形都有公共点. 求证存在一条直线与所有多边形都相交.

（第 9 届全苏数学奥林匹克，1975 年）

[证] 任作一条直线 l 并将所有多边形都投影到 l 上，每个投影都是一条线段. 由已知条件知任何两条投影线段都有公共点.

将这些投影线段分别记为 A_iB_i，$i = 1, 2, \cdots, n$. 把直线 l 视为数轴，并设 $A_i < B_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$. 令 $B = \min\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$，不妨设 $B = B_1$. 于是 $B_i \geqslant B_1$，$i = 2, 3, \cdots, n$. 另一方面，必有 $A_i \leqslant B_1$，$i = 2, 3, \cdots, n$. 否则，若有 i_0，使 $A_{i_0} > B_1$，则线段 A_1B_1 与 $A_{i_0}B_{i_0}$ 没有公共点，矛盾. 可见，B 是所有 n 条线段 A_iB_i 的公共点. 过 B 作直线 l 的垂线，则它与所有多边形都相交.

11·31 在一张方格边长为 1 的方格纸上给定一个凸 32 边形，它

的所有顶点都在方格纸的结点上，问这个多边形的最小可能周长是多少？

（第 9 届全苏数学奥林匹克，1975 年）

[解] 把凸 32 边形 $A_1A_2\cdots A_{32}$ 的每条边视为一个向量，于是得到 32 个向量且它们满足条件：

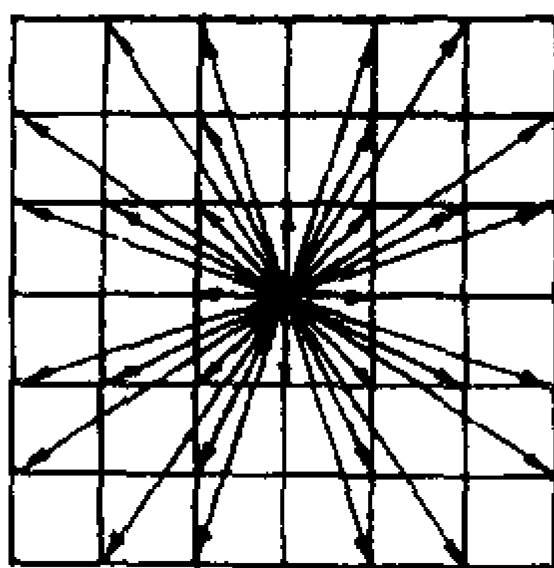
(1) 每一个向量的起点和终点都在方格纸的结点上；

(2) 任何两个向量的方向不同；

(3) 所有向量之和等于零向量.

反之，若有一组 32 个向量满足条件(1)—(3)，则它们必能组成一个以结点为顶点的凸 32 条形. 因而，我们的问题就化为求满足条件(1)—(3) 的 32 个向量的长度之和的最小值.

我们把所有向量的起点都移到一个结点 O，即右图中正方形的中心. 右图中恰好画有 32 个向量，而且容易看出，无法再画出以 O 为起点，以其他结点为终点的向量，使它的长度为图中最长向量的长度短些. 故知所求的最小值即为 $4+4\sqrt{2}+8\sqrt{5}+8\sqrt{10}+8\sqrt{13}$.



11·32　设 $v_1, v_2, \cdots, v_{1989}$ 为一组共面向量，且有 $|v_i| \leqslant 1, i=1,2,\cdots,1989$. 求证可以找到 $\varepsilon_i \in \{-1,1\}, i=1,2,\cdots,1989$，使得 $\left|\sum_{i=1}^{1989} \varepsilon_i v_i\right| \leqslant \sqrt{3}$.

（第 30 届国际数学奥林匹克候选题，1989 年）

[证] 更一般地，用 n 代替 1989 并用归纳法来证明.

当 $n=1,2$ 时，结论显然成立. 设结论于 $n=k \geqslant 2$ 时成立. 当 $n=k+1$ 时，在向量 v_1, v_2, v_3 所导致的 6 个向量 $\pm v_1, \pm v_2, \pm v_3$ 中，总有两个向量的夹角不大于 $60°$，于是二者之差的模不大于 1，即 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 中总有两个向量 v_i, v_j 及 $\varepsilon \in \{-1,1\}$，使得 $|v_i+\varepsilon v_j| \leqslant 1$. 不妨设 $i=1, j=2$. 于是由归纳假设知于 k 个向量 $\{v_1+\varepsilon v_2, v_3, \cdots, v_{k+1}\}$，存在 $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \cdots, \varepsilon_n \in \{-1,1\}$，使得

$$|\varepsilon_1(v_1+\varepsilon v_2)+\varepsilon_3 v_3+\cdots+\varepsilon_n v_n| \leqslant \sqrt{3}.$$

这表明 $n=k+1$ 时结论成立，这就完成了归纳证明.

11·33 在平面上给定 1980 个不全共线的向量,其中任意 1979 个向量之和都与这些向量之外的另一个向量共线.求证这 1980 个向量之和是零向量.

(第 14 届全苏数学奥林匹克,1980 年)

[证] 记这 1980 个向量之和为 $\vec{S}$.因为这 1980 个向量不全共线,故可取其中两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$,使二者不共线.于是存在常数 k_1 和 k_2,使得

$$\vec{S} = k_1\vec{a}, \quad \vec{S} = k_2\vec{b}.$$

由此知 $k_1 = k_2 = 0$,即 $\vec{S}$ 为零向量.

11·34 是否存在由 1991 个两两互不平行的向量组成的向量组,使得对于其中的任何两个向量,都存在组中的第 3 个向量与这两个向量都垂直?

(第 32 届乌克兰数学奥林匹克,1992 年)

[解] 存在.在平面上取 995 对向量,使得

(1) 每对中的两个向量互相垂直;

(2) 不同对中的任何两个向量都不平行.

然后再取第 1991 个向量垂直于这个平面.容易验证,这 1991 个向量组成的向量组便满足题中的要求.

11·35 已知平面上若干条向量的起点都在点 O,这些向量的长度之和等于 4,求证可以从中选出一些(也可以是一条)向量,使得它们之和向量的长度大于 1.

(第 27 届莫斯科数学奥林匹克,1964 年)

[证] 作以点 O 为原点的直角坐标系并把每个向量都分别投影到 x 轴和 y 轴上.因为向量的两个投影长度之和不小于它本身的长度且等号成立的充分必要条件是向量平行于坐标轴,所以这些向量在两条坐标轴上的投影长度之和不小于 4.

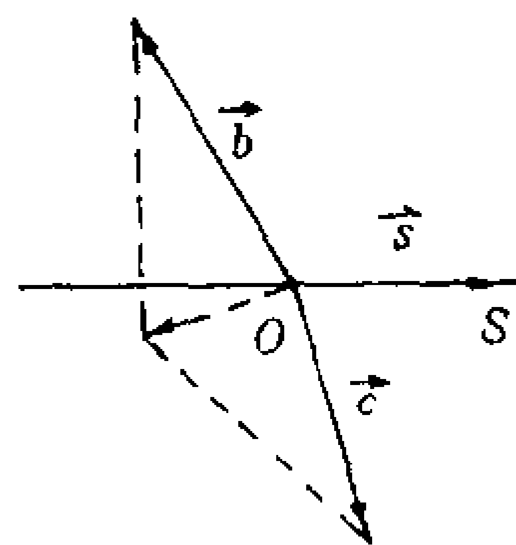
考察这些给定向量在 4 条半轴上的投影长度之和,其中最大的 1 个不小于 1.若它大于 1,则显然,投影落在这条半轴上的所有向量之和的长度大于 1;若它等于 1,则在 4 条半轴上的投影长度之和都等于 1,从而每条向量都在坐标轴上.将位于正半 x 轴与正半 y 轴上的所有向量求和,其长度为 $\sqrt{2}$ 当然大于 1.

11·36　在平面上给定 n 个向量,它们的长度都等于1,n 个向量之和是零向量.求证可以把这些向量编号,使当 $k = 1,2,\cdots,n$ 时,前 k 个向量之和的长度不大于2.

(第8届全苏数学奥林匹克,1974年)

[证]　把所有向量都放到某一点 O. 我们先来证明如下的引理:

引理　如果已经选好 k 个向量,它们的和 $\vec{s} = \overrightarrow{OS}$, $k < n-2$, $|\vec{s}| \leqslant 1$, 则可以从其余向量中或者选择1个向量 $\vec{a}$, 使得 $|\vec{s}+\vec{a}| \leqslant 1$, 或者可选择两个向量 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$, 使得 $|\vec{s}+\vec{b}| \leqslant \sqrt{2}$, $|\vec{s}+\vec{b}+\vec{c}| \leqslant 1$.



引理的证明　如果在其余向量中有向量 $\vec{a}$,使得 $\angle(\vec{a},\vec{s}) \geqslant 120°$,则有 $|\vec{s}+\vec{a}| \leqslant 1$. 否则,因为直线 OS 的两侧都有给定的向量,故可在两侧向量中各选一个向量,使每个向量都是该侧中与 $\vec{s}$ 夹角最大的向量.不难看出,这两个向量中至少有一个与 $\vec{s}$ 夹钝角,否则所有向量的和不会为零向量.记这个向量为 $\vec{b}$,于是 $90° < \angle(\vec{b},\vec{s}) < 120°$.将所选的另一侧的向量记为 $\vec{c}$,则又有 $240° > \angle(\vec{b},\vec{s}) + \angle(\vec{s},\vec{c}) > 180°$. 因而有 $\angle(\vec{b},\vec{c}) > 120°$, $\angle(\vec{s},\vec{b}+\vec{c}) > 120°$ 且 $|\vec{b}+\vec{c}| < 1$. 从而有 $|\vec{s}+\vec{b}| < \sqrt{2}$, $|\vec{s}+\vec{b}+\vec{c}| \leqslant 1$,引理证毕.

当 $n = 1,2,3$ 时,结论显然成立.当 $n \geqslant 4$ 时,任取一个向量作为 $\vec{a}_1$,于是由引理知,或者存在 $\vec{a}_2$,使 $|\vec{a}_1+\vec{a}_2| \leqslant 1$,或者存在 $\vec{a}_2,\vec{a}_3$,使得 $|\vec{a}_1+\vec{a}_2| < \sqrt{2}$, $|\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3| \leqslant 1$.将上述过程进行若干次后,即可把 n 个向量全部排好且显然满足比题中更强的要求,因为我们证明了题目中的常数2可以改为 $\sqrt{2}$.

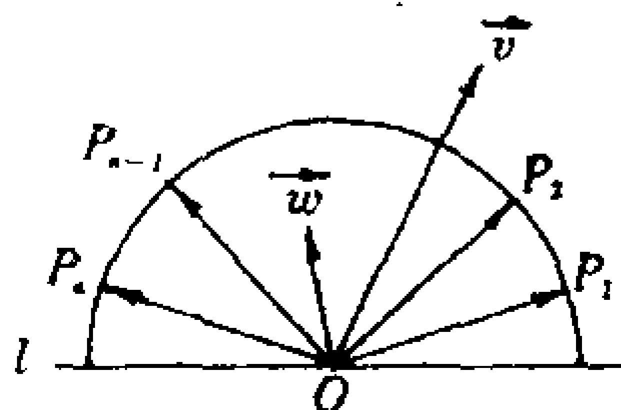
11·37　设平面 M 上的直线 l 过点 O, $\overrightarrow{OP_1},\overrightarrow{OP_2},\cdots,\overrightarrow{OP_n}$ 都是平面 M 上的单位向量且点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 都在直线 l 的同一侧.试证当 n 为奇数时,必有

$$|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\overrightarrow{OP_n}|\geqslant 1,$$

其中$|\overrightarrow{OP}|$表示向量$\overrightarrow{OP}$的长度.

（第15届国际数学奥林匹克,1973年）

[证] 因为这 n 个向量都是单位向量,所以它们的终点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 都在以 O 为心的单位圆的半圆上.不妨设这 n 个点在半圆上是按逆时针方向排列的(见右图).下面,我们用数学归纳法来证明.



当 $n=1$ 时,命题显然成立.设当 $n=2k-1$ 时命题成立.当 $n=2k+1$ 时,考虑中间的 $2k-1$ 个向量 $\vec{u}_i=\overrightarrow{OP}_i$,$i=2,3,\cdots,2k$,则由归纳假设知有

$$|\vec{v}|=|\vec{u}_2+\vec{u}_3+\cdots+\vec{u}_{2k}|\geqslant 1.$$

此外,这 $2k-1$ 个向量的和向量 $\vec{v}$ 的方向显然在 $\vec{u}_2$ 与 $\vec{u}_{2k}$ 之间.

令 $\vec{w}=\vec{u}_1+\vec{u}_{2k+1}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_{2k+1}}$,则向量 $\vec{w}$ 恰落在 $\angle P_1OP_{2k+1}$ 的平分线上.所以,向量 $\vec{w}$ 与 $\vec{v}$ 的夹角为锐角.再由向量加法运算的平行四边形法则便知 $|\vec{w}+\vec{v}|>|\vec{v}|$,亦即有

$$|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\overrightarrow{OP_{2k+1}}|=|\vec{w}+\vec{v}|>|\vec{v}|\geqslant 1.$$

这就完成了归纳证明.

11·38 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是实数且 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$.求证对任意整数 $k\geqslant 2$,存在 n 个不全为零的整数 a_i,$|a_i|\leqslant k-1$,$i=1,2,\cdots,n$,使得

$$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}. \quad ①$$

（第28届国际数学奥林匹克,1987年）

[证] 对于 $c_i\in\{0,1,\cdots,k-1\}$,令

$$b_i=\begin{cases}c_i, & \text{当 } x_i=0,\\ \dfrac{x_i}{|x_i|}c_i, & \text{当 } x_i\neq 0,\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n. ②$$

考察所有的和

$$\begin{aligned} S(b_1,b_2,\cdots,b_n) &= b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n \\ &= c_1|x_1|+c_2|x_2|+\cdots+c_n|x_n| \geqslant 0. \end{aligned}$$

由柯西不等式有

$$S(b_1,b_2,\cdots,b_n) \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant (k-1)\sqrt{\mathrm{n}}. \quad ③$$

将闭区间$[0,(k-1)\sqrt{\mathrm{n}}]$均分成$k^n-1$个小区间,每个小闭区间的长度为$\dfrac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$.当诸$a_i$取遍集合$\{0,1,\cdots,k-1\}$时,$S(b_1,b_2,\cdots,b_n)$共有$k^n$个值.由抽屉原理便知,至少有两个$S$值落在同一个小区间中,记这两个和数为$S(b_1,b_2,\cdots,b_n)$和$S(b'_1,b'_2,\cdots,b'_n)$.令$a_i=b'_i-b_i$, $i=1,2,\cdots,n$,则有

$$\begin{aligned} |S(a_1,a_2,\cdots,a_n)| &= |S(b'_1,b'_2,\cdots,b'_n)-S(b_1,b_2,\cdots,b_n)| \\ &\leqslant \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}, \end{aligned}$$

且由②知$|a_i|\leqslant k-1$, $i=1,2,\cdots,n$.

11·39 在平面上给定若干点,对其中某些点A,B可作向量$\overrightarrow{AB}$,并且对任何给定点,以它为起点的向量数都等于以它为终点的向量数,求证所有向量之和等于零向量.

(第13届全苏数学奥林匹克,1979年)

[证1] 在平面上取定一点O并把所作的每一个向量$\overrightarrow{AB}$都写成$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$的形式.按已知,每一向量$\overrightarrow{OM}$前面出现正号与负号的次数同样多,当然其和为零向量.

[证2] 从向量$\overrightarrow{AB}$出发.因为分别以B为起点和终点的向量数相等,故知必有以B为起点的向量$\overrightarrow{BC}$.同理,又有从C点发出的向量$\overrightarrow{CD}$,依次进行下去,因为只给了有限个点,故后面的点必与前面某点相重.于是若干条向量首尾相接构成一圈.其和当然为零向量.把这些向量去掉后,如果还有向量,则仍然满足题中的条件,故又可得到一个向量首尾相接的圈,….进行有限步后当然停止.

11·40 在平面上是否存在一个由互不相同的向量$\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$,…, $\vec{\alpha}_n$所构成的有限集合,使得对于集合中的任何一对不同向量,都存在

集合中的另一对向量,使得两对向量的和相等?

(第41届莫斯科数学奥林匹克,1978年)

[解] 我们引入直角坐标系并设所有向量的起点都在原点.考察这些向量中 x 坐标最大的两个不同向量(如果 x 坐标最大的向量不少于3个,则取其中 y 坐标最大的两个).显然,其他的任何两个向量的和向量,或者 x 坐标较小,或者 x 坐标与这两个向量之和相向,但 y 坐标较小.由此可知,满足题中要求的向量组不存在.

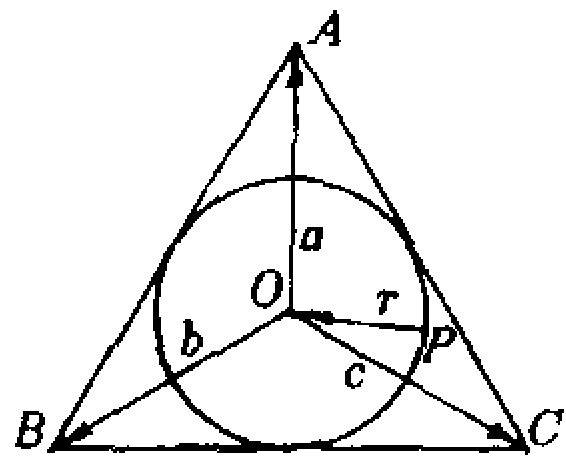
11·41 问在平面上是否存在

(1)4个向量,其中任何两个不共线且任何两个向量之和与另外两个向量之和都垂直?

(2) 91个非零向量,其中任何19个向量之和均与其余向量之和垂直?

(第25届全苏数学奥林匹克,1991年)

[解] (1) 设点 O 是正三角形 ABC 的中心,P 为其内切圆上异于切点的任意点,则4个向量 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PO}$ 便满足要求.



记 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{PO}=\vec{r}$,于是有 $\overrightarrow{PA}=\vec{r}+\vec{a}$, $\overrightarrow{PB}=\vec{r}+\vec{b}$, $\overrightarrow{PC}=\vec{r}+\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$.从而有

$$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PO})=(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{r})\cdot(\vec{c}+2\vec{r})$$
$$=(2\vec{r}-\vec{c})\cdot(2\vec{r}+\vec{c})=o.$$

(2) 假设存在满足要求的91个向量的向量组 G,记这91个向量的和为 $\overrightarrow{OS}$.若其中19个向量之和为 $\overrightarrow{OX}$,则点 X 位于以线段 OS 为直径的圆周 C 上.

首先证明,从向量组 G 中不能选出5个向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b}_1, \vec{b}_2$,使得 $\vec{a}_1\neq\vec{a}_2$, $\vec{a}_1\neq\vec{a}_3$, $\vec{a}_2\neq\vec{a}_3$, $\vec{b}_1\neq\vec{b}_2$.若不然,则可以任取出17个向量,其和为 $\vec{q}$,并构成6个向量 $\overrightarrow{OX}_{ij}=\vec{q}+\vec{a}_i+\vec{b}_j (i=1,2,3, j=1,2)$,它们的终点 $X_{ij}\in C$ 且有

$$\overrightarrow{X_{i1}X}_{i2}=\overrightarrow{OX}_{i2}-\overrightarrow{OX}_{i1}=\vec{b}_2-\vec{b}_1, i=1,2,3.$$

这意味着 3 个相等的向量将形成圆周 C 上 3 条互不相同的弦，此不可能.

上述结果表明，在向量组 G 中

(i) 不存在 5 个互不相同的向量；

(ii) 不存在 4 个互不相同的向量；

(iii) 不存在 3 个互不相同的向量，使其中有两个向量在 G 中至少各有两个.

由题中条件知，向量组 G 中的向量不全相同. 再由上面分析论证便知，G 中不同的向量只能有两个或3个，且若为3个，则必然是一种向量有89个而另两种各有1个. 设 G 中有 m 个向量 $\vec{x}$ 和不同于 $\vec{x}$ 的 $\vec{y}$ 和 $\vec{z}$，其中 $46 \leqslant m \leqslant 89$. 令 $\overrightarrow{OY_1} = 18\vec{x} + \vec{y}$，$\overrightarrow{OY_2} = 18\vec{x} + \vec{z}$，$\overrightarrow{OY_3} = 17\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$，$\overrightarrow{OY_4} = 19\vec{x}$. 于是有

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OY_1} + \overrightarrow{OY_2}) = 18\vec{x} + \frac{1}{2}(\vec{y} + \vec{z}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OY_3} + \overrightarrow{OY_4}).$$

这表明两条不重合的弦 Y_1Y_2 和 Y_3Y_4 交于中点，所以二者均为圆 C 的直径. 由此知 $\vec{y} \neq \vec{z}$ 且 $m = 89$. 由于 Y_1Y_2 为直径，故 $\overrightarrow{OY_1}$ 与 $\overrightarrow{OY_2}$ 垂直. 但 $\overrightarrow{OY_1}$ 与另外 72 个向量的和也垂直，故有

$$18\vec{x} + \vec{z} = 71\vec{x} + \vec{z},$$

由此得到 $\vec{x} = o$，此与已知矛盾.

最后，设向量 $\vec{x}$ 在 G 中有 90 个，而另一个向量为 $\vec{y} \neq \vec{x}$. 令 $\overrightarrow{OZ_1} = 18\vec{x} + \vec{y}$，$\overrightarrow{OZ_2} = 19\vec{x}$，则点 Z_1 和 Z_2 都在圆周 C 上. 因为 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $72\vec{x}$ 垂直而 $\overrightarrow{OZ_2}$ 与 $72\vec{x}$ 平行，故得 $72\vec{x} = 19\vec{x}$，矛盾.

11·42　给定一张 4×4 的方格表，试证可以从中选定 7 个方格并在每个方格中画一个星号，使得在划去表中的任何两行与任何两列方格之后，在剩下的方格中至少还有一个星号，并请证明，若在方格表中所画的星号至多 6 个，则总可以画去两行和两列方格后，使得剩下的方格都是空的.

（第 1 届全俄数学奥林匹克，1961 年）

[证]　显然，右图中所画的 7 个星号便满足题中的要求.

当表中的星号至多6个时，不妨设恰有6个. 由抽屉原理知，表中必

有一行方格中至少有两个星号. 划掉这一行，其余 3 行中至多有 4 个星号. 于是由抽屉原理又知，这 3 行中必有两行，其中至多画有两个星号. 把另一行划掉并把有星号的至多两列划掉，所余的方格就全是空格了.

			*
*	*		
*		*	
	*	*	

11·43　在 8×8 的国际象棋棋盘上放有 15 枚棋子，它们各占据 1 格且使得在每行每列中都至少有 1 枚棋子. 试证总可以从中拿掉 1 枚棋子，使得剩下的棋子仍可满足上述条件.

（原苏联教委推荐试题，1991 年）

［证］　若不然，则每枚棋子都或者是某一行中惟一的棋子，或者是某一列中惟一的棋子. 因为共有 15 枚棋子，故由抽屉原理知，或者存在 8 枚棋子，它们都是所在行惟一的一枚，或者存在 8 枚棋子，它们都是所在列惟一的一枚. 这样一来，棋盘上的棋子数不可能多于 8 枚，此与已知矛盾.

11·44　在方格纸上任意标定 n 个方格，求证其中可以选出不少于 $\frac{n}{4}$ 个方格，使它们两两之间既没有公共边也没有公共顶点.

（第 21 届国际数学奥林匹克候选题，1979 年）

［证］　像右图所示那样，将方格纸上的方格分成 4 组，则同组的任何两个方格都既没有公共边也没有公共点. n 个标定方格分属于 4 组，由抽屉原理知，其中必有一组方格的个数不少于 $\frac{n}{4}$. 这组方格当然满足题中要求.

A	C	A	C	A	C	A
B	D	B	D	B	D	B
A	C	A	C	A	C	A
B	D	B	D	B	D	B
A	C	A	C	A	C	A
B	D	B	D	B	D	B

11·45　依次拼接 1977 个相同的正方块（拼接时，一个正方形的边与另一个的边相重合），能否拼成一条闭链？

（基辅数学奥林匹克，1977 年）

［解］　设 1977 个相同的正方块可以按要求拼接成一条闭链. 这时，任何两个相邻的正方形的中心连线的长度都等于正方形的边长且或为水平，或为竖直.

将闭链中每相邻两个正方形的中心都用线段连结起来，便得到一条闭折线，它的每条边都或为水平或为竖直的，且每条边长都是正整数

(设正方形边长为 1). 因而它的周长必为偶数而不能为 1977,矛盾. 这表明题中所要求的闭链是不能实现的.

11·46 在8×8个方格的国际象棋棋盘的一些方格中标上星号,使得

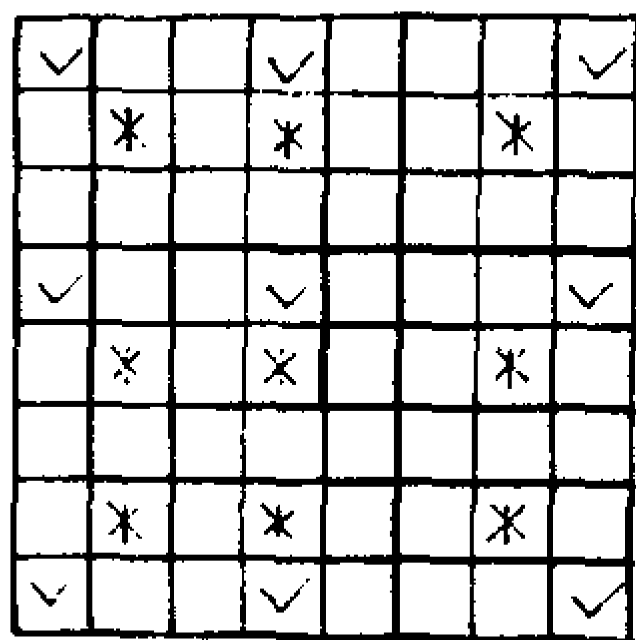
(1) 每两个标有星号的方格都既无公共边又无公共顶点;

(2) 每一个未标星号的方格至少与 1 个标星号的方格有公共边或公共顶点.

问最少要在多少个方格中标星号?说明理由.

(中国国家集训队训练题,1990 年)

[解] 右图中标有 9 个星号,显然满足题中的要求. 而在图中标有 9 个对号. 无论在棋盘上的哪个方格中标上星号,都至多与这 9 格中的 1 格有公共边或公共顶点. 从而为了满足题中的要求,至少要在 9 个方格中标上星号. 综上可知,为满足题中要求,最少要标上 9 个星号.



11·47 用 18 块 1×2 的骨牌布满 6×6 个方格的正方形. 试证无论怎样摆放,总存在一条"裂缝",即存在正方形的一条网格线,它不穿过任何一块骨牌.

(第 3 届全俄数学奥林匹克,1963 年)

[证] 若不然,则存在一种摆放法,使得正方形方格板的任何一条网格线都至少穿过一块骨牌.

因为正方形共有 36 个方格,每条网格线分正方形所得的两部分都各有偶数个方格,所以每条网格线至少穿过两块骨牌. 注意到每块骨牌至多被一条网格线所穿过,便知 10 条网格线至少要穿过 20 块骨牌. 但骨牌总共只有 18 块,矛盾. 从而证明了无论怎样摆放,都存在着裂缝.

11·48 在 $n\times n(n\geqslant 2)$ 的方格棋盘上,任意放入 $2n$ 枚棋子,每枚棋子都放在一个方格的中心,求证其中必有 4 枚棋子放在一个平行四边形的 4 个顶点上.

(中国国家集训队测验题,1993 年)

[证] 设第 i 行放有 r_i 枚棋子,于是有 $\sum_{i=1}^{n} r_i=2n$. 将第 i 行中前 r_i-1 点(棋子所在格的中心点)与最后一点分别配成点对,共得 r_i-1 个点对. 显然,这 r_i-1 个点对中两点间的距离互不相同. 从 1 到 n 求

和，便得 n 行共有点对数为 $\sum_{i=1}^{n}(r_i-1)=n$. 注意，每个点对中两点间的距离只能取 $1,2,\cdots,n-1$，这 $n-1$ 个值之一（方格边长取为 1）. 由抽屉原理知，上述 n 对点中必有两对点，使点对中两点的距离相等. 显然，这两对点不在同一行，当然构成一个平行四边形.

11·49 在 $n\times n$ 的方格表的某些方格中画有星号. 已知当任意划去某些行（但不是所有行）后，都还存在某一列，其中恰有 1 个未被划去的星号（特别地，如果任何一行都未被划去，则也应当有某一列中恰有 1 个星号）. 试证当任意划去某些列（只要不是全部）后，也都存在某一行，其中恰有 1 个未被划去的星号.

（第 35 届莫斯科数学奥林匹克，1972 年）

［证］ 首先，表中有某一列中恰有 1 个星号，设这一列是第 j_1 列，这惟一的星号在 i_1 行，记它的位置为 (i_1,j_1). 于是第 j_1 列的其他方格中均无星号. 然后划掉第 i_1 行，按假设，应有第 j_2 列中恰有 1 个未被划去的星号，设它的位置为 (i_2,j_2). 于是第 j_2 列中除 (i_1,j_2)，(i_2,j_2) 两个方格外，其余的方格中均无星号. 再划去第 i_2 行，又可找到第 j_3 列，其中恰有一个未被划去的星号，记它的位置为 (i_3,j_3). 继续这个过程，直到最后为止，可以找到 n 个既互不同行又互不同列的方格 (i_k,j_k)，$k=1,2,\cdots,n$，其中每个方格中都有星号，而且在方格 $(i_m,j_k)(m>k)$ 中都没有星号.

不妨设 $i_k=j_k=k$，$k=1,2,\cdots,n$. 于是上述的结论就化为：主对角线上的 n 个方格中都有星号而主对角线下方的方格中都没有星号. 这样一来，易见，第 n 行恰有 1 个星号在 (n,n) 中. 当从表中划去某些列 $m_1,m_2,\cdots,m_l(l<n)$ 时，设 n 列中未被划去的列的最大号码是 h，则第 h 行就恰有惟一的未被划去的星号，位于方格 (h,h) 中.

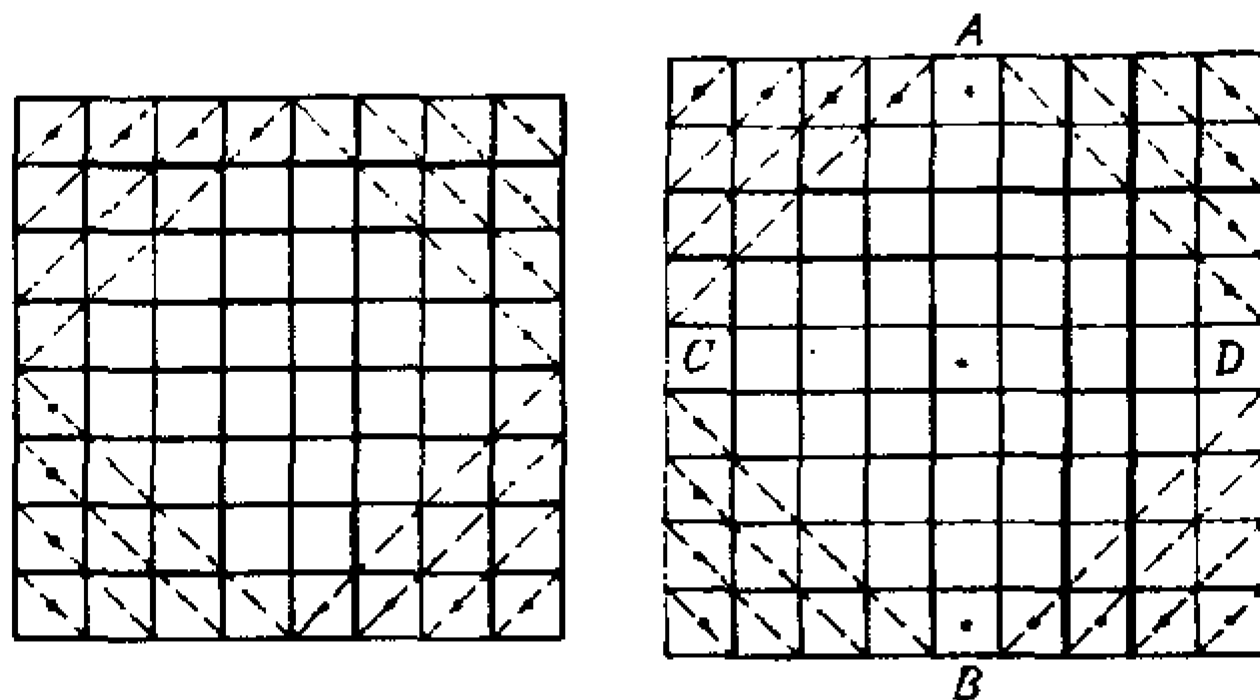
11·50 在正方形的方格棋盘上放棋子，使在经过任意一个方格的中心且平行于棋盘正方形的一边或对角线的每条直线上都至少有一枚棋子（棋子放在方格中心）. 问在 (1) 8×8 个方格；(2) $n\times n$ 个方格的棋盘上最少需要放多少枚棋子？

（第 13 届全苏数学奥林匹克，1979 年）

［解］ 由下图中的例子可知在 8×8 的棋盘上，放 16 枚棋子就够了. 对于一般的 n，当 n 为偶数时，放 $2n$ 枚，当 n 为奇数时，放 $2n+1$ 枚

就够了.

另一方面,当 n 为偶数时,图中的 $2n$ 条虚线互不相交,故至少要 $2n$ 枚棋子才能满足要求.当 n 为奇数时,除了图中的 $2n-2$ 条虚线每条上至少有一点之外,A,B,C,D4 点间有 6 条线,而这 6 条线上至少要有 3 个不同的点,故棋盘上至少要有 $2n+1$ 个点.



综上可知,当 n 为偶数和奇数时,棋盘上最少要分别放 $2n$ 和 $2n+1$ 枚棋子才能满足要求.

11·51 在 $2n\times 2n$ 个方格的正方形棋盘的任意 $3n$ 个方格中各放一枚棋子,求证可以选出 n 行和 n 列,使得所放的 $3n$ 枚棋子都在这 n 行和 n 列中.

(中国初中数学联赛,1990 年)

[证] 设第 i 行有 m_i 枚棋子,$i=1,2,\cdots,2n$,于是有 $m_1+m_2+\cdots+m_{2n}=3n$.不妨设 $m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_{2n}$.于是又有 $m_1+m_2+\cdots+m_n\geqslant 2n$.若不然,则有 $m_1+m_2+\cdots+m_n\leqslant 2n-1$.由抽屉原理知 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 中必有一个 $m_i\leqslant 1$.从而当然有 $m_n\leqslant 1$.由递减假设知 $m_{2n}\leqslant m_{2n-1}\leqslant\cdots\leqslant m_{n+1}\leqslant m_n\leqslant 1$.由此可得 $m_{n+1}+m_{n+2}+\cdots+m_{2n}\leqslant n$.

选定前 n 行之后,后 n 行至多有 n 枚棋子,故可选取 n 列将后 n 行中的所有棋子所在的方格都包括在内.显然,这 n 行 n 列便满足要求.

11·52 在一块 6×6 个方格的棋盘上互不重叠地放置了 11 块 1×2 的骨牌,每块骨牌恰好覆盖两个方格.求证无论这 11 块骨牌怎样放置,总能再放入一块骨牌,使它与原有的骨牌没有重叠.

(匈牙利数学奥林匹克,1986 年)

[证] 若不然,则每个空格的邻格中都是骨牌.将棋盘下面 5 行中所有空格的集合记为 A,上面 5 行中骨牌的集合记为 B.于是有

(1)A 中每个方格的上邻方格是骨牌;

(2) 不同空格必然对应于不同的骨牌,否则两个空格相邻,可以放入一块骨牌.

这样一来,确定了一个从 A 到 B 的映射,而且是单射.从而有 $|A| \leqslant |B| \leqslant 11$.又因最上面一行中至多有3个空格,故有 $|A| \geqslant 11$.因此有 $|A| = |B| = 11$.这意味着11块骨牌全在上5行中.于是第6行全是空格,当然可以再放入1块骨牌,矛盾.

11·53 在 $2n \times 2n$ 的棋盘上,任意地取 $3n$ 个方格,证明可以在棋盘上放 n 枚车,使得每个取定的方格上有一枚车或至少被一枚车控制住.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1989年)

[证] 用数学归纳法.

当 $n = 1$ 时,结论显然.

假设结论对 $2(n-1) \times 2(n-1)$ 的棋盘成立.

考虑 $2n \times 2n$ 棋盘.

如果有一行,一列中没有取定的方格,由于 $\left[\frac{3n}{2n}\right] = 1$,所以必有一行中取定的方格个数不小于2,同样也必有一列中取定的方格个数不小于2.去掉上述两行两列,剩下的 $2(n-1) \times 2(n-1)$ 的棋盘至多有 $3(n-1)$ 个取定的方格,根据归纳假设,可放 $n-1$ 枚车,使得每个取定的方格上有一枚车或至少被一枚车控制住.对于原来的棋盘,只要在上述删去的,至少有两个取定的方格的行与列的交叉处再放一枚车,就可达到同样的要求.

如果找不到一行一列均没有取定的方格,那么不妨假定每一行都至少有一个取定的方格.由于 $3n = 2n + n$,所以必有 n 行(或更多的行),每行恰有1个取定的方格.不妨设前 n 行每行恰有1个取定的方格,并且这些方格在前 n 列.在后 n 行的前 n 列中放 n 枚车,每两枚车不同行也不同列,这些车就能满足我们的要求.

11·54 已知棱长为100的正方体由一百万个单位正方体堆砌而成,这些小正方体的棱彼此相接构成大正方体的框架.由一个单位正方体的一个顶点引出的彼此互相垂直的三条棱称为一个标架.问整个框架能否分成两两没有公共棱的一组标架?

(第24届全苏数学奥林匹克,1990年)

[解] 在空间中引进直角坐标系,取大正方体的一个顶点为坐标原点并使得大立方体的所有顶点的每一坐标都是0或100.标定框架中

的某些结点(单位正方体的顶点),使得框架中的每条大棱(由单位正方体的棱接成的长为 100 的线段)上恰有一个标定点.例如,可将坐标之和为 101 倍数的所有点标定,便满足上述要求.

对任一非标定点 A,构造以 A 为顶点的标架$P(A)$:标架 $P(A)$ 的三条棱分别位于框架的过 A 点且互相垂直的三条大棱上,并且分别指向该大棱上的惟一标定点.这时,整个框架恰好分解成两两无公共棱的一组标架.

11·55　在无限大的国际象棋棋盘上放着一枚马,试求出马在走了 $2n$ 步后可能到达的所有方格.

(第 16 届莫斯科数学奥林匹克,1953 年)

[解]　在棋盘上引入以马所在的方格中心为原点,坐标轴平行于网格线,方格边长为 1 的直角坐标系.于是棋盘上的每个方格对应于坐标平面上的一个整点.

注意,马从方格(x,y)出发有 8 种不同走法,可以分别走到方格$(x+1,y\pm 2)$,$(x+2,y\pm 1)$,$(x-1,y\pm 2)$,$(x-2,y\pm 1)$.易见,无论怎样走 1 步,两个坐标之和的奇偶性都要改变.从而走 $2n$ 步之后,其坐标和与原出发点的坐标和奇偶性相同.因此,当马从原点出发走 $2n$ 步后而到达方格(x,y)时,总有 $2\mid(x+y)$.此外,马每走 1 步,其横坐标和纵坐标的改变值均为 $-2,-1,1,2$ 之一,而两个坐标之和的改变值为 $-3,-1,1,3$ 之一.故当走 $2n$ 步后,其坐标(x,y)满足关系式

$$|x|\leqslant 4n,|y|\leqslant 4n,|x|+|y|\leqslant 6n.$$

可见,马从原点出发走 $2n$ 步后,其所在方格中心的坐标都属于

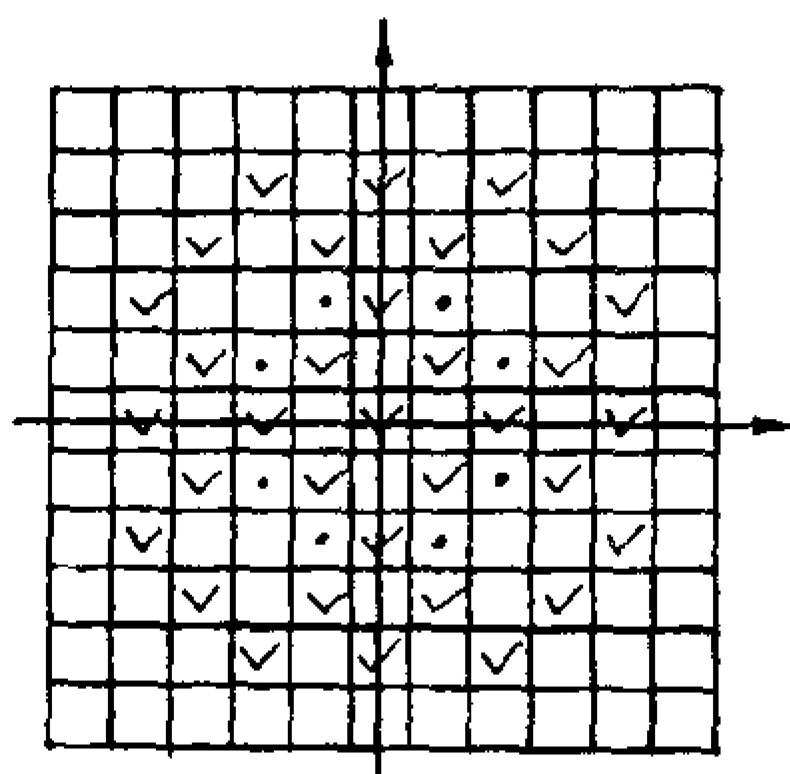
$$S_n=\{(x,y)\mid|x|,|y|\leqslant 4n,|x|+|y|\leqslant 6n,2\mid(x,y),x,y\in Z\}.$$

当 $n=1$ 时,从原点出发走 1 步可以到达的方格有 8 个,在下图中用黑点表示.再走 1 步可以到达的方格在图中用对号√表示.它们的集合为 $S_1-\{(x,y)\mid|x|=|y|=2\}$.下面用数学归纳法来证明,当 $n\geqslant 2$ 时,马从原点出发走 $2n$ 步后所能到达的所有方格的集合恰为 S_n.由对称性知,只须就 $x\geqslant y\geqslant 0$ 的情形来证明.令

$$S'_n=\{(x,y)\mid(x,y)\in S_n.x\geqslant y\geqslant 0\}.$$

当 $n=2$时,对于$(x,y)\in S'_2-S_1$,$(x-4,y-2)\in S_1$,且当$(x,$

$y) \neq (6,4)$ 时，$(x-4, y-2) \neq (2,2)$. 因为从原点出发走两步可到达$(x-4, y-2)$，所以再走两步$(x-4, y-2) \to (x-2, y-1) \to (x, y)$. 由于马走两步可以回到原处，所以凡两步可走到的方格 4 步均可走到. 此外，对$(2,2)$，$(6,4) \in S'_2$，4 步均可走到：



$(0,0) \to (1,2) \to (2,0) \to (4,1) \to (2,2)$；

$(0,0) \to (1,2) \to (3,1) \to (5,2) \to (6,4)$.

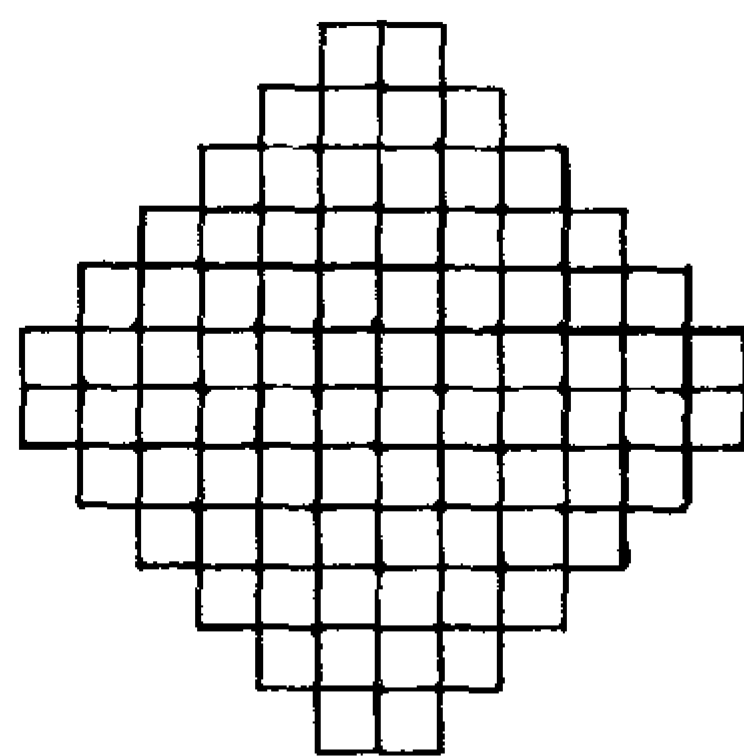
可见，$n = 2$ 时结论成立.

设 $n = k$ 时成立. 当 $n = k+1$ 时，与上类似地可知，只须考察 S'_{k+1} 中的方格(x, y). 这时，$(x-4, y-2) \in S_k$，而由归纳假设知马从原点出发经 $2k$ 步可以走到方格$(x-4, y-2)$. 从而知再走两步即共走 $2(k+1)$ 步即可到达(x, y). 这就证明了 $n = k+1$ 时结论也成立.

综上可知，马从原点出发走 $2n$ 步后可以到达的所有方格的集合为 S_n，但当 $n = 1$ 时为 $S_1 - \{(x, y) \mid |x| = |y| = 2\}$.

11·56　将右图所示的方格板沿网格线剪成若干个多边形，使任一多边形中都不包含 2×2 个方格的正方形，问最少要把方格板分成多少个多边形？

（第 25 届全苏数学奥林匹克，1991 年）



［解］　显然，为使剪出的多边形中不含 2×2 个方格的正方形，对于图中标出的 36 个点中的每点，都至少有一条剪线通过.

我们把以 36 个标定点之一为端点的小正方形的边称为内边，则过每个标定点有 4 条内边且过不同标定点的内边互不相同，故图中共有 144 条内边. 现设将方格板已剪成 n 个多边形且满足题中要求，于是每个标定点引出的 4 条内边至少有两条在剪线上. 从而图中不在剪线上的内边不多于 72 条. 我们再将 n 个多边形沿这些不在剪线上的内边一一剪开，则每剪开一条内边，至多增加一个多边形. 但都剪完之后，恰得到 84 个多边形，故有 $72 + n \geqslant 84$. 所以 $n \geqslant 12$.

另一方面，当将给定的方格板按水平线剪成 12 个矩形时，显然满足题中要求. 故知最少要分成 12 个多边形.

11·57　在 $n \times n$ 方格纸的每个方格中都填入一个数，使得每行和每列数都成等差数列.这样填好数的方格纸称为一个等差密码表.如果知道了这个等差密码表中的某些方格中的数就能破译该密码表，则称这些方格的集合为一把钥匙，该集合中的方格数称为钥匙的长度.

(1) 求最小自然数 s，使得在 $n \times n(n \geqslant 4)$ 方格纸中任取 s 个方格都组成一把钥匙；

(2) 求最小自然数 t，使得在 $n \times n(n \geqslant 4)$ 方格纸的两条对角线上任取 t 个方格都组成一把钥匙.

(中国国家集训队选拔试题，1994 年)

[解]　(1) 首先，当已知方格纸的第 1 行和第 1 列的 $2n-1$ 个方格中的数都是 0 时，不能惟一确定等差密码表.这时，$n \times n$ 个方格中都是 0 的数表和下面的数表都是等差的：

$$\begin{array}{llllll} 0, & 0, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 3, & \cdots, & n-1 \\ 0, & 2, & 4, & 6, & \cdots, & 2(n-1) \\ 0, & 3, & 6, & 9, & \cdots, & 3(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, & n-1, & 2(n-1), & 3(n-1), & \cdots, & (n-1)^2. \end{array}$$

这表明所求的最小自然数 $s \geqslant 2n$.

另一方面，对于任意取定的 $2n$ 个方格，若已知这 $2n$ 个方格中的数，则由抽屉原理知必有 1 行中至少有两个取定方格，从而这一行的 n 个数都可确定.因为这 1 行中至多有 n 个取定方格，所以余下 $n-1$ 行中至少还有 n 个取定方格，从而又有 1 行中至少有两个取定方格.于是这 1 行数又被确定.由于两行数已被确定，故知密码表被惟一确定，即任取 $2n$ 个方格都是一把钥匙.可见，所求的最小自然数 s 为 $2n$.

(2) 当取定一条对角线上的 n 个方格，且这 n 个方格中的数都是 0 时，所有方格都是 0 的数表与下面的数表都满足题中要求：

$$\begin{array}{lllll} 0, & 1, & 2, & \cdots, & n-1 \\ -1, & 0, & 1, & \cdots, & n-2 \\ -2, & -1, & 0, & \cdots, & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -(n-1), & -(n-2), & -(n-3), & \cdots, & 0. \end{array}$$

这表明所求的最小自然数 $t \geqslant n+1$.

另一方面,当选定 $n+1$ 个方格时,必有两个方格在同一行,于是这1行中的 n 个数都被确定.由于这1行中只有两个取定方格而 $n+1 \geqslant 5$,故这1行之外至少还有3个取定方格,其中总有两个方格位于不同列.于是这两列的各 n 个数都被确定,从而整个密码表惟一确定.可见,所求的最小自然数 $t = n+1$.

11·58 (1) 在 7×7 个方格的正方形中,标定 k 个方格的中心,使标定点中的任何4点都不是边平行于网格线的矩形的四个顶点,求 k 的最大值.

(2) 对于 13×13 个方格的正方形解同样的问题.

(第9届全苏数学奥林匹克,1975年)

[解] (1) 设在 7×7 个方格的正方形中已标定 k 点且满足题中要求,其中第 i 行有 x_i 个标定点,于是有 $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = k$.

按已知,如果在某行已标出两点,那么在其余的每行中都不能再标出具有同样横坐标的两点.这意味着正方形中所有的同行两点组的横坐标对互不相同.由于方格的横坐标有7个不同值,故不同的横坐标对共有 $C_7^2 = 21$ 个.从而有

$$C_{x_1}^2 + C_{x_2}^2 + \cdots + C_{x_7}^2 \leqslant 21,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_7^2 \leqslant 42 + k. \qquad ①$$

由柯西不等式有

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_7^2 \geqslant \frac{1}{7}(x_1 + x_2 + \cdots + x_7)^2 = \frac{1}{7}k^2. \qquad ②$$

由①和②得到

$$k^2 - 7k - 7\times 42 \leqslant 0. \qquad ③$$

由③解得 $k \leqslant \frac{1}{2}(7 + 7\sqrt{1+24}) = 21$,即至多标定21个方格的中心.

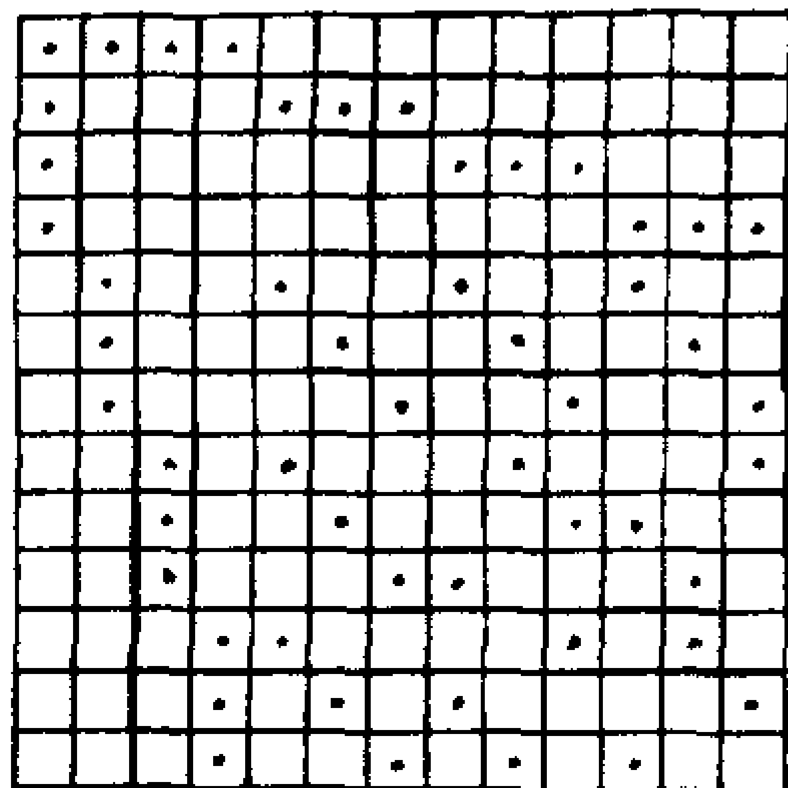
<table>
<tr><td>·</td><td>·</td><td>·</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>·</td><td></td><td></td><td>·</td><td>·</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>·</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>·</td><td>·</td></tr>
<tr><td></td><td>·</td><td></td><td>·</td><td></td><td>·</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>·</td><td></td><td></td><td>·</td><td></td><td>·</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>·</td><td>·</td><td></td><td></td><td>·</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>·</td><td></td><td>·</td><td>·</td><td></td></tr>
</table>

为使 $k = 21$,②式中应为等号,即应有 $x_1 = x_2 = \cdots = x_7 = 3$.为构造例子,我们使用"字典排列法"举例如右图,其中恰有21个标定点,故知所求的 k 的最大值为21.

(2) 设在 13×13 的正方形中已标定 k 个点且满足题中要求,则与

上面推理过程平行地可得 $k \leqslant 52$.

此外,为构造使 $k = 52$ 的例子,我们仍然使用字典排列法.右图中恰标定了 52 个点且满足题中要求,故知所求的 k 的最大值为 52.



11·59　在坐标平面上放置着若干个同样大小的正方形纸片,每个正方形的边都平行于坐标轴,并且平面上的任何一点都至多被两个正方形纸片所覆盖,求证可以将这些正方形纸片分成 3 组,使得同组的任何两个正方形纸片都不相交.

(第 19 届全俄数学奥林匹克,1993 年)

[证]　我们对正方形纸片的个数 n 使用数学归纳法来证明.当 $n = 3$ 时,结论显然成立.设结论于 $n = k$ 时成立.当 $n = k + 1$ 时,设正方形纸片 S 是位置最左的之一.按归纳假设,除掉 S 后的 k 个正方形可以分成 3 组,使得每组中的任何两个正方形都不相交.由于 S 至多与另外 k 个正方形中的两个相交,故在上面 3 组中,至少有 1 组中的正方形纸片全都与 S 不相交.显然,只要把 S 分在这样一组中即满足题中的要求.

11·60　规格为 $n \times n$ 的黑板被方格网分成 n^2 个小方格,其中的 k 行方格与 l 列方格的交称为这块黑板的一个 $k \times l$ 子式,$k + l$ 称为该子式的半周长.已知若干个半周长均不小于 n 的子式盖住了黑板的主对角线,求证它们至少盖住了黑板上的一半方格.

(第 25 届全苏数学奥林匹克,1991 年)

[证]　对每个 $i, 1 \leqslant i \leqslant n$,考察主对角线上的第 i 个小方格,它被某子式盖住.取出该子式过对角线上第 i 个小方格的一行和一列方格,它们共有 $k_i + l_i$ 个方格(对角线上的第 i 格被计数两次).于是共取得诸子式的 n 行 n 列方格.因为 $k_i + l_i \geqslant n, i = 1, 2, \cdots, n$,故知取出的这 n 行 n 列方格总数(包括重复计数)

$$\sum_{i=1}^{n}(k_i + l_i) \geqslant n^2.$$

另一方面,由于所取出的 n 行 n 列方格恰分布在黑板的 n 行 n 列上

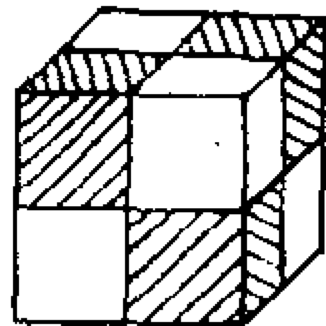
各一行一列，即所取的这 n 行和 n 列方格分别互不相交，故知在上面的计数过程中，每个方格至多被计数两次（行一次，列一次）. 所以，选出的这 n 行 n 列方格中至少有 $\frac{1}{2}n^2$ 个互不相同的方格，即它们至少盖住黑板的一半方格.

11·61　试证在规格为 $6\times6\times6$ 的正方体形状的盒子中可以放入 52 个 $1\times1\times4$ 的柱体，但不能放入 53 个（柱体的各面应平行于盒子的面）.

（第 19 届全俄数学奥林匹克，1993 年）

［证］　将盒子分成3部分：下部是 1 个 $6\times6\times4$ 的长方体，上部是 1 个 $6\times4\times2$ 和 1 个 $6\times2\times2$ 的长方体. 第 1 个长方体中可放 36 个柱体，第 2 个长方体中可放 12 个柱体而第 3 个长方体中则可放 4 个柱体. 共放入了 52 个柱体.

另一方面，将 $6\times6\times6$ 的正方体分成27个 $2\times2\times2$ 的小正方体并将它们相间地涂上黑色与白色. 这时，共有 14 个黑的和 13 个白的 $2\times2\times2$ 的正方体. 然后再把每个 $2\times2\times2$ 的正方体分成 8 个单位正方体. 从而共有 112 个黑的和 104 个白的单位正方体. 每个 $1\times1\times4$ 的柱体放入盒子中后，恰占有 2 个白色单位正方体，故至多能放入 52 个柱体，当然不能放入 53 个柱体.



11·62　用 n^3 个单位正方体砌成一个棱长为 n 的大正方体，任意从中选取多于 $\frac{3}{2}n^2$ 个单位正方体标上记号. 试证可以找到一个直角三角形，它的 3 个顶点皆位于有记号的单位正方体的中心而两条直角边分别平行于正方体的棱.

（原苏联教委推荐试题，1991 年）

［证］　若不然，则任何 3 个标定的单位正方体的中心都不能构成满足要求的直角三角形. 考察一个标定正方体所在的两两交成直角的 3 个 $1\times1\times n$ 的小柱体. 易见，3 个柱体中至少有 2 个中不再包含其他的标定单位正方体. 我们来计算这种至多含 1 个标定单位正方体的小柱体的总数. 一方面，由于标定单位正方体的个数多于 $\frac{3}{2}n^2$ 个，而过其中每个单位正方体至少有两个这种小柱体且过不同的标定单位正方体

的这种小柱体又互不相同,从而这种小柱体的个数多于$3n^2$个.另一方面,在大正方体中,不同的小柱体的总数为$3n^2$个(每个方向都有n^2个),矛盾.

11·63　在边长为1的正方形内作若干个圆.已知这些圆的周长之和等于10,求证存在一条直线至少与其中的4个圆相交.

(基辅数学奥林匹克,1973年)

[证]　将所给的圆都投影到正方形的一条边上.显然,每个圆的投影都是一条长度等于直径的线段.因为这些圆的周长之和等于10,所以这些圆的投影长度之和等于$\frac{10}{\pi}>3$.又因正方形的边长等于1,故由重叠原理便知,这条边上至少有1点被不少于4个圆的投影所覆盖.过此点作正方形这条边的垂线,则它必与覆盖此点的至少4圆相交.可见,这条垂线即为所求.

11·64　在坐标平面上,纵横坐标都是整数的点称为整点.试证存在一个同心圆的集合,使得

(1) 每个整点都在此集合的某一圆周上;

(2) 此集合的每个圆周上,恰有一个整点.

(中国高中数学联赛,1987年)

[证]　取点$P\left(\sqrt{2},\frac{1}{3}\right)$,我们指出,任何两个不同整点到点$P$的距离都不相等.事实上,设整点$(a,b)$和$(c,d)$到点$P$的距离相等,即有

$$(a-\sqrt{2})^2+\left(b-\frac{1}{3}\right)^2=(c-\sqrt{2})^2+\left(d-\frac{1}{3}\right)^2,$$

$$2(c-a)\sqrt{2}=c^2-a^2+d^2-b^2+\frac{2}{3}(b-d). \qquad ①$$

因为$\sqrt{2}$为无理数而①式右端为有理数,故①式两端必同时为零,所以有

$$c=a, \qquad ②$$

$$c^2-a^2+d^2-b^2+\frac{2}{3}(b-d)=0. \qquad ③$$

将②代入③并化简,得到

$$(d-b)\left(d+b-\frac{2}{3}\right)=0. \qquad ④$$

由于 b 和 d 都是整数,故④式左端第2个因子不为零,所以 $b=d$.从而整点 (a,b) 与 (c,d) 重合,即所有整点与点 P 的距离互不相等.

现将所有整点到点 P 的距离从小到大排成一列:$d_1,d_2,\cdots,d_n,\cdots$. 显然,以点 P 为心,分别以 $d_1,d_2,\cdots,d_n,\cdots$ 为半径所作的同心圆的集合便满足题中要求.

11·65 在平面上给出了若干个相交的圆面,它们之并集的面积是1.求证从中可以选出某些两两不重叠的圆面来,使它们的面积之和不小于 $\frac{1}{9}$.

(第22届莫斯科数学奥林匹克,1959年)

[证] 将以 O 为心,r 为半径的圆面记为 $C(O,r)$.首先取给定圆面中半径最长的圆面之一,记为 $C(O_1,r_1)$.然后在不与 $C(O_1,r_1)$ 相交的所有已知圆面中选取半径最长的圆面,记为 $C(O_2,r_2)$.接着再于既不与 $C(O_1,r_1)$ 也不与 $C(O_2,r_2)$ 相交的所有圆面中选取半径最长的圆面 $C(O_3,r_3)$.继续这个过程直到无圆面可选为止.设取得的圆面依次为

$$C(O_1,r_1),C(O_2,r_2),\cdots,C(O_m,r_m), \qquad ①$$

则它们互不相交且面积之和不小于 $\frac{1}{9}$.

实际上,对任意 $x\in S$,此处 S 表示已给的所有圆面之并集,有已知圆面 $C(O,r)$,使得 $x\in C(O,r)$.若 $C(O,r)$ 已是①中的圆面,问题就简单了.若不然,设 $C(O,r)$ 与①中的圆面相交的最小号码是 i,则 $r\leqslant r_i$.既然 $C(O,r)\cap C(O_i,r_i)\neq\varnothing$,故知 $C(O,r)\subset C(O_i,3r_i)$,从而有 $x\in C(O_i,3r_i)$.由 $x\in S$ 的任意性即知

$$S\subset\bigcup_{i=1}^{m}C(O_i,3r_i). \qquad ②$$

若记 $C(O_i,r_i)$ 的面积为 δ_i,则 $C(O_i,3r_i)$ 的面积为 $9\delta_i$.②式意味着

$$9(O_1+\delta_2+\cdots+\delta_m)\geqslant 1.$$

由此即知,$C(O_1,r_1),C(O_2,r_2),\cdots,C(O_m,r_m)$ 的面积之和不小于 $\frac{1}{9}$.

11·66 已知平面上有若干个圆,其中任何两个都不相交或内切,且每个圆都至少和另外的6个圆相切,求证这些圆的集合是无限

集.

（奥地利 — 波兰数学奥林匹克，1978 年）

［证］ 若不然，则这些圆只有有限多个，其中必有 1 个半径最小的圆，记其圆心为 O. 按已知，它至少与 6 个圆相切，记这 6 个圆的圆心分别为 $O_1, O_2, \cdots, O_6$ 并且是按逆时针方向排列的，记圆 O 和 O_i 的半径分别为 r 和 r_i，$i = 1, 2, \cdots, 6$. 考察 $\triangle OO_1O_2$. 显然有 $OO_1 = r + r_1$，$OO_2 = r + r_2$，$O_1O_2 \geqslant r_1 + r_2$. 因 r 最小，故 O_1O_2 为最大边，从而知 $\angle O_1OO_2 \geqslant 60°$. 同理，$\angle O_2OO_3$，$\angle O_3OO_4$，$\angle O_4OO_5$，$\angle O_5OO_6$ 和 $\angle O_6OO_1$ 均不小于 $60°$. 由于它们的和为 $360°$，故知它们都等于 $60°$. 从而 $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = r$，即它们的半径都取最小值.

对于任一给定圆 A，如果存在一串给定圆，以圆 O 为头而以圆 A 为尾，其中每相邻两圆都相切，则称圆 A 与圆 O 是“连通的”. 易见，当圆 A 与圆 O 连通时，圆 A 的半径也是 r. 将所有与圆 O 连通的圆所成的集合记为 M，M 中的圆的所有圆心的集合记为 S，则不属于 M 的给定圆与 M 中的任何圆都不相切，且 M 中的圆的半径都是 r.

考察集合 S 的凸包. 设点 B 是凸包多边形的一个顶点，则圆 B 至多与 M 中的 3 个圆相切. 从而圆 B 至多与 3 个给定圆相切，矛盾.

11·67 三维欧氏空间是否能表示为无公共点的圆周的并集?

（第 31 届国际数学奥林匹克候选题，1990 年）

［解］ 首先证明，去掉两点 P, Q 的球面 S 可以表示成无公共点的圆周的并集. 设球面 S 的过点 P, Q 的两个切面相交于直线 l 或平行. 过 S 上任一点与直线 l 作平面（当两切面平行时则过 S 上任一点作二者的平行平面），每个这样的平面都与 S 截得一个圆周，且这些圆周彼此无公共点，它们的并集为 $S - \{P, Q\}$.

设 K 是过原点 O 和点 $A(2,0,0)$ 的半径为 1 的圆. 对于 $0 < r < 2$，球面 $S_r = \{P \mid d(P, O) = r\}$ 与 K 恰有两个公共点. 由上段证明知 S_r 去掉与 K 的两个交点后可表为无公共点的圆周的并集. 因此，以原点为心，半径为 2 的开球与点 A 的并集 $M = (\bigcup\limits_{0<r<2} S_r) \cup K$ 可以表为无公共点的圆周的并集.

将 M 沿 x 轴平移，每次平移 4 个单位，得到成糖葫芦形的一串无公共点的球. 过 x 轴上每点作 x 轴的垂面，则每个切面都与这一串球交于

1 点或交于 1 个圆面. 显然,平面去掉相交部分后可表成一系列同心圆的并集. 这样一来,就把整个三维欧氏空间表成了无公共点的圆周的并集.

11·68 对于怎样的 k,可以在圆周上放置 100 条圆弧,使得其中每一条弧都恰好同其他 k 条弧相交?

(圣彼得堡数学奥林匹克,1989 年)

[**解**] 设已按题中要求放好了 100 条弧,我们来讨论 k 应满足的条件. 为此,我们首先对这些弧的长度作些调整. 因为两条弧是否相交,只和弧的终点和起点有关,而与弧的长短无关,故可作如下调整:

(1) 如果有某条弧被包含在另一条弧之中,则可将大弧比小弧多出的部分去掉,使得两条弧完全重合.

(2) 我们约定,每条弧的走向都是顺时针方向. 如果两条弧相交,而在第 2 条弧的起点与第 1 条弧的终点之间没有其他弧的起点或终点,则将这两点合并为 1 点.

(3) 我们假定这些弧覆盖了整个圆周. 于是由(2) 知每条弧的终点,都至少是另一条弧的起点. 设这 100 条弧共有 n 个不同的起点,则调整这些点间的距离,使得它们恰为圆内接正 n 边形的 n 个顶点.

设以 M_1 为起点的弧 α 的长度是 a,以第 2 个点 M_2 为起点的弧 β 的长度是 b,则显然有 $b \geqslant a$,否则,弧 α 必然包含 β,而这与(1) 矛盾. 由此沿着圆周递推一圈,我们便得到一串首尾相接的这样的不等式. 从而知所有弧的长度都相等. 若记圆的周长为 n,则弧长 $l \leqslant n$. 设以点 M_1, $M_2, \cdots, M_n$ 为起点的弧的条数分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,则同以 M_i 作为起点的一条弧相交的弧的条数为

$$a_{i-l} + a_{i-l+1} + \cdots + a_i + \cdots + a_{i+l-1} + a_{i+l} - 1.$$

按题意,它应该等于 k. 因而,对任何 i,都有

$$a_{i-l} + a_{i-l+1} + \cdots + a_i + \cdots + a_{i+l} = k + 1. \quad ①$$

将 ① 式对 $i = 1, 2, \cdots, n$ 求和,便得

$$(2l + 1) \times 100 = (k + 1)n. \quad ②$$

可见,$(k + 1)$ 必可整除 $(2l + 1)100$. 这表明它不能是 8 的倍数. 又因 $2l + 1 \geqslant 3$, $n \leqslant 100$,故 $k \neq 1$. 易见,对于 $2 \leqslant k \leqslant 99$,且 $k + 1$ 不是 8 的倍数的情形,都可由 ② 式解出 l 和 n,然后安排 100 条弧使之满足题中要求.

对于 $k=1$ 的情形,我们可以在圆上选取50条弧互不相交,然后在每条弧上再放上1条弧与之重合.这100条弧显然满足要求.

注意,上面推导中我们假定了100条弧覆盖了整个圆周.下面我们来证明,在这些弧没有覆盖整个圆周的情况下,对 $k+1$ 为8的倍数的情形也是不可能的.

这时,我们可以给所有弧按起点先后编上号码,使第1条弧和第100条弧不相交.于是,第1条弧必与第 $2,3,\cdots,k+1$ 条弧相交,从而这 $k+1$ 条弧两两相交,而与其他弧都不相交.这样一来,100条弧必可分成若干组,每组恰有 $k+1$ 条弧,即 $(k+1)\mid 100$.但100不是8的倍数,此不可能.

综上所述,当且仅当 $1\leqslant k\leqslant 99$ 且 $k+1$ 不是8的倍数时,可以在圆周上放置100条弧满足题中的要求.

11·69　已知 2^n 个由0和1组成的有限数列,其中任何一个数列都不是另一个数列的开头部分,求证这些数列的长度(项数)之和不小于 $n\cdot 2^n$.

(第25届莫斯科数学奥林匹克,1962年)

[证]　满足题中要求的数列组称为"正规组",组中数列按其长度大于,等于或小于 n 而分别称为长数列,标准数列和短数列.

对于任一正规组,如果其中没有短数列,则结论显然成立.如果其中有短数列,那么其中也必有长数列.否则,任一短数列至少有两种可能在其尾部补上一些0或1而成为标准数列且仍然保持数列组的正规性,从而得到一个由多于 2^n 个标准数列组成的正规组,此不可能.可见,只须对既含短数列又含长数列的正规组来证明本题的结论.

对于任一数列 a,记其长度为 $\|a\|$.设正规组中有短数列 s 和长数列 l,$\|s\|<n<\|l\|$,则有 $\|l\|-\|s\|\geqslant 2$.在正规组中去掉数列 s 和 l,添上数列 $s0\cdots0$ 和 $s1$,其中 $s0\cdots0$ 为标准数列,则新组仍为正规组且组中数列的长度之和不增,但组中至少增加一个标准数列.如果组中仍有短数列,则又可重复上述的代换过程,直到组中不含短数列为止.由于每次代换都保持正规组的长度之和不增而最后所得的正规组的所有数列长度之和不小于 $n\cdot 2^n$,故知原正规组中所有数列的长度之和也不小于 $n2^n$.

11·70　设集合 A 的元素都是以0和1为项的有限数列.如果在任

何一个以0和1为项的无限数列中都可以取出其中一段数来,使它恰为 A 的某元素,则称 A 为基集.试证在所有8项的这样数列中,能取出不多于51个数列,使它们构成一个基集.

(基辅数学奥林匹克,1982年)

[证] 令

$a_1=\{0,0,\cdots,0\}, a_2=\{1,1,\cdots,1\}$,

$a_3=\{1,0,1,0,1,0,1,0\}$;

$b_j=\{0,0,1,\beta_j\}, j=1,2,\cdots,32$;

$c_i=\{1,1,0,1,\gamma_i\}, i=1,2,\cdots,16$,

其中 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{32}$ 表示32个不同的5项的数列,$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{16}$ 表示16个不同的4项数列.再令

$A=\{a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,\cdots,b_{32},c_1,c_2,\cdots,c_{16}\}$,

则 $|A|=51$ 且为一个基集.

事实上,如果一个无穷数列中的任何连续8项都不是 a_1,a_2,a_3 之一,则其中必有无穷多个0,无穷多个1且必有相邻两项相同.

若有相邻两项同为0,则必有连续3项为 $\{0,0,1\}$,从而必有连续8项为某 b_j;若其中有相邻两项相同且没有相邻两项同为0,则必有连续4项为 $\{1,1,0,1\}$,从而必有连续8项为某 c_i,这就表明 A 为基集.

11·71 设 $k\geqslant 6$ 为自然数,$n=2k-1$.T 为所有 n 元数组 $(x_1, x_2,\cdots,x_n)$ 的集合,其中 $x_i\in\{0,1\}, i=1,2,\cdots,n$.对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n), y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in T$,定义

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|.$$

特别地有 $d(x,x)=0$.设有一个由 T 的 2^k 个元组成的子集 S,使对任何 $x\in T$,都存在惟一的 $y\in S$,使得 $d(x,y)\leqslant 3$.求证 $n=23$.

(第30届国际数学奥林匹克候选题,1989年)

[证] 由于 $d(x,x)=0<3$,所以 S 中任何两个元素的距离都大于3.因而当将 S 中的元素 x 的 n 个分量改变1个,2个或3个(1变为0或0变为1)时,所得的元素都在 $T-S$ 中,且 S 中的不同元素按上述办法所得的元素也互不相同.按假设知,对每个 $x\in T$,都有惟一的 $y\in S$,使得 $d(x,y)\leqslant 3$,所以 $T-S$ 中的每个元素都可由 S 中的元素

按上述办法生成. 从而有

$$2^n = 2^k(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3).$$

由于 $n = 2k - 1$,故有

$$3 \cdot 2^{k-2} = k(2k^2 - 3k + 4). \quad ①$$

若 $3 \nmid k$,则 $k = 2^m$. 由于 $k \geqslant 6$,所以 $m \geqslant 3$. 于是 $2k^2 - 3k + 4$ 是 4 的倍数但不是 8 的倍数. 从而由 ① 可得

$$2k^2 - 3k + 4 = 12.$$

这个方程无解,所以 k 为 3 的倍数. 记 $k = 3h = 3 \cdot 2^q$, $q \geqslant 1$,于是 ① 式化为

$$2^{3h-2} = h(18h^2 - 9h + 4). \quad ②$$

当 $q \geqslant 3$ 时,$18h^2 - 9h + 4$ 是 4 的倍数不是 8 的倍数. 由 ② 知有 $18h^2 - 9h + 4 = 4$,无解. 从而 $q = 1$ 或 2,$h = 2$ 或 4. 代入 ② 式知 $h = 2$ 不是根而 $h = 4$ 是根. 所以得到 $n = 2k - 1 = 6h - 1 = 23$.

11·72　已知3个无穷的自然数项的数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots; b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots; c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$,求证必能找到两个下标 p 和 q,使得 $a_p \geqslant a_q, b_p \geqslant b_q, c_p \geqslant c_q$.

(第 24 届莫斯科数学奥林匹克,1961 年)

[证]　先考察数列 $\{a_n\}$. 如果 $\{a_n\}$ 无界,则它必有一个严格递增的子列. 如果 $\{a_n\}$ 有界,则数列中的无穷多项只取有限多个不同的值,故由抽屉原理知 $\{a_n\}$ 有一个子列,其中的项都相等. 因此,数列 $\{a_n\}$ 总有一个不减的子列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots. \quad ①$$

考察数列 $\{b_n\}$ 的下标与 ① 相同的子列 $\{b_{n_k}\}$. 这也是一个以自然数为项的数列. 按与上段相同的程序可证 $\{b_{n_k}\}$ 中又可抽出一个不减的子列:

$$b_{n'_1}, b_{n'_2}, \cdots, b_{n'_k}, \cdots. \quad ②$$

再考察数列 $\{c_n\}$ 的下标与 ② 相同的子列并从中再抽出一个不减的子列. 在最后这个子列中任取两个下标 $q < p$,由上面的选法便知

$$a_p \geqslant a_q, b_p \geqslant b_q, c_p \geqslant c_q.$$

11·73　给出 2^{n-1} 个皆由 0 和 1 组成的不同数列,它们的长度都为 n. 已知对其中任何 3 个数列,都可以找出自然数 m,使得 3 个数列的第

m 项都是1,求证存在自然数 k,使得全部 2^{n-1} 个数列的第 k 项都是1,而且 k 是惟一的.

(第32届莫斯科数学奥林匹克,1969年)

[证] 对于任何一个长度为 n 且每项都是0或1的数列 x,把其中为0的项改为1,为1的项改为0所得的数列称为数列 x 的反数列,记为 $\overline{x}$;对于任何两个这样的数列 x 和 y,把二者的对应项相乘所得的数列 z 称为数列 x 和 y 的乘积,记为 xy.我们把给定的 2^{n-1} 个数列的集合记为 S.本题的证明可以分为三步给出.

引理1 $x \in S$ 的充分必要条件是 $\overline{x} \notin S$.

如果 $x, \overline{x} \in S$,则 $x\overline{x} = 0$,因而它们与另一个 $y \in S$ 这3个数列的任何一项都不能同时为1,矛盾.

如果有 $x, \overline{x} \notin S$,则因所有由0和1组成的长度为 n 的数列恰可按数列与反数列为一对分成 2^{n-1} 对,每对至多有1个数列属于 S,故将导致 $|S| < 2^{n-1}$,矛盾.

引理2 如果 $x, y \in S$,则 $xy \in S$.

若不然,则由引理1知 $\overline{xy} \in S$.考察 $x, y, \overline{xy}$ 这3个数列.对于 $\overline{xy}$ 中任一个值为1的项,xy 中同标号的项为0,从而 x 和 y 中同标号的项至少有1个为0.这就是说,这3个数列的任何一组同标号的项都不能全为1,矛盾.

引理3 S 中的所有数列的乘积数列 x_0 是由1个1和 $n-1$ 个0组成的.

由引理2知 $x_0 \in S$,故 x_0 不能全由0组成.若 x_0 中至少有两个1,则 S 中的所有数列在这两个位置上的项都是1.因而 S 中的数列个数至多为 2^{n-2},矛盾.

由引理3知,x_0 中惟一的1的位置就是所有 $x \in S$ 在该位置都是1的惟一位置.

11·74 设 S 是所有7项数列 $\{a_1, a_2, \cdots, a_7\}$ 的集合,其中所有 a_i 都是0或1.S 中两个元素 $\{a_i\}$,$\{b_i\}$ 的距离定义为 $\sum_{i=1}^{7} |a_i - b_i|$.$T$ 是 S 的子集,其中任何两个元素的距离都不小于3.求证 T 最多含有16个元素.

(第29届国际数学奥林匹克候选题,1988年)

[证]　若 $|T| \geqslant 17$,则由于每个 a_i 都只有 0 和 1 两个不同值,故不同的 (a_1,a_2,a_3) 只有 8 种.从而由抽屉原理知 T 中必有 3 个不同元素的前 3 项相同.考察这 3 个数列的第 4,5,6,7 项.由抽屉原理知,每项都有 3 个数列中的两个数列取值相同.由于 3 个数列只能组成 3 个不同的数列对,故再由抽屉原理便知必有两个数列在后 4 项中的两项取值相同,从而二者之间的距离不大于 2,此与已知矛盾.这表明 T 中至多有 16 个元素.

下面,我们来构造一个含有 16 个元素的子集 T,使其中每两个元素之间的距离都不小于 3:

$$(0,0,0,0,0,0,0),(1,1,1,1,1,1,1),$$
$$(0,1,1,1,0,0,0),(1,0,0,0,1,1,1),$$
$$(0,0,0,1,0,1,1),(1,1,1,0,1,0,0),$$
$$(0,1,1,0,0,1,1),(1,0,0,1,1,0,0),$$
$$(0,0,1,0,1,0,1),(1,1,0,1,0,1,0),$$
$$(0,1,0,1,1,0,1),(1,0,1,0,0,1,0),$$
$$(0,1,0,0,1,1,0),(1,0,1,1,0,0,1),$$
$$(0,0,1,1,1,1,0),(1,1,0,0,0,0,1).$$

易见,左边一列 8 个数列中,任何两个数列都至少有 3 项不同,至多有 4 项不同.右边一列 8 个数列亦然且每行的两个数列互补,即 7 项全不相同.从而知这 16 个数列中的任何两个数列的距离都不小于 3.

综上可知,T 中最多有 16 个元素.

11·75　考虑 n 个不同元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的非序对的集合.其中如有 3 个非序对 a_ia_j,a_ja_k,a_ka_i,便称为形成了一个三角形.已知 $4m \leqslant n^2$,求证必可选出 m 个非序对而它们之间不形成任何三角形.

(第 26 届美国普特南数学竞赛,1965 年)

[证]　将 n 个元素分成两组

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_h\},\{a_{h+1},a_{h+2},\cdots,a_n\},$$

其中 $h=\left[\frac{n}{2}\right]$.然后考察非序对

$$a_ia_j,i=1,2,\cdots,h,j=h+1,h+2,\cdots,n. \qquad ①$$

显然,对于任何 3 个元素,其中总有两个在同一组中,二者之间没有组对.故 ① 中的非序对不形成任何三角形.此外,① 中非序对的个数为

$\left[\frac{n}{2}\right]\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)$. 当 n 为偶数时, 恰为 $\frac{n^2}{4}$; 当 n 为奇数时, $\left[\frac{n}{2}\right]\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)=\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{n^2-1}{4}$,恰为不超过$\frac{n^2}{4}$ 的最大整数.因此,① 中所给出的所有非序对表明所求证的结果是正确的.

11·76 设集 S 含有 n 个元素,$A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是 S 的不同子集,它们两两的交非空,而 S 的其他子集不能与 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 都相交.求证 $k=2^{n-1}$.

(第 25 届美国普特南数学竞赛,1964 年)

[证] 由于 S 有 n 个元素,所以共有 2^n 个子集,把这 2^n 个子集分成 2^{n-1} 组,每两个互为补集的子集做为一组.

如果 $k>2^{n-1}$,这时所有的 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中必有两个子集是同一组的互为补集的子集,这两个子集的交是空集,与题设矛盾.

如果 $k<2^{n-1}$,那么我们可以从 S 中除去 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 之外还能选取一对互补的子集 X 和 Y. 于是至少有一个 $A_i(i=1,2,\cdots,k)$ 符合

$$A_i\cap X=\varnothing,\quad A_i\subseteq Y.$$

同样至少有一个 $A_j(j=1,2,\cdots,k)$,符合

$$A_j\cap Y=\varnothing,\quad A_j\subseteq X.$$

由此推得

$$A_j\cap A_i\subseteq X\cap Y=\varnothing.$$

这仍与题设矛盾.

因此只有 $k=2^{n-1}$.

11·77 给定 1978 个集合,每个集合都含有 40 个元素.已知其中每两个集合都恰有 1 个公共元素,求证全部 1978 个集合有 1 个公共元素.

(奥地利 — 波兰数学奥林匹克,1978 年)

[证] 设 A_0 为给定集合之一. 因为 $|A_0|=40$, 而它与另外的 1977 个集合中的每个都恰有 1 个公共元素,故由抽屉原理知必有 $a\in A_0$,使另外的 1977 个集合中至少有 50 个集合含有它. 设这些集合为 $A_1,A_2,\cdots,A_{50}$.

对于任一给定集合 B,因为 $|B|=40$,而它与 $A_0,A_1,\cdots,A_{50}$ 中的每个都有 1 个公共元素,故由抽屉原理知有 $A_i,A_j,0\leqslant i<j\leqslant 50$,使得 B,A_i,A_j 含有同一个元素 b. 这样一来,$\{a,b\}\subset A_i\cap A_j$. 但 $A_i\cap$

A_j 只有 1 个元素，故有 $b = a$，即 1978 个集合中的每个集合都含有 a.

11·78　设 $A_1, A_2, \cdots, A_{50}$ 是有限集合 S 的 50 个子集，其中每个子集都含有集合 S 的半数以上的元素. 试证存在子集 $B \subset S$，它至多含有 5 个元素且和集合 $A_1, A_2, \cdots, A_{50}$ 中的每一个都至少有 1 个公共元素.

（英国数学奥林匹克，1976 年）

［证］　设 $|S| = n$，于是

$$|A_j| > \frac{n}{2}, j = 1,2,\cdots,50. \qquad ①$$

因此有

$$|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_{50}| > 25n. \qquad ②$$

由抽屉原理知必存在 $a_1 \in S$，它至少属于所给 50 个子集中的 26 个. 设余下的 24 个子集为 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_{24}}$，则由 ① 又有

$$|A_{i_1}| + |A_{i_2}| + \cdots + |A_{i_{24}}| > 12n.$$

从而由抽屉原理知又有 $a_2 \in S$，它至少属于这 24 个子集中的 13 个. 同理，存在 $a_3 \in S$，它属于余下的 11 个子集中的 6 个；存在 $a_4 \in S$，它属于第 3 次余下的 5 个子集中的 3 个. 最后，由 ① 知存在 $a_5 \in S$，它属于余下的 2 个子集之交. 令 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$，则 B 即为所求.

11·79　设集合 M 由奇数个元素组成，如果对于 M 中的每个元素 x，都有惟一确定的子集 $H_x \subset M$ 与 x 对应，并且满足条件：

(1) 对于每个 $x \in M$，都有 $x \in H_x$；

(2) 对于任意的 $x, y \in M$，$y \in H_x$ 当且仅当 $x \in H_y$.

求证至少有 1 个 H_x 的元素个数为奇数.

（中国国家集训队训练题，1986 年）

［证］　当 $x \neq y$ 且 $x \in H_y$ 时，记为 (x, y)，称为元素 x 的一个元素对. 于是每个元素 x 共有 $|H_x| - 1$ 个元素对.

若结论不成立，则所有 H_x 都有偶数个元素. 因而每个元素都有奇数个元素对. 因为集 M 有奇数个元素，所以元素对总数为奇数. 另一方面，由(2) 又知，当 (x, y) 为 x 的一个元素对时，(y, x) 也是 y 的一个元素对，故元素对总数又应该是偶数，矛盾. 这说明至少有一个 H_x 中含有奇数个元素.

11·80　设 $n \in N$，求最大的 $k \in N$，使得 n 元集合中存在 k 个不

同的子集，其中任何两个子集的交集非空.

（前南斯拉夫数学奥林匹克，1972 年）

组合卷

[解] 设 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，考察 S 的含 a_1 的所有子集. 显然，这类子集的个数与 $\{a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 的所有子集的个数相等，即为 2^{n-1}. 任何两个这种子集之交当然非空，故有 $k\geqslant 2^{n-1}$.

另一方面，对于 S 的任何一组 $2^{n-1}+1$ 个子集，我们将 S 的全部 2^n 个子集分成 2^{n-1} 对，即每个子集 $M\subset S$ 与它关于 S 的补集 $S-M$ 为一对，则由抽屉原理知 $2^{n-1}+1$ 个子集中必有两个子集属于上述 2^{n-1} 对中的同一对，从而其交为空集.

综上可知，所求的最大自然数 $k=2^{n-1}$.

11·81　设 n 元集合 X 的某些三元子集组成集合 S，且 S 中每两个元素(子集)之间至多有 1 个公共元素. 试证存在集合 $A\subset X$，使得 $|A|\geqslant[\sqrt{2n}]$ 且 S 中的任何元素都不是 A 的子集.

（中国国家集训队训练题，1990 年）

[证] 设在 X 的不包含 S 中任何元素的子集中，A 是元素数最多的一个，$|A|=a$. 对于每个 $x\in X-A$，$A\cup\{x\}$ 中必包含 S 中的一个元素. 否则与 a 的最大性矛盾.

设 $x,y\in X-A$，$x\neq y$，则 $A\cup\{x\}$ 与 $A\cup\{y\}$ 分别包含 S 中的元素 $s(x)$ 和 $s(y)$. 显然，$s(x)\neq s(y)$. 按已知，二者至多有 1 个公共元素，所以，相应的 A 中的两个二元子集也不同，即 $s(x)-\{x\}\neq s(y)-\{y\}$. 这样一来，我们就定义了一个由 $X-A$ 到 A 的所有二元子集的集合的单射：

$$X-A\ni x\longmapsto s(x)-\{x\}\subset A.$$

从而有

$$n-a\leqslant C_a^2.$$

$$a+\frac{1}{2}>\sqrt{2n}.$$

因为 $a\in N$，所以 $a\geqslant[\sqrt{2n}]$.

11·82　试证任一有限集的全部子集可以排定次序，使得任何相邻两个子集都相差一个元素.

（波兰数学奥林匹克，1972 年）

[证] 设集合 A 共有 n 个元素，于是 A 共有 2^n 个不同子集. 我们

对元素数 n 用数学归纳法来证明.

当 $n=1$ 时,A 只有两个子集:A 和 $\varnothing$,结论显然成立.设结论对 $n=k$ 成立并记 $m=2^k$.当 $n=k+1$ 时,设 B 有 $k+1$ 个元素.任取 $b\in B$,并记 $A=B-\{b\}$,则由归纳假设知,A 的 m 个子集可以排成一行

$$A_1,A_2,\cdots,A_m, \quad ①$$

使得

$$|(A_{i+1}-A_i)\cup(A_i-A_{i+1})|=1,i=1,2,\cdots,m-1. \quad ②$$

集合 B 共有 $2m$ 个子集,除 ① 中的 m 个之外的另 m 个是 $A_i\cup\{b\},i=1,2,\cdots,m$.将它们排序如下:

$A_1,A_2,\cdots,A_m,A_m\cup\{b\},A_{m-1}\cup\{b\},\cdots,A_1\cup\{b\}$.容易看出,这一排序满足题中要求,这就完成了归纳证明.

11·83　将集合 S 划分为两两不交的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,又划分为两两不交的子集 $B_1,B_2,\cdots,B_n$.已知任何两个不交的子集 A_i 与 B_j 的并集 $A_i\cup B_j$ 中至少含有 n 个元素,$1\leqslant i,j\leqslant n$,求证 S 中的元素个数至少为 $\frac{n^2}{2}$.它能否等于 $\frac{n^2}{2}$?

(罗马尼亚数学奥林匹克,1978 年)

[解]　设 k 是集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n,B_1,B_2,\cdots,B_n$ 的元素个数的最小值,不妨设 $|A_1|=k$.如果 $k\geqslant\frac{n}{2}$,则 $|A_j|\geqslant\frac{n}{2},j=1,2,\cdots,n$.因为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两不交,故有 $|S|\geqslant\frac{n^2}{2}$.以下设 $k<\frac{n}{2}$.因为 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两不交,故至多有 k 个 B_j 与 A_1 相交.不妨设

$$\begin{aligned}&A_1\cap B_j\neq\varnothing,j=1,2,\cdots,m,m\leqslant k,\\&A_1\cap B_j=\varnothing,j=m+1,m+2,\cdots,n.\end{aligned} \quad ①$$

按已知有

$$|B_j|\geqslant n-k,j=m+1,\cdots,n. \quad ②$$

又由 k 的定义有

$$|B_j|\geqslant k,j=1,2,\cdots,m. \quad ③$$

由 ② 和 ③ 便得

$$|S|\geqslant km+(n-k)(n-m)=n(n-k)-m(n-2k)$$

$$\geqslant n(n-k)-k(n-2k)=\frac{n^2}{2}+2\left(\frac{n}{2}-k\right)^2\geqslant\frac{n^2}{2}.$$

这就证明了不论 k 为何值,总有 $|S|\geqslant\frac{n^2}{2}$.

另一方面,设 n 为偶数且 $|S|=\frac{n^2}{2}$.将 S 的$\frac{n^2}{2}$个元素排成$\frac{n}{2}\times n$的矩形表如下:

$$\begin{array}{llllll}
a_{11},a_{12}, & \cdots, & a_{1\frac{n}{2}}, & a_{1\frac{n}{2}+1}, & \cdots, & a_{1n},\\
a_{21},a_{22}, & \cdots, & a_{2\frac{n}{2}}, & a_{2\frac{n}{2}+1}, & \cdots, & a_{2n},\\
\vdots\quad\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{\frac{n}{2}1},a_{\frac{n}{2}2}, & \cdots, & a_{\frac{n}{2}\frac{n}{2}}, & a_{\frac{n}{2}\frac{n}{2}+1}, & \cdots, & a_{\frac{n}{2}n}.
\end{array}$$

表中共有 n 列,其中第 j 列的$\frac{n}{2}$个元素构成的集合记为 A_j;表中共有$\frac{n}{2}$行,其中第 i 行的 n 个元素的前一半和后一半元素所成的集合分别记为 B_{2i-1},B_{2i}. 容易验证,这样定义的集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 和 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足题中要求且恰有 $|S|=\frac{n^2}{2}$.

11·84　设 $n,k\in N$ 且满足 $k\leqslant\frac{n}{2}$,把从 1 到 n 的整数列重复 k 次而得到 nk 项的数列:

$$1,2,\cdots,n,1,2,\cdots,n,\cdots,1,2,\cdots,n. \qquad ①$$

从左向右每次取 k 个数,得到 n 个子序列 $B_1,B_2,\cdots,B_n$,求证在 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中,最多只有 k 个两两相交非空.

(中国国家集训队测验题,1989 年)

[证]　数列 ① 中有 k 项为 1.因为 $k\leqslant\frac{n}{2}$,故任何两个值为 1 的项都属于不同的 B_i. 于是当把全部 k 个含有 1 的子列取出时,就得到 k 个两两相交非空的子列.

下面来证明任何 $k+1$ 个子列中,必有两个不交. 设 $(k,n)=m$,记 $l=\frac{k}{m}$,于是 $k\mid ln$. 这意味着前 l 组 $\{1,2,\cdots,n\}$ 这 ln 个数恰好组成前 $\frac{ln}{k}=\frac{n}{m}=s$ 个子列:$B_1,B_2,\cdots,B_s$. 这样一来,我们可以把 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 分成 m 组:

$$B_1, B_2, \cdots, B_s; B_{s+1}, \cdots, B_{2s}; \cdots; B_{(m-1)s+1}, \cdots, B_n.$$

由抽屉原理知,任意选定的 $k+1$ 个子列,必有 $l+1$ 个属于上述 m 组中的同一组,不妨设为第1组.注意,组中的 s 个子列互不相同.由此可见,不妨设 $m=1$,即 $(k,n)=1$.这样一来,n 个子列互不相同.从而以 j 为首项的数列恰有1个,我们重新给它以符号 B_j,$j=1,2,\cdots,n$.显然,这 n 个子列的关系是对称的.

对于任给的 $k+1$ 个子列,不妨设其中有 B_k.若其中还有 $n-2k+1$ 个数列 $B_{2k}, B_{2k+1}, \cdots, B_n$ 中之一,则它与 B_k 不交.否则,其余的 k 个子列都属于 $\{B_1, B_2, \cdots, B_{k-1}, B_{k+1}, \cdots, B_{2k-1}\}$.将这 $2(k-1)$ 个子列分成 $k-1$ 对:

$$\{B_i, B_{k+i}\}, i=1,2,\cdots,k-1. \qquad ②$$

由抽屉原理知,k 个子列中必有两个属于②中的同一组.显然二者不交.

综上可知,最多有 k 个子集两两相交非空.

11·85　从 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中取两个组成一对,共组成 n 对 $p_1, p_2, \cdots, p_n$.如果 $\{a_i, a_j\}$ 是其中一对,则两对 p_i 与 p_j 中恰好有1个公共元素,求证每个元素恰好属于其中两对.

（第26届国际数学奥林匹克候选题,1985年）

[证]　设包含 a_k 的数对的个数为 d_k,$k=1,2,\cdots,n$,于是有

$$d_1+d_2+\cdots+d_n=2n. \qquad ①$$

对于每个 d_k,在 d_k 个数对中,任何两个数对 p_i, p_j 都以 a_k 为公共元素.按已知条件,$\{a_i, a_j\}$ 是数对之一时,两对 p_i 和 p_j 恰有1个公共元素,从而有

$$C_{d_1}^2+C_{d_2}^2+\cdots+C_{d_n}^2 \leqslant n.$$

由此及①得到

$$d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2 \leqslant 4n. \qquad ②$$

由均值不等式和①,②有

$$4n^2=(d_1+d_2+\cdots+d_n)^2 \leqslant n(d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2) \leqslant 4n^2,$$

这意味着上述不等式中等号成立,从而必有 $d_1=d_2=\cdots=d_n=2$,即每个元素 a_i 恰含于两个数对之中.

11·86　已知整个空间被分成互不相交的5个非空集合,求证必有

一个平面,它至少与其中的 4 个集合有公共点.

(匈牙利数学奥林匹克,1980 年)

[证] 若不然,则任何一个平面至多与集中的 3 个集合相交.在 5 个集合中各取 1 点,5 点分别为 A,B,C,D,E,则其中任何 4 点都不共面,因而其中任何 3 点都不共线.

考察以 AB 为公共交线的 3 个平面 ABC,ABD 和 ABE,不难看出,其中必有一个平面,使得另两点分别属于该平面将空间分成的两个半空间中.不妨设点 D 和 E 分别位于平面 ABC 的两侧.从而直线 DE 与平面 ABC 相交,记交点为 F.由于 A,B,C 3 点分属于 3 个集合,而平面 ABC 只与 3 个集合相交,所以点 F 必属于点 A,B,C 所在的 3 个集合之一,不妨设 F 与 A 属于同一个集合.这样一来,4 点 D,F,E,B 所决定的平面便与 4 个集合相交,矛盾.

11·87 能否把空间划分为 1979 个全等且互不相交的子集?

(第 21 届国际数学奥林匹克候选题,1979 年)

[解] 可以实现.在空间中引入直角坐标系并令

$$M_i = \{(x,y,z) \mid [x] \equiv i \pmod{1979}\}, i = 0,1,2,\cdots,1978.$$

容易验证,这 1979 个子集满足题中要求.

11·88 设 $A_1,A_2,\cdots,A_{1066}$ 均是有限集 X 的子集,且 $|A_i| > \frac{1}{2}|X|$,$1 \leqslant i \leqslant 1066$.证明必存在 X 的十个元素 $x_1,\cdots,x_{10}$,使得每个 A_i 至少含有 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 中的一个元素(这里 $|S|$ 表示集合 S 含有的元素的个数).

(第 41 届美国普特南数学竞赛,1980 年)

[证] 设 $X = \{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$,$|X| = m$.又设 n_i 是使得 $x_i \in A_j$ 之下标 j 的个数.设 M 是使得 $x_i \in A_j$ 之有序对 (i,j) 的个数,则

$$\begin{aligned} M &= n_1 + n_2 + \cdots + n_m \\ &= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_{1066}| \\ &> 1066 \cdot \frac{|X|}{2} \\ &= 533m. \end{aligned}$$

所以必有一个 n_i,设为 $n_1 > 533$.

设 $B_1,\cdots,B_s$ 是所有不包含 x_1 的子集 A_j,设 $Y = \{x_2,x_3,\cdots,x_m\}$.

则
$$S = 1066 - n_1 \leqslant 532,$$
且　　每一$|B_j| > \dfrac{|Y|}{2}$.

含有 x_2 的 B_j 的个数可以假定不少于含有任一其他 x_i 的 B_j 的个数.

设 $C_1, C_2, \cdots, C_t$ 是所有不包含 x_2 的 B_j，仿照上述方法，可知 $t \leqslant 265$.

继续采用这种方法，则第 4 次所考察的集合序列 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 中所含集合的个数将不多于 132；第 5 次至第 10 次所考察的序列中所含集合的个数将分别不多于 65，32，15，7，3 和 1.

这样我们就得到了所要求的元素 $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$.

11·89　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geqslant 4)$ 是平面上的 n 个凸集，其中每 3 个集合都有 1 个公共点，求证必有 1 点属于全部 n 个集合.

（第 31 届国际数学奥林匹克候选题，1990 年）

[证]　当 $n = 4$ 时，取 $P_i \in \bigcap\limits_{j \neq i} A_j, i = 1,2,3,4$，并考察 $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ 的凸包.

(1) 若 4 点的凸包是凸四边形 $P_1P_2P_3P_4$，则对角线 P_1P_3 和 P_2P_4 交于点 P. 由凸性知线段 P_1P_3 含于 $A_2 \cap A_4$，故有 $P \in A_2 \cap A_4$. 同理 $P \in A_1 \cap A_3$，即点 P 为 A_1, A_2, A_3, A_4 的公共点.

(2) 若 4 点的凸包为 $\triangle P_1P_2P_3$，点 P_4 位于三角形内部（这个三角形也可能退化为一条线段或一点），则由凸性知，$\triangle P_1P_2P_3 \subset A_4$，所以 $P_4 \in A_4$，即 P_4 为 A_1, A_2, A_3, A_4 的公共点.

综上可知，$n = 4$ 时命题成立.

设命题于 $n = k$ 时成立. 当 $n = k + 1$ 时，考察下列 k 个集合：
$$B_i = A_i \cap A_{k+1}, i = 1,2,\cdots,k.$$
显然，它们都是凸集，而且因为 $\{A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}\}$ 中任何 4 集都有公共点，而
$$B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap B_{i_3} = A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{k+1},$$
所以 $\{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$ 中任何 3 个集合都有公共点. 从而由归纳假设知 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 有公共点，亦即 $A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}$ 有公共点，即命题于 n

$= k+1$ 时成立.

11·90 对于任意正整数 k,试求最小正整数 $f(k)$,使得存在 5 个集合 S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,满足下列条件:

(1) $|S_i| = k, i = 1,2,3,4,5$;

(2) $S_i \cap S_{i+1} = \varnothing (S_6 = S_1), i = 1,2,3,4,5$;

(3) $\left|\bigcup_{i=1}^{5} S_i\right| = f(k)$.

又问当集合个数是正整数 $n(n \geqslant 3)$ 时,结果如何?

(中国国家集训队选拔试题,1987 年)

[解] 仅就第二问求解.

由(2)知,$f(k)$ 个数中的每个数在 n 个集合中至多出现 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 次,而 n 个集合共有 nk 个数,故有

$$f(k) \geqslant \frac{nk}{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

又因 $f(k)$ 是正整数,所以

$$f(k) \geqslant \left[\frac{nk + \left[\frac{n}{2}\right] - 1}{\left[\frac{n}{2}\right]}\right] \quad ①$$

下面用构造法来证明上式中等号成立. 当 n 为偶数时,$f(k) = 2k$,结论显然成立. 以下设 n 为奇数,$n = 2m+1(m \geqslant 1)$,于是 ① 式化为

$$f(k) = 2k + 1 + \left[\frac{k-1}{m}\right] \quad ②$$

设 $k = pm + q$,其中 $0 \leqslant q < m, p \geqslant 0$. 于是 ② 式又可改写成

$$f(k) = \begin{cases} 2k + p, & 当\ q = 0, \\ 2k + p + 1, & 当\ q > 0. \end{cases} \quad ③$$

设 $2k+p+1$ 个数为 $a_1, a_2, \cdots, a_{2k+p+1}$,并构造一个项数为 nk 的数列如下:它由 m 段组成,前 q 段每段各有 $2k+p+1$ 项为 $a_1, a_2, \cdots, a_{2k+p+1}$,后 $m-q$ 段每段各有 $2k+p$ 项为 $a_1, a_2, \cdots, a_{2k+p}$. 注意,当 $q = 0$ 时,这里只用了 a_{2k+p} 个不同的数. 记这样排成的数列为

$$b_1, b_2, \cdots, b_{(2k+p+1)q+(2k+p)(m-q)}.$$

令

$$S_i = \{b_{ki-k+j} \mid j = 1,2,\cdots,k\}, i = 1,2,\cdots,n, \qquad ④$$

则这组集合满足条件(2),从而 ③ 式成立.

对于 $i = 1,2,\cdots,n-1$,显然有 $S_i \cap S_{i+1} = \varnothing$,故只须验证 $S_n \cap S_1 = \varnothing$.由 ④ 有

$$S_n = \{b_{2mk+j} \mid j = 1,2,\cdots,k\}.$$

因为 $2mk = (2k+p+1)q + (2k+p)(m-q-1) + k + p$,故有 $b_{2mk+j} = a_{k+p+j}, j = 1,2,\cdots,k$,从而

$$S_n = \{a_{k+p+j} \mid j = 1,2,\cdots,k\}.$$

由此可见,$S_n \cap S_1 = \varnothing$.从而证明了 ① 式中等号成立.

11·91　设 X 是一个有限集合,法则 f 使得 X 的每一个偶子集 E(元素数为偶数的子集)都对应一个实数 $f(E)$,且满足条件

(1) 存在一个偶子集 D,使得 $f(D) > 1990$;

(2) 对于 X 的任何两个不交的偶子集 A,B,都有

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - 1990.$$

求证存在 X 的子集 P 和 Q,满足

(i) $P \cap Q = \varnothing, P \cup Q = X$;

(ii) 对 P 的任何非空偶子集 S,都有 $f(S) > 1990$;

(iii) 对 Q 的任何偶子集 T,都有 $f(T) \leqslant 1990$.

(第 5 届中国中学生数学冬令营,1990 年)

[证 1]　因为集合 X 为有限集,故它的偶子集也只有有限多个,所以 $f(E)$ 必能取得最大值且由(1) 知此最大值大于 1990.设 P 是使 $f(E)$ 取得最大值的所有偶子集中元素数最少的一个偶子集,并记 $Q = X - P$,则 P 和 Q 即为所求.

设 S 是 P 的任一非空偶子集.若 $f(S) \leqslant 1990$,则由(2) 知

$$f(P - S) = f(P) - f(S) + 1990 \geqslant f(P),$$

此与 P 的选法矛盾.故必有 $f(S) > 1990$.

设 T 是 Q 的任一偶子集.若 $f(T) > 1990$,则由(2) 知

$$f(P \cup T) = f(P) + f(T) - 1990 > f(P),$$

矛盾.故必有 $f(T) \leqslant 1990$.

[证 2]　由(2) 知 $f(\varnothing) = 1990$,再由(1) 知 $|X| \geqslant 2$.当 $|X| = 2$ 时,显然,$P = X, Q = \varnothing$ 便满足题中要求(i) - (iii).以下设 $|X| \geqslant 3$.

令 $g(E)=f(E)-1990$,则 g 满足条件,对任何两个不交的偶子集 A 和 B,都有

$$g(A\cup B)=g(A)+g(B). \quad ①$$

同时还有

$$f(E)>1990 \Leftrightarrow g(E)>0, f(F)\leqslant 1990 \Leftrightarrow g(F)\leqslant 0.$$

设 $X=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}, n\geqslant 3$,并简记

$$g_{ij}=g(\{a_i,a_j\}), i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n.$$

于是对任何 $1\leqslant i<j\leqslant k<m$,可以写

$$g(\{a_i,a_j\}\cup\{a_k,a_m\})=g(\{a_i,a_k\}\cup\{a_j,a_m\}).$$

由 ① 便得

$$g_{ij}+g_{km}=g_{ik}+g_{jm}. \quad ②$$

考察方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=g_{12}, \\ x_2+x_3=g_{23}, \\ x_3+x_1=g_{13}. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2}(g_{12}+g_{13}-g_{23}), \\ x_2=\dfrac{1}{2}(g_{12}+g_{23}-g_{13}), \\ x_3=\dfrac{1}{2}(g_{13}+g_{23}-g_{12}). \end{cases}$$

一般地,定义

$$x_k=\frac{1}{2}(g_{1k}+g_{2k}-g_{12}), k=4,5,\cdots,n.$$

于是当 $k\neq m$ 且 $3\leqslant k,m\leqslant n$ 时,由定义和 ② 式便有

$$\begin{aligned} x_k+x_m &= \frac{1}{2}(g_{1k}+g_{2k}+g_{1m}+g_{2m}-2g_{12}) \\ &= \frac{1}{2}[(g_{1k}+g_{2m})+(g_{2k}+g_{1m})-2g_{12}] \\ &= \frac{1}{2}[(g_{12}+g_{km})+(g_{12}+g_{km})-2g_{12}] \\ &= g_{km}. \end{aligned}$$

当 k, m 之一为 1 或 2 时,同样的关系式也成立.这样一来,对于任何 $1 \leqslant k < m \leqslant n$,都有

$$x_k + x_m = g_{km}. \quad ③$$

令

$$g(\{a_i\}) = x_i, i = 1,2,\cdots,n, \quad ④$$

就把 g 的定义范围扩充到 X 的所有单元素集.这时,令

$$P = \{a \in X \mid g(a) > 0\}, \quad Q = \{b \in X \mid g(b) \leqslant 0\},$$

则 P 和 Q 满足题中要求(i) - (iii).

显然有 $P \cap Q = \varnothing, P \cup Q = X$.对于 P 的任何非空偶子集 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_{2k-1}, a_{2k}\}$,由 ①,③,④ 有

$$\begin{aligned} g(S) &= g(\{a_1, a_2\}) + \cdots + g(\{a_{2k-1}, a_{2k}\}) \\ &= g(a_1) + g(a_2) + \cdots + g(a_{2k-1}) + g(a_{2k}) > 0. \end{aligned}$$

对于 Q 的任何偶子集 T,同理可证

$$g(T) \leqslant 0.$$

这就验证了条件(i) - (iii).

11·92　设 $n \in N$ 而 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}$ 是集合 B 的一族子集且满足条件

(1) 每个 A_i 中恰含有 $2n$ 个元素;

(2) $A_i \cap A_j (1 \leqslant i < j \leqslant 2n + 1)$ 恰含有一个元素;

(3) B 中每个元素至少属于两个子集 A_{i_1} 和 $A_{i_2}, 1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 2n + 1$.

试问对怎样的 $n \in N$,可以将 B 中的每一个元素贴上一张写有 0 或 1 的标签,使得每个 A_i 中恰好有 n 个元素贴有标签 0?说明理由.

(第 29 届国际数学奥林匹克,1988 年)

[解]　首先我们指出,由条件(1)—(3) 可以导出更强的条件:

(3′)B 中每个元素恰好属于 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}$ 中的两个.

若不然,不妨设有 $b \in B$,使得 $b \in A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

因为对任何 $i \neq j, A_i \cap A_j$ 恰有一个元素,故知

$$A_1 \cap \left(\bigcup_{j=2}^{2n+1} A_j\right) = \left[A_1 \cap (A_2 \cup A_3)\right] \cup \left[A_1 \cap \left(\bigcup_{j=4}^{2n+1} A_j\right)\right]$$

中至多有 $2n - 1$ 个元素.另一方面,由(3) 又知 A_1 中每个元素至少属于另外的某个 $A_i (i \neq 1)$,所以 $A_1 \cap \left(\bigcup_{j=2}^{2n+1} A_j\right)$ 中又应有 $2n$ 个元素,矛

盾.

由(3′)知,对于每个 $a \in B$,a 都对应于由两个不同正整数组成的一个数对.具体地说,若 $a \in A_i \cap A_j$,则令 a 与$\{i,j\}$相对应.显然,这个对应是个双射.

若能按要求为 B 中的数标上0和1,则在上述数组中恰有一半与0对应.这样的数组的个数为

$$\frac{1}{2}C_{2n+1}^{2}=\frac{1}{4}(2n+1)2n=\frac{1}{2}n(2n+1).$$

可见,n 必为偶数.

下面,我们用构造法来证明,对于偶数 n,确能给出满足要求的标数法.为此,我们把一个圆周用 $2n+1$ 个点均分成 $2n+1$ 等分.在这些点依逆时针顺序标上 $1,2,\cdots,2n+1$.对于任何 $1\leqslant i<j\leqslant 2n+1$,看 i 与 j 在圆周上的劣弧,若 i 与 j 之间有奇数段弧,则给$\{i,j\}$所对应的 $a\in B$ 标上数1;若有偶数段弧,则标上数0.由于 n 为偶数,因此不论 i 为何值,A_i 中的元素都恰有一半标数0而另一半标有数1.

11·93　设自然数 $n>6$.给定 n 元集合 X,任取 X 的 m 个互不相同的5元子集 $A_1,A_2,\cdots A_m$,求证只要

$$m>\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(4n-15)}{600}, \qquad ①$$

就必有 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{i6}(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_6\leqslant m)$,使得 $\left|\bigcup_{k=1}^{6}A_{ir}\right|=6$.

(中国国家集训队选拔试题,1997年)

[证]　若不然,设有满足①式的 $m\in N$,有 X 的 m 个互不相同的5元子集,其中任何6个的并集的元数都不是6.将这 m 个5元子集所成的类记为 S 并记

$$T=\{B \mid |B|=4\text{ 且存在 } A\in S,\text{使得 } B\subset A\}.$$

对于 $B\in T$,考察 X 的子集

$$\{X \mid X\in(X-A),(B\cup\{X\})\in S\}.$$

将这个子集的元数记为 $\alpha(B)$.

对于任给的 $A\in S$,考察含于 A 中的4元子集 B.显然,每个 A 都恰含5个不同的4元子集 B.由反证假设知,每个 $x\in(X-A)$ 至多与4个 $B\subset A$ 各组成一个属于 S 的5元子集.此外,每个 $X\in A$ 恰与 $B=A-\{X\}$ 组成一个属于 S 的5元子集(即 A),故得

$$\sum_{\substack{B\subset A\\|B|=4}}\alpha(B)\leqslant 4(n-5)+5. \qquad ②$$

将上述不等式对所有 $A\in S$ 求和并注意每个 $B\in T$ 恰被重复计数 $\alpha(B)$ 次,所以得到

$$\sum_{A\in S}\sum_{\substack{B\subset A\\|B|=4}}\alpha(B)=\sum_{B\in T}(\alpha(B))^2. \qquad ③$$

另一方面,每个 $A\in S$ 对其 5 个子集 $B\in T$ 的 $\alpha(B)$ 计数各贡献 1,所以

$$\sum_{B\in T}\alpha(B)=5m. \qquad ④$$

将③与④结合起来并按柯西不等式,即得

$$\begin{aligned}(4n-15)m&\geqslant\sum_{A\in S,}\sum_{\substack{B\subset A\\|B|=4}}\alpha(B)=\sum_{B\in T}(\alpha(B))^2\\&\geqslant\frac{1}{C_n^4}\Big(\sum_{B\in T}\alpha(B)\Big)^2=\frac{1}{C_n^4}(5m)^2,\end{aligned}$$

$$m\leqslant\frac{4n-15}{25}C_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(4n-15)}{600},$$

此与已知条件①矛盾.

11·94 设 $S=\{1,2,\cdots,15\}$,从 S 中取出 n 个子集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,满足下列条件:

(i) $|A_i|=7,i=1,2,\cdots,n$;

(ii) $|A_i\cap A_j|\leqslant 3,1\leqslant i<j\leqslant n$;

(iii)对 S 的任何 3 元子集 M,都存在某个 $A_k,1\leqslant k\leqslant n$、使得 $M\subset A_k$.

求这样一组子集个数 n 的最小值.

(中国国家集训队选拔试题,1999 年)

[解] 若有 $a\in S$ 至多属于 6 个子集 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots A_{i_6}$,则每个 A_{i_j} 中除 a 之外还有 6 个元素,共可组成含 a 的三元组的个数为 $C_6^2=15$. 于是 6 个子集共可组成不同的含 a 三元组的个数至多 90 个.

另一方面,S 中所有不同的含 a 三元组的个数为 $C_{14}^2=7\times13=91>90$,无法使(iii)成立. 所以为使条件(i)-(iii)成立,S 中的每个数都至少属于 7 个子集. 这样一来,必有 $n\geqslant 15$.

用字典排列法可以写出满足题中要求的 15 个 7 元子集如下：

$\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $\{1,2,3,8,9,10,11\}$,
$\{1,2,3,12,13,14,15\}$, $\{1,4,5,8,9,12,13\}$,
$\{1,4,5,10,11,14,15\}$, $\{1,6,7,8,9,14,15\}$,
$\{1,6,7,10,11,12,13\}$, $\{2,4,6,8,10,12,14\}$,
$\{2,4,6,9,11,13,15\}$, $\{2,5,7,8,10,13,15\}$,
$\{2,5,7,9,11,12,14\}$, $\{3,4,7,8,11,12,15\}$,
$\{3,4,7,9,10,13,14\}$, $\{3,5,6,8,11,13,14\}$,
$\{3,5,6,9,10,12,15\}$.

综上可知，子集个数 n 的最小值为 15.

第十二章　组合几何

12·1　在边长为 1 的正方形中有若干个圆面，每个圆的直径都小于 0.001，任何两圆面上的任意两点间的距离都不等于 0.001. 求证这些圆面所覆盖的总面积不超过 0.34.

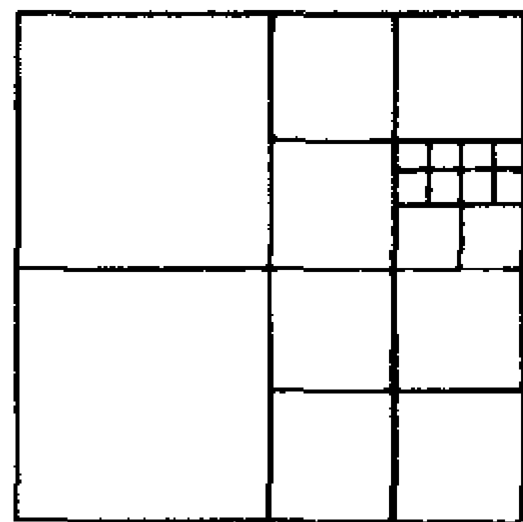
（第 5 届全苏数学奥林匹克，1971 年）

[证]　我们把所有已知圆面的并集称为图形 F，并设 F_1 和 F_2 是把 F 沿着两个彼此夹角为60°的方向分别平移0.001后所得到的图形. 于是由已知条件可知，这三个图形 F, F_1, F_2 彼此不交，但它们都含在边长为 1.001 的正方形中. 由此可见，F 的面积小于 $\frac{1}{3}(1.001)^2 < 0.34$.

12·2　给定若干个正方形，它们的面积之和等于 4. 求证用这些正方形可以覆盖面积为 1 的正方形.

（第 13 届全苏数学奥林匹克，1979 年）

[证]　不妨设给定正方形的边长都小于 1. 把边长 l 满足关系式 $2^{-(k-1)} > l \geqslant 2^{-k}$ 的所有正方形都缩小成边长为 2^{-k} 的正方形，于是缩小后的每个正方形的面积都大于原面积的 $\frac{1}{4}$. 从而所有缩小后的正方形的面积之和大于 1. 而它们可以从大到小，互不重叠地放在面积为 1 的正方形上，当然可以覆盖住（见右图）.



12·3　试证规格为 $n \times 2m$（$n > 1$ 与 m 都是自然数）的矩形中，可以铺上两层砖块，每块砖的规格为 1×2，使得每层砖块都盖满整个矩形，但上下两层砖块中的任何两块都不完全重

合.

（第41届莫斯科数学奥林匹克，1978年）

［证］ 当 n 为偶数时，非常容易排.只要一层将砖全都横向排放，而另一层全都纵向排放就可以了.

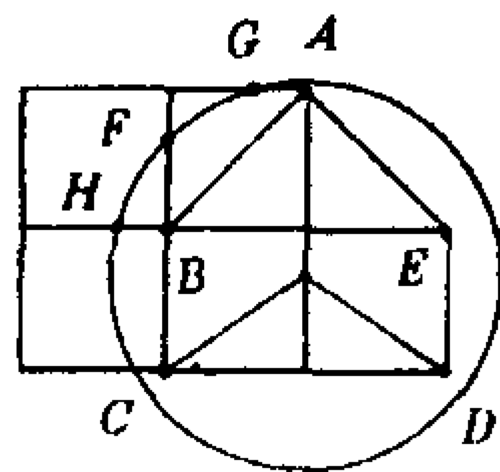
当 n 为奇数时，第一层中将上面两行纵向排，其余各行都横向排；第二层中将第1行横向排，其余各行都纵向排就可以了.

12·4 已知一个凸五边形的所有内角都是钝角，求证它必有两条对角线，使得分别以这两条对角线为直径的两个圆面可以完全覆盖住这个五边形.

（第37届莫斯科数学奥林匹克，1974年）

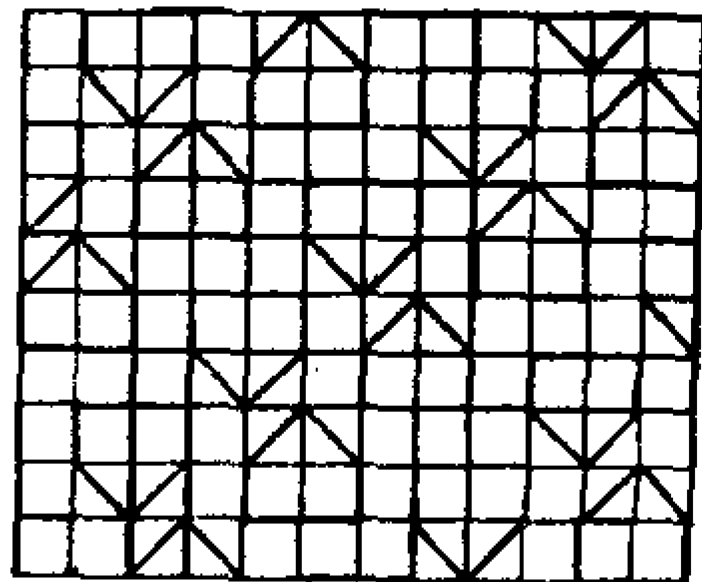
［证］ 在五边形 $ABCDE$ 中取定顶点 A，连对角线 AC，AD，并且分别以它们作为直径作圆 O_1 和 O_2，其中圆心 O_1 和 O_2 分别为 AC，AD 的中点.因为 $\angle ABC$ 和 $\angle AED$ 都是钝角，故圆面 O_1 和 O_2 分别盖住了 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$.考察 $\angle ACD$ 和 $\angle ADC$.若其中有1个角非锐角，则 $\triangle ACD$ 被两圆面之一完全盖住，问题就解决了；若两角都是锐角，则过点 A 作 $\triangle ACD$ 的高 AH，点 H 在 CD 上.这时圆面 O_1 和 O_2 分别盖住了 $\triangle ACH$，$\triangle ADH$.可见，两圆面完全盖住了五边形.

12·5 在桌子上有一张大的方格纸，纸上方格的边长是1厘米.此外还有足够多的硬币，硬币的半径为1.3厘米.试证可以用这些硬币来覆盖纸，使得硬币互不重叠，而纸上的所有结点均被盖住.



（第39届莫斯科数学奥林匹克，1976年）

［证］ 考察以5个结点 A,B,C,D,E 为顶点的五边形，其中 $\triangle ACD$ 的外接圆半径为1.25.因而当把硬币中心放在 $\triangle ACD$ 的外心时，恰好将五边形 $ABCDE$ 完全盖住.容易算出，$AG < 0.36$，$BF < 0.6$，$BH < 0.28$.这样，像右图那样划分五边形并用硬币去覆盖每个五边形，这些硬币便互不重叠.

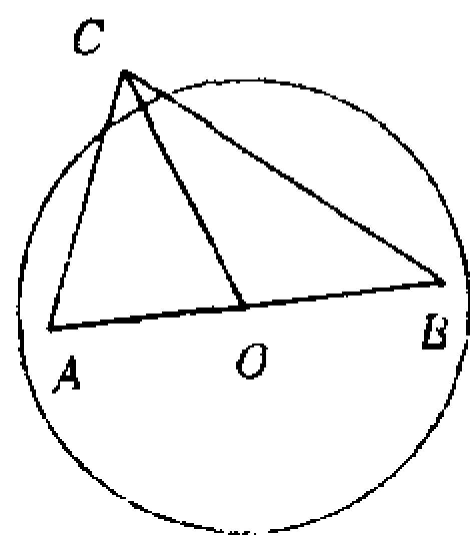


12·6 试证任何一个周长为 $2a$ 的多边形，总可以用一个直径为 a 的圆纸片盖住.

（第12届莫斯科数学奥林匹克，1949年）

（波兰数学奥林匹克，1956年）

[证]　设 W 是周长为 $2a$ 的多边形. 在 W 的周界上取两点 A 和 B,使它们平分 W 的周界,亦即沿 W 的周界从 A 到 B 和从 B 到 A 的长度都是 a. 以线段 AB 的中点 O 为心,$\frac{a}{2}$ 为半径作圆 O,则圆面 O 就盖住了多边形 W.



若不然,设点 C 在多边形 W 的周界上但在圆 O 之外,于是 $OC > \frac{a}{2}$. 但沿着多边形 W 的周界从点 B 到点 C 再到点 A,长度为 a,所以有 $AC + BC < a$. 又因在三角形中,两边之和大于第3条边上中线的2倍,故有

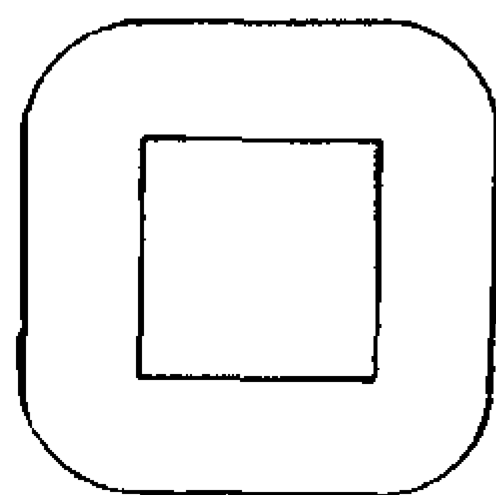
$$a > AC + BC > 2OC > a,$$

矛盾.

12·7　在边长分别为20和25的矩形中已经放有120个边长为1的正方形,求证可以把直径为1的圆放到矩形中,使它与任何正方形都不相交.

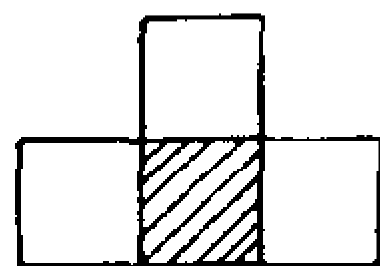
（第1届全俄数学奥林匹克,1961年）

[证]　直径为1且完全在矩形内部的圆的圆心与矩形的任何一边的距离都大于 $\frac{1}{2}$,所以,圆心必落在将原矩形的每边向内收缩 $\frac{1}{2}$ 后所得的 19×24 的矩形中,这个矩形的面积为456. 另一方面,直径为1的圆与某单位正方形相交,当且仅当圆心落在右图所示的图形的内部或边上,而这一图形的面积为 $3 + \frac{\pi}{4}$. 因为120个这种图形的面积为 $120\left(3 + \frac{\pi}{4}\right) = 360 + 30\pi < 360 + 96 = 456$,所以,无论这120个正方形在矩形中如何放置,当将每个正方形都放大成上图所示的图形后,它们仍然不能覆盖住收缩后的 19×24 的矩形. 于是只要把直径为1的圆的圆心放在没被盖住的点上,此圆就与所有正方形都不相交.



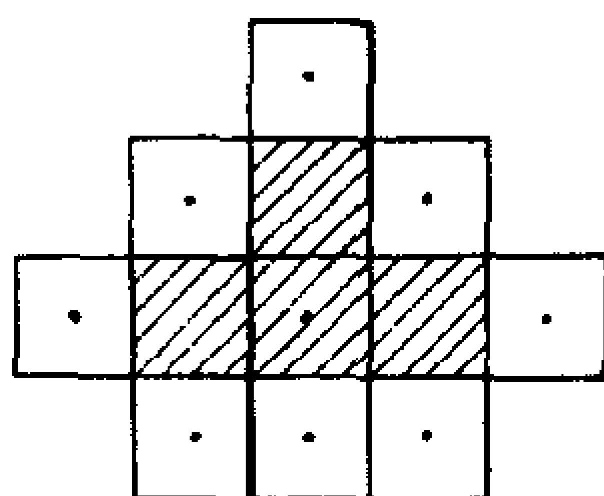
12·8　在 100×100 的方格棋盘上放置着800个如图所示的 T 形块,每个这样的图形恰盖住棋盘上的4个方格,且任何两个图形都不重

叠.求证在棋盘上还可以再放置1个这样的图形,使它完全盖住4个空方格.


(a)

(第32届乌克兰数学奥林匹克,1992年)

[证] 将图(a)中阴影线所示的方格称为中心方格.设在棋盘上已放好1个T图形,这个T图形与其周围的8个方格如图(b)所示.如果在棋盘上再放置1个T图形,且其中心格不在图(b)所示的12个方格中,则后放入的T图形与原来的T图形不相重叠.另一方面,若放入的T图形的中心格不在棋盘四周的边格中,则此图形不会超出棋盘之外.由于棋盘内部共有98^2个方格,而$98^2-12\times800=4$,故知还可以再放入1个T图形,使它与已有的T图形不相重叠.

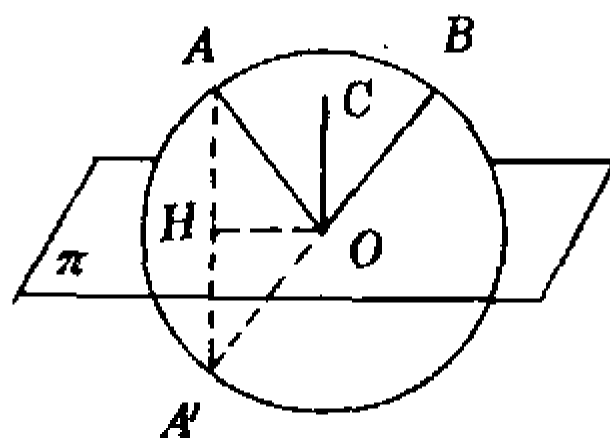

(b)

12·9 半径为1的球面上的两点用位于球内且长度小于2的曲线段连结起来,求证这条曲线段一定落在这个球的某个半球内.

(第3届美国数学奥林匹克,1974年)

[证] 设球面上给定的两点是A和B,过球心O作垂直于$\angle AOB$的平分线OC的平面π.于是平面π将球分为两个半球,点A和B所在的半球即为所求.

让我们来证明曲线段AB全部落在上述半球内.若不然,设曲线段AB交半球的底面于点P.作点A关于平面π的对称点A',连结$A'O$并作曲线段AP关于平面π的对称曲线段$A'P$.于是A',O,B三点共线且$A'B=2$.由于曲线段$A'P+PB$构成一条连结两点A'和B的曲线,故长度不小于2.但它的长度又等于所给的曲线段AB的长度,又应小于2,矛盾.



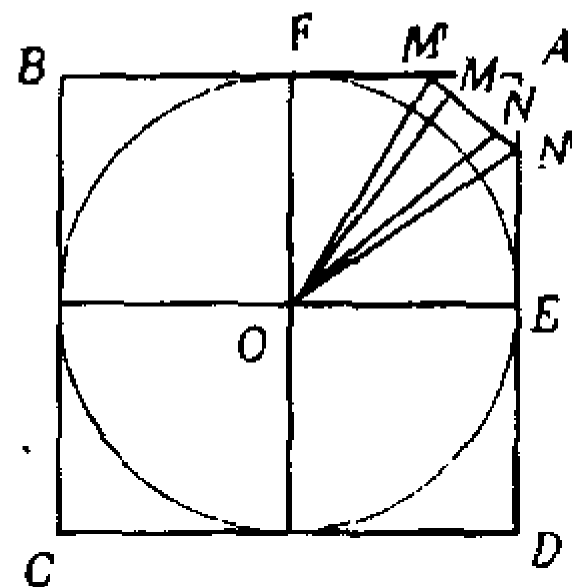
12·10 在某个正方形的内部放置一个边长为大正方形一半的小正方形,求证小正方形必盖住大正方形的中心.

(基辅数学奥林匹克,1983年)

[证] 设大正方形$ABCD$的边长为2,于是小正方形边长为1.记大正方形的中心为O.

若不然,则点O在小正方形之外.因而从点O到小正方形的某条

边MN的距离大于1.注意$MN=1$,从而点M和N不能在大正方形的同一条边上.作以O为心,以1为半径的圆O,则MN在圆外.过中心O作与正方形的边平行的十字线,将大正方形分为4个面积为1的正方形.这时,MN必在某个小正方形内,例如在如图所示的正方形$OEAF$内.双向延长线段MN,使它与正方形$OEAF$的周界分别交于M'和N'.于是有



$$S_{\triangle OMN}\leqslant S_{\triangle OM'N'}\leqslant\frac{1}{2}S_{\square AFOE}=\frac{1}{2}.$$

另一方面,因为$MN=1$而点O到MN的距离大于1,故又有$S_{\triangle OMN}>\frac{1}{2}$,矛盾.这就证明了小正方形一定盖住大正方形的中心.

12·11　已知一条线段被放在它上面的若干条短线段所覆盖,求证这些短线段的左半段可盖住原线段长度的至少一半.

(圣彼得堡数学奥林匹克,1990年)

[证]　首先从左到右去掉那些完全被其他短线段所盖住的短线段.然后对短线段的条数n使用归纳法来证明.

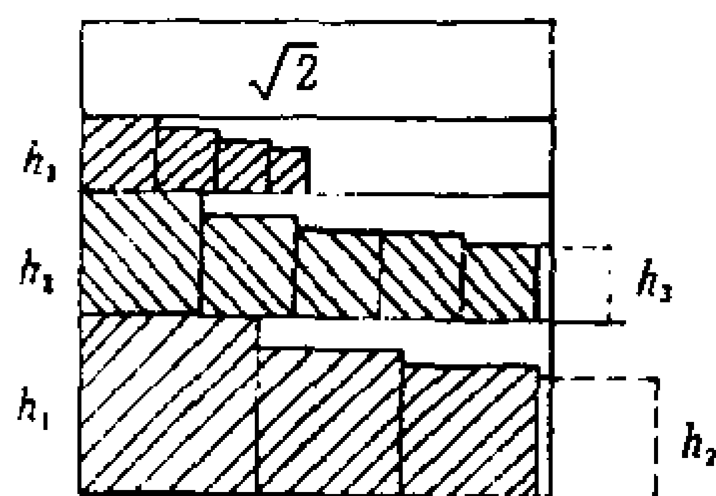
当$n=1$时结论显然成立.设结论于$n=k$时成立.当$n=k+1$时,设原线段为$[a,b]$并设盖住点a的短线段的右端点为x并设其余短线段的左端点中最靠左的一个是点y,于是有$a<y<x$.由于除$[a,x]$之外的k条线段覆盖了$[y,b]$,故由归纳假设知它们的左半段可盖住线段$[y,b]$长度的一半.又因第1条线段$[a,x]$的左半段显然盖住线段$[a,y]$长度的一半,所以这$k+1$条线段的左半段盖住了线段$[a,b]$长度的至少一半,这就完成了归纳证明.

12·12　给定面积之和等于1的若干个正方形.求证可以把它们互不重叠地放入面积为2的正方形中.

(第6届全苏数学奥林匹克,1972年)

[证]　我们按边长递减的次序来排列这些正方形,并从最大的正方形开始自左至右地把它们排放到面积为2的正方形的底边上,直到无法再放为止.然后沿最左面一个正方形的上底作一条水平线并将余下的正方形依次排在这条水平线上方和大正方形的内部,直到无法再放为止.并继续这个过程直到所有正方形都放完为止.我们把每行正方

形中最左面一个的边长依次记为 $h_1, h_2, \cdots, h_m$. 于是问题就是要证明 $h = h_1 + h_2 + \cdots + h_m < \sqrt{2}$.



让我们来估计这些小正方形的总面积. 假设我们把第 k 行最左面的正方形拿到第 $k-1$ 行排在末尾,则它有一部分要处在大正方形之外.(第 1 行的最左面一个正方形也拿掉单独处理) 于是第 $k(k=1,2,\cdots,m-1)$ 行的正方形面积之和不小于 $(\sqrt{2}-h_k)h_{k+1} \geqslant (\sqrt{2}-h_1)h_{k+1}$. 由于已知所有小正方形面积之和为 1,故有

$$h_1^2 + (\sqrt{2}-h_1)(h_2+h_3+\cdots+h_m) \leqslant 1,$$

$$h_1^2 + (\sqrt{2}-h_1)(h-h_1) \leqslant 1.$$

由此及均值不等式,即得

$$h \leqslant \frac{1-h_1^2}{\sqrt{2}-h_1} + h_1 = 3\sqrt{2} - \left[2(\sqrt{2}-h_1) + \frac{1}{\sqrt{2}-h_1}\right] \leqslant \sqrt{2}.$$

12·13 同一平面上的 4 个半平面完全覆盖了这个平面,求证从中必可去掉 1 个半平面,使余下的 3 个半平面仍能覆盖住整个平面.

(匈牙利数学奥林匹克,1951 年)

[证 1] 设 4 个半平面分别为 f_1, f_2, f_3, f_4. 若不然,则存在点 $P_i \in f_i, i=1,2,3,4$, 使得 $P_i \notin f_j, j \neq i$.

(1) 若 4 点中有 3 点 $P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}$ 共线且 P_{i_2} 在另两点之间,则半平面 f_{i_2} 至少还要盖住另两点 P_{i_1}, P_{i_2} 中之一,此与反证假设矛盾.

(2) 若 4 点 P_1, P_2, P_3, P_4 的凸包是凸四边形,则对角线 P_1P_3 和 P_2P_4 的交点 M 必属于某一半平面 f_{i_0}. 从而 f_{i_0} 必至少盖住 P_1, P_3 之一,也必至少盖住 P_2, P_4 之一,即至少盖住两点,矛盾.

(3) 若 4 点的凸包是三角形,不妨设点 P_4 在 $\triangle P_1P_2P_3$ 之内. 连结 P_1P_4 并延长交边 P_2P_3 于点 M. 因为半平面 f_4 盖住点 P_4 但未盖住点 P_1, 故必盖住点 M. 因而 f_4 又必至少盖住点 P_2, P_3 之一,此与反证假设矛盾.

[证 2] 首先我们指出一个事实:

如果 3 条射线盖住了一条直线,则从中可以选出两条射线,使之仍

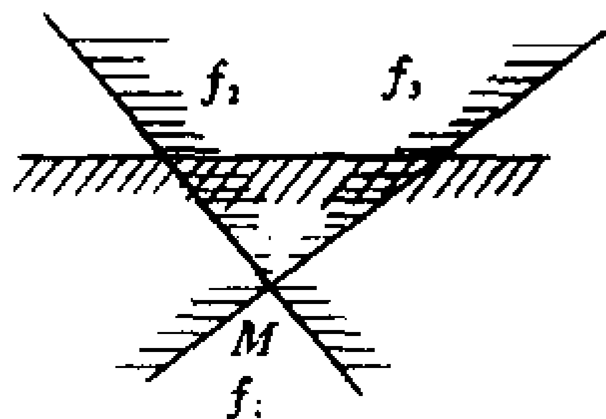
能盖住这条直线.

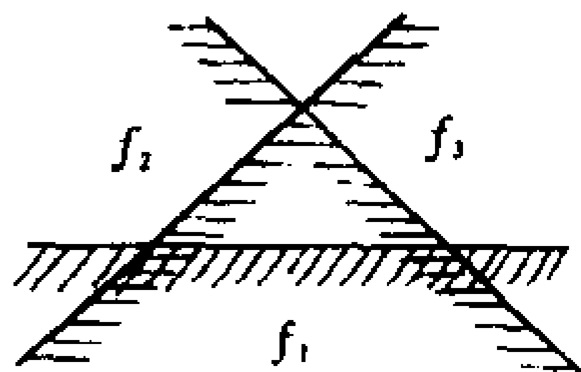
设4个半平面分别为f_1,f_2,f_3,f_4.考察f_1的边界线l_1.它被另外3个半平面所覆盖.如果f_2,f_3,f_4之一完全盖住了l_1,不妨设为f_2,则或者f_1和f_2盖住了整个平面,或者f_1含在f_2之中,无论哪种情形,结论都成立.以下设3个半平面中的每个都至多盖住了l_1上的一条射线.于是由开头指出的事实便知,3个半平面中的两个半平面完全盖住了l_1(当有1个半平面没盖住直线l_1上的任何点时,结论更成立),不妨设这两个半平面是f_2和f_3.

考察f_2和f_3盖住直线l_1的各种情形.设半平面f_2和f_3的边界线分别为l_2和l_3.

(1)若$l_2 \parallel l_3$,则必l_2在f_3中,l_3在f_2中.从而f_2,f_3就盖住了整个平面.

(2)若l_2与l_3的交点M在f_1内,则f_1,f_2,f_3就盖住了整个平面(见左图).





(3)若l_2与l_3交点在f_1之外(见右图),则半平面f_2和f_3完全盖住f_1,从而f_1可以去掉而使f_2,f_3,f_4完全盖住平面.

[证3] 设4个半平面分别为f_1,f_2,f_3,f_4.若不然,则存在点$P_i \in f_i, i=1,2,3,4$,使得$P_i \notin f_j, j \neq i$.连结P_1P_4,P_2P_4,P_3P_4并考察线段P_1P_4被覆盖的情形.

若某半平面盖住线段P_1P_4上的某点,则它至少盖住两个端点之一.因f_2,f_3都既未盖住P_1,也未盖住P_4,故二者也不能盖住P_1P_4上的任何一点.因$P_1 \notin f_4, P_4 \in f_4$,故线段$P_1P_4$必与半平面$f_4$的边界线$l_4$相交,记交点为$Q_1$.于是$Q_1$必属于$f_1$但不属于$f_2,f_3$.同理,在$l_4$上可以找到点$Q_2$和$Q_3$,使$Q_2 \in f_2, Q_3 \in f_3$,但$Q_2$不属于$f_1,f_3$而$Q_3$不属于$f_1,f_2$.不妨设$Q_2$在点$Q_1$与$Q_3$之间.由于$f_2$盖住点$Q_2$,故它还至少盖住点$Q_1$和$Q_3$之一,矛盾.

12·14 在平面上任给100个点,试证可以用若干个不交的圆面来

覆盖它们,使得这些圆面的直径之和小于 100,且任何两圆之间的距离大于 1.(两个不交的圆之间的距离是指它们的两个最近点之间的距离.)

(第 6 届全俄数学奥林匹克,1966 年)

[证] 首先,以每个给定点为心,以$\frac{1}{2}$为半径作 100 个圆,则这些圆的直径之和为 100.

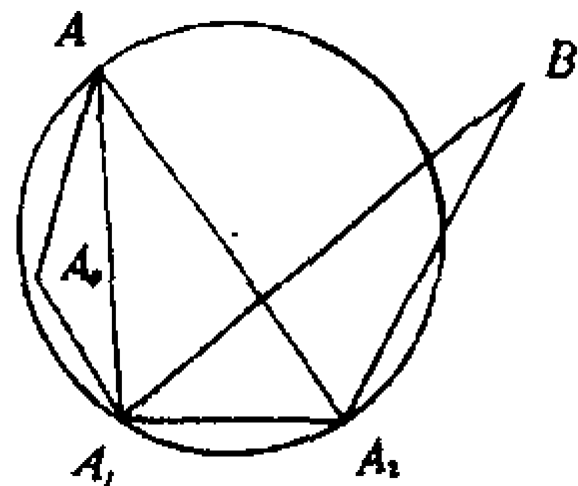
其次,若有上述圆中的两个圆相交(包括相切),则用包含两圆在内的最小圆来代替二者.显然,后者的直径不超过前两圆直径之和.这样处理直到所得的圆互不相交为止.这时,所得的所有圆的直径之和不超过 100 且每个给定点到覆盖它的圆面的边界的距离不小于$\frac{1}{2}$.

最后,既然这些圆两两相离,故它们两两之间的距离大于零.又因这样的距离只有有限多个,故其中必有最小者,记为 r 且有 $r>0$.不妨设 $x<1$ 将上面所得的所有圆的半径都缩小$\frac{1}{2}-\frac{r}{3}$,重新作圆,则所得的一组圆面便满足题中要求.

12·15 试证任一凸多边形中必有 3 个相邻顶点,使得过这 3 点的圆面包含整个多边形.

(保加利亚数学奥林匹克,1978 年)

[证] 考虑所有这样的圆:它过已知多边形的某 3 个顶点,其中两个顶点相邻而第 3 个顶点对前两点的张角不超过 90°.这种圆当然存在,比如过 3 个相邻顶点的圆即是如此.在这些圆中,取直径 d 最大的圆 S,则圆 S 即为所求.



若不然,则或者圆 S 之外还有多边形的顶点,或者圆 S 不过多边形的 3 个相邻顶点.

设圆 S 上的多边形的 3 个顶点为 A,A_1,A_2,其中 A_1 与 A_2 是相邻顶点,多边形顶点 B 在圆 S 之外.因为点 A 与 B 在直线 A_1A_2 的同侧,所以 $\angle A_1BA_2<\angle A_1AA_2\leqslant 90°$(如图所示).于是由正弦定理知 $\triangle A_1A_2B$ 的外接圆直径大于 $\triangle AA_1A_2$ 的外接圆 S 的直径,此与圆 S 的直径的最大性矛盾.这表明圆面 S 覆盖了多边形.

由反证假设知顶点 A 既不与顶点 A_1 相邻也不与顶点 A_2 相邻且

A_1 与 A_2 的各另一个相邻顶点 A_0,A_3 都在圆 S 内部.具体地说,A_0 和 A_3 分别含在以 AA_1,AA_2 为弦的弓形内.显然,$\angle AA_1A_2$ 和 $\angle AA_2A_1$ 中至少有 1 个是锐角,不妨设 $\angle AA_2A_1$ 为锐角.于是有 $\angle AA_0A_1 > 180^\circ - \angle AA_2A_1 > 90^\circ$.从而由正弦定理又知 $\triangle AA_0A_1$ 的外接圆直径大于圆 S 的直径,矛盾.这意味着圆 S 过 A_0,A_1,A_2 这 3 个相邻顶点.

12·16 在平面上有1000个角,其和小于360°.能否适当放置这些角,使之盖住整个平面?

(基辅数学奥林匹克,1983 年)

[解] 不能实现.若不然,设这 1000 个角已经放置好并盖住了整个平面,记这些角之和为 $2t < 2\pi$.在平面上取一点 O 为心,以足够大的 R 为半径作圆,使所有角顶都在圆内.然后再以点 O 为心,作半径为 kR 的圆S.于是这些角与圆 S 内部相交所得的1000个扇形的面积之和不超过$(k+1)^2R^2t$,而圆 S 的面积为$k^2R^2\pi$.因为

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{(k+1)^2R^2t}{k^2R^2\pi}=\frac{t}{\pi}<1,$$

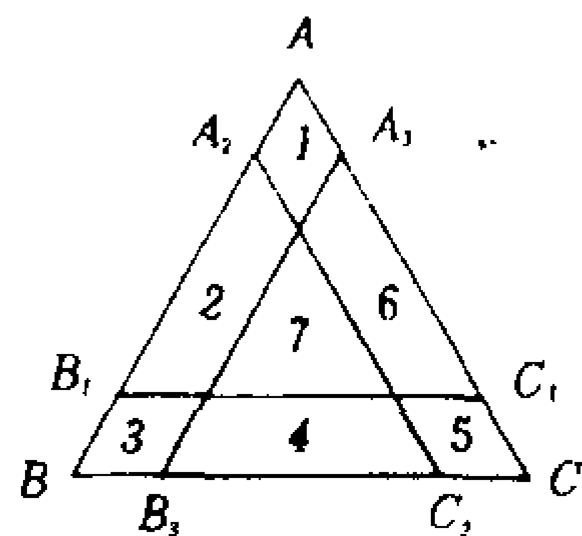
所以当 k 充分大时,$(k+1)^2R^2t < k^2R^2\pi$,矛盾.

12·17 在一个面积为 1 的正三角形内部,任意放置 5 个点.试证在此正三角形内,一定可以作 3 个正三角形盖住这 5 个点,使得这 3 个正三角形的各边分别平行于原三角形的边,并且它们的面积之和不超过 0.64.

(第 2 届中国中学生数学冬令营,1987 年)

[证] 因为给定的 5 点都在正三角形的内部,故可以正三角形中心为位似中心,作一个与原三角形位似且略小于原三角形的 $\triangle ABC$,使得 5 个给定点都在 $\triangle ABC$ 的内部.这时,$\triangle ABC$ 的面积$S < 1$.

分别在边 AB,BC,CA 上各取一点B_1,C_2,A_3,使得 $B_1B=\frac{1}{5}AB$,$C_2C=\frac{1}{5}BC$,$A_3A=\frac{1}{5}CA$.过 B_1 作 $B_1C_1 /\!/ BC$ 交CA 于C_1.类似地作 $C_2A_2 /\!/ CA$,$A_3B_3 /\!/ AB$.所作的3条线段互相相交将 $\triangle ABC$ 分成7个区域,分别以数字1,2,…,7编号(见下图).我们简记 $\triangle_1=\triangle AB_1C_1$,$\triangle_2=\triangle BC_2A_2$,$\triangle_3=\triangle CA_3B_3$,显然,这 3 个三角形的面积相等且均小于 0.64.



(1) 如果 $\triangle_1,\triangle_2,\triangle_3$ 之一的内部及边界上至少含有 3 个给定点，则因这个三角形面积小于 0.64，故可取 $\alpha>0$，使得

$$0.64S+2\alpha<0.64.$$

再用两个面积均不超过 α 的小正三角形分别盖住另两点即满足题中要求.

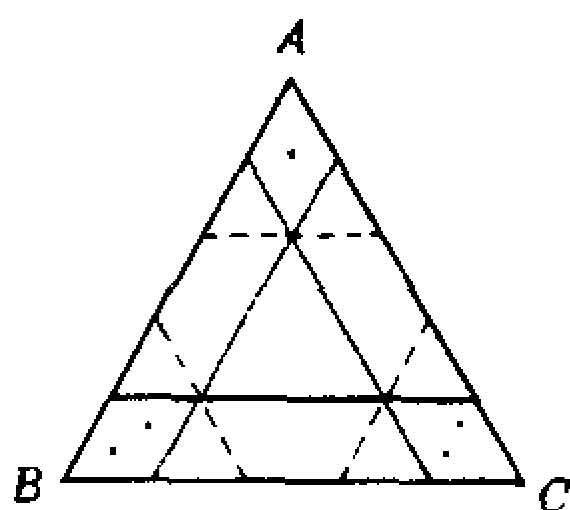
(2) 以下设 $\triangle_1,\triangle_2,\triangle_3$ 中任何一个都不能盖住 5 个给定点中的 3 个点，则所给的 5 点的分布必有如下的特点：

(a) 在标号为 1,3,5 的 3 个菱形区域中，每一个中都至少有 1 个给定点. 否则，假如 1 号区域中无点，则 5 个给定点全落在 $\triangle_2$ 与 $\triangle_3$ 中，两个三角形中至少有一个至少盖住 3 个给定点，矛盾.

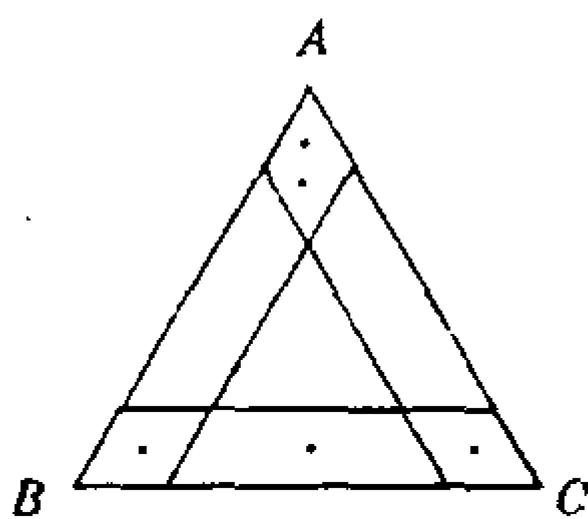
(b) 7 号三角形区域中没有给定点. 否则，其中至少有 1 个给定点. 对 $\triangle_1,\triangle_2,\triangle_3$ 统计所盖住的给定点的个数时，这样的每点将被计数 3 次. 于是 3 个三角形中至少含有 7 个给定点. 由抽屉原理知必有 1 个三角形中至少含有 3 个给定点，矛盾.

(c) 标号为 2,4,6 的 3 个梯形区域中，至多有一个给定点. 若其中至少有两个给定点，则因每个这样点都恰属于 $\triangle_1,\triangle_2,\triangle_3$ 中的两个，于是又导致这 3 个三角形中至少含有 7 个给定点. 像(b) 中一样地又可导出矛盾.

综合(a),(b),(c) 可以断定，5 个给定点的分布本质上只有下列两种不同情形：



(a)

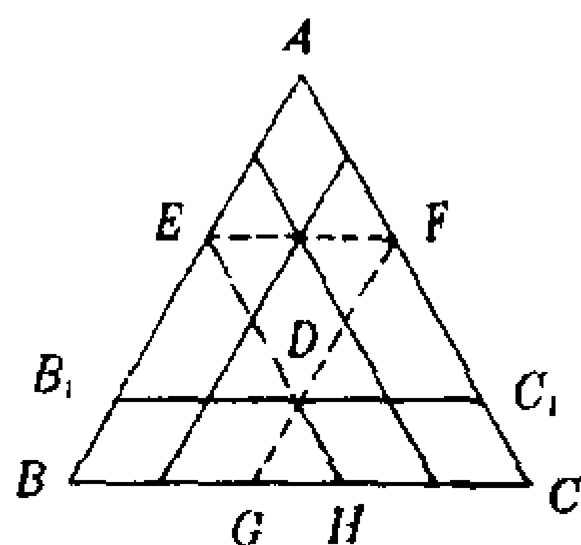


(b)

(3) 在上面图(a) 所示的情形下，可作出图中虚线所示的 3 条线段，它们从大三角形截得的 3 个小正三角形分别盖住了 5 个给定点且每

个小三角形的面积为$\left(\frac{2}{5}\right)^2 S < 0.16$,故3个三角形的面积之和小于0.48,当然更小于0.64.

(4)在上面图(b)所示的情形下,过线段B_1C_1中点D分别作$EH // AC$,$FG // AB$(如右图所示),连结EF,则1号菱形与A相对的顶点在EF上.因为$\triangle EBH$和$\triangle FGC$盖住了标号为3,4,5的3个区域中的3个给定点.二者之一盖住了两点,不妨设$\triangle FGC$盖住了两点.由于$\triangle AEF$也盖住了两点且这两个三角形的面积之和为



$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 S + \left(\frac{2}{5}\right)^2 S < 0.52,$$

故可再用面积不大于0.1的正三角形盖住3号区域中的1个给定点,这3个三角形便满足题中的要求.

12·18 平面被两族互相垂直的平行直线划分为单位正方形,即成为无穷大的方格纸.考察由所分成的方格构成的$n \times n$的正方形.将其中至少有1条边位于边界上的所有单位正方形的并集称为该正方形的边框,简称为框形.求证对于由所分成的方格构成的100×100的正方形,恰有1种方法可以用50个框形互不重叠地盖住它.

(第20届全俄数学奥林匹克,1994年)

[证] 首先,把100×100的正方形自己的边框作为第1个框形.除了它之外,余下一个98×98的正方形.将它的边框作为第2个框形.去掉它之后余下一个96×96的正方形.这样继续下去,直到最后得到一个2×2的正方形.它就是第50个框形.这50个框形恰好互不重叠地盖住了100×100的正方形.

下面证明,满足题中要求的覆盖中的50个框形必为上述的50个框形.为此,又只须证明100×100的正方形的4个角格A,B,C,D必为同一框形所覆盖.

为简单起见,既用A,B,C,D表示4个角格,又用它们分别表示正方形的4个顶点.注意,正方形$ABCD$的对角线AC和BD上各分布有100个方格.每个框形至多盖住每条对角线上的两个方格.因此,当50个框形盖住正方形$ABCD$时,每个框形恰好盖住两条对角线上的各两

个方格.

当一个方格被某框形盖住时,我们就说这个方格属于该框形.下面先来证明角格 A 和 C 必属于同一个框形.若不然,设角格 A 和 C 分属于两个不同框形.这时,较小的框形的一边上至多有 50 个方格.所以,这个框形不能盖住对角线 BD 上的任何方格,矛盾.所以角格 A 和 C 必属于同一个框形 K.

如果角格 A 和 C 属于框形 K 的相邻的两边上,那么,K 的这两条边的公共角格也是正方形的角格,不妨设为角格 B.又因 K 得盖住对角线 BD 上的两个方格,所以 D 也属于 K.即 50 个框形中最大的框形必为 100×100 本身的边框.

如果角格 A 和 C 位于框形 K 的一组对边上,那么框形 K 的边长必为 100.从而角格 B 和 D 也必属于 K.从而最大的框形 K 也必为 100×100 的正方形本身的边框.

综上可知,用 50 个边框互不重叠地盖住 100×100 的正方形的方法恰有 1 种.

12·19　在凸 100 边形的内部标出了 k 个点,$2 \leqslant k \leqslant 50$.求证可从该 100 边形的顶点中选出 $2k$ 个点来,使得所标出的 k 个点全都落在以选出的 $2k$ 个顶点为顶点的 $2k$ 边形的内部.

(第 20 届全俄数学奥林匹克,1994 年)

[证]　设多边形 $M = A_1A_2\cdots A_n$ 是 k 个标定点的凸包,于是 $n \leqslant k$.设 O 是 M 内部的一点.对每个 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$,连结 OA_i 并延长交凸 100 边形的周界于点 B_i.记 $\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$ 的凸包为 M',则 M 含于 M' 的内部.

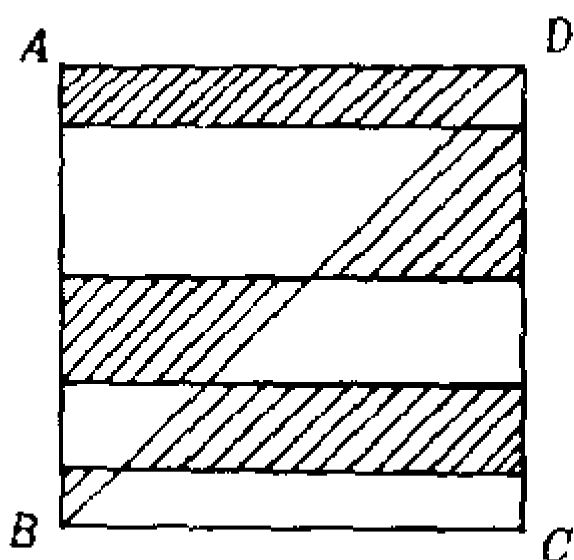
事实上,对于 M 上的任意一点 P,直线 OP 与 M 的周界交于两点.记这两个交点分别位于 M 的边 A_iA_{i+1} 和 A_jA_{j+1} 上.于是由 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 的取法便知直线 OP 与线段 B_iB_{i+1},B_jB_{j+1} 分别相交.记交点为 S 和 T.因 $B_i,B_{i+1},B_j,B_{j+1} \in M'$,所以 $S,T \in M'$.从而 $O,P \in M'$.这就证明了 $M \subset M'$.

设 $M' = C_1C_2\cdots C_m$,于是 $m \leqslant n \leqslant k$.注意,所有 C_i 都在给定的凸 100 边形的周界上.考察这些 C_i 所在的凸 100 边形的边的端点的集合 G,则 $|G| \leqslant 2k$.再任选凸 100 边形的 $2k-|G|$ 个顶点补入 G,则 G 便恰有 $2k$ 个点,且以 G 中所有点为顶点的凸 $2k$ 边形包含有 C_1,

$C_2,\cdots,C_m$,当然含有 M',从而含有所有 k 个给定点.

12·20 已知正方形 $ABCD$ 的竖直边 AB 被分成 n 条线段,使有奇数号码的线段长度之和等于有偶数号码的线段长度之和.过每个分点作边 AD 的平行且相等的线段,所得到的 n 条带形都被对角线 BD 分成左、右两部分.求证有奇数号码的带形的左边部分面积之和等于有偶数号码的带形的右边部分面积之和(见下图中用斜线标出的部分).

(第 14 届全苏数学奥林匹克,1980 年)



[证] 将对角线 BD 左右两方用阴影线标出的部分的面积之和分别记为 S_1 和 S_2,左边空白部分面积之和记为 S_3.由已知有 $S_1+S_3=S_2+S_3$,从而得到 $S_1=S_2$.

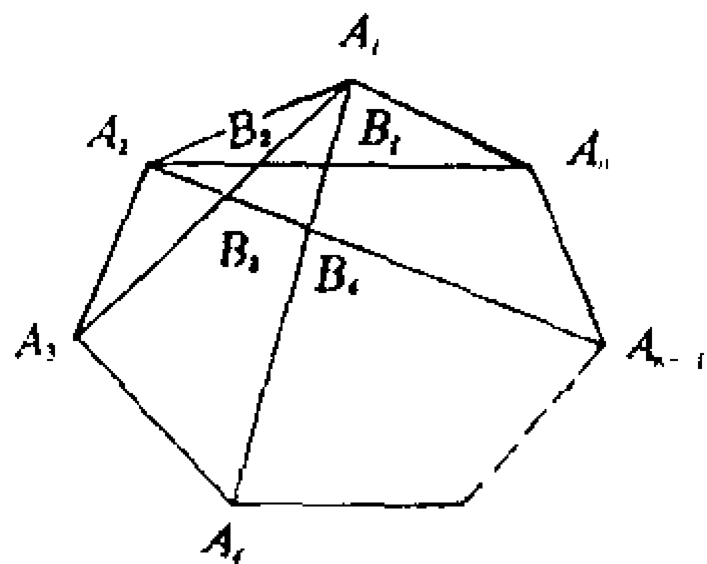
12·21 把边长为 1 的正六边形内部一点 O 同它的所有顶点连结起来.试证由此而将六边形分成的 6 个三角形中,总存在两个三角形,它们的各边之长都不小于 1.

(第 37 届莫斯科数学奥林匹克,1974 年)

[证] 如果点 O 为中心,则 6 个三角形都满足要求.如果点 O 不是中心,则中心所在的那个三角形的 3 条边长都不小于 1.而且,与这个三角形相邻的两个三角形中至少有一个三角形满足要求.

12·22 已知凸 $n(n\geqslant 5)$ 边形被它的所有对角线分割成若干部分,求证其中必有面积不等的部分.

(第 21 届全苏数学奥林匹克,1987 年)



[证] 考察凸 n 边形的顶点 A_3,A_2,A_1,A_n,A_{n-1} 和 A_4(当 $n=5$ 时,$A_4=A_{n-1}$),连结对角线 $A_1A_3,A_1A_4,A_2A_n,A_2A_{n-1}$,它们互相交于 B_1,B_2,B_3,B_4 四点(见上图).若各部分面积都相等,则有 $A_1B_2=B_2B_3,A_2B_2=B_2B_1$,从而四边形 $A_1A_2B_3B_1$ 为平行四边形.故有 $A_2A_{n-1}\parallel A_1A_4$,此不可能.

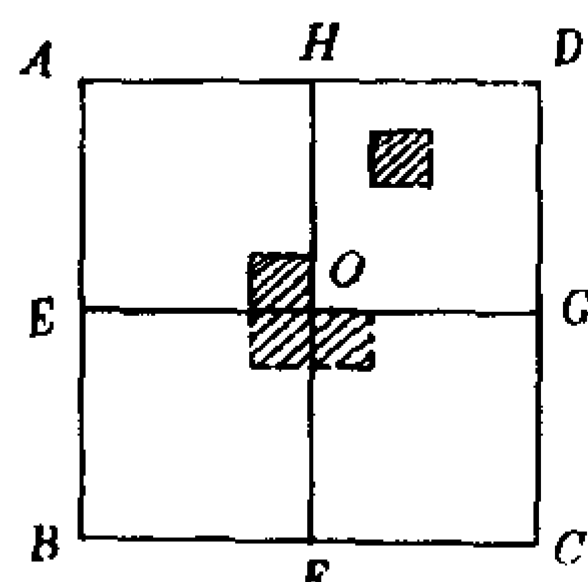
12·23 试证在 $2^n\times 2^n(n\in N)$ 的棋盘上删去一个方格后,剩下

的部分可以用三个小方格组成的角形"$\square\!\square$"覆盖而无重叠.

(中国上海市数学竞赛,1982 年)

[证] (1) 当 $n=1$ 时,命题显然成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时,命题成立.



当 $n=k+1$ 时,将挖去一个小方格的 $2^{k+1}\times 2^{k+1}$ 的棋盘 $ABCD$ 四等分得到四个 $2^k\times 2^k$ 的棋盘 $AEOH$, $EBFO$, $OFCG$, $GOHD$. 其中必有一个是挖去一个小方格的棋盘,设为 $GDHO$.

现将 L 形块放在 O 处,使 $AEOH$, $EBFO$, $OFCG$ 中各占去一格(如图),则这四个 $2^k\times 2^k$ 的棋盘都成了挖去一个小方格的棋盘了,由归纳假设都恰好能被 L 形铺满,所以 $n=k+1$ 时命题成立.

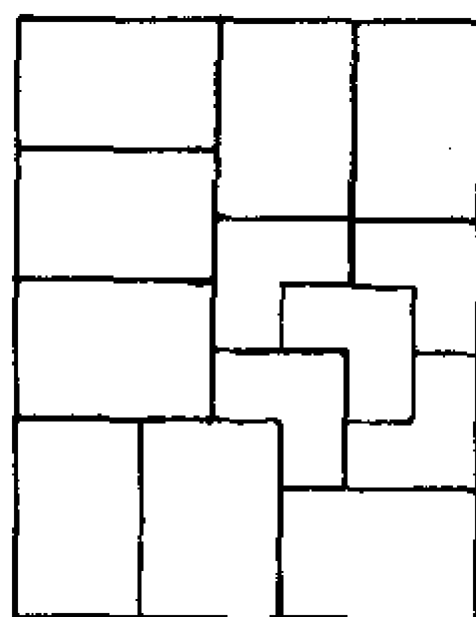
由以上,对一切 $n\in N$,命题成立.

12·24　能否将下列 $m\times n$ 矩形分割成若干个"L 形"(由 3 个单位正方形组成的图形$\square\!\square$):

(1) $m\times n=1985\times 1987$?　(2) $m\times n=1987\times 1989$?

(第 28 届国际数学奥林匹克候选题,1987 年)

[解] (1) 因为 $3\nmid(1985\times 1987)$,所以第 1 个矩形不能分割成若干个 L 形.



(2) 因为用 L 形瓦既可拼成 2×3 的矩形又可拼成 7×9 的矩形(见右图),而

$$
\begin{aligned}
1987\times 1989 &= 1980\times 1989+7\times 1989\\
&=(2\times 3)\times(990\times 663)+(7\times 9)\\
&\quad\times 221,
\end{aligned}
$$

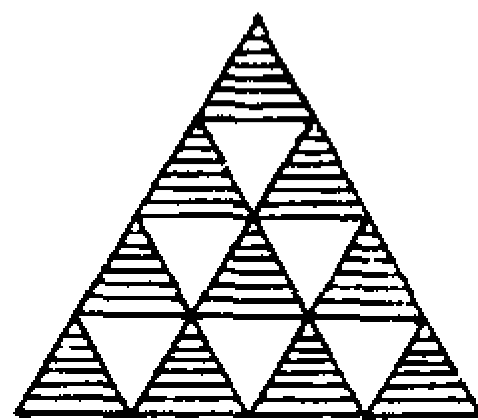
故知 1987×1989 的矩形可被分割成若干个 L 形.

12·25　用平行于三角形各边的直线将边长为 n 的正三角形分成 n^2 个边长为 1 的正三角形. 沿着所得到的三角形的边作一条不封闭的折线,使它通过这些三角形的全部顶点中的每点恰好一次. 求证折线中存在不少于 n 对相邻线段,使其中每对的两条线段的夹角都是锐角.

(第 24 届全苏数学奥林匹克,1990 年)

[证] 易见,所分成的小三角形的顶点总数为

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2),$$



这意味着折线由$\frac{1}{2}(n^2+3n)$段小线段组成.将与原三角形同向位似的小正三角形都染成黑色(见上图),于是共有$\frac{1}{2}(n^2+n)$个黑三角形.由此可知至少有n个黑三角形,每个都包含折线的两条相邻线段,二者的夹角为60°.

12·26　设在一张正方形的纸上画着n个矩形,它们的边都平行于纸边,任何两个矩形都没有公共内点.求证当挖去所有矩形后,纸的剩余部分的块数不多于$n+1$.

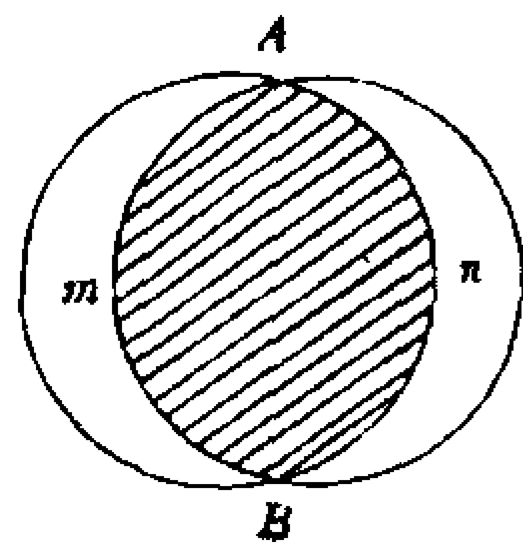
(第10届全苏数学奥林匹克,1976年)

[证]　设正方形纸的剩余部分被分成k个小块,因为每块的边都平行于正方形的边,故每一小块上可以标出4个顶点(在这些顶点上的角为90°或270°).k个小块共标出$4k$个顶点,其中每一个都是被挖掉的n个矩形或者原正方形的顶点.同时,若有某一点被标出两次,那么它是两个矩形的公共顶点.因而有$4k \leqslant 4n+4$,由此即得$k \leqslant n+1$.

12·27　在两张相同的圆形纸片上,画家画了两条一样的龙.第1张纸片上的龙的眼睛恰好与圆心重合,第2张上的龙则不然.试证可将第2张纸片分成两部分,使得当将两部分重新拼成一个与原来半径相同的圆时,龙的眼睛刚好也与圆心重合.

(第44届莫斯科数学奥林匹克,1981年)

[证]　将两张纸片适当重叠,使得其上画的龙的图案完全重合.然后将第2张纸片沿弧AnB剪开,并将剪下的月形部分拼到弧AmB上即可.

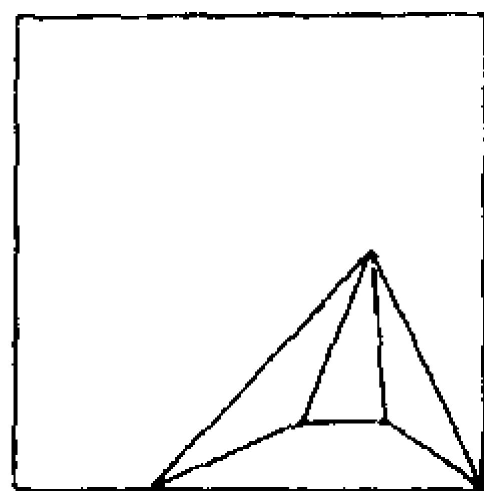


12·28　一个正方形被划分为一些凸多边形.试证可以把它们划分为更小的凸多边形,使得在正方形的这种新的划分之下,每一个多边形都与奇数个多边形相邻(具有公共边).

(第36届莫斯科数学奥林匹克,1973年)

[证]　首先将每个凸多边形都划分成三角形,于是整个正方形被分成了若干个三角形.位于正方形内部的三角形显然与另外3个三角形相邻,已经满足题中要求,而有两条边在正方形边界上的三角形也满

足题中要求，故只须再对恰有1条边在正方形边界上的三角形进行加工．而这只要像上图所示那样进行划分即可．



12·29　一个正三角形被分割成 n 个凸多边形，使得每一条直线都至多与其中的40个相交（如果一条直线与多边形有公共点，就称它们相交，其中包括直线经过多边形顶点的情况）．问 n 能否大于一百万？

（第31届莫斯科数学奥林匹克，1968年）

［解］　首先从三角形上截去3个角，然后从所得的六边形上截去6个角，再从所得的十二边形上截去12个角，这样继续截角19次，一共得到凸多边形 $1+3+3\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+3\cdot 2^{18}>10^6$ 个．任意一条直线与每一档次的三角形相交不会超过两个，故相交的多边形总数不超过 $2\times 19+1=39$ 个．这表明在满足题中要求的前提下，凸多边形的个数 n 可以大于一百万．

12·30　证明：用15块大小是 4×1 的矩形瓷砖和1块大小是 2×2 的正方形瓷砖，不能恰好铺盖 8×8 的矩形地面．

（中国部分省市初中通讯赛，1986年）

［证］　如图，用红(A)，蓝(B)，白(C)，黄(D)四种颜色之一给每个小方格涂色，并使与对角线（表中的 DD）平行方向的方格都涂上相同的颜色，于是不论如何放置 4×1 的瓷砖，总是占据四种颜色的方格各一个，而每块 2×2 的瓷砖总有两格沿着与对角线 DD 平行方向放置而同色，即 2×2 瓷砖所占据的四个方格只有三种颜色，因此，对于分别涂有红、蓝、白、黄四色各16格的矩形地面，当放置15块 4×1 的矩形瓷砖后，四种颜色各占15格，不可能在剩下的四格（四种颜色各1格）放置 2×2 瓷砖．

A	B	C	D	A	B	C	D
B	C	D	A	B	C	D	A
C	D	A	B	C	D	A	B
D	A	B	C	D	A	B	C
A	B	C	D	A	B	C	D
B	C	D	A	B	C	D	A
C	D	A	B	C	D	A	B
D	A	B	C	D	A	B	C

12·31　已知一个正方形被分割成若干个矩形，求证这些矩形的外接圆的面积之和不小于原正方形的外接圆的面积．

（第42届莫斯科数学奥林匹克，1979年）

[**证**]　因为圆内接矩形中正方形面积最大，而正方形面积是它的外接圆面积的$\frac{2}{\pi}$，故有

$$S(R) \leqslant \frac{2}{\pi} S(C),$$

其中 C 为矩形 R 的外接圆，而 $S(R)$，$S(C)$ 分别表示二者的面积.

设正方形 Q 被分割成了 n 个矩形 R_i，$i = 1, 2, \cdots, n$，于是有

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} S(Q) &= \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{n} S(R_i) \leqslant \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\pi} S(C_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} S(C_i),\end{aligned}$$

这恰好表明所有矩形的外接圆面积之和不小于原正方形的外接圆的面积.

12·32　将 8×8 方格纸板的一角剪去一个 2×2 的正方形，问余下的 60 个方格能否剪成 15 块形如　　的小纸片？

（中国东北三省数学邀请赛，1989 年）

[**解**]　如图所示，将 $+1$，-1 填入 8×8 方格内.

由于在方格纸的一角剪去 2×2 的正方形，其数字和为 0，于是剩下的 60 个方格数字和为 0.

注意到，任一符合要求的“L”型四连格中的数字之和或者为 $+2$，或者为 -2.

+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1

假设能分成 15 块“L”型四连格，并设其中数字和为 2 的有 x 块（其总和为 $2x$），数字和为 -2 的有 y 块（其总和为 $-2y$）. 因而有

$$\begin{cases} x + y = 15, \\ 2x + (-2y) = 0. \end{cases}$$

解得　　$x = y = \frac{15}{2}$.

不是整数，这是不可能的.

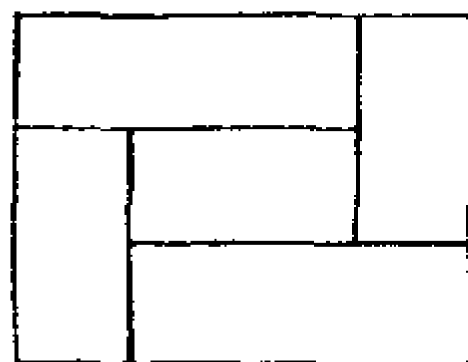
因此，题设的要求不能做到.

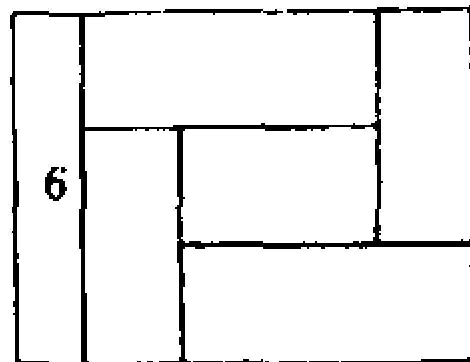
12·33　试证当 $n \geqslant 5$ 时，能把任意一个矩形划分成 n 个矩形，使

得任何两个相邻矩形在原地拼起来的图形都不是矩形.

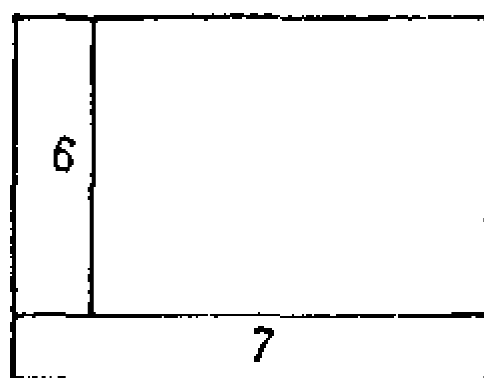
(基辅数学奥林匹克,1975 年)

[证] 对于 $n=5,6$,可像右图所示那样来划分.易见,$n=6$ 的分法,实际上是从矩形上先分出一个与原矩形等高的条状矩形,然后把余下部分按 $n=5$ 的情形来划分.类似地,$n=7$ 时,可以先从所给矩形上分出一个与原矩形等长的条状矩形,然后把其余部分按 $n=6$ 的情形来划分.依此类推,当 $n=k$ 已分好时,若 $n=k+1$ 为偶数,则像 $n=6$ 那样从原矩形左方分出一个与原矩形等高的条状矩形,若 $n=k+1$ 为奇数,则像 $n=7$ 那样从原矩形下方先分出一个与原矩形等长的条状矩形.然后余下部分按 $n=k$ 的情形来划分.容易看出,这种划分满足题中的要求.


$n=5$



$n=6$



12·34 设正方形内排列着 n 个两两相离的圆,求证可以把正方形划分成 n 个凸多边形,使得每个多边形内恰含有 1 个圆.

(中国国家集训队测验题,1990 年)

[证] 记正方形为 Q,n 个圆为 $S_1,S_2,\cdots,Sn$.对于任意点 $P\in Q$,我们把点 P 关于圆 S_i 的幂记为 $d_i(P)$ 并令

$$M_i=\{P\mid P\in Q,d_i(P)\leqslant dj(P),j=1.2,\cdots,n\},i=1,2,\cdots,n.$$

由于 n 个圆两两相离,所以两圆恰好在其根轴的两侧,且均与根轴不交.易见,每条根轴都有一段是某两个 T_i 的公共边,而且每个 T_i 都是由 S_i 与另外的 $n-1$ 个圆的 $n-1$ 条根轴中的某些条(可能是全部也可能不是全部)以及正方形 Q 的边界(也可能用不着)围成的多边形.这 n 个多边形当然覆盖了正方形 Q 且两两内部不交,即这 n 个多边形满足题中要求.

12·35 设在一张有 100×100 个格子的正方形方格纸上沿网格线作了若干条不自交的折线,这些折线互不相交,它们的端点在正方形的边上,但折线则严格含于正方形内部.求证除了正方形纸的顶点之外,还存在着不属于任何折线的结点(在正方形内部或边上).

(第 11 届全苏数学奥林匹克,1977 年)

[证]　我们把方格纸的所有结点相间地涂上黑色与白色，不妨设4个顶点都是黑色.于是除顶点外，边界上共有4×99个结点，其中白点比黑点多4个.设这些结点都是折线的端点，于是端点皆白的折线比端点皆黑的折线多两条.注意，在端点异色的折线内部，黑白两色的结点数相等；在端点皆白(黑)的折线内部，黑(白)色结点比白(黑)色结点多一个.从而在这些折线所经过的正方形内部的结点中，黑点比白点多两个，因而这些结点的总数为偶数.但是，正方形内部结点的总数为99×99是奇数.所以至少有一个结点不在这些折线上.

12·36　能否把一个凸多边形分割为若干个非凸的四边形？

(第38届莫斯科数学奥林匹克，1975年)

[解]　假设凸多边形M被分割成n个非凸的四边形.于是它们的内角之和为$S=2n\pi$.如果四边形的某个顶点处的内角大于π，我们就称该顶点为凹点.显然，凹点不会位于多边形M的边界上，并且任何两个四边形的凹点不会重合(否则两个四边形内部将发生重叠).由此可知，n个非凸四边形的凹点全都严格位于M的内部且互不相同.因此，这n个四边形的内角和将大于$2n\pi$，矛盾.

12·37　已知正1000边形被不相交的对角线剖分为若干个三角形，求证其中至少存在8条长度互不相同的对角线.

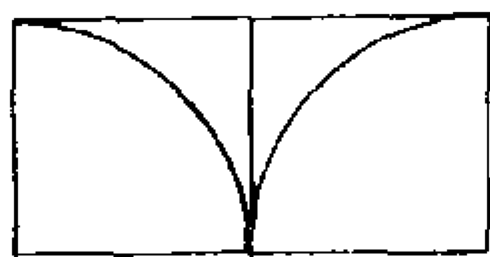
(第32届莫斯科数学奥林匹克，1969年)

[证]　作出正1000边形的外接圆，则正1000边形的顶点将圆分成1000段相等的弧并记每段弧长为1.为方便计，我们用弧段长来表示相应的弦长(即多边形的对角线的长).

考察含有外接圆圆心的三角形.它的最长边的长度不小于334.与这条边相邻的三角形的另两边中较长的一条边长不小于$\frac{334}{2}$.于是我们又可考察与这条边相邻的三角形并得到第3条对角线不小于$\frac{334}{2^2}$.如此继续下去，直到在第8个三角形中，找到第8条对角线不小于$\frac{334}{2^7}>2$.易见，这8条对角线长度互不相同.

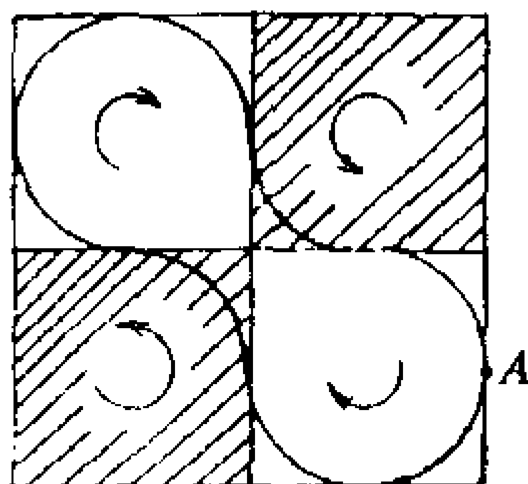
12·38　有N节儿童玩具铁轨，它们的形状都是半径相同的$\frac{1}{4}$圆周.试证当将它们一节一节地首尾相接且每两节之间的过渡都是光滑

时，不可能将它们接成一条起点与终点重合的封闭路线，使得始末两节铁轨间的夹角为0(见右图).



(第33届莫斯科数学奥林匹克，1970年)

[证] 假定已将一节节路轨接成了封闭或非封闭的路线. 于是我们可以把平面划分成正方形方格，使路轨与正方形的边相切(参看右图). 像国际象棋棋盘那样将方格相间地涂上黑色与白色，不妨设第1节路轨在白格内且按顺时针方向行驶. 容易看出，当列车在白格中行驶时，总是顺时针前进；当列车在黑格中行驶时，总是按逆时针方向前进. 如果封闭路线的最后一节路轨与第1节夹角为0，则最后一节在黑格中且是顺时针前进，矛盾. 故知题中要求的封闭路线是无法接出的.



12·39 能否将正方形的每条边都分成100段，使得不能用所得的400条线段围成一个不同于原正方形的矩形回路?

(第34届莫斯科数学奥林匹克，1971年)

[解] 设正方形的边长为1，若分成的400条小线段能围成异于原正方形的矩形，则必有一组对边的边长小于1. 为了使得围成矩形不可能，我们只要随时注意分出的线段中，不能找出两组长度和相等且均小于1的线段组合就够了.

首先，我们把4条边中的每条都分成两段，长度分别为$\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$，$\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}$，$\left\{\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right\}$，$\left\{\frac{1}{7},\frac{6}{7}\right\}$. 容易验证，由这8条线段中的某些线段组成的长度和小于1的所有线段组的长度和互不相同. 下面，我们把这种要求称为具有性质p.

然后，从第1组线段中取出1条线段. 因为上面所得到的小于1的长度和只有有限多个，故可将取出的这条线段分成两段，使当这两段加入后，性质p仍然成立. 接着从第2组取出一条线段并分成两段，使性质p仍然成立. 这样4组线段轮流下去，每次划分都保持性质p，直到分足400段为止，性质p仍然成立. 显然，由这400条线段无法围成异于正方形的矩形.

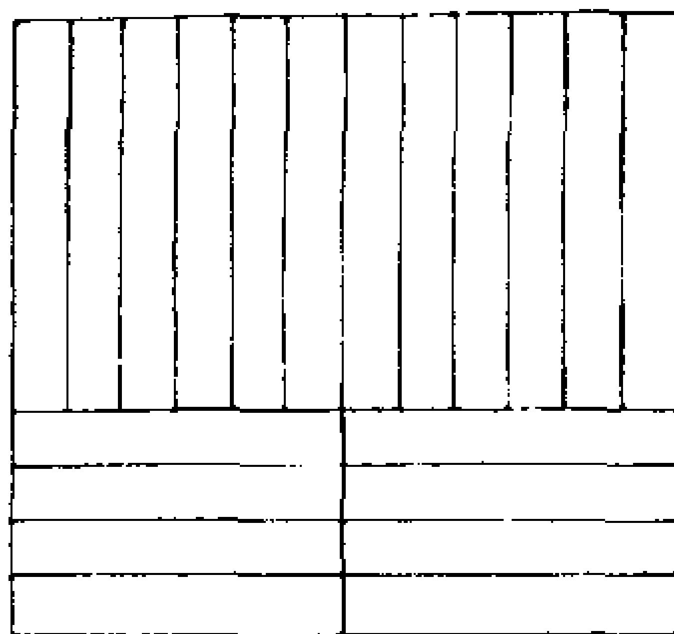
12·40 设有一个尺寸为11×12的矩形，求证

(1) 可以将它分成20个小矩形，每个小矩形的尺寸都或为1×6或

为 1×7.

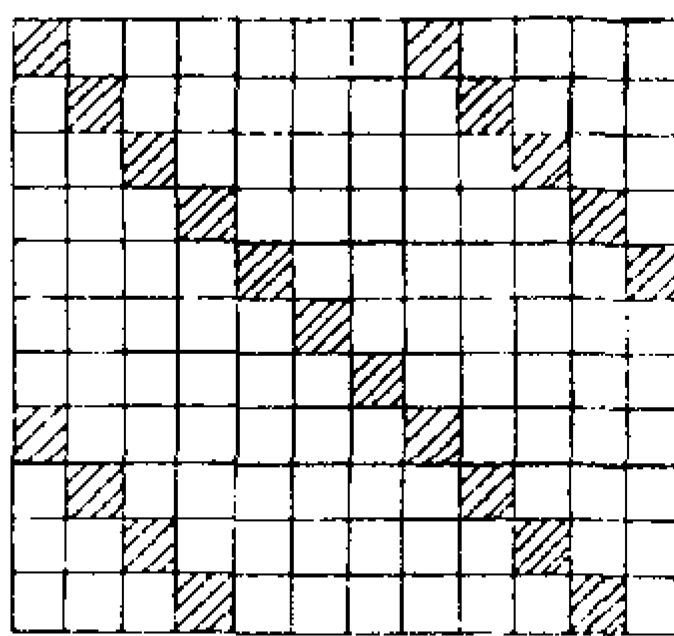
(2) 不可能分成 19 个这样的矩形.

(第 17 届全俄数学奥林匹克,1991 年)



[解] (1) 如图,竖放的是 1×7 矩形,横放的是 1×6 矩形,共用 12 个 1×7 矩形和 8 个 1×6 矩形恰好拼成了 11×12 矩形.

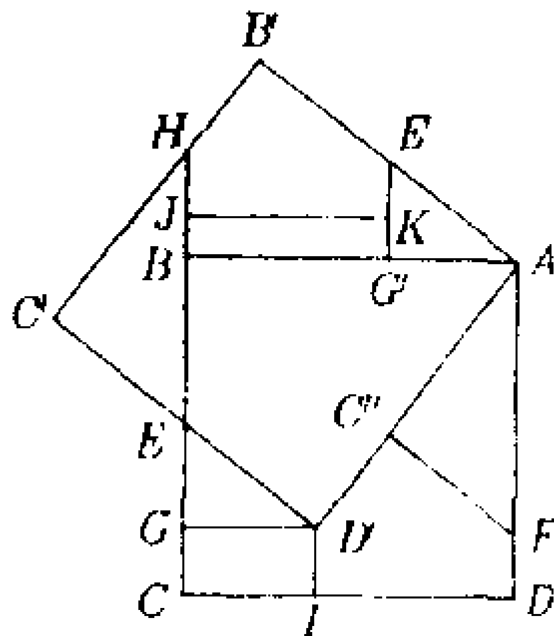
(2) 将 11×12 矩形分成 132 个 1×1 的正方形并像右图所示那样将其中 20 个方格画上阴影. 显然,无论将 1×6 或 1×7 的矩形横放还是竖放,至多盖住 1 个有阴影的方格. 可见,这个 11×12 矩形不可能分成 19 个 1×6 和 1×7 的矩形.



12·41　设 K 和 K' 是同一平面上边长相等的两个正方形. 能否将 K 分为有限多个内部不交的三角形 $\triangle_1,\triangle_2,\cdots,\triangle_n$,并且找到 n 个平移 $t_1,t_2,\cdots,t_n$,使得 $K'=\bigcup\limits_{i=1}^{n}t_i(\triangle_i)$.

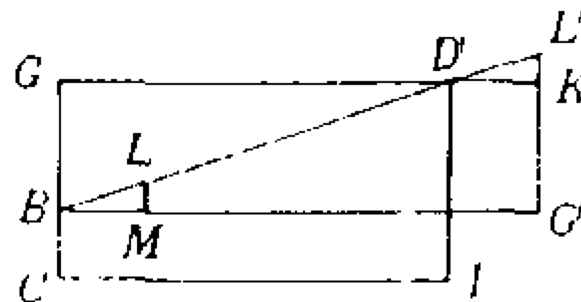
(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

[解] 设 K 和 K' 分别为正方形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$. 显然可经过平移使点 A 与点 A' 重合,于是可设 K' 是将 K 绕点 A 顺时针旋转 $\varphi\leqslant 45°$ 而得到.



将两个正方形划分如右图所示,其中 $AC''=HC'$, $HJ=D'I$, $AG'=IC=D'G$. 容易看出,矩形 $BG'KJ$ 和矩形 $CID'G$ 面积相等且只须再证可将前者划分成若干块并在分别平移后可拼成后者.

将矩形 $JBG'K$ 平移,使点 J 与点 G 重合. 连结 BD' 并延长,交 $G'K$ 的延长线于点 L'. 在 BG' 上取点 M,使 $BM=D'K$,过 M 作 $LM\perp BG'$ 交 BD' 于 L,则有 $\triangle BML\cong\triangle D'KL'$. 先将 $\triangle BML$ 平移到 $\triangle D'KL$,然后再将梯形 $LMG'L'$ 平移到梯形 $BCID'$,即拼成矩形 $GCID'$.

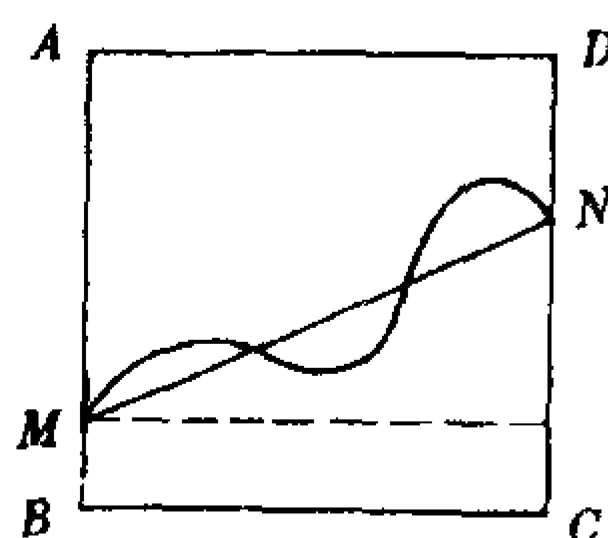


12·42　在单位正方形周界上两点之间连一条曲线，如果它把这个正方形分成面积相等的两部分，试证这个曲线弧的长度不小于 1.

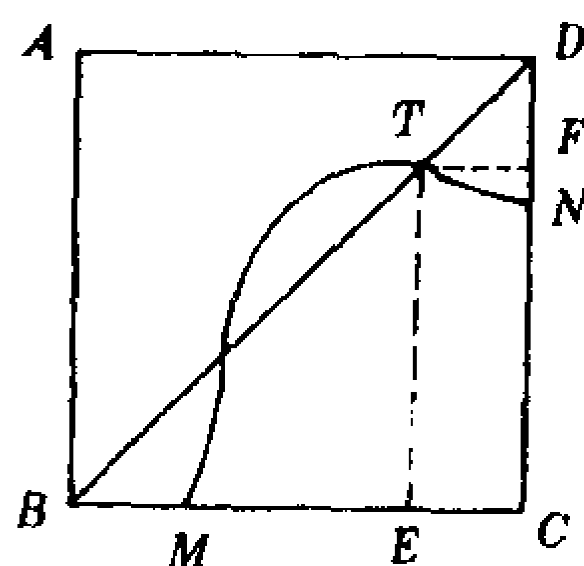
（中国全国数学竞赛，1979 年）

［证］　设 M,N 是单位正方形 $ABCD$ 周界上的两点，曲线弧 $\overset{\frown}{MN}$ 把这个正方形分成面积相等的两部分．下面分三种情形来证明．

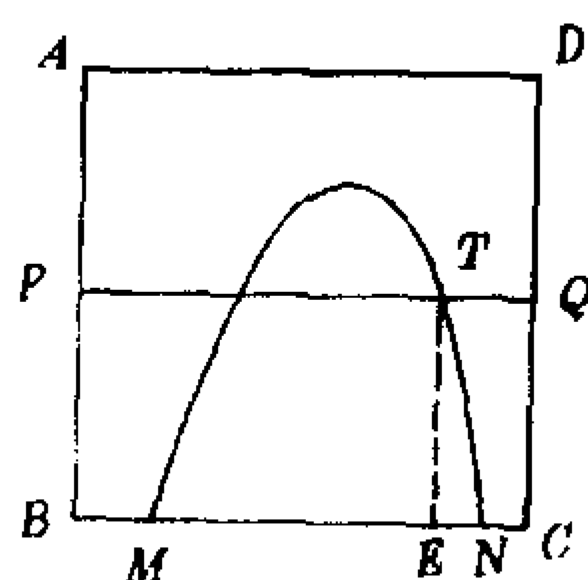
(1) 设 M,N 分别在正方形的一组对边上，不妨设 M 在 AB 上，N 在 CD 上．连结 MN，则 $MN \leqslant \overset{\frown}{MN}$，又因 $MN \geqslant 1$，故得 $\overset{\frown}{MN} \geqslant 1$，见图(a).



(a)



(b)



(c)

(2) 设 M,N 分别在正方形的一组邻边上，不妨设 M 在 BC 上，N 在 CD 上．连结 BD，因为 $\overset{\frown}{MN}$ 把正方形分成面积相等的两部分，故曲线弧 $\overset{\frown}{MN}$ 必与对角线 BD 有公共点，设 T 是一个公共点，过 T 作 $TE \perp BC$ 于 E，作 $TF \perp CD$ 于 F，见图(b)．于是有

$$\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{MT} + \overset{\frown}{TN} \geqslant TE + TF = 1.$$

(3) 设点 M 和 N 在正方形的同一条边 BC 上．设 AB,CD 的中点分别为 P,Q，连结 PQ，则曲线弧 $\overset{\frown}{MN}$ 必与 PQ 有公共点，否则不能平分正方形的面积．设 T 为一个公共点，过 T 作 $TE \perp BC$ 于 E，见图(c)．于是有

$$\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{MT} + \overset{\frown}{TN} \geqslant TE + TE = 2TE = 1.$$

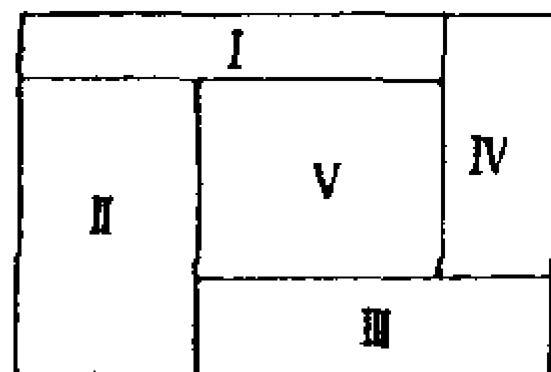
综上可知，曲线弧 $\overset{\frown}{MN}$ 的长度不小于 1.

12·43　一个矩形被分成了 5 个矩形，试证在所得的 5 个矩形中存在着两个矩形，其中之一可以完整地放入另外一个之中(包括边界).

（第 45 届莫斯科数学奥林匹克，1982 年）

［证］ 我们把一条平行于矩形的边的直线与矩形的交线称为通截线.

(1) 如果划分 5 个矩形的分界线中没有通截线,则大矩形的每条边都至少被分成两段且 5 个矩形的位置必然如右图所示(方向可能不同). 考察矩形 Ⅰ 和 Ⅲ. 如果二者中任何一个都不能完整地放入另一个之中,不妨设矩形 Ⅰ 的长较大,而矩形 Ⅲ 的宽较大,则矩形 Ⅱ 的长宽都大于矩形 Ⅳ,从而矩形 Ⅱ 可完整地装下矩形 Ⅳ,即这时结论成立.

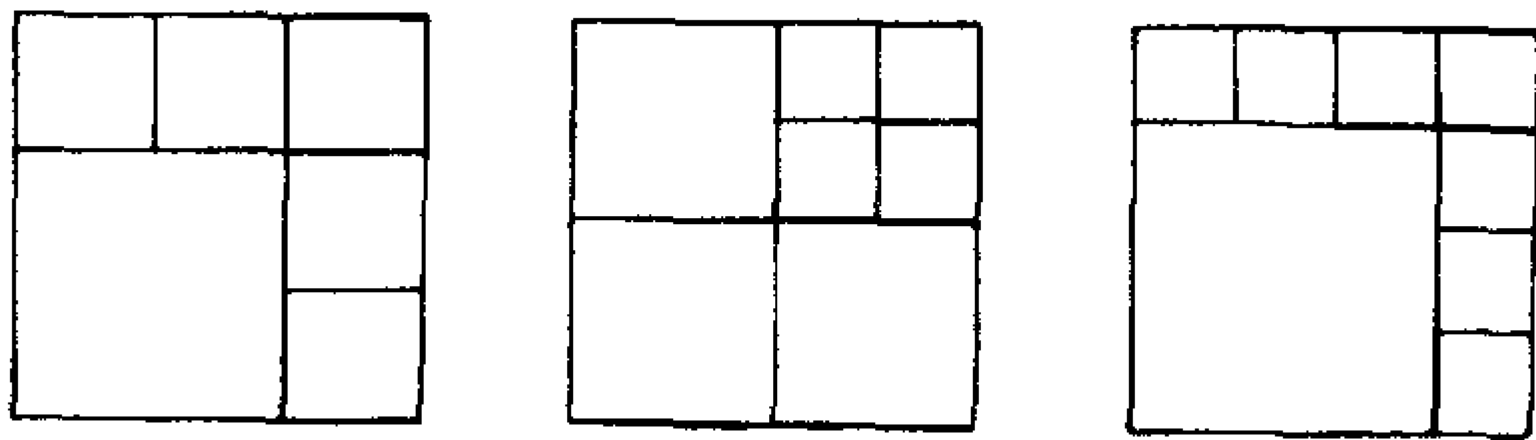


(2) 如果划分 5 个矩形的分界线中有通截线,则这条线把大矩形分成两个矩形,这两个矩形之一中至少含有原来 5 个矩形中的两个,至多 4 个. 但当把一个矩形划分为 3 个矩形或 4 个矩形时,分界线中必有通截线,从而可把问题化为把一个矩形划分为两个矩形时,必能把其中一个完整地放入另一个之中,但这是显然的.

12·44 试证任一正方形可以划分成任意个数多于 5 个的正方形,但不能恰好划分成 5 个正方形.

(波兰数学奥林匹克,1965 年)

［证］ 首先用数学归纳法证明,对于 $n \geqslant 6$,一个正方形可以划分为 n 个正方形. 对于 $n = 6,7,8$,划分法如下图所示:



设对 $6 \leqslant n < k(k \geqslant 9)$ 命题成立. 当 $n = k$ 时,$k - 3 \geqslant 6$. 于是由归纳假设知可将正方形划分为 $k - 3$ 个正方形. 再将其中之一分成 4 个正方形,便得到 k 个正方形,即当 $n = k$ 时命题成立,这就完成了归纳证明.

下面证明一个正方形不能划分成 5 个正方形. 若不然,设正方形 Q 的边长为 1,顶点为 A,B,C,D,它被划分成 5 个正方形 Q_1,Q_2,Q_3,Q_4,Q_5. 正方形 Q 的每个顶点都是某个 Q_i 的顶点,并且 Q 的不同顶点属于不同的小正方形. 设 A,B,C,D 分别属于正方形 Q_1,Q_2,Q_3,Q_4,

它们的边长依次为 a,b,c,d.

如果正方形 Q_5 的顶点都在正方形 Q 的内部,则有

$$a+b=b+c=c+d=d+a=1.$$

由此可得 $a=c,b=d$.于是有

$$(a+b)^2=S_Q=2a^2+2b^2+S_{Q_5},$$

$$S_{Q_5}=(a+b)^2-2a^2-2b^2=-(a-b)^2\leqslant 0,$$

矛盾.

如果正方形 Q_5 的某顶点位于正方形 Q 的某条边上,不妨设在边 AB 上,则必然是 Q_5 的一条边在 AB 上,另两个顶点在正方形 Q 的内部.于是有

$$b+c=c+d=d+a=1,\ a+b<1.$$

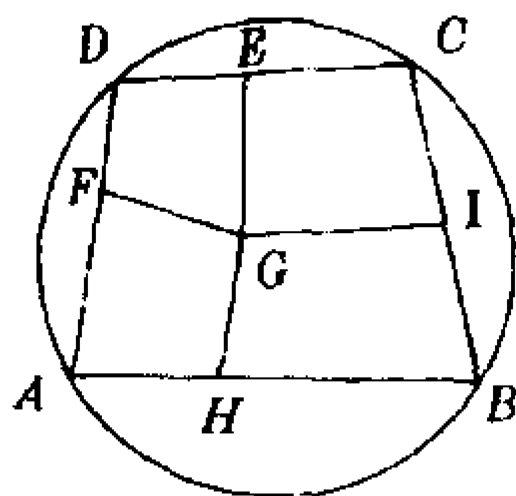
但由前组关系式可推出 $a+b=(a+d)+(b+c)-(c+d)=1$,此与 $a+b<1$ 矛盾.

综上可知,一个正方形不能划分成5个正方形.

12·45　设 $n\geqslant 4$,试证每个有外接圆的四边形,总可以划分成 n 个都有外接圆的多边形.

(第14届国际数学奥林匹克,1972年)

[证]　在边 DC,DA 上靠近点 D 的地方分别取点 E 和 F,并作 $\angle DEG=\angle A,\angle DFG=\angle C$,记两角的另两边交于点 G.因点 E 和 F 都在点 D 附近,故可保证点 G 在四边形 $ABCD$ 的内部.过点 G 分别作 $GH\parallel DA$ 交 AB 于 H,$GI\parallel DC$ 交 BC 于 I,则把四边形 $ABCD$ 分成了4个四边形(见上图).



因为 $\angle DEG+\angle DFG=\angle A+\angle C=180°$,故四边形 $DFGE$ 是圆内接四边形.又因 $GH\parallel FA$ 且 $\angle AFG=180°-\angle DFG=180°-\angle C=\angle A$,故四边形 $FAHG$ 是等腰梯形.同理,四边形 $GICE$ 也是等腰梯形.等腰梯形当然都有外接圆.此外,$\angle GHB+\angle GIB=\angle A+\angle C=180°$,故四边形 $HBIG$ 也有外接圆.这样,我们就把一个有外接圆的四边形分成了4个都有外接圆的四边形.

当 $n>4$ 时,我们再用 $n-4$ 条平行线,将其中的一个等腰梯形,例如梯形 $GICE$ 划分成 $n-3$ 个等腰梯形,便将原四边形 $ABCD$ 划分成了 n 个都有外接圆的四边形.

12·46　设 R 为一矩形,它是 n 个矩形 $R_1,R_2,\cdots,R_n$ 的并集且满足

(1) R_i 的边与 R 的边分别平行, $i=1,2,\cdots,n$;

(2) 诸 R_i 互不重叠;

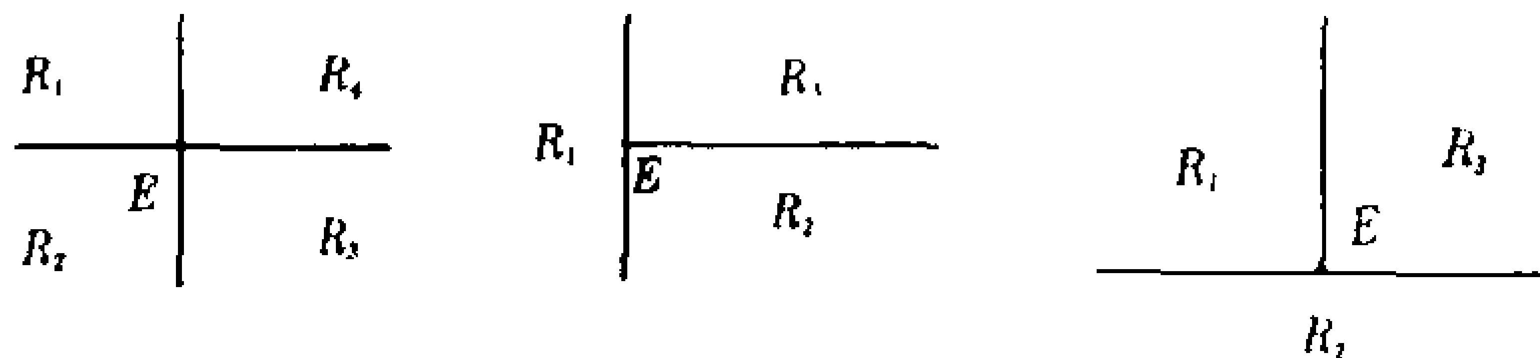
(3) 每个 R_i 都至少有 1 条边的长度为整数.求证 R 至少有 1 条边的长度为整数.

(第 30 届国际数学奥林匹克预选题,1989 年)

[证]　记矩形 R 为 $ABCD$,取以 A 为原点,AB 和 AD 分别为 x,y 轴的直角坐标系.显然,只须证明 B,C,D3 点中至少有 1 点为整点即可.

因为每个小矩形 R_i 的边与坐标轴平行且至少有 1 条边为整数,所以它的 4 个顶点中整点数目为 0,2 或 4,即整点个数总是偶数.因此,所有 R_i 的顶点中,整点的个数为偶数,其中若某个整点同时是 k 个矩形的顶点,则它恰被计数了 k 次.

矩形 R 内部顶点和小矩形的情形只能是下列 3 种情形之一:



可见,无论哪种情形,内部整点 E 被计数的次数必为偶数.因此,在 R 内部的所有整点被计数的次数之和为偶数.从而 A,B,C,D4 点被计数的次数之和也是偶数.因为整点 A 只被计数 1 次,所以 B,C,D3 点中至少还有 1 点是整点.

12·47　试证存在着这样的三角形,可以把它划分成 1989 个全等的三角形.

(原苏联教委推荐试题,1989 年)

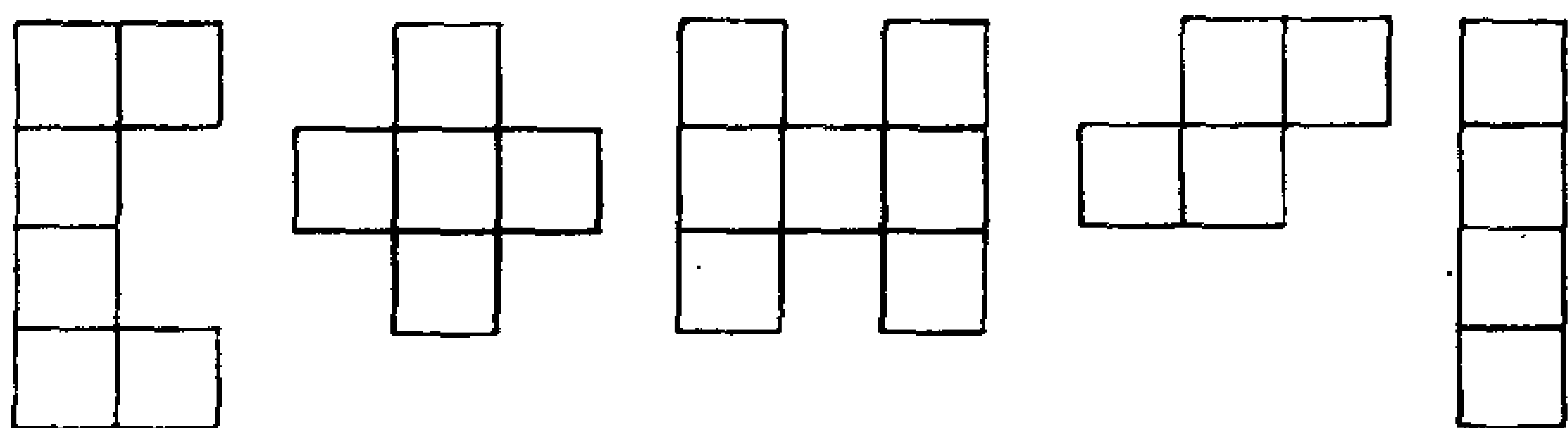
[证]　取两条直角边的边长分别为 30 和 33 的直角三角形 ABC,并作出斜边上的高 CH,于是 $\triangle ACH \backsim \triangle CBH$.

我们指出,对于任何一个三角形,都可以通过将每边 n 等分并过分点作另两边平行线的方法而将它分成 n^2 个全等的三角形且每个小三角形都与原来的大三角形相似.

按上述方法将 $\triangle ACH(AC=30)$ 分成 $30^2=900$ 个全等的三角形，将 $\triangle CBH$ 分成 $33^2=1089$ 个全等的三角形. 易见，两组三角形的斜边长为 1 且都与 $\triangle ABC$ 相似，故这 1989 个三角形都全等，即 $\triangle ABC$ 满足题中要求.

12·48　能否用如下 5 种形状的小块(图中每个正方形代表一个单位正方体)构造一个平行六面体，使得各边都是大于 1 的正整数而体积为 1990?

（第 31 届国际数学奥林匹克候选题，1990 年）



［解］　不能实现.

若不然，假设已用所给的 5 种元件砌成了满足题中要求的平行六面体. 因为 $1990=2\times5\times199$ 且 2,5,199 都是素数，所以这个平行六面体的棱长分别为 2,5,199. 因而有一个面的面积是 5×199. 记这个面为 S.

将 S 面上的小立方体的面像国际象棋棋盘那样相间地涂上黑白两色. 因为这个面的边长都是奇数，不妨设黑色方格比白色方格多 1 个. 由于每个形如“⌈”,“_⌈”,“|”的小块无论横放还是竖放，它在所涂面 S 上的暴露部分的黑格与白格都是同样多，而每个形如“十”,“├┤”的小块上，黑格与白格个数之差为 ±3(这两种小块都只能平放). 这样一来，S 面上黑格与白格个数之差必为 3 的倍数而不会是 1，矛盾.

12·49　试用三角形覆盖住整个平面，使得其中任何两个三角形的内部都不相交且二者也不是相似三角形.

（基辅数学奥林匹克，1982 年）

［解］　首先，用两族互相垂直的平行线将整个平面分成无限多个面积为 1 的正方形，并按顺时针方向将这些正方形编号，于是得到正方形序列

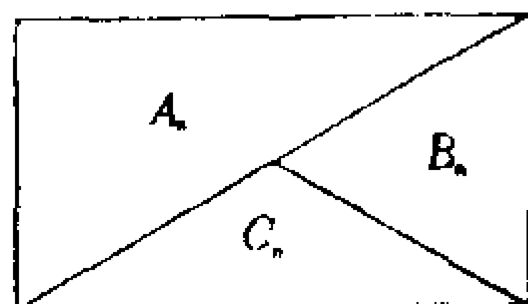
$$\{Q_k \mid k=1,2,\cdots\},$$

它们覆盖了平面且内部互不相交.

定义数列:

	7	8	9	10
	6	1	2	11
	5	4	3	12
			14	13

$a_1 = \dfrac{1}{3}, a_2 = \dfrac{2}{3}, \cdots, a_{2k-1} = \dfrac{k}{2k+1}, a_{2k} = \dfrac{k+1}{2k+1}, \cdots$. 由于 $0 < a_1 < a_3 < \cdots < a_{2k-1} < a_{2k+1} < \cdots < \dfrac{1}{2} < \cdots < a_{2k+2} < a_{2k} < \cdots < a_2 < 1$, 故知诸 a_k 互不相同. 又因 $a_{2k-1} + a_{2k} = 1$, 故可将正方形 Q_k 分解成 $1 \times a_{2k-1}$ 和 $1 \times a_{2k}$ 的两个矩形 R_{2k-1} 和 R_{2k}, 使二者内部不交且并集为 Q_k. 于是规格依次为 $1 \times a_k$ 的矩形序列覆盖了整个平面.



将矩形 R_n 用一条对角线分成两个三角形,再用其中之一的斜边上的中线将它分成两个等腰三角形,并将这 3 个三角形分别记为 A_n, B_n, C_n(见右图). 则三角形族 $\{A_n, B_n, C_n \mid n = 1,2,\cdots\}$ 覆盖整个平面且其中任何两个三角形的内部都不相交. 为证这族三角形满足题中要求,只须再证其中任何两个三角形都不相似.

(1) 由于 A_n 为直角三角形, B_n 为锐角等腰三角形, C_n 为钝角等腰三角形,分别将 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $\{C_n\}$ 视为 3 组,则异组的两个三角形不相似.

(2) $\{A_n\}$ 中的三角形的两条直角边长分别为 $1, a_n$, 当 $i \neq j$ 时, A_i 与 A_j 当然不相似.

(3) 类似地可证 $\{B_n\}$ 中的任何两个三角形不相似, $\{C_n\}$ 中的任何两个三角形也不相似.

综上可知,这族三角形满足题中要求.

12·50　在某凸 100 边形中,任何 3 条对角线都不相交于内部一点,求证可以用它的 50 条对角线把多边形划分成 1200 个部分.

(原苏联国家教委推荐试题,1989 年)

[证]　首先,考察 100 边形的任意一组对角线划分多边形的情形. 设想逐条引出它们. 如果新引出的对角线同 k 条已有的对角线相交,则所分成的部分区域的个数就增加 $k+1$. 这样一来,如果这组对角线的条数为 n, 互相之间交点总数为 m, 则所分成的部分区域的个数 $s = n + m + 1$.

下面来构造满足要求的一组对角线.在凸100边形上按逆时针顺序依次选取4个顶点 A,B,C,D,使得 A,B 两点间夹有凸100边形的11个顶点,C 和 D 之间夹有凸100边形的10个顶点.如果两个顶点间夹有凸100边形的49个顶点,则称这两个顶点为对偶顶点.显然,凸100边形共有50对对偶顶点.将除含 A,B 之外的48对对偶顶点之间各连一条对角线,则这48条对角线两两相交,共有 $C_{48}^2=1128$ 个交点.再连结对角线 AB 和 CD,则它们与前48条对角线的交点数分别为11和10.于是,由开头一段的论证即知这50条对角线将凸100边形划分成的部分区域总数为

$$50+1128+21+1=1200.$$

12·51　如果一个三角形的每条边长都大于1,就称它是"大"三角形.已知一个边长为5的正三角形 ABC,求证

(1) 从 $\triangle ABC$ 中能剪出100个大三角形.

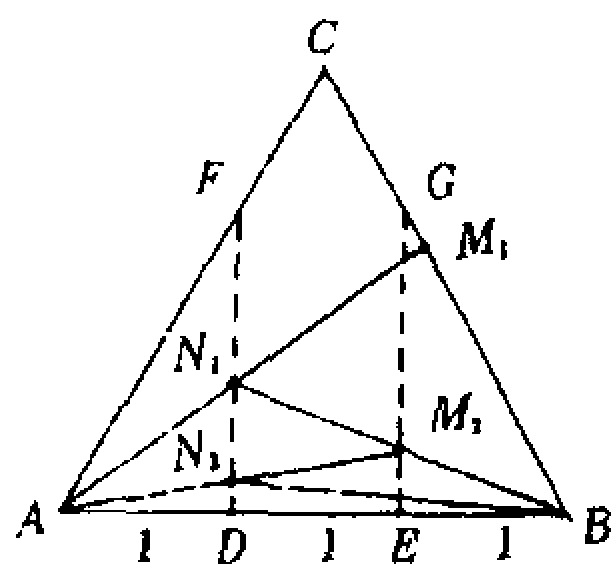
(2) 能够把 $\triangle ABC$ 分成不少于100个大三角形.

(3) 能够把 $\triangle ABC$ 剖分成不少于100个大三角形,即分成的任何两个三角形或者不相交,或者有一个公共顶点,或者有一条公共边.

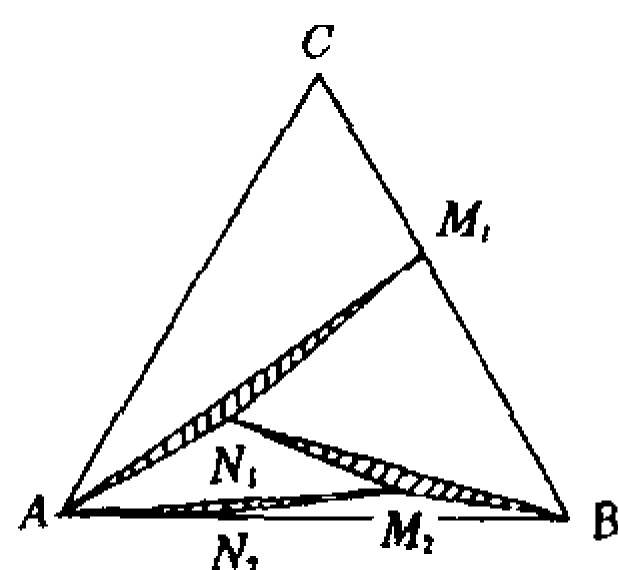
(4) 对于边长为3的正三角形证明(2)和(3).

(第10届全苏数学奥林匹克,1976年)

[证]　我们对边长为3的正三角形构造(3)中所要求的剖分:将 $\triangle ABC$ 的底边三等分并过分点 D,E 分别作底边垂线 DF 和 EG.在 BG 上靠近 G 处取点 M_1,则 $CM_1>1$.连结 AM_1 交 DF 于 N_1,连



(a)



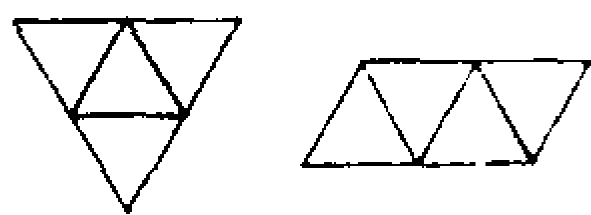
(b)

BN_1 交 EG 于 M_2,连 AM_2 交 DF 于 N_2,…,依次下去,直到三角形数达到100为止(见上图(a)).容易看出,这种划分满足(2)但不满足(3)的要求.

为满足(3)中的要求,将图(a)中的 $N_1,M_2,N_2,\cdots$,依次稍微下移,并构成很窄的三角形 $AM_kN_k,BN_kM_{k+1},k=1,2,\cdots$(上图(b)).

12·52　给定一个边长为10的正三角形,用平行于其边的直线将

它划分为若干个边长为 1 的正三角形. 现有 m 个边长为 2 的正三角形和 $25-m$ 个平行四边形(如图(a) 所示).



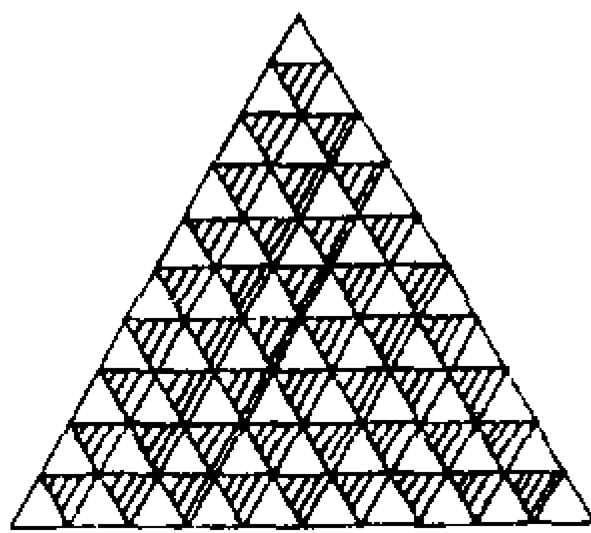
(a)

(1) 若 $m=10$,能否用它们拼成原三角形?

(2) 求用它们能拼出原三角形的所有 m.

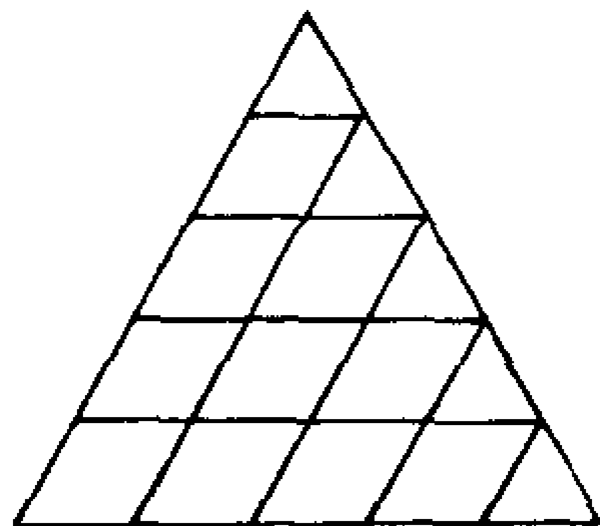
(第 26 届独联体数学奥林匹克,1992 年)

[解] 将大正三角形被划分成的 100 个小正三角形相间地涂上白色或黑色,即使得任何两个有公共边的三角形都涂有不同颜色(见图(b)). 于是共有 55 个白三角形和 45 个黑三角形. 给出的平行四边形块总是覆盖两白两黑 4 个三角形,而边长为 2 的正三角形块则可覆盖 1 白 3 黑或 1 黑 3 白 4 个三角形. 由于白三角形比黑三角形多 10 个,所以覆盖 3 白 1 黑的三角形块必须比覆盖 1 白 3 黑的三角形块多 5 个. 可见,$m \geqslant 5$ 且 m 为奇数. 因而当 $m=10$ 时,用它们不能拼成原三角形.



(b)

另一方面,将原三角形划分成 5 个边长为 2 的正三角形和 10 个边长为 2 的菱形块如图(c) 所示. 由于每个菱形块恰可分成两个边长为 2 的正三角形块,故知对满足不等式 $5 \leqslant m \leqslant 25$ 的所有奇数 m,都可用所给的 25 个图形拼成原三角形.



(c)

12·53 设 m 和 n 都是奇数. 将在坐标平面上的一个以 $(0,0)$, $(0,m)$, (n,m), $(n,0)$ 为顶点的矩形剖分成若干个三角形. 如果所得的三角形的一条边位于形如 $x=j$ 或 $y=k$ $(j,k \in N_0)$ 的直线上,则称这条边是"好边";不是好边的边称为"坏边". 设这一剖分满足下列条件:

(1) 每个三角形至少有 1 条好边且该边上的高等于 1;

(2) 三角形的一条边如果是坏边,则该边必须是两个三角形的公共边.

试证至少存在两个由剖分产生的三角形,它们各有两条好边.

(第 31 届国际数学奥林匹克预选题,1990 年)

[证] 如果一个三角形只有 1 条坏边,则称之为好三角形,否则称之为坏三角形. 设 V 是剖分所成的所有三角形的坏边中点的集合,E

是所有连结坏三角形的两条坏边中点的线段的集合，G 是以 V 为顶点集，以 E 为边集的图．不难看出，G 的每一条边都平行于某一坐标轴，且该边到坐标轴的距离是半整数，即形如 $k+\frac{1}{2}$ 的数，这里 k 是整数．对于 $P\in V$，用 $d(P)$ 表示点 P 的度，即以 P 为端点的边的条数．显然，对任何 $P\in V$，都有 $d(P)\leqslant 2$.

(1) 存在 $P\in V$，使得 $d(P)=0$．由于点 P 位于两个三角形的公共坏边上，故 $d(P)=0$ 意味着这两个三角形都只有 1 条坏边，即两个三角形都是好三角形．

(2) 存在 $Q\in V$，使得 $d(Q)=1$．因为每点度数都不超过 2，故这时在图 G 中存在以 Q 为端点的一条链．设 R 为该链的另一个端点，则 R 和 Q 各在一个好三角形的坏边上，即命题结论也成立．

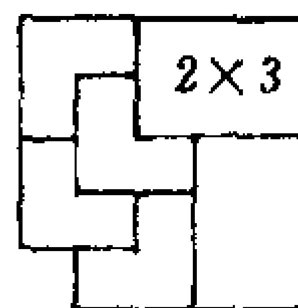
(3) 对每点 $P\in V$，均有 $d(P)=2$．这表明图 G 是每点度数均为 2 的偶图，所以它可分解为若干个互不相交的圈．将所给的矩形划分成 $m\times n$ 个顶点为整点，边长为 1 的小正方形，并用黑白两色相间地为这些方格染色，就像国际象棋棋盘那样．易见，每个小正方形的中心恰在 G 所分解成的一个圈上．每一个圈交替地通过黑色与白色方格，所以它所经过的方格数必为偶数．从而小方格的总数必为偶数，此与方格数 mn 为奇数矛盾．这表明图 G 必为前两种情形之一，故知命题成立．

12·54　给定 $(3n+1)\times(3n+1)$ 的方格纸（$n\in N$），试证任意剪去一个方格后，余下的纸必可全部剪成形如 ⊞ 的纸片．

（中国国家集训队选拔试题，1992 年）

［证］　用数学归纳法来证明．首先分别考察 $n=1,2,3$ 的情形．为便于叙述，将题中要求剪成的纸片的形状称为 L 状．

$n=1$ 时，可将 4×4 的方格纸分成 4 个 2×2 的正方形．不论所去掉的方格位于哪个正方形中，该正方形中所余下的 3 个方格都恰好为一个 L 状纸片．其余的 3 个 2×2 的正方形构成一个大 L 状纸片，容易将它剪开为 4 个 L 状纸片，故知 $n=1$ 时结论成立．



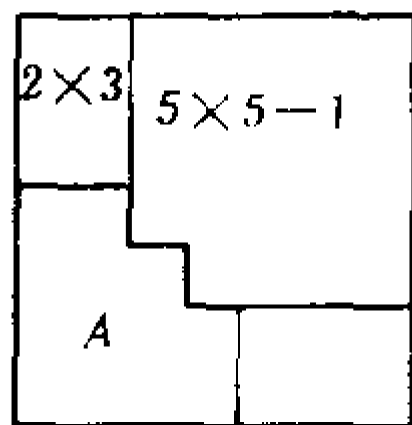
(a)

$n=2$ 时，需对 7×7 的方格纸分情况讨论．首先引述三个事实：

(1) 2×3 的方格纸可以剪成两个 L 状纸片；

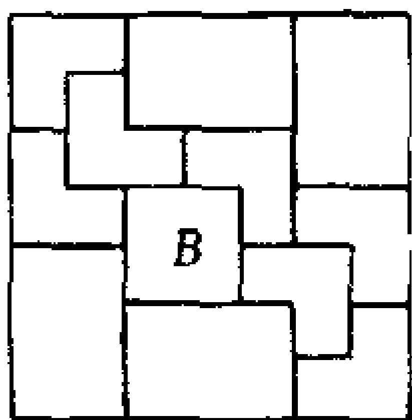
(2) 将5×5的方格纸去掉角上一个方格后，余下部分可剪成8块L状纸片，见右图(a)；

(3) 在4×4的方格纸中去掉角上的一个L状纸片后所得的图形中，任意去掉一个方格后均可分成4块L状纸片. 这由$n=1$的结果即可看出.



(b)

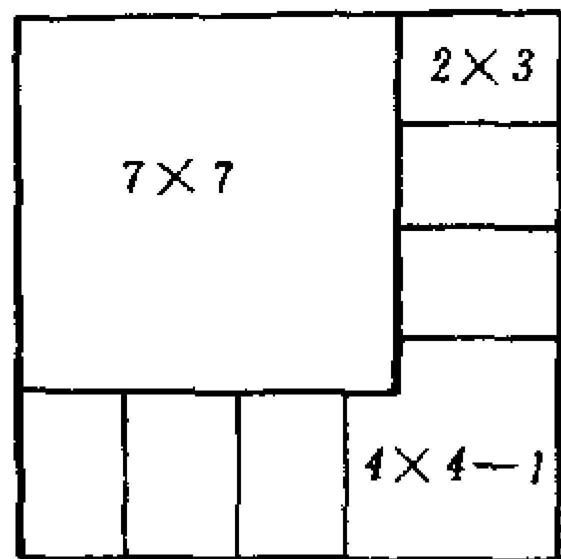
将7×7方格纸划分成4块如右图(b)所示，由上述三个事实便知，当去掉的一个方格在A中时，可以将余下部分剪成L状纸片. 因此，只须再证当剪去的一个方格为中心方格或与中心方格有公共边的方格时，结论也成立. 对于这两种情形，可按下图(c)所示的方式将7×7的方格纸剪开. 显然，事先去掉的方格落在正方形B中，故知这时命题的结论也成立.



(c)

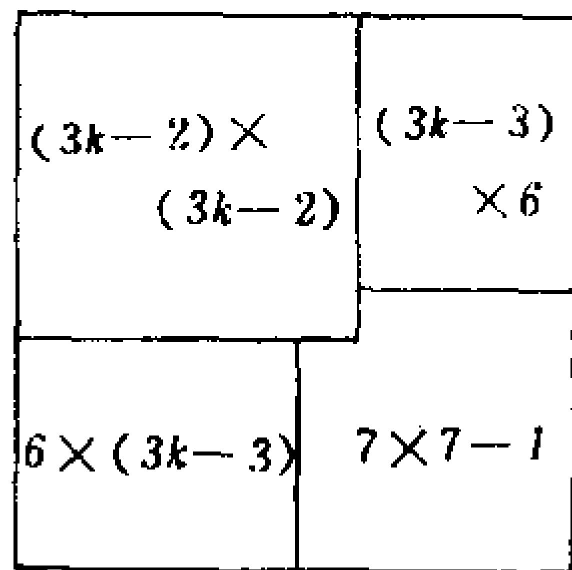
至此，我们证明了$n=2$时结论成立.

$n=3$时，将10×10的方格纸按图(d)的方式分成8块，使去掉的一个方格落在7×7的正方形中. 则由$n=1,2$的结论知$n=3$时结论也成立.



(d)

假设对于$n\leqslant k$结论都成立. 当$n=k+1$时，可先自$(3k+4)\times(3k+4)$的方格纸中分出一个位于角上的$(3k-2)\times(3k-2)$的正方形，使去掉的一个方格位于其中；再将其余部分划分成$6(k-1)$个2×3的矩形和一个缺一个角格的7×7正方形. 参看图(e). 于是由归纳假设及已证结果便知，当$n=k+1$时，结论也成立，这就完成了归纳证明.



(e)

12·55　把沿着对角线打了洞的单位正方体看成“念珠”，并将$p\times q\times r(p,q,r\in N)$个念珠用软绳穿成串，使它在保持相邻的两个正方体至少有1个顶点相接触的条件下，可在空间中自由移动. 设A是软绳从第1个正方体穿入的起始顶点，B是软绳从最后一个正方体穿出的终端顶点.

(1) 求所有p,q,r的值，使念珠串可砌成边长分别为p,q,r的长方体；

(2) 在要求上述长方体中 $A = B$ 时,讨论同样的问题.

(第 31 届国际数学奥林匹克预选题,1990 年)

[解] 我们把边长分别为 p,q,r 的长方体称为 $p\times q\times r$ 的长方体.

当 $q = r = 1$ 时,显然对任何正整数 p,都可用 p 个正方体的串砌成 $p\times 1\times 1$ 的长方体,而且当 p 为奇数时,A 和 B 是长方体的一对角线的两个端点;当 p 为偶数时,A 和 B 是长方体的一条棱的两个端点.

当 $r = 1$ 且 p 为奇数时,把 $p\times 1\times 1$ 长方体作为一个整体来代替单位正方体.于是对任何正整数 q,可用 q 个 $p\times 1\times 1$ 长方体砌成一个 $p\times q\times 1$ 长方体.显然,当 q 为奇数时,A 和 B 是这个长方体的一条对角线的两个端点;当 q 为偶数时,A 和 B 是这个长方体的一条棱的两个端点.

当 p 和 q 都是奇数时,把 $p\times q\times 1$ 长方体作为一个整体来看.于是对任何 $r\in N$,都可用 r 个 $p\times q\times 1$ 长方体砌成一个 $p\times q\times r$ 长方体,且当 r 为奇数时,A 和 B 是这个长方体的一条对角线的两个端点,当 r 为偶数时,A 和 B 是这个长方体的一条棱的两个端点.此外,考察 $p\times q\times 1$ 的底面一层长方体,其中有奇数 $p\times q$ 个单位正方体.因此,对于以任意方式串好的珠串,这一层中的任何两个正方体的穿线方向都不同.从而这一层只能首先由下向上穿出,到最后一个正方体时也是由下向上穿出,所以起点 A 和终点 B 不能重合.

考察 p,q,r 中只有 1 个奇数的情形.不妨设 p 为奇数.把偶数 q 表成两个奇数之和:$q = q_1 + q_2$.这时,可先由串上的前 $p\times q_1\times r$ 个正方体砌成一个 $p\times q_1\times r$ 长方体,并把软绳从此长方体中穿出的顶点记为 C.由前面论证可知,A 和 C 是 $p\times q_1\times r$ 长方体的一条棱的两个端点.然后,再从 C 出发,用后面的 $p\times q_2\times r$ 个正方体砌成一个 $p\times q_2\times r$ 长方体,C 和 B 是它的一条棱的两个端点.最后,把这两个长方体拼在一起,使终点 B 与 A 重合,就得到一个 $p\times q\times r$ 长方体.显然,A 与 B 将重合于 $p\times q\times r$ 长方体的一条棱上且不在棱的端点.

如果 p,q,r 都是偶数,则可把偶数 p 表成两个奇数之和:$p = p_1 + p_2$.先由前 $p_1\times q\times r$ 个正方体砌成一个 $p_1\times q\times r$ 长方体,并把软绳从其中穿出的点记为 C.由前段讨论知,点 A 与 C 重合于长方体的一条棱内.再把后 $p_2\times q\times r$ 个正方体砌成 $p_2\times q\times r$ 长方体,使点 B 与 C

重合.然后将这两个长方体拼在一起,就得到一个 $p\times q\times r$ 长方体,点 $A=C=B$ 重合于长方体的某一侧面的内部.

综上所述,对于任何正整数 p,q,r,共有 $p\times q\times r$ 个正方体的串都可以砌成 $p\times q\times r$ 长方体.当且仅当 p,q,r 这3个正整数中至少有2个偶数时,念珠串可以砌成使起点 A 和终点 B 重合的 $p\times q\times r$ 长方体.

12·56 试证在任何一个九边形中,必存在两条对角线,它们之间的夹角小于 $9°$.

(基辅数学奥林匹克,1981 年)

[证] 因为从九边形的每个顶点都引出 6 条对角线,故九边形中共有27条对角线.过平面上的任意一点 O 作与这些对角线分别平行的27条直线,它们将以点 O 为顶点的周角分成54个角.显然,其中最小的角不大于 $\frac{360°}{54}<7°$.这样,与这个角两边分别平行的两条对角线的夹角就小于 $7°$.

12·57 已知 5 个圆周中的任意 4 个都经过同一点,求证存在一点,使 5 个圆周都经过这点.

(第 3 届全俄数学奥林匹克,1963 年)

[证] 5 个圆共可组成 5 个不同的四圆组,按已知,每组的 4 个圆都有一个公共点,共有5个这样的公共点.若这5点互不相同,则因每个圆恰出现在 4 个四圆组中,故每个圆都通过上述 5 点中的 4 点,从而两个圆总有3个公共点,此不可能.由此可知,5个公共点中至少有两点重合,而这点就是 5 个圆都经过的公共点.

12·58 在边长为 1 的正方形内有一条不自交的折线,它的长度不小于 200.试证存在一条与正方形的边平行的直线,它与折线至少有101 个交点.

(第 44 届莫斯科数学奥林匹克,1981 年)

[证] 将折线的每条边都分别投影到正方形的一组邻边上.若结论不成立,则每条与正方形的边平行的直线与折线的交点都不多于100 个,即这些投影对正方形的这组邻边的覆盖不多于 100 次.又因折线是在正方形内,故对这组邻边的公共顶点附近部分不能盖住,故知折线的长度小于 200,矛盾.

12·59　求证任何凸多面体中都有某两个面的边数相等.

(第36届莫斯科数学奥林匹克,1973年)

[证]　设凸多面体中边数最多的一面有 n 条边,于是它有 n 个相邻的面.但这 n 个不同的面的边数只能从 $\{3,4,\cdots,n\}$ 这 $n-2$ 个数中取值,故由抽屉原理知其中必有两面边数相同.

12·60　现有一张无穷大的方格纸,其中每个方格面积为1.规定只允许沿网格线剪开.试证对任意整数 $m>12$,总可以剪出一个面积大于 m 的矩形,但不能再从这个矩形中剪出一个面积为 m 的矩形.

(第19届全苏数学奥林匹克,1985年)

[证]　如果存在一个矩形的边长 $x,y(x\leqslant y)$ 满足不等式 $xy>m$ 和 $x(y-1)<m$,则这个矩形就合乎要求.下面我们就来分类确定这个矩形.

(1) 当 $m=k^2$ 时,$k\geqslant 4$,上述不等式组有解 $x=k-1,y=k+2$;

(2) 当 $k^2<m<k(k+1),k\geqslant 4$ 时,$x=k,y=k+1$;

(3) 当 $m=k(k+1)$ 时,$x=k-1,y=k+3$;

(4) 当 $k(k+1)<m<(k+1)^2,k\geqslant 3$ 时,$x=y=k+1$.

12·61　试证任何一个四面体都至少有1个顶点,这个顶点的所有面角都是锐角.

(基辅数学奥林匹克,1970年)

[证]　若不然,则每个顶点都至少有1个面角不小于90°.因为三面角的任何两个面角之和都大于第3个面角,故知四面体中每个顶点处的3个面角之和大于180°.从而四面体上的所有面角之和大于720°.

另一方面,四面体上每面的3个面角之和为180°.从而四面体上所有面角之和应该等于720°,矛盾.这表明四面体中至少有1个顶点处的3个面角都是锐角.

12·62　试证在任何 $2n$ 边形中,都存在一条对角线,它不平行于多边形的任何一条边.

(第37届莫斯科数学奥林匹克,1974年)

[证]　若不然,则每条对角线都至少平行于 $2n$ 边形的1条边.考察由1条对角线和与它平行的1条边所组成的线段对.

一方面,由反证假设知每条对角线都至少属于1个线段对.而在

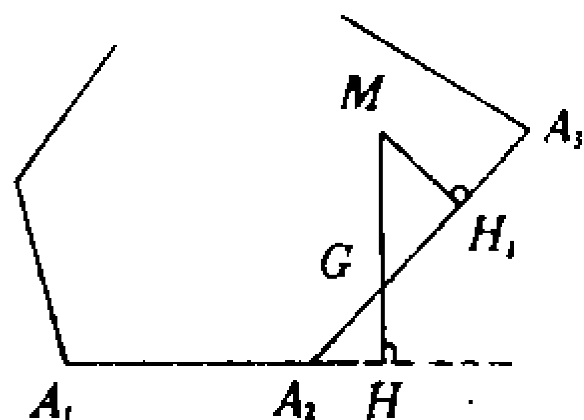
$2n$ 边形中共有 C_{2n}^2-2n 条对角线，故至少有 $C_{2n}^2-2n=2n\left(n-\frac{3}{2}\right)$个线段对.

另一方面，对于每条边，至多有 $n-2$ 条对角线与它平行，即至多有 $n-2$ 个线段对含有此边. 从而至多有 $2n(n-2)$ 个线段对，矛盾.

12·63　设点 M 为凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中的任意一点，过 M 向多边形各边所在的直线引垂线，求证这些垂线的垂足中至少有 1 个点是在多边形的边上而不是在边的延长线上.

（基辅数学奥林匹克，1952 年）

［证］　设边 A_1A_2 是多边形的各边中与点 M 距离最近的一条. 可以证明，过点 M 引直线 A_1A_2 的垂线的垂足在边 A_1A_2 上. 若不然，设垂足 H 在边 A_1A_2 的延长线上. 因多边形是凸的，点 H 当然在形外. 垂线 MH 既然不与 A_1A_2 相交，则必与另一条边相交，不妨设 MH 交边 A_2A_3 于点 G. 过点 M 作 $MH_1\perp A_2A_3$，于是有



$MH>MG>MH_1$，此与 MH 的最小性矛盾.

12·64　试证任何不自交的五边形都位于它的某条边的同一侧.

（第 23 届莫斯科数学奥林匹克，1960 年）

［证］　五边形的凸包是凸五边形，凸四边形或者是三角形，凸包的顶点中至少有 3 点是原五边形的顶点. 五边形共有 5 个顶点，故 3 个顶点中必有两点是相邻顶点. 连结这两点的边即为所求.

12·65　设 n 条长度均为 1 的线段相交于同一点，以这些线段的端点为顶点可得一个 $2n$ 边形. 试证这个 $2n$ 边形中至少有一条边的长度不小于直径为 1 的圆的内接正 $2n$ 边形的边长.

（第 22 届莫斯科数学奥林匹克，1959 年）

［证］　设相邻两条线段夹角中最大的是 α，则 $\alpha\geqslant\frac{\pi}{n}$. 设构成角 α 两边的单位长线段是 l_1 和 l_2，则 l_1 与 l_2 所交成的一组对顶角 α 中，总有一个角的两边之和不小于 1，记其两边为 a 和 b，$a+b\geqslant 1$. 从而，作为以 a，b 为两边，以 α 为顶角的三角形的第 3 边的 $2n$ 边形的一边的长度的平方为

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \geqslant 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cos\alpha$$

$$\geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha \geqslant \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right),$$

而上式右端恰为直径为 1 的圆的内接正 $2n$ 边形的边长的平方.

12·66　在平面上给定一条直线,一个半径为 n 厘米的圆以及在圆内的 $4n$ 条长为 1 厘米的线段,试证在给定的圆内可以作一条与给定直线平行或垂直的弦,使它至少和两条给定的线段相交.

(匈牙利数学奥林匹克,1968 年)

[证]　以给定的直线作为横轴,再作一条与它垂直的直线为纵轴,并将给定的 $4n$ 条线段分别投影到横轴和纵轴上.记在横轴和纵轴上所得的投影线段长分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_{4n}$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_{4n}$.因为

$$a_i + b_i \geqslant 1, \quad i = 1,2,\cdots,4n,$$

所以有 $\sum\limits_{i=1}^{4n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{4n} b_i \geqslant 4n$.

另一方面,给定圆在两轴上的投影长均为 $2n$.因为 $4n$ 条给定线段都位于圆内,故每条线段的投影都在圆的相应投影内部.因而,横轴上 $4n$ 条投影线段之并的长度小于 $2n$,纵横上投影的情形也是如此.由此可知,必有某轴上的两条投影线段有重叠部分.过重叠部分上任一点作所在轴的垂线与圆相交截得的弦即为所求.

12·67　试证在四面体 $ABCD$ 中总有一个顶点,以从它引出的三条棱作为三边可以构成一个三角形.

(第 10 届国际数学奥林匹克,1968 年)

[证 1]　考察从每个顶点所发出的三条棱的长度之和,不妨设点 A 的棱长之和最大,于是以 AB, AC, AD 为三边,可以构成一个三角形.

若不然,必有某两条棱长之和不大于第三条棱长,不妨设 $AC + AD \leqslant AB$.因 $AB + AC + AD$ 最大,故有 $BC + BD + BA \leqslant AB + AC + AD$, $BC + BD \leqslant AC + AD$.从而 $BC + BD + AC + AD \leqslant 2AB$.另一方面,因为 $AD + BD > AB$, $AC + BC > AB$,又有 $AD + BD + AC + BC > 2AB$,矛盾.

[证 2]　设 AB 为四面体的最长棱之一,则 A, B 两点中至少有一点发出的三条棱可以构成一个三角形.

若不然，则必有 $AC+AD\leqslant AB$，$BC+BD\leqslant AB$. 从而有 $2AB\geqslant AC+AD+BC+BD=(AC+BC)+(AD+BD)>2AB$，矛盾.

12·68　在平面上分布着一些已知直线和点. 试证平面上存在点 A，它不重合于任何已知点，并且它到任何已知点的距离都大于它到任何已知直线的距离.

（第 41 届莫斯科数学奥林匹克，1978 年）

[证]　在每条直线上各取 1 点，并记这些点和所有已知点的集合为 S. 作一个半径为 R 的圆，将 S 的所有点都围在圆内. 过圆心作一条不垂直于任何一条已知直线的直线 l，并记 l 与所有已知直线的最大夹角为 φ，于是 $0\leqslant\varphi<90^\circ$，$\sin\varphi<1$. 因而可取足够大的自然数 m，使得 $\sin\varphi<\frac{m-1}{m+1}$. 在直线 l 上取点 A，使它与圆心的距离为 mR. 于是点 A 与任何已知点的距离都大于 $(m-1)R$；点 A 与任何一条已知直线的距离都小于 $(m+1)R\sin\varphi$. 由数 m 的取法即知点 A 满足题中的要求.

12·69　设点 O 为正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内的任意一点，求证必存在两个顶点 A_i 和 A_j，$1\leqslant i<j\leqslant n$，使得

$$\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)\leqslant\angle A_iOA_j\leqslant\pi.$$

（基辅数学奥林匹克，1970 年）

[证]　设 A_1 是正多边形的顶点中与点 O 最近的一点，即有 $OA_1\leqslant OA_i$，$i=2,3,\cdots,n$. 连结对角线 A_1A_i，$i=3,4,\cdots,n-1$，于是将多边形剖分成 $n-2$ 个三角形. 因而点 O 必落在某一个 $\triangle A_1A_kA_{k+1}$ 的内部或边界上. 若点 O 位于 $\triangle A_1A_kA_{k+1}$ 的边界上，不妨设位于 A_1A_k 上，则 $\angle A_1OA_k=\pi$ 满足不等式. 若点 O 落在 $\triangle A_1A_kA_{k+1}$ 的内部，则因为 $OA_1\leqslant OA_k$，$OA_1\leqslant OA_{k+1}$，所以有 $\angle OA_kA_1\leqslant\angle OA_1A_k$，$\angle OA_{k+1}A_1\leqslant\angle OA_1A_{k+1}$. 又因 $\angle OA_1A_k+\angle OA_1A_{k+1}=\angle A_kA_1A_{k+1}=\frac{\pi}{n}$，故有 $\angle A_1OA_k+\angle A_1OA_{k+1}=2\pi-(\angle OA_1A_k+\angle OA_1A_{k+1})-(\angle OA_kA_1+\angle OA_{k+1}A_1)>2\pi-\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n}=2\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)$. 这样一来，$\angle A_1OA_k$ 和 $\angle A_1OA_{k+1}$ 中至少有 1 个角不小于 $\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)$，而这个角小于 π 是显然的，这就完成了证明.

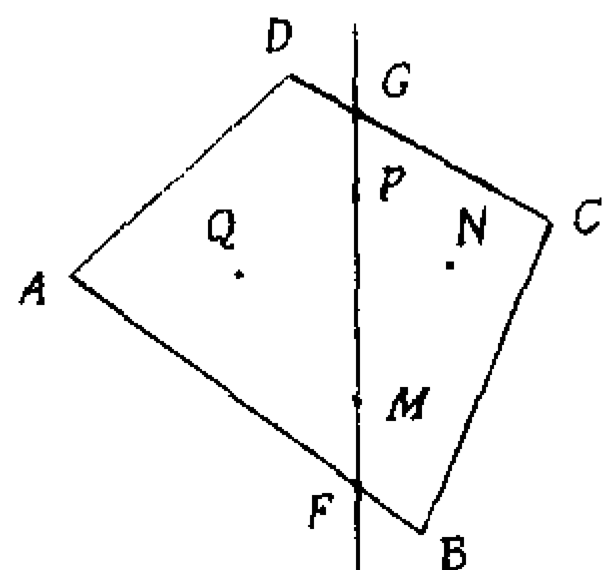
12·70　在凸四边形的内部标定 4 点，求证可在凸四边形的周界

上找到一点，使它到四边形的各顶点的距离之和大于它到4个标定点的距离之和.

（圣彼得堡数学选拔考试，1993年）

［证］ 4个标定点的凸包可能是四边形，三角形，也可能是一条线段. 但从下面的证明过程可知，只须就凸包是四边形的情形来证明.

设凸四边形 $ABCD$ 内的4个标定点 M,N,P,Q 的凸包是凸四边形. 对于四边形 $ABCD$ 周界上的任意一点 E，用 $f(E)$ 表示点 E 到4个顶点 A,B,C,D 的距离之和，即 $f(E)=EA+EB+EC+ED$；用 $g(E)$ 表示点 E 到4个标定点的距离之和，即 $g(E)=EM+EN+EP+EQ$. 显然，只须证明存在点 E，使得 $f(E)>g(E)$.



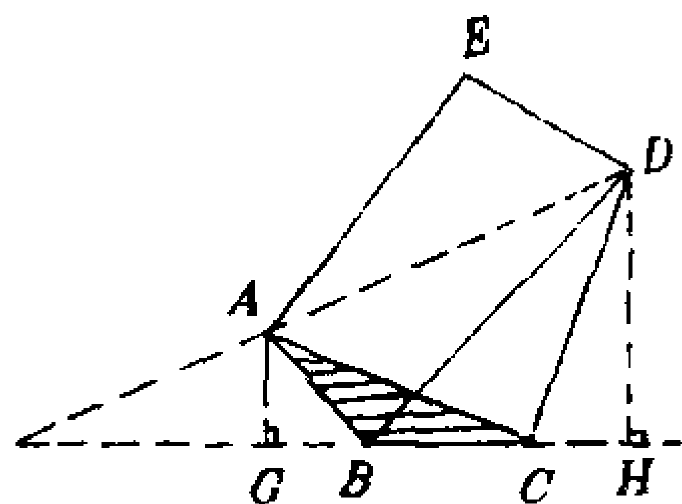
作直线 MP，交四边形 $ABCD$ 的周界于点 F 和 G（见右图）. 于是有

$$\begin{aligned}&f(F)+f(G)\\=&FA+FB+FC+FD+GA+GB+GC+GD\\=&(FD+GA)+(FC+GB)+FA+FB+GC+GD\\>&AD+FG+BC+FG+FA+FB+GC+GD\\=&(FA+AD+GD)+(FB+BC+GC)+2FG\\>&GQ+FQ+GN+FN+2FG\\=&g(F)+g(G).\end{aligned}$$

这表明不等式 $f(F)>g(F)$ 和 $f(G)>g(G)$ 至少有1个成立. 当直线 MP 与四边形 $ABCD$ 的周界的两个交点位于一组邻边上时，可完全类似地证得同样的结论.

12·71 已知在凸五边形 $ABCDE$ 的边和对角线中，没有互相平行的线段. 延长边 AB 和对角线 CE，使之相交于某点. 然后在边 AB 上标上一个箭头，使之指向交点的方向. 按此办法为五边形的其余各边也都标上箭头. 求证必有两个箭头指向五边形的同一个顶点.

（原苏联教委推荐试题，1990年）



［证］ 在由五边形的每3个相邻顶点所构成的5个三角形中，取出面积最小的一个，设为 $\triangle ABC$（见图）. 我们来证明，边 AB 和 BC 上的

箭头都指向点B.过点A和D分别作直线BC的垂线AG和DH.因为$S_{\triangle ABC} \leqslant S_{\triangle DBC}$,所以有$AG \leqslant DH$.又因$AD$与$BC$不平行,故有$AG < DH$.从而直线$AD$与$BC$的交点位于点$B$的一方,因此边$BC$上的箭头指向点$B$.同理,边$AB$上的箭头也指向点$B$.

12·72　过空间中一点O作1979条直线$l_1, l_2, \cdots, l_{1979}$,其中任何两条都不互相垂直.在直线$l_1$上取异于点$O$的任意一点$A_1$.试证可以在直线$l_i$上选取点$A_i$, $i = 2, 3, \cdots, 1979$,使得

$$A_{i-1}A_{i+1} \perp l_i, \quad i = 1, 2, \cdots, 1979,$$

其中$A_0 = A_{1979}$, $A_{1980} = A_1$.

(第13届全苏数学奥林匹克,1979年)

[证]　设$\vec{e_i}$是直线l_i上的单位向量,并令$\vec{e}_i \vec{e}_{i+1} = c_i$, $i = 1, 2, \cdots, 1978$, $\vec{e}_{1979}\vec{e}_1 = c_{1979}$,此处$c_i$是向量$\vec{e}_i$与$\vec{e}_{i+1}$的夹角的余弦.记$\overrightarrow{OA}_i = a_i \vec{e}_i$.直线$A_{i-1}A_{i+1} \perp l_i$等价于

$$(a_{i-1}\vec{e}_{i-1} - a_{i+1}\vec{e}_{i+1})\vec{e_i} = 0, \quad a_{i-1}c_{i-1} = a_{i+1}c_i \qquad ⊛$$

由于a_1和c_i都是已知的且$c_i \neq 0$,故可由⊛式依次解出$a_3, a_5, \cdots, a_{1979}, a_2, a_4, \cdots, a_{1978}$.它们满足⊛中的前1978个关系式:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{c_1}{c_2}, \frac{a_5}{a_3} = \frac{c_3}{c_4}, \cdots, \frac{a_{1979}}{a_{1977}} = \frac{c_{1977}}{c_{1978}}, \frac{a_2}{a_{1979}} = \frac{c_{1979}}{c_1},$$

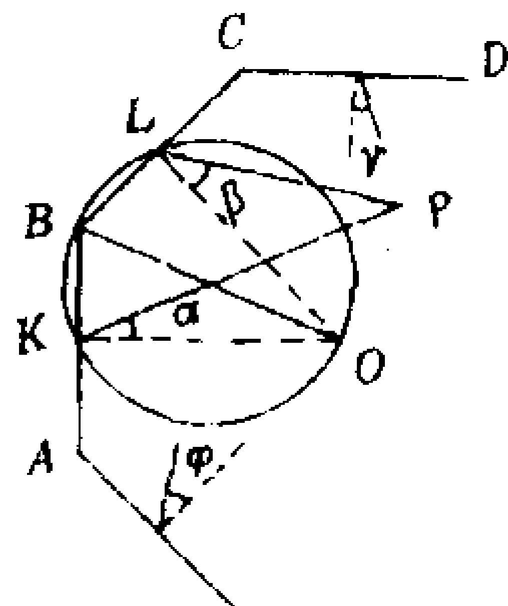
$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{c_2}{c_3}, \frac{a_6}{a_4} = \frac{c_4}{c_5}, \cdots, \frac{a_{1978}}{a_{1976}} = \frac{c_{1976}}{c_{1977}}.$$

把这1978个等式连乘即得⊛式中最后一个关系式.

12·73　面饼的形状如同一个内接于半径为1的圆的正n边形,过每边的中点都在饼上切出一个长度为1的直线切口,求证这样切了之后,总能从面饼上切下一块来.

(第27届莫斯科数学奥林匹克,1964年)

[证]　设正n边形的顶点依次是$A, B, C, D, \cdots$,中心是点O, K和L分别是边AB和BC的中点,则O, K, B, L四点共圆,记此圆为S.连结OK, OL.若过点K的切口在边心距OK的右侧而过点L的切口在OL的左侧,则二者必相交,从而从饼上切下一块.由此可见,只须再考察n个切口同在各自边心距右侧



(或左侧)的情形.

如果过 K,L 的两条切口平行,则 $\alpha<\beta$(参看上图).如果两条切口所在的两条直线交于点 P 且点 P 在圆 S 内或圆上,则 $KP\leqslant 1,LP\leqslant 1$ 且不能同时为 1,从而点 P 即为两条切口的交点,故知必从饼上切下一块来.以下设交点 P 在圆 S 之外.这时,$\angle KPL<\angle KOL$,因而 $\alpha<\beta$.

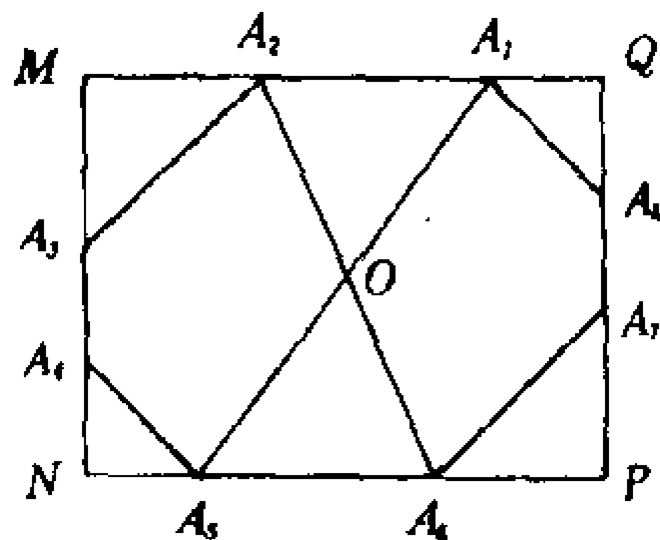
这样一来.如果任何两条相邻切口都或者平行或者所在直线交于相应的圆外,则当绕多边形一圈时得到 $\alpha<\beta<\gamma<\cdots<\varphi<\alpha$,此不可能.故必有两条相邻切口交于相应的圆内或圆上,导致必然从饼上切下一块来.

12· 74　已知一个八边形的所有内角都相等,且边长都是有理数,求证这个八边形必有对称中心.

(波兰数学奥林匹克,1969 年)

[证]　由于多边形的外角和为 360°,而八边形的所有内角都相等,故知它的每个外角都等于 45°.

设八边形为 $A_1A_2\cdots A_8$.分别延长边 A_1A_2 和 A_4A_3 交于点 M,则 $\angle M=90°$.同理,分别延长边 A_3A_4 和 A_6A_5 交于点 N,延长边 A_5A_6 和 A_8A_7 交于点 P,延长边 A_7A_8 和 A_2A_1 交于点 Q,得到矩形 $MNPQ$,且边 A_1A_2 和 A_5A_6 位于此矩形的一组对边上(见上图).



依次记八边形的 8 条边长为 $a_1,a_2,\cdots,a_8$.于是有

$$MQ=a_2\cos45°+a_1+a_8\cos45°,$$
$$NP=a_4\cos45°+a_5+a_6\cos45°.$$

从而得到

$$a_1-a_5=(a_4+a_6-a_2-a_8)\cos45°.$$

因为 $a_1,a_2,\cdots,a_8$ 都是有理数,故上式左端为有理数,从而右端也是有理数.因为 $\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为无理数,故括号中的数必为零.从而有 $a_1=a_5$.同理可证 $a_2=a_6,a_3=a_7,a_4=a_8$.这样一来,八边形的对角线 A_2A_6,A_3A_7,A_4A_8 都过 A_1A_5 的中点 O 且被点 O 平分,即点 O 为八边形的对称中心.

12· 75　设凸多面体 P_1 有 9 个顶点 $A_1,A_2,\cdots,A_9$,P_i 是通过平移

$A_1 \to A_i$ 所得到的多面体，$i=2,3,\cdots,9$. 求证多面体 $P_1, P_2, \cdots, P_9$ 中总有两个多面体，它们至少有一个公共内点.

（第 13 届国际数学奥林匹克，1971 年）

［证］ 对多面体 P_1 进行以 A_1 为中心，2 为位似比的同向位似变换，并记所得的多面体为 P. 显然有 $P_1 \subset P$. 下面往证 $P_i \subset P$，$i=2,3,\cdots,9$.

设 X 是多面体 $P_i(2 \leqslant i \leqslant 9)$ 中任意一点，$Y \in P_1$ 是 X 在将 P_1 平移为 P_i 的变换下的原象，即在此平移变换下，Y 变为 X. 由于 $A_1Y \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} A_iX$，故四边形 A_1A_iXY 为平行四边形. 记对角线 A_1X 和 A_iY 的交点为 Z. 因为 $Y \in P_1$，$A_i \in P_1$ 且多面体 P_1 是凸的，所以 $Z \in P_1$. 又因 Z 是 X 在位似变换下的原象，所以 $X \in P$. 由 $X \in P_i$ 的任意性便知 $P_i \subset P$，$i=2,3,\cdots,9$.

此外，关于多面体的体积有关系式

$$V_{P_1} + V_{P_2} + \cdots + V_{P_9} = 9V_{P_1},$$

$$V_P = 8V_{P_1}.$$

于是由关于体积的重叠原理便知，多面体 $P_1, P_2, \cdots, P_9$ 中至少有两个的内部相交，当然至少有一个公共内点.

12·76　在平面上给定正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$，试证

(1) 如果 n 为偶数，那么对于平面上任意一点 M，表达式 $\pm\overrightarrow{MA_1}\pm\overrightarrow{MA_2}\pm\cdots\pm\overrightarrow{MA_n}$ 中可以适当选取正负号，使所得的和为零向量.

(2) 如果 n 为奇数，那么仅对于平面上有限多个点 M，才能使在上述表达式中适当选取正负号，使所得的和为零向量.

（第 20 届全苏数学奥林匹克，1986 年）

［证］ (1) 设 O 为正 n 边形的中心，于是 $\overrightarrow{MA_i}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA_i}$，$i=1,2,\cdots,n$. 在所给表达式中，只要在奇数下标项前取“+”号，在偶数下标的项之前取“-”号，即可满足要求.

(2) 将 $\{1,2,\cdots,n\}$ 任意分成互不相交的两个子集 $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ 和 $\{j_1,j_2,\cdots,j_{n-k}\}$. 对于任何一个这样的分解，在所论表达式中，当下标属于前一子集时，该项之前取“+”号，否则取“-”号. 为使和式为零向量，应有

$$\overrightarrow{MO}=\frac{1}{n-2k}(\overrightarrow{OA}i_1+\overrightarrow{OA}i_2+\cdots+\overrightarrow{OA}i_k-\overrightarrow{OA}j_1-\overrightarrow{OA}j_2-\cdots-\overrightarrow{OA}j_{n-k}),$$

这个关系式惟一确定点 M.

因为集合$\{1,2,\cdots,n\}$的分解只有有限多种,故这样的点 M 只有有限多个.

12·77 已知18块骨牌铺满一块6×6个方格的棋盘(每块骨牌恰好盖住两个方格),求证不论将骨牌如何放置,总可以沿着棋盘的某条网格线(水平的或竖直的)把棋盘分成两部分,但不损坏任何一块骨牌.

(基辅数学奥林匹克,1965年)

[证] 先考察骨牌与网格线的相交特征.一方面,每块骨牌恰与1条网格线相交.另一方面,一条网格线总是与偶数块骨牌相交.若不然,设有一条网格线与奇数块骨牌相交.由于棋盘的每行每列都有6个方格,故这条网格线把棋盘分成的两部分中,每部分的方格数都是偶数.但是,与这条网格线相交的奇数块骨牌却在两部分各盖住奇数个方格,这将导致棋盘两部分被盖住的方格个数都是奇数,矛盾.

棋盘内部共有10条网格线,如果每条都与骨牌相交,则至少与20块骨牌相交,此不可能.这说明至少有1条网格线不与骨牌相交.

12·78 平面上给定 n 个不同的圆.它们的半径都是1,求证其中必有一个圆含有一段弧,这段弧和其他的所有圆都不交且长度不小于 $\frac{2\pi}{n}$.

(保加利亚数学奥林匹克,1982年)

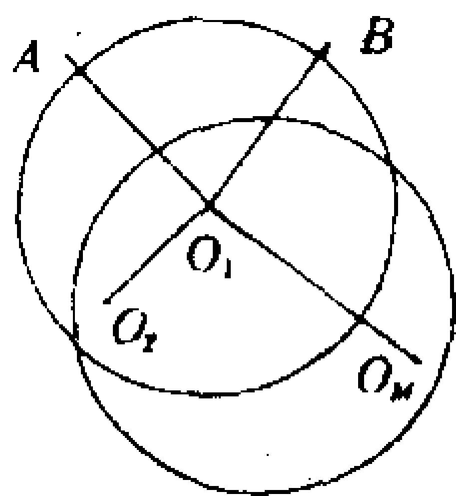
[证] 当 $n=1,2$ 时,结论显然成立.以下设 $n\geqslant 3$.

如果 n 个圆的圆心共线 l,则最左边的圆的左半圆不与其他圆相交且 $\pi>\frac{2\pi}{n}$,故知结论成立.

如果 n 个圆的圆心不全共线,则考察这 n 个点的凸包.设凸包多边形是 m 边形 $O_1O_2\cdots O_m$,$3\leqslant m\leqslant n$,并设 $\angle O_mO_1O_2$ 是它的最小内角.于是有

$$\angle O_mO_1O_2\leqslant\frac{(m-2)\pi}{m}=\pi-\frac{2\pi}{m}\leqslant\pi-\frac{2\pi}{n}.$$

注意，当两个等圆相交时，交点在连心线的垂直平分线上. 因此，由垂直于连心线的直径所分出的远离另一个圆的半圆(包括端点)上没有交点. 过点 O_1 作 $O_1A \perp O_1O_2$，$O_1B \perp O_1O_m$. 容易看出，劣弧$\overset{\frown}{AB}$上没有交点，点 A 和 B 也不是交点且 $\angle AO_1B = 180° - \angle O_2O_1O_m \geqslant \frac{2\pi}{n}$.



12·79 在坐标平面中，以每个整点为圆心，各作一个半径为 $\frac{1}{14}$ 的圆，求证任何半径为 100 的圆，都至少与这些圆中的一个相交.

(第 49 届莫斯科数学奥林匹克，1986 年)

[证] 若不然，则存在以坐标平面上的点 O 为心，以 100 为半径的圆，不与任何整点圆(即以整点为心，以 $\frac{1}{14}$ 为半径的圆)相交. 设平面上与圆 O 有公共点的水平直线中，y 取最大整数值的一条是 $y = k$，即 $y = k + 1$ 与圆 O 没有公共点.

如果直线 $y = k$ 上的所有整点都在圆 O 之外，设点 M 是直线 $y = k$ 与圆 O 的一个公共点，则存在 $y = k$ 上的一个整点 A，使得 $AM \leqslant \frac{1}{2}$. 这时，$OM = 100$，由余弦定理知 $OA \leqslant 100.01$. 由此可知圆 O 必与以点 A 为心的整点圆相交，矛盾. 所以，直线 $y = k$ 上的整点不能都在圆 O 之外.

设点 A 和 B 是直线 $y = k$ 上的两个相邻整点，且使点 A 在圆 O 之外，点 B 在圆 O 之内，于是有 $AB = 1$. 既然圆 O 与整点圆 A 和 B 都不交，故有

$$OA \geqslant 100 + \frac{1}{14}, \quad 99 < OB \leqslant 100 - \frac{1}{14}. \qquad ①$$

因而有 $OA - OB \geqslant \frac{1}{7}$ 以及

$$OA^2 - OB^2 = (OA - OB)(OA + OB) > \frac{199}{7}. \qquad ②$$

过点 O 作直线 $y = k$ 的垂线，垂足为 O'. 记 $O'B = x$，$O'A = x + 1$，于是由 ② 有

$$2x + 1 = (x + 1)^2 - x^2 = OA^2 - OB^2 > \frac{199}{7}.$$

由此解得 $O'B=x>\frac{96}{7}$.因而由勾股定理有

$$OO'^2=OB^2-O'B^2<\left(100-\frac{1}{14}\right)^2-\left(\frac{96}{7}\right)^2<99^2.$$

从而有 $OO'<99$.由于点 O 到直线 $y=k+1$ 的距离是 $OO'+1<100$,故圆 O 与直线 $y=k+1$ 必相交,此与直线 $y=k$ 的最大性矛盾.从而证明了任何一个半径为 100 的圆必至少与一个整点圆相交.

12·80　已知两个凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $B_1B_2\cdots B_n$ 满足条件 $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\cdots+\overrightarrow{A_nB_n}=0$,求证

(1) 多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $B_1B_2\cdots B_n$ 有公共点;

(2) 可以旋转多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 为多边形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$,使得 $A_1'A_2'\perp B_1B_2$ 且 $\overrightarrow{A_1'B_1}+\overrightarrow{A_2'B_2}+\cdots+\overrightarrow{A_n'B_n}=0$.

(基辅数学奥林匹克,1982 年)

[证]　先证(1).若不然,则在两个多边形上各取一点连成的所有线段中,必有一条最短线段,记之为 AB.作 AB 的垂直平分线 l,则 l 将两个多边形分开,每侧一个.在线段 AB 上取从 A 指向 B 的方向为正向,于是 $\overrightarrow{A_iB_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 在有向线段 AB 上的投影均不为零且同为正向.从而有 $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\cdots+\overrightarrow{A_nB_n}\neq 0$,此与已知矛盾.从而两个凸多边形必相交.

再证(2).首先证明两个多边形的重心 M_1 和 M_2 重合.在平面上任取一点 O,于是有

$$\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}),\overrightarrow{OM_2}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OB_1}+\cdots+\overrightarrow{OB_n}).$$

由此及已知可得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{n}[(\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OA_1})+\cdots+(\overrightarrow{OB_n}-\overrightarrow{OA_n})]\\&=\frac{1}{n}(\overrightarrow{A_1B_1}+\cdots+\overrightarrow{A_nB_n})=0,\end{aligned}$$

故有 $M_1=M_2$.又因

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_2B_1}+\cdots+\overrightarrow{M_2B_n}&=(\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OM_2})+\cdots+(\overrightarrow{OB_n}-\overrightarrow{OM_2})\\&=(\overrightarrow{OB_1}+\cdots+\overrightarrow{OB_n})-n\overrightarrow{OM_2}=0,\end{aligned}$$

所以有

$$\overrightarrow{M_1B_1} + \cdots + \overrightarrow{M_1B_n} = 0.$$

设多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 绕点M_1 旋转后得到多边形$A_1'A_2'\cdots A_n'$. 因为向量$\overrightarrow{M_1A_1} + \cdots + \overrightarrow{M_1A_n}$ 绕点 M_1 旋转后所得向量为$\overrightarrow{M_1A_1'} + \cdots + \overrightarrow{M_1A_n'}$,零向量旋转后仍为零向量,故有$\overrightarrow{M_1A_1'} + \cdots + \overrightarrow{M_1A_n'} = 0$. 从而有

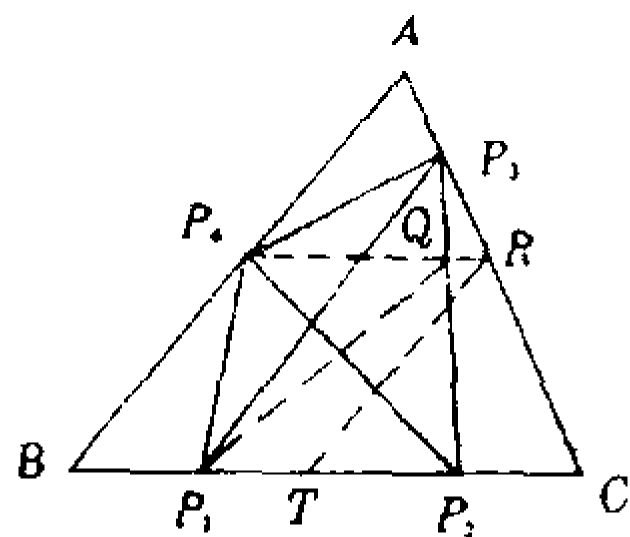
$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1'B_1} + \cdots + \overrightarrow{A_n'B_n} &= (\overrightarrow{M_1B_1} - \overrightarrow{M_1A_1'}) + \cdots + (\overrightarrow{M_1B_n} - \overrightarrow{M_1A_n'}) \\ &= (\overrightarrow{M_1B_1} + \cdots + \overrightarrow{M_1B_n}) - (\overrightarrow{M_1A_1'} + \cdots + \overrightarrow{M_1A_n'}) \\ &= 0,\end{aligned}$$

即多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 绕其重心 M_1 旋转任意角度后所得到的多边形 $A'_1A'_2\cdots A'_n$ 都满足条件$\overrightarrow{A_1'B_1} + \cdots + \overrightarrow{A_n'B_n} = 0$. 这样一来,我们总可以绕点 M_1 旋转多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 而得到$A_1'A_2'\cdots A_n'$, 使得 $A_1'A_2' \perp B_1B_2$. 这个多边形当然满足题中要求.

12・81 已知四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的4个顶点都位于$\triangle ABC$ 的周界上,求证4个三角形$\triangle P_1P_2P_3$, $\triangle P_1P_2P_4$, $\triangle P_1P_3P_4$ 和$\triangle P_2P_3P_4$ 中,至少有1个的面积不大于 $\triangle ABC$ 面积的$\frac{1}{4}$.

(第1届中国中学生数学冬令营,1986年)

[证] P_1, P_2, P_3, P_4 这4点分落在 $\triangle ABC$ 的3条边上,其中必有两点落在同一条边上. 设 P_1 和 P_2 位于边 BC 上,P_3 和 P_4 分别位于边 AC 和 AB 上. 如果 P_3 和 P_4 也位于同一条边上,则可化为前一种情形.



设点 P_3 到边 BC 的距离不小于点P_4 到 BC 的距离. 过点 P_4 作边 BC 的平行线,分别交线段 P_3P_2, P_3C 于点Q, R. 连结 P_1Q. 过点 R 作 AB 的平行线交 BC 于点 T. 这样,$\triangle P_3P_4P_1$, $\triangle QP_4P_1$ 和 $\triangle P_2P_4P_1$ 都以 P_4P_1 为底且它们的第3个顶点 P_3, Q, P_2 共线,点 Q 在点 P_3 和 P_2 之间(见上图). 我们把 $\triangle ABC$, $\triangle P_3P_4P_1$, $\triangle P_2P_4P_1$, $\triangle QP_4P_1$, $\square BTRP_4$ 的面积依次记为 S, S_2, S_3, S_Q 和 S', 于是有 $S_Q \geqslant \min\{S_2, S_3\}$, 即 $\triangle QP_4P_1$ 的面积不小于 $\triangle P_3P_4P_1$ 和 $\triangle P_2P_4P_1$ 面积之较小者. 又因 $\triangle QP_4P_1$ 的3个顶点都在$\square BTRP_4$ 的周界上,故有

$$\min\{S_2, S_3\} \leqslant S_Q \leqslant \frac{1}{2}S'. \qquad ①$$

因为 $P_4R \parallel BC, RT \parallel AB$,故有 $\triangle ABC \backsim \triangle AP_4R \backsim \triangle RTC$. 从而有

$$S : S_{\triangle AP_4R} = AC^2 : AR^2, S : S_{\triangle RTC} = AC^2 : RC^2.$$

因为$(AR^2 + RC^2) : AC^2 \geqslant \frac{1}{2}$,所以有

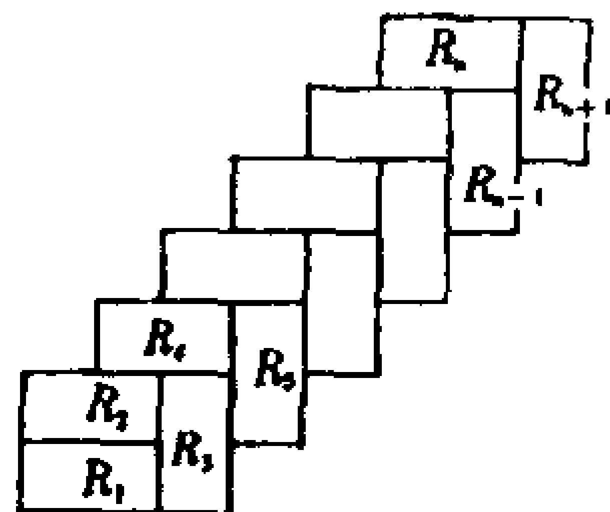
$$S_{\triangle AP_4R} + S_{\triangle RTC} \geqslant \frac{1}{2}S. \qquad ②$$

由 ② 和 ① 即知,S_2 和 S_3 中之较小者不大于$\frac{1}{4}S$.

12·82 给定一张方格边长为1的无穷大的方格纸,试证对任意 $n \in N$,都存在一个多边形,它不一定是凸多边形,但它的边都在网格线上,使得它恰好可用 n 种不同的方法被分成若干个 2×1 的矩形.

(第 23 届全苏数学奥林匹克,1989 年)

[证] 我们设想所求的多边形 M_n 是由 n 个 2×1 的矩形拼成的.如右图所示,其中前 n 个矩形拼成的多边形即为 M_n.



让我们来证明这样拼成的 M_n 满足题中的要求.为此,我们使用数学归纳法.

记将 M_n 分成n 个2×1矩形的所有不同方法数为 a_n.显然有 $a_1 = 1, a_2 = 2$.设当 $n = k$ 时有$a_k = k$.往证 $a_{k+1} = k + 1$.当将矩形 R_{k+1} 拼上去时,M_k 原有的k 种分法仍然各是一种方法,且在这些种方法中 R_{k+1} 都保持完整.但现在还有一种方法,即将 R_{k+1} 从中剪开,使二者分别与 R_k 的一半及R_{k-1} 的一半构成2×1 的矩形,然后 R_k 与R_{k-1} 余下的一半再往下递推.这种分法显然与前 k 种方法不同并且将 R_{k+1} 剪开的分法也只此一种,故得 $a_{k+1} = k + 1$.

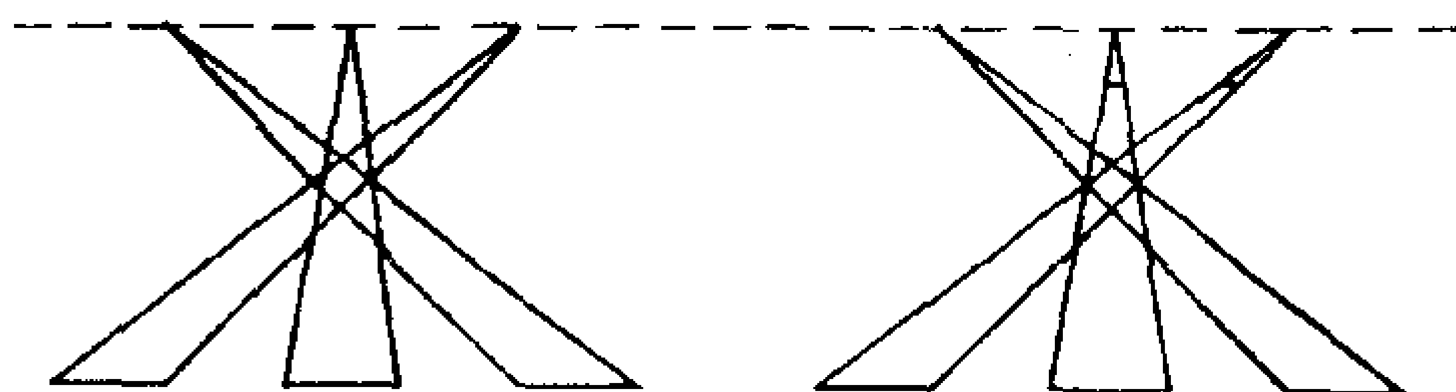
12·83 试证对于任何 13 边形,都存在一条直线,该直线上恰好包含 13 边形的一条边;但是对于任何 $n > 13$,都存在这样的 n 边形,不具备上述性质.

(第 37 届莫斯科数学奥林匹克,1974 年)

[证] 设在每条经过 13 边形的边的直线上,都至少包含了 13 边形的两条边,则这样的直线至多 6 条.所以其中的每一条直线与其余直

线相交，至多有5个交点．因而每条直线上至多有13边形的5个顶点．但是，13边形的位于同一条直线上的边互不相交，当然没有公共顶点．因此每条直线上至多有13边形的两条边．从而总边数不超过12条，矛盾．由此可知，必有一条直线上恰有13边形的1条边．

当 $n>13$ 时，确实存在 n 边形不具备题中所要求的性质．当 $n=2k$ 时，正 k 角星形便是反例，有正 k 角星形之边的每条直线上都恰有两条边．当 $n=2k+1, k\geqslant 7$ 时，对于 $n=15$，下左图给出了反例．对于 $k>7$，可像下右图那样，将左图截去偶数个角而得到：



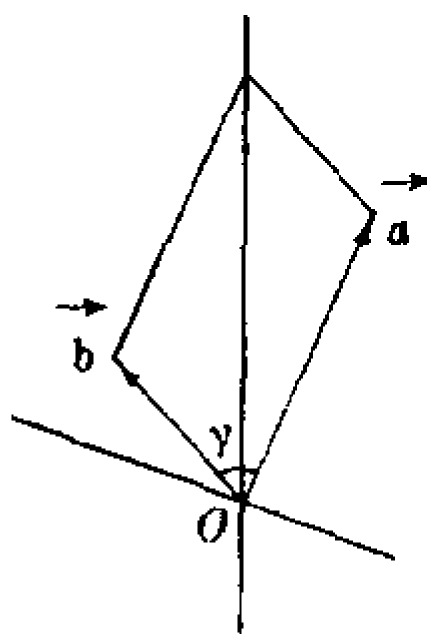
十五边形　　　　十七边形

12·84　试证对于任意一个四面体都存在两个平面，使四面体在这两个平面上的投影的面积之比不小于 $\sqrt{2}$．

（第12届全苏数学奥林匹克，1978年）

［证］　过四面体的两条对棱分别作两个互相平行的平面 p 和 p'．设二者之间的距离为 h．我们将只考察四面体对垂直于平面 p 的那些平面 q 的投影，并在其中求出使投影的面积之比不小于 $\sqrt{2}$ 的两个平面．

四面体在平面 q 上的投影是梯形（如果两棱之一的投影为一点时，则退化为三角形），其底为 a'_q 和 b'_q，二者分别是在平面 p 和 p' 上的棱 a 和 b 的投影，梯形的高为 h，因而面积等于 $\frac{1}{2}(a'_q+b'_q)h$．显然，投影面积的大小依赖于投影 a'_q 和 b'_q 的大小，而这又依赖于棱 a 和 b 对平面 q 的倾斜度．为此，我们把四面体的棱 a 和 b 视为向量．不妨设 $a\geqslant b$，且向量 $\vec{a},\vec{b}$ 之间的夹角 γ 不超过 $90°$．把这两个向量移到一个起点 O，于是四面体的棱对平面 q 的投影的长度和就化为向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 对直线（在过 O 点且平行于 p 的平面上）的投影的长度．



对平行于向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 的直线 l_1 的投影长度之和为 $|\vec{a}+\vec{b}|$，对垂直于 $\vec{a}$ 的直线 l_2 的投影等于 $b\sin\gamma$. 这两个值的比不小于$\sqrt{2}$：

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=a^2+b^2+2ab\cos\gamma\geqslant a^2+b^2\geqslant 2b^2\geqslant 2b^2\sin^2\gamma.$$

12·85　在平面上给定两条封闭折线，每条折线有奇数条边，这些边所在的直线互不相同，并且其中任何 3 条不共点. 试证必可从每条折线上选定一条边，使以二者为对边可作出一个凸四边形.

（第 21 届全苏数学奥林匹克，1987 年）

［证］　我们把两条折线的各一条边视为一组称之为“边对”. 显然，每个边对中的两条边的相互位置有三种不同情形：

(1) 两边相交；

(2) 两边中恰有一条延长后与另一条相交；

(3) 两边中的每一条延长后也不与另一条边相交.

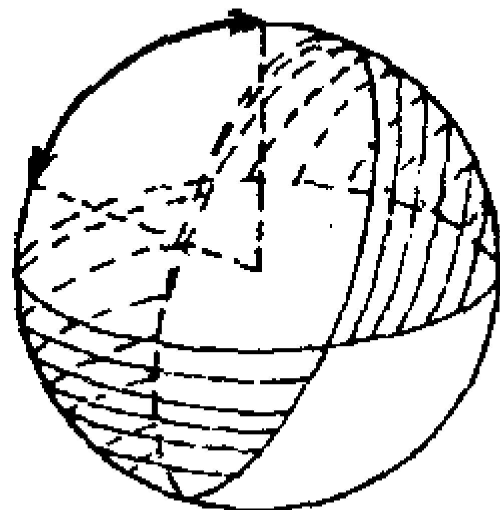
显然，我们要证明的就是第三类边对的存在性.

若不然，则所有边对都属于前两类，当然共有奇数个.

另一方面，对于第一条折线 L_1 的一条边，它所在的直线与第二条折线 L_2 的交点为偶数个. 共组成偶数个前两类边对. 当我们取遍 L_1 和 L_2 的所有边时，所得的边对总数为偶数. 在这个计数过程中，第一类边对计数两次，第二类边对恰计数一次. 因第一类边对数等于两条折线的交点数，当然是偶数，从而前两类边对数应为偶数，矛盾. 从而知第三类边对必存在.

12·86　在半径为 1 的球面上分布着一些大圆的弧段（经过球心的平面与球面的交线称为大圆），所有这些弧段的长度之和小于 π. 试证可以找到一个经过球心的平面，使它不与上述弧段中的任何一条相交.

（第 43 届莫斯科数学奥林匹克，1980 年）



［证］　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为给定的弧段，于是有 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n<\pi$. 考察其中任一段弧 α_i，在其上任取一点 S，作出点 S 的极圆 O_S（如果一个大圆上的所有点到点 S 的距离都相等，则称该大圆为关于极点 S 的极圆，即当点 S 为两极之一时的赤道）. 显然，当且仅当点 $P\in O_S$ 时，点 P 的极圆 O_P 过点 S. 令 S 取遍

整条弧 α_i，则相应的极圆 O_S 扫过下图所示的球面上画有阴影线的部分，这个部分区域的面积占整个球面面积的$\frac{\alpha_i}{\pi}$. 易见，当且仅当这个区域中的点的极圆与弧 α_i 相交. 对每条弧 α_i 都找出相应的区域，则由已知条件可知，这些区域在球面上所覆盖的面积至多为$\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{\pi}<1$. 故知在球面上必可找到未被这些区域所覆盖的点 A. 显然，点 A 的极圆不与所给的弧段相交.

12·87 设 S 是边长为100的正方形，L 是在 S 内自身不交的折线 $A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n(A_0\neq A_n)$，对于 S 的边界上的任一点 P，总存在 L 上的一点，它与点 P 的距离不大于$\frac{1}{2}$. 求证在 L 上必存在两点 X 和 Y，使得它们之间的距离不大于 1，但两点沿折线 L 的距离不小于 198.

（第 23 届国际数学奥林匹克，1982 年）

［证］ 我们将两点 P 与 Q 之间的距离记为 $d(P,Q)$，而将沿折线从 A 到 B 的路程的长度记为 $\rho(A,B)$. 为方便计，我们将折线上的点排定顺序：若 $\rho(A_0,A)<\rho(A_0,B)$，则记为 $A<B$. 设正方形的四个顶点为 S_1,S_2,S_3,S_4，按已知，在折线 L 上可选取点 T_1,T_2,T_3,T_4，使得 $d(S_i,T_i)\leqslant\frac{1}{2}$，$i=1,2,3,4$. 不妨设有 $T_1<T_4<T_2$.

令

$$L_1=\left\{X\mid X\in L,X\leqslant T_4\right\},$$

$$L_2=\left\{X\mid X\in L,X\geqslant T_4\right\},$$

$$M_1=\left\{X\mid X\in S_1S_2,\text{存在 }Y\in L_1,\text{使得 }d(X,Y)\leqslant\frac{1}{2}\right\},$$

$$M_2=\left\{X\mid X\in S_1S_2,\text{存在 }Y\in L_2,\text{使得 }d(X,Y)\leqslant\frac{1}{2}\right\}.$$

显然，$M_1\cup M_2=S_1S_2$ 且 $M_1\cap M_2\neq\varnothing$. 取 $P\in M_1\cap M_2$，于是按 M_1 和 M_2 的定义知存在 L_1 上的点 X 和 L_2 上的点 Y，使得

$$d(P,X)\leqslant\frac{1}{2},d(P,Y)\leqslant\frac{1}{2}.$$

于是 $d(X,Y)\leqslant 1$ 且 $X<T_4<Y$. 从而有

$$\rho(X,Y)=\rho(X,T_4)+\rho(T_4,Y)$$

$\geqslant d(X,T_4)+d(T_4,Y)$

$\geqslant d(P,S_4)-d(P,X)-d(S_4,T_4)+d(P,S_4)-$

$d(P,Y)-d(S_4,T_4)$

$\geqslant 99+99=198.$

可见,点 X 和 Y 即满足题中要求.

12·88　已知闭折线 M 有奇数个顶点,依次为 $A_1,A_2,\cdots,A_{2n+1}$. 用 $S(M)$ 表由 M 而作的新的闭折线,它的顶点依次为 $B_1,B_2,\cdots,B_{2n+1}$ 并且 B_1 是线段 A_1A_2 的中点,B_2 是线段 A_3A_4 的中点,$\cdots$,B_{n+1} 是线段 $A_{2n+1}A_1$ 的中点,B_{n+2} 是 A_2A_3 的中点,$\cdots$,B_{2n+1} 是线段 $A_{2n}A_{2n+1}$ 的中点.若记 $M_0=M$.$M_i=S(M_{i-1}),i=1,2,\cdots$,则序列 $\{M_k\}$ 中必存在一条折线,它与初始折线 M 同向位似.

(第 16 届全苏数学奥林匹克,1982 年)

[证]　取点组 $\{A_1,A_2,\cdots,A_{2n+1}\}$ 的重心(形心)O,则有

$$\overrightarrow{OA}_1+\overrightarrow{OA}_2+\cdots+\overrightarrow{OA}_{2n+1}=0.\qquad ①$$

利用向量关系式,我们有

$$\overrightarrow{OB}_j=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_{2j-1}+\overrightarrow{OA}_{2j}),j=1,2,\cdots,2n+1,$$

其中当 $m>2n+1$ 时,$A_m=A_{m-(2n+1)}$.更一般地,设 M_i 的顶点依次为 $P_1,P_2,\cdots,P_{2n+1}$,递推可得

$$\overrightarrow{OP}_j=2^{-i}(\overrightarrow{OA}_{2^i(j-1)+1}+\overrightarrow{OA}_{2^i(j-1)+2}+\cdots+\overrightarrow{OA}_{2^ij}),\qquad ②$$

其中 $j=1,2,\cdots,2n+1,i=1,2,\cdots$.

由抽屉原理知,数列 $\{2^k\}$ 中必有两次除以 $2n+1$ 时的余数相等,设这两项是 2^{k_1} 和 2^{k_2},于是 $(2n+1)\mid(2^{k_2},-2^{k_1})$.令 $k_0=k_2-k_1$,因为 $(2n+1,2^k)=1$,故得 $(2n+1)\mid(2^{k_0}-1)$.这样,折线 M_{k_0} 与折线 M 同向位似.

事实上,这时若仍把 M_{k0} 的顶点记为 P_1,P_2,P_{2n+1},则由 ② 和 ① 有

$$\overrightarrow{OP}_j=2^{-k_0}(\overrightarrow{OA}_{2^{k_0}(j-1)+1}+\overrightarrow{OA}_{2^{k_0}(j-1)+2}+\cdots+\overrightarrow{OA}_{2^{k_0}j})$$

$$=2^{-k_0}\overrightarrow{OA}_j,j=1,2,\cdots,2n+1.$$

这说明 M_{k0} 与 M 同向位似且位似系数为 2^{-k_0}.

12·89　在空间中给定 n 个平面($n \geqslant 5$),其中任何3个平面都恰有1个公共点,但任何4个平面都不共点,求证在这 n 个平面将空间划分成的内部不相重叠的诸部分中,至少有$\frac{2n-3}{4}$个四面体.

(匈牙利数学奥林匹克,1973年)

[证]　我们约定,把任意3个平面的公共点都称之为顶点.按已知,n 个给定平面中的任何3个平面都惟一确定1个顶点.

设 S 是一个给定平面,它把整个空间分为两个半空间,设顶点 P 是某半空间内的所有顶点中距 S 最近的一个(点 P 不在 S 上),而确定顶点 P 的3个平面是 S_1,S_2,S_3.于是,4个平面 S,S_1,S_2,S_3 从空间中切出一个四面体 T.可以断言,其他 $n-4$ 个平面中的任何一个都不与四面体 T 相截,即 T 是 n 个给定平面将空间划分成的部分中的一个.否则,将得到一个比 P 距 S 更近的顶点,此与点 P 的选法矛盾.

如果一个给定的平面两侧都有顶点,则可以得到两个这样的四面体.我们把这样的平面称为第一类平面.把所有顶点都在某平面同一侧或平面上的给定平面称为第二类平面.我们来证明如下的引理

引理　在给定的平面中,第二类平面不多于3个.

若不然,设有4个第二类平面 S_1,S_2,S_3,S_4,并设 $ABCD$ 是它们所围成的四面体.因为给定平面数 $n \geqslant 5$,故必有异于 S_1,S_2,S_3,S_4 的平面 S.显然,S 不可能与四面体的6条棱都相交.不妨设 S 与棱 AB 不交且与直线 AB 交于线段 AB 之外的点 E,且点 E 与点 B 在点 A 异侧.这样一来,顶点 E 和 B 在给定平面 ACD 的异侧,矛盾.

由引理可知,n 个平面中至多有3个第二类平面,因此至少有 $2n-3$ 个四面体(包括重复计数),它们都是 n 个平面将空间所划分成的部分.另一方面,这样的每个四面体在上述过程中至多被计数4次,即每个面计1次,所以,不同四面体的个数不少于$\frac{2n-3}{4}$.

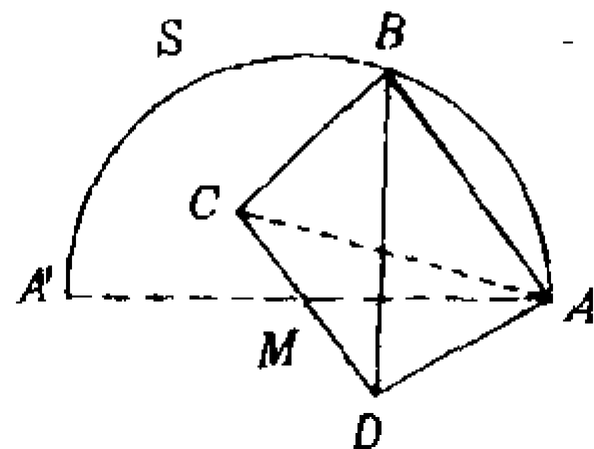
12·90　设四面体的 k 条边的长度均为 a,其余的 $6-k$ 条边的长度均为1,试分别对 $k=1,2,3,4,5$ 的情形确定四面体存在的充分必要条件,即确定 a 必须满足的条件.

(第11届国际数学奥林匹克,1969年)

[解]　我们对 $k=1,2,3,4,5$ 的情形分别加以讨论.显然,$a>0$.

(1)$k=1$ 的情形.如果存在一个四面体 $ABCD$ 满足题中的要求,不

妨设 $AB = a, AC = AD = BC = BD = CD = 1$. 这时，$\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 都是边长为 1 的正三角形. 设 M 为 CD 中点，则 $AM = BM = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 从而得到 $a = AB < AM + BM = \sqrt{3}$.



在平面上作边长为 1 的正三边形 ACD，取 CD 中点 M 并在过直线 AM 且垂直于平面 ACD 的平面上以 M 为心，1 为半径作半圆 ASA'，则它的直径 $AA' = \sqrt{3}$（见上图）. 对于任何 $0 < a < \sqrt{3}$，在半圆上取一点 B，使 $AB = a$，则四面体 $ABCD$ 便满足题中要求. 所以，当 $k = 1$ 时，满足题中要求的四面体存在的充分必要条件是 $a < \sqrt{3}$.

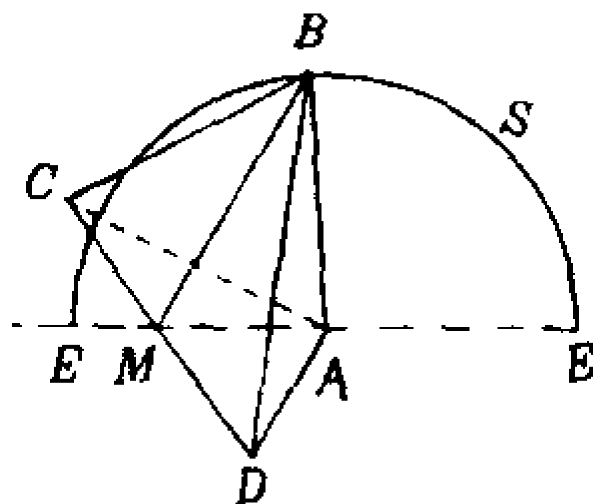
(2) $k = 5$ 的情形. 只要将棱长 a 和 1 对换，这就化成了 $k = 1$ 的情形. 由(1) 的结果知这时四面体存在的充分必要条件是 $a > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) $k = 2$ 的情形. 这时我们按两条长为 a 的棱的位置的不同分两种情形来讨论.

(ⅰ) 长度为 a 的两条棱有一个公共端点，不妨设 $BC = BD = a, AB = AC = AD = CD = 1$. 在 $\triangle ABM$ 中，我们有

$$AB - AM < BM < AB + AM,$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < BM < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



从而再由 $a^2 = BM^2 + DM^2$ 便得 $\sqrt{2-\sqrt{3}} < a < \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

另一方面，在平面上作边长为 1 的正三角形 ACD，取 CD 中点 M 并在过直线 AM 且垂直于平面 ACD 的平面上以点 A 为心，1 为半径作半圆 ESE'，其中 EE' 为直径（见上图）. 于是有 $ME = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$，$ME' = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. 这样一来，对任何 $\sqrt{2-\sqrt{3}} < a < \sqrt{2+\sqrt{3}}$，可在半圆上取点 B，使 $BM^2 = a^2 - \frac{1}{4}$，则四面体 $ABCD$ 便满足题中要求.

(ⅱ) 长度为 a 的两条棱没有公共端点. 不妨设 $AB = CD = a, AC$

$= AD = BC = BD = 1$. 记 CD 中点为 M, 于是 $AM = BM = \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$,从而有 $2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}} = AM + BM > AB = a$. 由此解得 $a < \sqrt{2}$.

另一方面,对于任何 $0 < a < \sqrt{2}$,在平面上作一个以 a 为底,1 为腰的等腰三角形 ACD,取 CD 中点 M 并在过直线 AM 且垂直于平面 ACD 的平面上以 M 为心,以 $\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$ 为半径的半圆周 ASA',其中 AA' 为直径且有 $AA' = 2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}} > \sqrt{2} > a$. 可见,在半圆上存在一点 B,使 $AB = a$. 于是四面体 $ABCD$ 便满足题中要求(参看(1) 中的图).

将(i) 与(ii) 结合起来可知,在 $k = 2$ 时,四面体 $ABCD$ 存在的充分必要条件是 $a < \sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

(4)$k = 4$ 的情形. 只要将棱长 a 与 1 对换,这就化成了 $k = 2$ 的情形. 由(3) 的结果便知这时四面体存在的充分必要条件是 $a > \frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

(5)$k = 3$ 的情形. 这时按长度为 a 的 3 条棱的不同位置可以分为三种情形,但下面将可看到,只要讨论两种情形就可以了.

(i) 设长度为 a 的 3 条棱有一个公共端点,例如是 $AB = AC = AD = a, BC = CD = BD = 1$. 这时,四面体 $ABCD$ 为正三棱锥,所以顶点 A 在底面上的投影 O 恰为正三角形 BCD 的中心. 从而有 $a = AB > AO = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 反之,当 $a > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,我们也总可作出满足这种要求的四面体.

(ii) 长度为 a 的 3 条棱构成一个正三角形. 这时,长度为 1 的 3 条棱有一个公共端点. 因而当把棱长 a 和 1 对换时,这就化成了(i) 的情形. 由(i) 的结果便知,这时四面体存在的充分必要条件是 $a < \sqrt{3}$.

将(i) 与(ii) 结合起来便知,当 $k = 3$ 时,对所有 $a > 0$ 都存在满足题中要求的四面体.

综上所述,满足题中要求的四面体存在的充分必要条件是:

(1) 当 $k = 1$ 时,$0 < a < \sqrt{3}$;

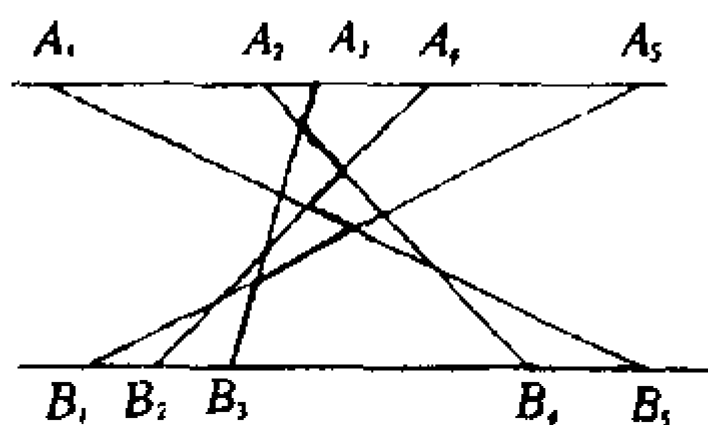
(2) 当 $k = 2$ 时,$0 < a < \frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$;

(3) 当 $k=3$ 时,$a>0$;

(4) 当 $k=4$ 时,$a>\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$;

(5) 当 $k=5$ 时,$a>\frac{\sqrt{3}}{3}$.

12·91 已知一水平带形(它的两条边互相平行)以及与这条带形相交的 n 条直线,这些直线中的任何两条都在带形内部相交,且任何3条都不共点.考察起点在带形的下边界,经由给定的直线,终点在带形上边界的所有路线,它们具有以下性质:当沿着每条路线行走时,始终是向上走;当走到直线的交点时,必须走到另一条直线上去(右图).求证在这些路线中,



(1) 两两没有公共点的路线不少于 $\frac{n}{2}$ 条;

(2) 存在一条路线,它至少由 n 条线段组成;

(3) 存在一条路线,它至多经由 $\frac{n}{2}+1$ 条直线;

(4) 存在一条路线,它经由所有直线.

(第9届全苏数学奥林匹克,1975年)

[证] 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 和 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 分别为 n 条直线与带形的上,下边界的交点,次序都是从左至右.于是 n 条直线为 A_iB_{n-i+1},$i=1,2,\cdots,n$.把从 A_i 出发的路线称为第 i 条路线,于是从构造路线的规则知它们具有下列性质:

(i) n 条线段互相相交及被带形的两条边界线所截而得到的每条小线段都恰好有一条路线通过.

(ii) 相邻的第 k 条与第 $k+1$ 条路线仅有顶点重合,除此之外,第 k 条路线总在第 $k+1$ 条的左方,$k=1,2,\cdots,n-1$.不相邻的两条路线没有公共点.

(iii) 第 k 条路线起点为 A_k,终点为 B_k.

有了这些准备后,下面就来对本题的结论一一加以证明.

(1) 号码为奇数的路线两两不相邻,因而没有公共点.它们的条数当然不少于 $\frac{n}{2}$.

(2) n 条直线中的每一条与带形相交于一条线段. 这 n 条线段中的每一条又与其余 $n-1$ 条相交而被截成 n 段,故知共有 n^2 段小线段. 由上述性质(i)知,这 n^2 段小线段要被 n 条路线走遍,故知存在一条路线,它至少由 n 条小线段组成.

当然,(2)也可作为(4)的推论而得到.

(3) 考察第1条路线与第 n 条路线. 记直线 A_1B_n 与 A_nB_1 的交点为 P. 不难看出,第一条路线在 $\triangle A_1PB_1$ 的内部或边上,第 n 条路线在 $\triangle A_nPB_n$ 的内部或边上. 其他的直线 $A_2B_{n-1}, A_3B_{n-2}, \cdots, A_{n-1}B_2$ 中的每一条只能与上述两个三角形中的一个相交,故其上的小线段只能有一段在第1条或第 n 条路线之一上. 从而知第1和第 n 两条路线上,至多有 $4+(n-2)$ 条小线段,所以其中必有一条路线上至多有 $\frac{n}{2}+1$ 条小线段.

(4) 考察号码为 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 的那条路线,例如图中用粗实线画出的路线. 注意到 n 条线段 $A_iB_{n-i+1}(i=1,2,\cdots,n)$ 的两个端点的足标中,总有一个不超过 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$,而另一个不小于 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$. 从而 n 条线段中的每一个都与第 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 条路线相交,故必有一段在这条路线上. 这意味着这条路线必然经由所有直线.

12·92 试证存在凸1990边形,它具有如下的性质:

(1) 多边形的各内角都相等;

(2) 多边形的各边的长度是 $1^2, 2^2, \cdots, 1989^2, 1990^2$ 的一个排列.

(第31届国际数学奥林匹克,1990年)

[证] 设1990边形 $A_0A_1\cdots A_{1989}$ 具有性质(1)和(2). 我们把向量 $\overrightarrow{A_\gamma A_{\gamma+1}}$ 用复数 $n_\gamma e^{i\gamma\alpha}$ 来表示,其中 $\alpha=\frac{2\pi}{1990}$, $\gamma=0,1,\cdots,1989$ 且约定当 $\gamma\geqslant 1990$ 时,$A_\gamma=A_{\gamma-1990}$. 这时,$n_0, n_1, \cdots, n_{1989}$ 是 $1^2, 2^2, \cdots, 1990^2$ 的一个排列. 于是问题可表述为:求数 $1^2, 2^2, \cdots, 1990^2$ 的一个排列,使得

$$\sum_{\gamma=0}^{1989} n_\gamma e^{i\gamma\alpha}=0.$$

为方便计,我们称 n_γ 为"重量". 设单位圆盘水平支撑在位于原点 O 的尖针上. 于是问题化为:怎样将 $1^2, 2^2, \cdots, 1990^2$ 这些重量分别放在等分

圆周的 1990 个点上，才能使圆盘保持平衡？

首先，我们把这 1990 个重量分成 995 对：

$$(1^2,2^2),(3^2,4^2),\cdots,(1989^2,1990^2),$$

并将每对中的两个重量分别放在某条直径的两个端点上. 这样一来，问题就化为较简单的情形：怎样将

$$2^2-1^2=3,4^2-3^2=7,\cdots,1990^2-1989^2=3979$$

这 995 个重量分别放在等分单位圆盘的圆周上的 995 个点上，才能使圆盘保持平衡？注意到 $995=5\times199$，我们将这 995 个重量分成 199 组：

$$(3,7,11,15,19),(23,27,31,35,39),\cdots,$$
$$(3963,3967,3971,3975,3979). \quad ①$$

令 $\beta=\frac{2\pi}{199}$，$\gamma=\frac{2\pi}{5}$. 我们用 F_1 来记以 $\{1,e^{i\gamma},e^{i2\gamma},e^{i3\gamma},e^{i4\gamma}\}$ 为顶点的正五边形，用 F_{k+1} 来记正五边形 $e^{ik\beta}F_1$. 将 ① 中第 $k+1$ 组的 5 个重量依次放在 F_{k+1} 的 5 个顶点上，于是第 $k+1$ 组 5 点所对应的复数为

$$(20k+3+4j)e^{i(k\beta+j\gamma)},j=0,1,2,3,4, \quad ②$$

其中 $k=0,1,\cdots,198$. 因为 $1+e^{i\gamma}+e^{i2\gamma}+e^{i3\gamma}+e^{i4\gamma}=0$，故由 ② 知可将第 $k+1$ 组 5 个复数之和写成 $\eta e^{ik\beta}$，其中 $\eta=4e^{i\gamma}+8e^{i2\gamma}+12e^{i3\gamma}+16e^{i4\gamma}$. 因而，这 199 组复数的总和为

$$\eta\sum_{k=0}^{198}e^{ik\beta}=0.$$

至此，我们证明了确实存在 1990 边形具有题中所要求的性质.

最后，我们指出，上述解法可直接写出如下：

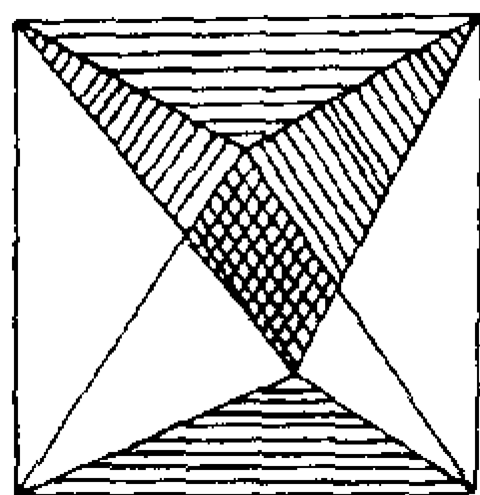
$$\begin{aligned}0&=\sum_{k=0}^{198}\sum_{j=0}^{4}(20k+4j+3)e^{i(k\beta+j\gamma)}\\&=\sum_{k=0}^{198}\sum_{j=0}^{4}[(10k+2j+2)^2-(10k+2j+1)^2]e^{i(k\beta+j\gamma)}\\&=\sum_{k=0}^{198}\sum_{j=0}^{4}\sum_{m=1}^{2}(10k+2j+m)^2e^{i(k\beta+j\gamma+m\pi)}.\end{aligned}$$

当 k 取遍 $0,1,\cdots,198$，j 取遍 $0,1,2,3,4$ 而 m 取遍 $1,2$ 时，表达式 $10k+2j+m$ 取遍 $1,2,\cdots,1990$ 且恰好每个值取得一次，而表达式

$$e^{i(k\beta+j\gamma+m\pi)}=e^{i\frac{10k+398j+995m}{1990}}$$

恰好取得 $1,e^{i\alpha},\cdots,e^{i1989\alpha}$ 每个值一次.

12·93　有一块正方形的肉饼.试问能否在正方形的内部选取两个点,然后用直线段将这两个点分别和4个顶点连结,从而将正方形肉饼分为9等分?如果可以,应当选取哪两个点?



(第30届莫斯科数学奥林匹克,1967年)

[解]　考察右图中用阴影线所标出的5部分.它们的面积之和是$\frac{1}{2}$而不是$\frac{5}{9}$.因此,题中所要求的分法是无法实现的.

12·94　已知有77个规格为$3\times3\times1$的长方块,问能否把这些长方块码放到一个规格为$7\times9\times11$的带盖的长方形盒子中?

(第23届全苏数学奥林匹克,1989年)

[解]　因为$3\times3\times1$的长方块的每个侧面的面积数都是3的倍数,但盒子的一个侧面的面积为77,不是3的倍数,故不可能把这77个长方块都放到盒子中.

12·95　是否存在一个凸1976面体,使得当随意将它的各条棱都标上箭头时,所得的向量之和都不为零?

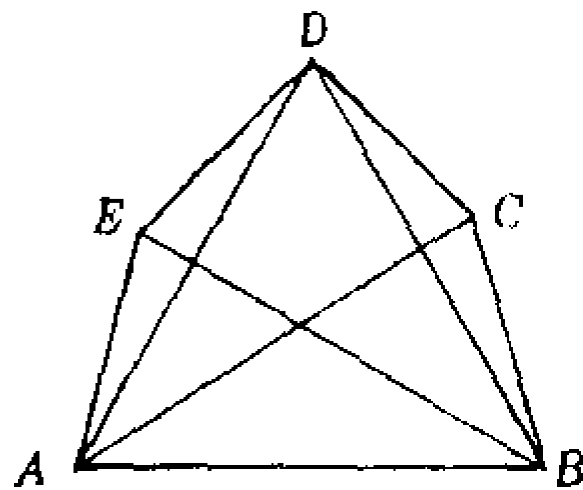
(第39届莫斯科数学奥林匹克,1976年)

[解]　存在.任意一个以凸1975边形为底面的棱锥都满足要求,这是因为所有向量在棱锥的高上的投影之和不为零的缘故.

12·96　是否存在非正的凸五边形,其中恰有4条等长的边和4条等长的对角线?

(第39届莫斯科数学奥林匹克,1976年)

[解]　存在.取正三角形ABD,作出它的两条高并分别延长到C和E,使$AC=AB=BE$.连结AE,ED,DC,CB,则五边形$ABCDE$(见右图)即为所求.事实上,$\angle AED=150°$,$\angle EDC=90°$,所以$EC<AD$.即恰有4条对角线等长.

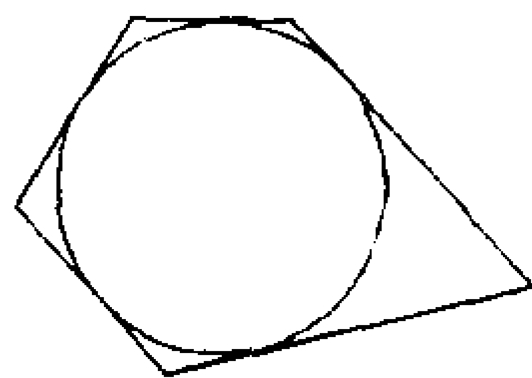


12·97　是否存在边长分别为3,4,9,11,13,而又具有内切圆的五边形?

(第46届莫斯科数学奥林匹克,1983年)

[解]　不存在.若不然,设存在满足要求的五边形.因为对于有内切圆的任一五边形,它的5条边被切点分成10条线段,且两两成对相

等,所以任何两条不相邻的边长之和都小于周长之半.但对于满足题中要求的五边形来说,周长为 40,而边长分别为 9,11,13 的 3 条边中总有两条不相邻,且长度之和不小于周长之半,矛盾.



12·98　设一张 $m \times n$ 的矩形方格纸上的方格边长为 1,问能否沿网格线作一条折线,使它经过矩形内部及周界上的每个结点恰好一次?如果能作,问折线的长度是多少?

(第 21 届莫斯科数学奥林匹克,1958 年)

[解]　构造折线如下:在 $m \times n$ 矩形中,共有 $m+1$ 条竖直网格线.将第 1 条与第 2 条沿上边界线连结起来,将第 2 条与第 3 条沿下边界线连起来,如此下去,直到最后一条线连完为止.显然,这样得到的折线满足题中要求.

对于任何一条满足要求的折线,沿折线将全部 $(m+1) \times (n+1)$ 个结点连起来,每相邻两点间恰有长度为 1 的线段,故知折线的总长度为

$$(m+1) \times (n+1) - 1 = mn + m + n.$$

12·99　在一张无限大的方格纸上铺放骨牌,使它们恰好覆盖所有方格,每块骨牌恰好盖住两个方格.能否适当铺放骨牌,使方格纸上的每条网格线都仅能截割有限多块骨牌?

(第 39 届莫斯科数学奥林匹克,1976 年)

[解]　可以做到,像右图那样用骨牌铺成无限多个角形即可.

12·100　对于哪些 n,存在有 n 条棱的多面体?

(波兰数学奥林匹克,1969 年)

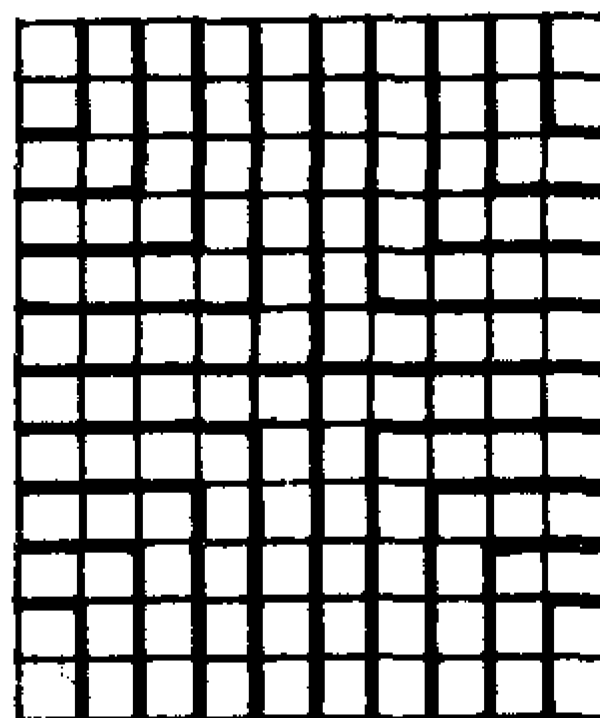
[解]　(1) 因为每个多面体至少有 4 个顶点,每个顶点至少引出 3 条棱,所以每个多面体都至少有 6 条棱.四面体恰好有 6 条棱.

(2) 有 7 条棱的多面体不存在.如果这样的多面体存在,则当它有一个面是边数至少为 4 的多边形时,由这个面上的每个顶点至少向面外引出 1 条棱,故知多面体至少有 8 条棱,从而多面体的每个面都是三角形.因而,多面体的棱数为 $k = \frac{3}{2}S$,此处 S 为多面体的面数.这意味着 k 为 3 的倍数,故不能为 7,矛盾.

(3) 当 $m \geqslant 4$ 时,底为 m 边形的棱锥是有 $2m$ 条棱的多面体.

(4) 从棱数为 $k = 2(m-1)$ 的棱锥出发,砍去底面一角即可得到

棱数为 $n=2m+1(m\geqslant4)$ 的多面体. 实际上,设 M,N,P 是由棱锥底面的顶点 S 引出的 3 条棱的中点. 过这 3 点作一个平面, 并截去四面体 $SMNP$,所得的多面体恰有 $2m+1$ 条棱.



综上所述,当且仅当 $n\geqslant6$ 且 $n\neq7$ 时,存在 n 条棱的多面体.

12·101　对于哪些整数 $n\geqslant3$,平面上存在正 n 边形,它的所有顶点全是整点?

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

[**解**]　(1) 显然,当 $n=4$ 时,有整点正方形.

(2) 当 $n>6$ 时,如果存在满足要求的正 n 边形 P,则当将它的各边都平移到一个端点为原点时,另一端点也是整点,于是又得到一个顶点全是整点的正 n 边形 P'. 若记 P 的边长为 a,则 P' 的边长为 $a'=2a\sin\frac{\pi}{n}<a$. 将这一过程无限重复下去时,可得严格递减的无限多个边长. 但不超过 a 的整点间的距离只有有限多种,矛盾.

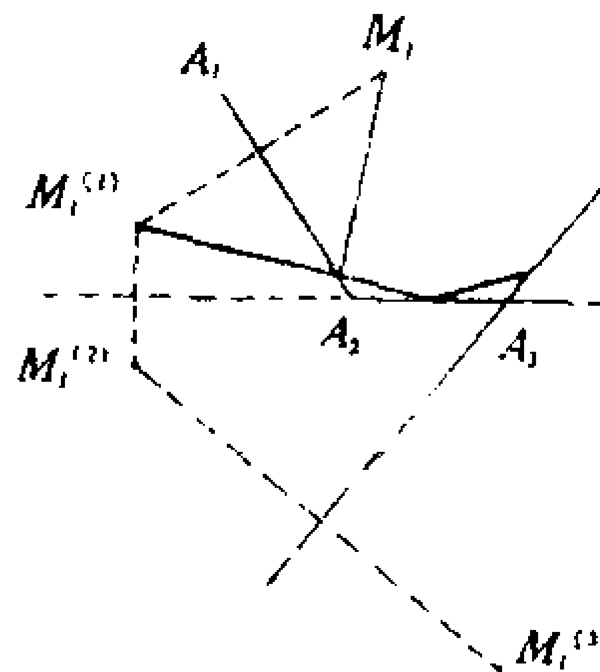
(3) 当 $n=3$ 或 5 时,如果存在满足要求的正 n 边形,则当将正 n 边形 P 绕中心旋转 $90°$ 而旋转 3 次后,就得到一个正 12 边形或正 20 边形,其所有顶点全是整点. 由(2) 知,这是不可能的.

(4) 当 $n=6$ 时,若有整点正六边形 P,则 P 的 3 个不相邻的顶点构成整点正三角形. 由(3) 知,此不可能.

综上可知,当且仅当 $n=4$ 时,平面上存在顶点全是整点的正 n 边形.

12·102　在形状为凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的台球桌上放着两只台球 M_1 和 M_2,应该从什么方向击球 M_1,才能使得球 M_1 在依次撞击边 $A_1A_2,A_2A_3,\cdots,A_nA_1$ 之后而击中球 M_2?(台球的反射规律是入射角等于反射角.)

(基辅数学奥林匹克,1952 年)



[**解**]　因为从点 M_1 击出台球撞击边 A_1A_2 后射向边 A_2A_3,与从点 M_1 关于边 A_1A_2 的对称点 $M_1^{(1)}$ 直接沿台球从边 A_1A_2 反射出的方向击向边 A_2A_3 的结果是一致的.

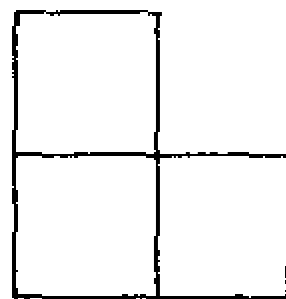
作出点 M_1 关于直线 A_1A_2 的对称点 $M_1^{(1)}$ 之

后，再作点 $M_1^{(1)}$ 关于直线 A_2A_3 的对称点 $M_1^{(2)}$. 依此类推，直到最后作点 $M_1^{(n-1)}$ 关于直线 A_nA_1 的对称点 $M_1^{(n)}$. 连结 $M_1^{(n)}M_2$ 交直线 A_nA_1 于点 P_n. 再连结 $M_1^{(n-1)}P_n$ 交直线 $A_{n-1}A_n$ 于点 P_{n-1}. 依此类推，直到最后连结 $M_1^{(1)}P_2$ 交直线 A_1A_2 于点 P_1. 如果有

$$P_j \in A_jA_{j+1}, j = 1, 2, \cdots, n,$$

则由 M_1 指向点 P_1 的方向即为所求的方向，如果上式中的 n 个属于关系式至少有 1 个不成立，则本题无解.

12·103　是否存在自然数 m 和 n，使得 $m \times n$ 个方格的矩形方格纸可用右图所示的“角块”拼成且满足下列条件：



(1) 任何两个角块都不能组成 3×2 个方格的矩形；

(2) 在任何一点都没有 3 个或 3 个以上的角块相邻接(指有公共顶点).

(第 26 届独联体数学奥林匹克，1992 年)

[解]　不存在. 若不然，即存在满足要求的拼接. 我们指出，若在拼接 $m \times n$ 矩形时有某个角块以 1 个方格的短边与矩形的某条边邻接，则它必由另一个角块补充为 3×2 的矩形. 所以，每一个角块都以两个格子的长边与矩形的边相邻接. 从而 m 和 n 都是偶数. 设 $m = 2k, n = 2h, k, h \in N$. 这时矩形共有 $4kh$ 个方格.

因为每个角块有 6 个顶点，所以覆盖 $m \times n$ 矩形的所有角块共有

$$\frac{1}{3} \times 2k \times 2h \times 6 = 8kh \text{ 个顶点}.$$

另一方面，用条件(2) 知，矩形内部的每个结点上至多有角块的两个顶点，在长为 $2k$ 个方格的边上，至多有角块的 $2(k-1)$ 个顶点. 在矩形的每个角上各有 1 个顶点. 因而角块顶点的总数不多于

$$2(2k-1)(2h-1) + 4(k-1) + 4(h-1) + 4 = 8kh - 2,$$

矛盾.

12·104　在 8×8 的方格表上标出每个方格的中心，共得 64 个点. 能否引出不经过这些点的 13 条直线来，将这些点全都彼此隔开？

(第 38 届莫斯科数学奥林匹克，1975 年)

[解]　不能. 我们仅考察方格表边缘方格的中心点，共 28 个点的情形并证明如下的减弱命题：不经过这些点的任何 13 条直线，都不能把这 28 个点全都彼此隔开.

将以4个角格的中心点为顶点的矩形作出来,则全部28个点都在此矩形的周界上.任作不经过这些点的13条直线,每条直线至多与矩形周界交于两点.13条直线与矩形周界的交点至多26个.这些交点至多将矩形周界分成26部分.于是由抽屉原理知,其中至少有一部分中至少有两个中心点.

12·105 设 O 为平面上一点.试问能否在平面上作出(1)5个圆;(2)4个圆,使得它们都不盖住点 O,但自点 O 发出的任何一条射线都至少与两个圆相交?

(第42届莫斯科数学奥林匹克,1979年)

[解] (1) 可以做到.在平面上取定点 O 并由点 O 引出5条射线 OA_i, $i=1,2,3,4,5$,每相邻两条的夹角为72°,并按逆时针顺序排列.然后将5条射线同时绕点 O 按逆时针方向旋转6°,得到5条射线 OA'_i, $i=1,2,3,4,5$.依次作5个角 $A_iOA'_{i+2}$ 的内切圆(即与角两边相切的圆),$i=1,2,3,4,5$ 且 $A'_6=A'_1$, $A'_7=A'_2$.则所得的5个圆便满足题中的要求.

(2) 无法做到.若不然,设有4个圆满足题中要求,按逆时针排列依次为 S_1,S_2,S_3,S_4.因点 O 在 S_i 之外($i=1,2,3,4$),故可过点 O 分别作4个圆的8条切线,每个圆的两条切线的夹角依次记为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.于是有 $\alpha_i<180°$, $i=1,2,3,4$,故有 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4<720°$.这表明4个角覆盖以点 O 为角顶的周角不到两层,故必有点 O 引出的一条射线,至多在4角之一的内部或边上.这意味着这条射线至多与4圆之一相交,矛盾.

12·106 任意连结正 n 边形的 n 个顶点,得到一条封闭的 n-折线.试证当 n 为偶数时,在折线中有两条边平行;当 n 为奇数时,折线中不可能恰有两条边平行.

(第30届国际数学奥林匹克候选题,1989年)

[证] 按逆时针顺序将 n 个顶点编号为 $1,2,\cdots,n$,于是题中所述的闭折线可以用这 n 个数的一个排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 来表示.易见,两边平行 $a_ia_{i+1}\parallel a_ja_{j+1}$ 的充分必要条件是 $\overset{\frown}{a_{i+1}a_j}=\overset{\frown}{a_{j+1}a_i}$,而这又等价于 $a_i+a_{i+1}\equiv a_j+a_{j+1}\pmod n$,其中 $a_{n+1}=a_1$.

当 n 为偶数时,完全剩余系的和

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\not\equiv 0(\bmod\ n).$$

而因

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1})=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}a_{i+1}=2\sum_{i=1}^{n}a_i\equiv 0(\bmod\ n),$$

所以$\{a_i+a_{i+1}\mid i=1,2,\cdots,n\}$不是 mod n 的完全剩余系,从而其中必有两数同余,即有 $i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant n$,使得

$$a_i+a_{i+1}\equiv a_j+a_{j+1}(\bmod\ n).$$

这表明两边平行,即 $a_ia_{i+1}\parallel a_ja_{j+1}$.

当 n 为奇数时,如果恰有两边平行,即有 $a_ia_{i+1}\parallel a_ja_{j+1},i\neq j$,那么$\{a_i+a_{i+1}\mid i=1,2,\cdots,n\}$中恰有两数同余,记其剩余数为 r.因而也少了 1 个剩余数 $s\neq r$.从而有

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+a_j)\equiv 1+2+\cdots+n+r-s\equiv r-s(\bmod\ n).$$

但另一方面又应有

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1})=2\sum_{i=1}^{n}a_i=n(n+1)\equiv 0(\bmod\ n),$$

矛盾.故知当 n 为奇数时,不可能恰有两条边平行.

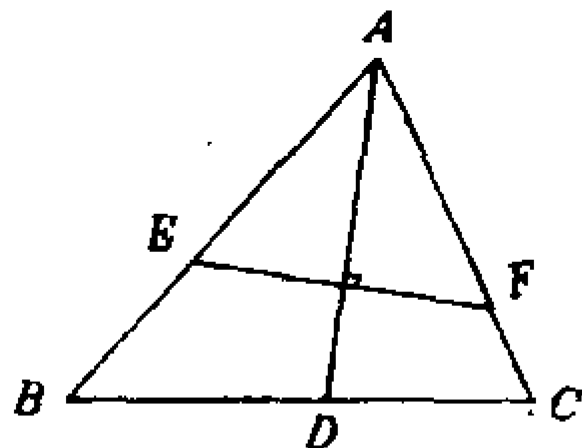
12·107　对怎样的自然数 n,存在一个凸 n 边形,其各边的长度互不相同,且其内部所有点到多边形的各边(或边的延长线)的距离之和都是相等的.

(基辅数学奥林匹克,1976 年)

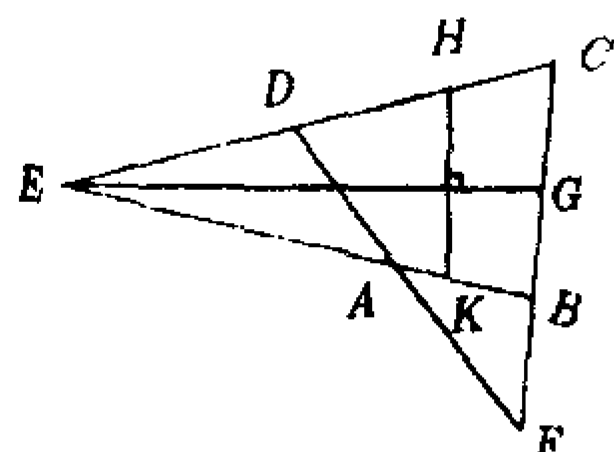
[解]　容易验证,正 n 边形内的所有点到各边或边的延长线的距离之和相等.

当 $n\geqslant 5$时,将正 n 边形的每边都向着正n 边形的中心略为平移一段,使移动的距离互不相等,从而导致所得的 n 边形的 n 条边互不相等.于是所得的凸 n 边形便满足题中要求.

当 $n=3$ 时,对于任一个不等边三角形 ABC,设 AD 为$\angle BAC$ 的平分线.过 AD 上任一点作$EF\perp AD$并分别交AB,AC于E 和F.则线段 EF 上的所有点到 AE,AF 的距离之和相等.但因 $\triangle ABC$ 为不等边三角形,故 EF 与BC 不平行,所以 EF 上



的不同点到 BC 的距离不等.从而 EF 上的不同点到 $\triangle ABC$ 的三边的距离之和不等.这表明 $n=3$ 时满足要求的三角形不存在.



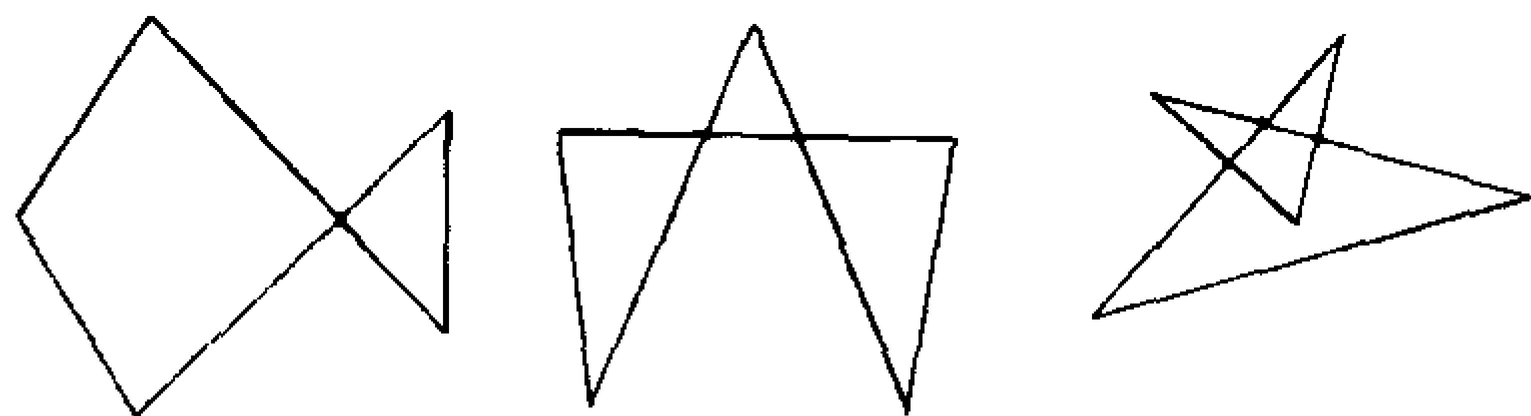
当 $n=4$ 时,4 边互不相等的凸四边形至少有一组对边延长后相交.若另一组对边平行,则四边形为梯形,显然不能使内部所有点到四边的距离之和都相等.所以第 2 组对边也相交.作一组对边交角 $\angle E$ 的平分线 EG,过 EG 上一点作 EG 的垂线,分别交 AB,CD 于 K 和 H.则线段 HK 上的所有点到 AB,CD 的距离之和相等.但是,HK 显然不能垂直于 $\angle F$ 的平分线,故其上的点到 AD,BC 的距离之和互不相等,从而到四边形的 4 边的距离之和也互不相等.这表明 $n=4$ 时,满足要求的多边形也不存在.

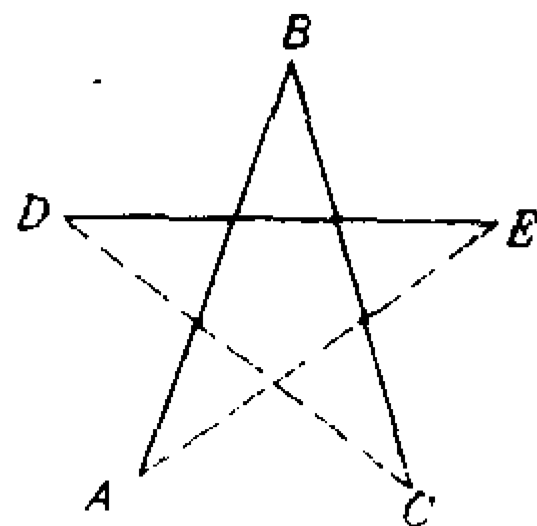
综上可知,当且仅当 $n\geqslant 5$ 时,满足要求的多边形存在.

12·108　设封闭的五星形折线的任何 3 个顶点都不共线,求证它可以有 1 个,2 个,3 个或 5 个自交点,但不可能恰有 4 个自交点.

(波兰数学奥林匹克,1965 年)

[证]　在下图所示的 3 条折线中,分别有 1 个,2 个,3 个自交点,正五角星形有 5 个自交点.





如果折线有 4 个自交点,4 个自交点在 5 条边上,于是至少有 3 条边上各有两个自交点.而 3 条边中必有两条相邻.设这两条边是 AB 和 BC.另外 3 条边与这两条边交于 4 个点,其中必有一条边与 AB,BC 都相交,这条边当然是 DE(见图).这时,AB 和 BC 上分别还有一个交点,所以边 DC 必与 AB 相交,边 AE 必与 BC 相交.这样一来,顶点 A 和 E 在直线 DC 两侧,顶点 D 和 C 在直线 AE 两侧,从而边 AE 与 DC 必相交.这导致共有 5 个自交点,即折线不可能恰有 4 个自交点.

12·109　在平面上给定若干个单位圆. 问是否总能在平面上选定一些点,使得在每一个给定单位圆的内部都恰有一个选定点?

（圣彼得堡代表队选拔试题,1992 年）

[解]　不是总能实现.

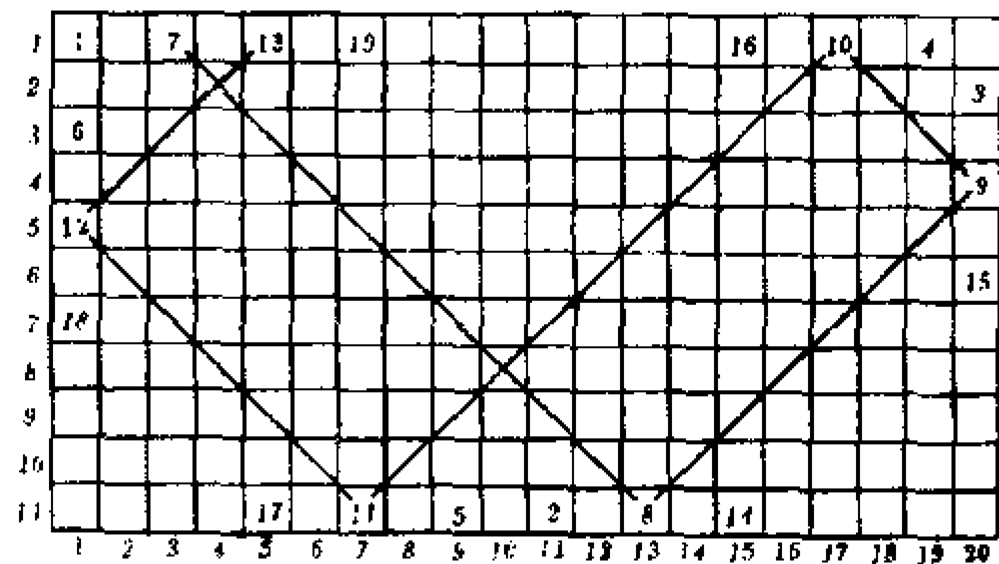
若不然,以每个选定点为心各作一个单位圆,于是原来所给定的每个单位圆的圆心便都恰好属于 1 个新作的单位圆的内部. 这样一来,问题就转化为:在平面上给定了若干个点,则总可以作出若干个单位圆,使得每个给定点都恰好位于其中 1 个单位圆的内部.

作一个边长为 10 的正方形,并用平行于边的直线族将它均分成 10^8 个边长为 0.001 的小正方形. 将这些小正方形的所有顶点都作为给定点. 设对于这些给定点,已经作出若干个单位圆,使得每个给定点都恰好位于 1 个单位圆的内部.

显然,其中任何两个单位圆的圆心距都大于 $2-0.002$,否则二者的相交部分中将有给定点. 考察盖住正方形中心的单位圆 D. 易见,在每个与圆 D 相交但却未被 D 完全盖住的小正方形中,至少有 1 个顶点不在 D 内而是属于另一个单位圆的内部. 后者称为与 D 相邻(可能与 D 相交,相切或相离). 显然,与 D 相邻的圆至多 7 个. 由于单位圆 D 直径为2,它至少与2000行方格相交,故上述的与 D 相交的小正方形的位于圆 D 之外或之上的顶点不少于 2000 个. 这样一来,与圆 D 相邻的至多 7 圆中必有 1 个圆 S 的内部至少含有这至少 2000 点中的 280 个点. 圆 S 与 D 相交如此之"深",以至于必有某个给定顶点位于两圆的公共部分中,矛盾.

12·110　设有一张规格为 101×200 的方格纸. 从某个角上的方格起沿着对角线前进,在每次碰到纸边的方格时,都按照光线的反射方向而改变方向继续前进. 试问还能在某个时刻到达某个角上的方格吗?

（第 16 届莫斯科数学奥林匹克,1953 年）



[解 1]　将方格表的行和列标上号码如右图所示,并用 (i,j) 来表示第 i 行 j 列的方格. 对于任何正整数 $j<100$,从方格 $(1,j)$ 出发,顺次到达纸的四边的方格如下:

$$(1,j) \longrightarrow (101,100+j) \longrightarrow (j+1,200) \longrightarrow (1,200-j)$$
$$\longrightarrow (101,100-j) \longrightarrow (2+j,1) \longrightarrow (1,2+j) \longrightarrow$$
$$(101,102+j) \longrightarrow (j+3,200) \longrightarrow (1,200-j-2).$$

这就是说,从第1行的前99个方格之一出发时,经过n次反射再回到第1行前半行时,列的坐标增加2;而当从第1行的后98个方格之一出发,再回到第1行后半行时,列的坐标减少2.因此,从左上角的方格(1,1)出发时,经若干次反射后,将到达(1,101),接着就进入左下角的方格(101,1).这就得到了肯定的答案.

[解 2] 从左上角的方格出发并按规则前进.当进行到某一步到达某个角格时,运动就停止了,问题也随之解决了.

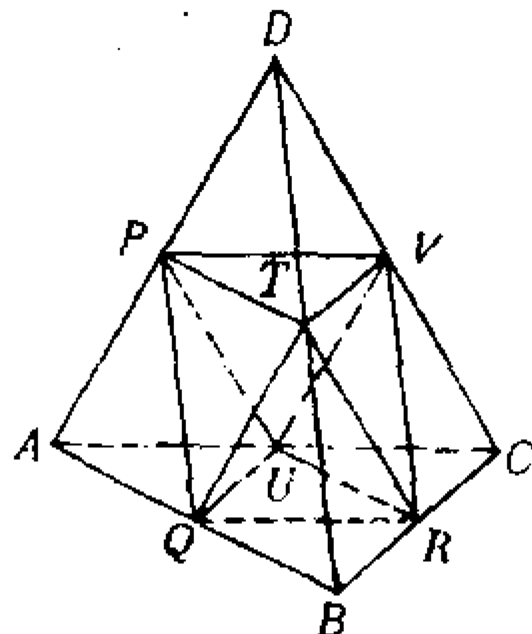
若不然,将无限地运动下去.我们约定,将从一个边格(包括角格)沿平行于小方格对角线的直线运动到另一边格所走的每条路线都称为方格表的对角线且运动方向不同时认为是不同的对角线.显然,这样的对角线共有有限多边.因此,当继续运动下去时,总可以使运动轨迹的折线的边数大于对角线数.从而由抽屉原理知,折线中必有两条边重合.设为第i条边和第j条边且$i<j$.因为按规则沿折线前进和倒退都是惟一确定的,故当沿折线从i边和j边同时倒退,i边退到第1条边时,j边退到$j-i+1$边.这条边和第1条边重合,也是从左上角的方格出发的,矛盾.这就证明了运动不能无限进行下去,而在某一时刻停止恰好意味着进入了某一角上的方格.

12·111 已知一个棱长为1的正四面体,求证

(1) 在四面体表面S上存在4点,使得对于S上的任何一点,4点中总有一点与它的距离不超过$\frac{1}{2}$(S上两点间的距离指沿表面的距离);

(2) 对于S上的任何3点组,都不具有类似的性质.

(波兰数学奥林匹克,1971年)

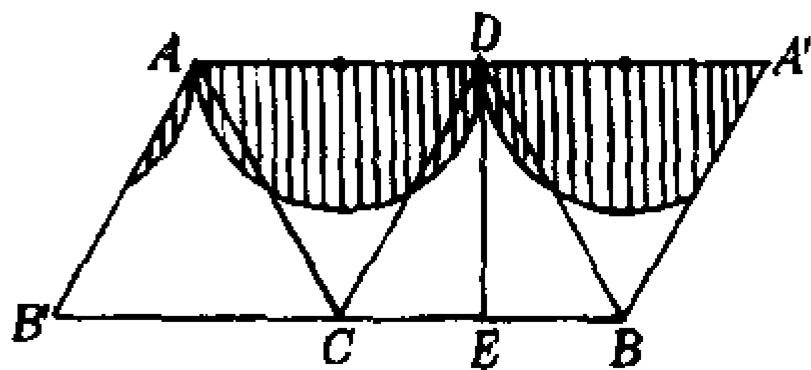


[证] 分别取6条棱的中点P,Q,R,T,U,V,并将位于同一面上的每两点之间都连一条线,于是每一面的三角形都被分成了4个小正三角形,其边长为$\frac{1}{2}$.易见,只要取4点P,Q,R,V,则四面体表面S上的16个小正三角形中的每个三角形都至少被取定一个顶点,从而对于S上的每点,都至

少有一个取定点与它的距离不超过$\frac{1}{2}$.

组合卷

设在 S 上有 3 点 P,Q,R,使得对于 S 上的任何一点,这 3 点中总有一点与它的距离不大于$\frac{1}{2}$. 由抽屉原理知,P,Q,R 中总有一点与四面体的两个顶点的距离都不大于$\frac{1}{2}$. 不妨设 P 与 A,D 两顶点的距离都不大于$\frac{1}{2}$. 从而 P 为线段 AD 的中点. 当我们将四面体表面展开后,其上与点 P 距离不大于$\frac{1}{2}$ 的点的集合如上图中阴影线所示.



考察点 D 与点 Q,R 间的距离. 如果点 D 与 Q,R 的距离都大于$\frac{1}{2}$,则因 $\triangle BCD$ 的高 DE 上的点(除点 D 之外)与 P 的距离都大于$\frac{1}{2}$,故 DE 上靠近点 D 的点与 P,Q,R 的距离都大于$\frac{1}{2}$,矛盾. 这意味着点 D 至少与 Q,R 之一的距离不大于$\frac{1}{2}$. 同理,点 A 也至少与点 Q,R 之一的距离不大于$\frac{1}{2}$. 此外,B,C 与点 P 的距离大于$\frac{1}{2}$,故也都至少与 Q,R 之一的距离不大于$\frac{1}{2}$. 这样,像前面一样地可证点 Q 与 R 也都是四面体的某条棱的中点,而且两点所在的两条棱必为一组对棱,即没有公共顶点的两条棱. 上述论证也可以从点 Q 开始而导致点 P,R 也位于一组对棱上,此不可能. 这就证明了任何 3 点都不能具有(1) 中所述的性质.

12·112 是否存在外切于某圆的 1992 边形,其边长分别为 1,2,…,1992(顺序可以任意)?

(第 33 届国际数学奥林匹克预选题,1992 年)

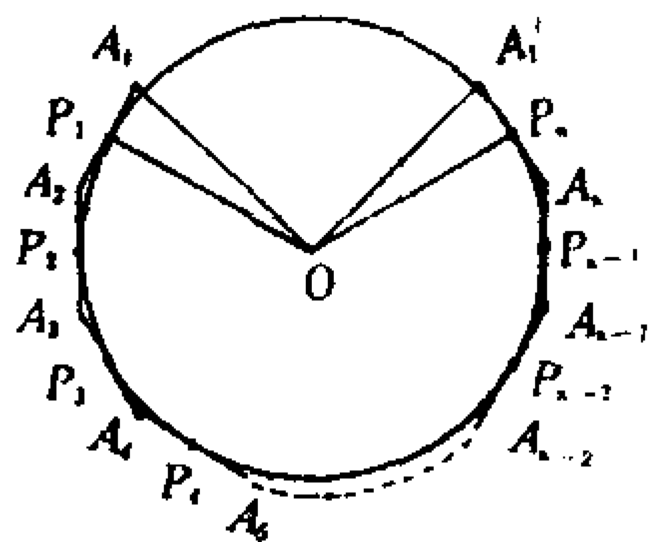
[解] 如果存在这样的凸 1992 边形 $A_1A_2\cdots A_{1992}$,设其边长依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_{1992}$,边与内切圆的切点依次为 $P_1,P_2,\cdots,P_{1992}$. 记 $1992=n$,令

$A_1P_1=A_1P_n=x_1,A_2P_1=A_2P_2=x_2,\cdots,A_nP_{n-1}=A_nP_n=x_n$,①

则方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1, \\ x_2 + x_3 = a_2, \\ \quad \cdots\cdots \\ x_n + x_1 = a_n \end{cases} \qquad ②$$

有正数解,其中$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\} = \{1,2,\cdots,n\}$.



反之,如果对于$\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,方程组②有正数解,则满足题中要求的1992边形也必然存在.这时可按方程组②中右端数值的顺序作出一条折线$A_1A_2A_3\cdots A_nA'_1$,使得边长依次为$a_1,a_2,\cdots,a_n$.然后以较大半径作一圆,并将这条折线缠绕在圆的外侧,使折线既不自交,也未封闭.注意,因为$A_1P_1 = x_1 = A'_1P_n$,所以有$OA_1 = OA'_1$.

逐渐缩小圆的半径r,将可达到

$$\operatorname{arctg}\frac{x_1}{r} + \operatorname{arctg}\frac{x_2}{r} + \cdots + \operatorname{arctg}\frac{x_n}{r} = \pi. \qquad ③$$

因为③式左端作为r的函数是连续的,所以这一点定能做到.由于$A_1O = A'_1O$,这时折线恰好封闭,就得到了满足要求的外切多边形.

最后,我们指出,方程组②对于$n = 4k$存在正数解组($1992 = 4\times 498$恰为这种情形).事实上,令

$$a_s = \begin{cases} s, & 当 s = 4t+1, 4t+2, \\ s+1, & 当 s = 4t+3, \\ s-1, & 当 s = 4t, \end{cases}$$

方程组②便有如下的解组:

$$x_s = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 当 s = 4t+1, \\ 1\frac{1}{2}, & 当 s = 4t+3, \\ s-1\frac{1}{2}, & 当 s 为偶数. \end{cases}$$

综上可见,满足要求的凸1992边形是存在的.

12·113　试证不存在这样的四面体,其中每条棱都是它的某个侧

面上的钝角的边.

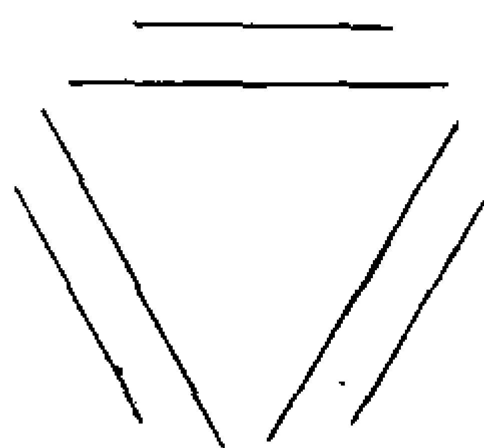
（第22届莫斯科数学奥林匹克,1959年）

[证] 设有一个这样的四面体 $ABCD$,并设 AB 是它的最长棱.当然,AB 是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中的最长边,从而它的邻角都为锐角,矛盾.

12·114 设在平面上给出了若干条互不相交的线段,其中任何两条都不共线.问是否总能再作若干条连结已知线段端点的线段,使得所有线段构成一条不自交的折线?

（第12届全苏数学奥林匹克,1978年）

[解] 不是总能做到这一点.例如在右图中有6条线段,其中有3条长线段和3条短线段.若能用一些线段连成一条不自交的折线,3条短线段中至少有一条处于折线的中间,即两个端点都要与其他线段连结.但显然,要使折线不自交,它只能与它附近的长线段连结,矛盾.



12·115 试证除四面体外,不存在其他的多面体,使它的任何两个顶点之间都有棱相连.

（匈牙利数学奥林匹克,1948年）

[证] 设有一个凸多面体,它的 n 个顶点中的任何两点间都有棱相连,于是共有 C_n^2 条棱.每条棱恰属于两个面,每个面至少有3条棱,所以多面体的面数不大于$\frac{2}{3}C_n^2$.利用凸多面体的欧拉定理,便有

$$n+\frac{2}{3}C_n^2 \geqslant C_n^2+2.$$

由此化简可得

$$(n-3)(n-4)\leqslant 0.$$

解得 $n\leqslant 4$.所以,每个顶点都与其他所有顶点有棱相连的凸多面体只能是四面体.

12·116 试证在平面上不可能作出多于4个凸多边形,使得其中每两个多边形都有公共边.

（第21届莫斯科数学奥林匹克,1958年）

[证] 若不然,设有5个凸多边形,其中每两个多边形都有公共边.换句话说,其中每个多边形都同另外4个多边形各有1条公共边.取

定一个多边形 M_0,并将另外 4 个多边形按公共边在 M_0 的位置顺次记为 M_1,M_2,M_3,M_4.按已知,M_1 与 M_3 有一条公共边.于是,M_0,M_1,M_3 这 3 个多边形或将 M_2 围在中间,M_4 在外,或将 M_4 围在中间而 M_2 在外.无论哪种情形,M_2 与 M_4 都不可能有公共边,矛盾.

12·117　给定一组 25 条线段,它们的起点都是某定点 A,它们的终点都在同一条不过点 A 的直线 l 上.试证不存在这样的闭折线,它共有 25 段,对其中的每一段,都可在给定线段组中找出一条线段与它平行且相等.

(第 26 届莫斯科数学奥林匹克,1963 年)

[证]　若不然,则存在一条满足要求的折线.按逆时针方向将折线的边标上箭头视为向量并将线段组中的相应线段也视为同向的向量.因为折线是封闭的,故折线上的 25 个向量在任何一条直线上的投影之和都是零.而线段组中的相应的 25 条向量或起点为 A,终点在直线 l 上或者相反.将它们都投影到过点 A 所作 l 的垂线上,则投影的长度都相等且异于零.又因 25 为奇数,当投影带上符号时也不会正负相消.换句话说,线段组中的 25 个向量的投影之和异于零,矛盾.

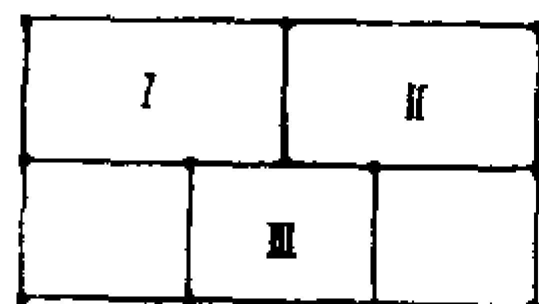
12·118　试证在半径为 1 的圆中,不可能无重叠地放入两个面积都大于 1 的三角形.

(第 37 届莫斯科数学奥林匹克,1974 年)

[证]　我们来证明它的加强命题:如果面积大于 1 的三角形位于半径为 1 的圆内,则圆心必严格地位于三角形内.

因为三角形的每条边都在圆内,故每条边长都不大于 2.又因三角形面积大于 1,故知三角形的 3 条高都大于 1.作出 3 条边所在的 3 条直线,并分别过 3 个顶点作对边的平行线,得到 3 个宽度均大于 1 的带形区域.而三角形恰是这 3 个带形域的交.因为圆心在每个带域的内部,故在三角形的内部.

既然圆心严格地在每个面积大于 1 的三角形内部,故两个三角形的内部必相交.



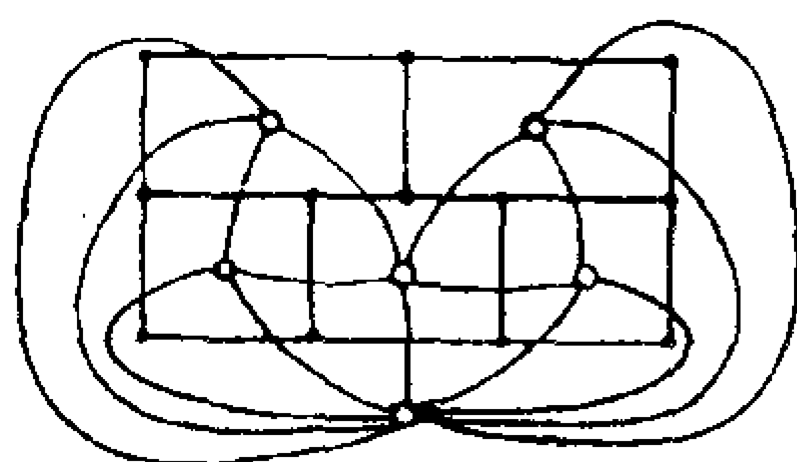
12·119　右图是一个由 16 条线段组成的图形,求证不可能作出一条折线,使它穿过图中的每条线段恰好一次.(折线可以是不封闭的或自交的,但它的顶点不能在图中的线段上,它的边不能通过线段

的端点)

(第1届全俄数学奥林匹克,1961年)

[解1] 假定能作出满足题中要求的折线.让我们来考察图中Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ这三个区域.显然,其中每个区域的边界都由5条线段组成.因为所作的折线与每条线段都恰好相交一次,所以每个区域中都包含折线的一个端点(否则,折线进入区域的次数与走出区域的次数必然相等,从而与区域边界相交的次数应为偶数而不能是5).但折线的端点至多两个,矛盾.从而证明了所要求的折线是不能作出的.

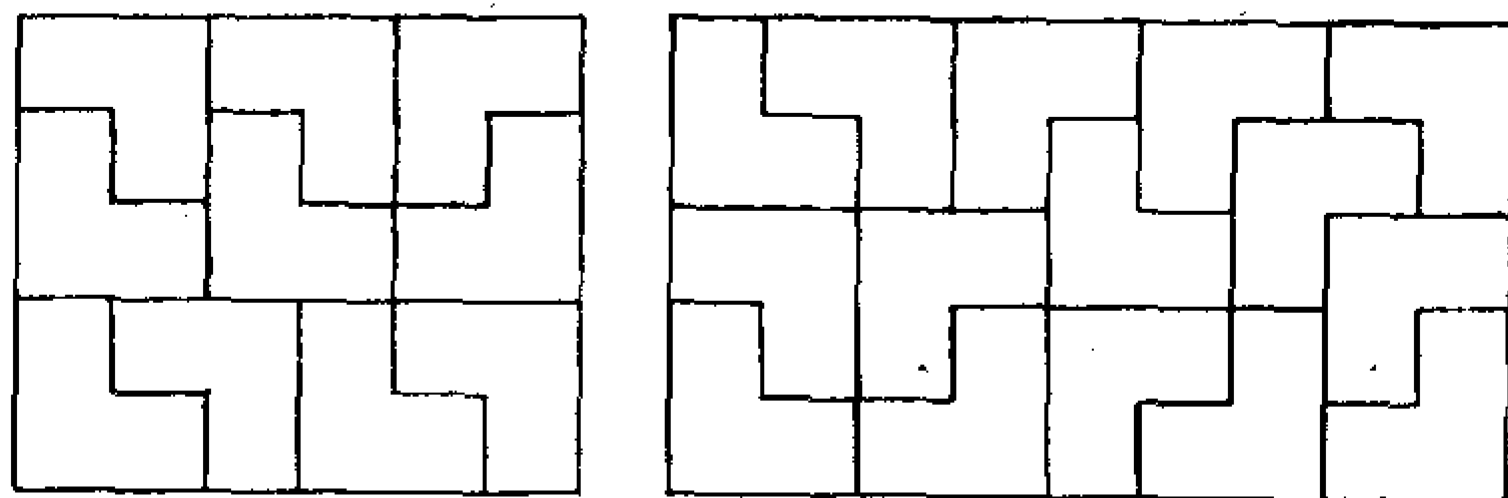
[解2] 显然,图中的线段将平面分成6个区域.现于每个区域中选定一点,共得到对应于6个区域的6点.对于每两个区域,如果它们的公共边界由k条线段组成($k=1,2$),则在相应两点间连结k条边,于是得到一个有6个顶点和16条边的图.这时,题中的要求就化为要求将这个图无重复地一笔画出,这是不可能的.因为图中的6个顶点中有4个顶点各引出奇数条线段,而能一笔画出的图只能有0或2个这样的顶点.



12·120 将2×2个方格正方形剪去其中的一个方格后,剩下3个方格所成的图形称为"角片".试证规格为1961×1963的方格矩形不能恰好剪成一些角片,而规格为1963×1965的矩形则恰好可以全部剪成一些角片.

(第25届莫斯科数学奥林匹克,1962年)

[证] 因为每个角片的面积为3,而1961×1963不是3的倍数,当然不能恰好分成一些角片.



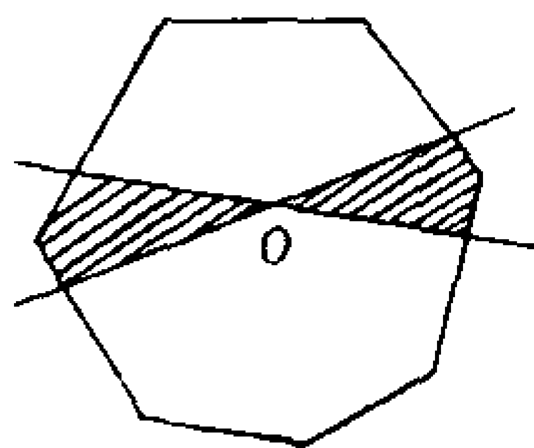
将1963×1965的方格矩形分成规格分别为1965×1958,1956×5和9×5的3个矩形.第1个矩形的一条边长是3的倍数,另一条边长是2的倍数,因此它可以划分成一些3×2的矩形,而每个这样的矩形恰可分成两个角片.第2个矩形可以划分成一些6×5的矩形,而每个这样的矩形恰可分成10个

角片(见左下图).第3个矩形则恰可分成15个角片(见右下图).

12·121　已知凸 n 边形的边两两不平行而 O 为形内一点.试证过点 O 不可能作出 n 条以上的直线,使其中的每条直线都平分 n 边形的面积.

(第7届全苏数学奥林匹克,1973年)

[证]　设有两条直线都平分凸 n 边形的面积.于是多边形落在由这两条直线构成的每一对对顶角中的部分有相等的面积(见右图).



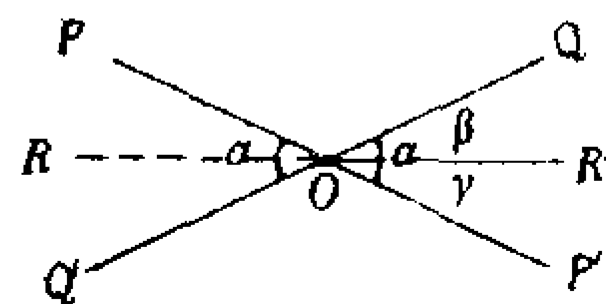
将已知多边形 M 和它关于点 O 的中心对称的多边形 M' 一起来考察.这时,上图中画有阴影线的图形恰好一个落在另一个之上,从点 O 发出的两条边分别重合,但原多边形的边界部分则不会完全重合,否则将会导致多边形 M 的两条边平行.这意味着多边形 M 和 M' 的周界在过点 O 的两条线的夹角内必相交.

设过点 O 且平分多边形面积的直线共有 k 条,则在它们互相相交而成的 $2k$ 个角的每个角中,都至少有 M 与 M' 边界的一个交点,总共至少有 $2k$ 个交点.另一方面,多边形 M 的每一边上至多有两个这样的交点,从而这样交点的总数至多为 $2n$ 个.结合起来即得 $k \leqslant n$.

12·122　试证在球面上不可能放置3条各为300°的大圆弧,使得其中任何两条弧都没有公共点(包括没有公共端点).

(第26届莫斯科数学奥林匹克,1963年)

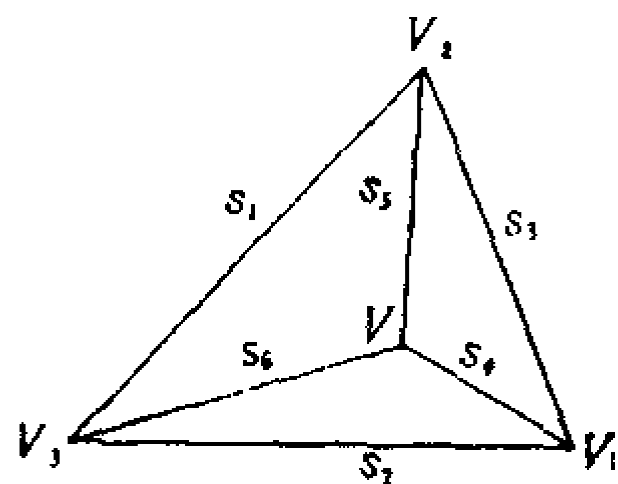
[证]　若不然,设我们可以在球面上画出3条各为300°的大圆弧 S_1, S_2, S_3,使其中任何两条弧都没有公共点(包括端点).将3条弧所在的圆周分别记为 C_1, C_2, C_3,并记 $S'_1 = C_1 - S_1, S'_2 = C_2 - S_2, S'_3 = C_3 - S_3$.将大圆 C_1 和 C_2 相交的对径点记为 P 和 P',大圆 C_2 和 C_3 相交的对径点记为 Q 和 Q',大圆 C_3 和 C_1 相交的对径点记为 R 和 R'.因为 S_1, S_2, S_3 中任何两条弧都没有公共点,故可设 $S_1 \cap S'_2 = P, S'_1 \cap S_2 = P', S_2 \cap S'_3 = Q, S'_2 \cap S_3 = Q', S_3 \cap S'_1 = R, S'_3 \cap S_1 = R'$.



考察球的3条直径 PP', QQ' 和 RR' 相交所成的诸角.因为 $R, P' \in S'_1, P, Q' \in S'_2, R', Q \in S'_3$,故有

$\alpha < 60°, \beta < 60°, \gamma > 120°$. 但另一方面,$\alpha, \beta, \gamma$ 作为三面角的3个面角,应有 $\alpha + \beta > \gamma$,矛盾.

12·123 给定一个平面图形(如图)以及在该平面内但不在线段 $S_1, S_2, \cdots, S_6$ 上的任意两点 Q_1 和 Q_2. 证明连结 Q_1 和 Q_2 且具有下述性质的折线 P 不存在.



(1)P 穿过每一$S_i(i = 1,2,\cdots,6)$恰有一次;

(2)P 不与它自身相交;

(3)P 不通过任一个顶点 V, V_1, V_2, V_3.

(第 7 届美国普特南数学竞赛,1947 年)

[证] 先证明一个引理:

在由三角形确定的一个平面内有一条折线,如果它不经过三角形的顶点,它穿过三角形的每条边恰好一次,它的两个端点又都不在三角形的边界上,则此折线必有一个端点位于三角形的内部.

引理的证明:设 T 为三角形,并设以 Q_1 和 Q_2 为端点的折线 P 满足引理的条件.

如果 Q_1 在三角形 T 的内部,则引理已成立.

如果 Q_1 在三角形 T 的外部,当我们沿着折线 P 从 Q_1 移向 Q_2 时,我们只遇到外点,直到我们穿过 T 的第一条边为止,然后我们只遇到内点,直到我们穿过 T 的第二条边为止,然后我们又只遇到外点,直到我们穿过 T 的第三条边为止,而且从穿过 T 的第三条边开始,包括端点 Q_2 在内的所有点都在 T 的内部,这时,Q_2 就是 T 的一个内点.

于是,引理得证.

下面证明本题.

假设存在一条满足题设条件的折线 P. 则 P 穿过 $\triangle VV_1V_2$, $\triangle VV_2V_3$, $\triangle VV_1V_3$ 的每条边恰好一次,由引理,这三个三角形的每一个内部都有 P 的一个端点,但是这些三角形的内部互不相交,而 P 又只有两个端点,所以这是不可能的.

12·124 试证在凸 n 边形中,不能挑选出多于 n 条对角线,使得它们之中任何两条对角线都有公共点.

(匈牙利数学奥林匹克,1962 年)

[证 1] 因为对于对角线的不同选取法只有有限多种,故满足题中要求的选法中必有一种对角线条数最多的选法. 设这时共选出 m 条

对角线.将多边形的边和其他对角线都擦去,于是我们得到一个有 n 个顶点和 m 条边的图,其中任何两条边都有公共点.

对于图中每个度数为 $i > 2$ 的顶点,由它恰引出 i 条边(对角线).由于 n 边形是凸的,故其中必有两条对角线处于边缘,而其他 $i-2$ 条处于二者构成的小于180°的角中.考察 $i-2$ 条位于中间的对角线的另外的端点.显然,这 $i-2$ 个顶点都是1度的.因为它们中的每点除了已与原 i 度顶点连有一条对角线外,不能再与任何其他顶点连有对角线.否则,这样的对角线至少与两条边缘对角线之一没有公共点,此与假设矛盾.这样一来,每个度数为 $i>2$ 的顶点以及与它有对角线相连的 $i-2$ 个1度顶点一起,共有 $i-1$ 个顶点且度数之和为 $i+(i-2)=2(i-1)$.

我们将图中每个度数大于2的顶点及与它相邻的度数为1的顶点划为一组,而度数不超过2的顶点自己算作一组.易见,每组顶点的度数之和都不超过顶点数的2倍.由于图中所有顶点的度数之和为 $2m$,故有 $m \leqslant n$,这就证明了至多能挑出 n 条对角线,使得其中任何两条都有公共点.

[证2] 注意,凸多边形的两条对角线是否有公共点,仅与作为两条对角线的端点的多边形的顶点的相互位置有关,而与多边形的形状,具体地说,与多边形每条边的长度及每个内角的大小无关.从而对于任一凸 n 边形,我们总可以把问题化到正 n 边形中来考虑.

我们把正 n 边形中互相平行的所有对角线划为一组,于是可以把所有对角线分成 n 组.如果有一组 m 条对角线,其中任何两条都有公共点,则必有 $m \leqslant n$.若 $m > n$,则由抽屉原理知,其中必有两条对角线属于上述 n 组中的同一组.从而二者平行而没有公共点,矛盾.这就证明了满足题中要求的对角线组中不能有多于 n 条对角线.

12·125 试证在坐标平面上不存在一条具有奇数个顶点,每个顶点的坐标都是有理数且每条边的长度都为1的闭折线.

(第31届国际数学奥林匹克预选题,1990年)

[证] 我们把坐标都是有理数的点称为有理点.设有一条满足题中要求的闭折线,$\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)$与$\left(\frac{a'}{b'},\frac{c'}{d'}\right)$是它的一条边的两个端点,其中$\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{a'}{b'},\frac{c'}{d'}$都是最简分数.设 b 和 d 都是奇数,可以证明 b',d' 及

$(a'-c')-(a-c)$ 也都是奇数.为此,令

$$\frac{a'}{b'}-\frac{a}{b}=\frac{p}{q},\quad \frac{c'}{d'}-\frac{c}{d}=\frac{r}{s},\qquad ①$$

其中$\frac{p}{q}$,$\frac{r}{s}$都是最简分数.因线段长度为1,即有$\left(\frac{p}{q}\right)^2+\left(\frac{r}{s}\right)^2=1$,故有

$$p^2s^2+r^2q^2=q^2s^2.\qquad ②$$

由②式可知 $q^2 \mid p^2s^2$,故有 $q \mid ps$.又因 q 与 p 互素,所以 $q \mid s$.同理由②可知 $s \mid q$.因而得到 $s=q$.代入②即得

$$p^2+r^2=q^2.\qquad ③$$

由于 p 与 q 互素,故由③可知 p 与 r 互素.因而 p 与 r 不能都是偶数.若 p 与 r 都是奇数,则由③有

$$q^2=p^2+r^2\equiv 1+1=2 \pmod 4,$$

此不可能.因此,p 与 r 必为奇偶各一,从而 q 为奇数.又因已知 b 为奇数,故 bq 为奇数.由①有

$$\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b}+\frac{p}{q}=\frac{aq+bp}{bq},\qquad ④$$

因此 $b' \mid a'bq$.因 a' 与b' 互素,故 $b' \mid bq$.从而 b' 为奇数.同理可证 d' 为奇数.进而,因 b,d,q 及 $p-r$ 都是奇数.故有

$$\begin{aligned}(aq+bp)-(cq+dr)&\equiv(a-c)+(p-r)\\&\equiv a-c+1 \pmod 2).\end{aligned}\qquad ⑤$$

由④知 a' 与$aq+bp$ 奇偶性相同.同理 c' 与$cq+dr$ 奇偶性相同.于是由⑤便知$(a'-c')-(a-c)$ 为奇数.

记闭折线为 $A_0A_1\cdots A_{2n}A_{2n+1}$,$A_{2n+1}=A_0$,不妨设 A_0 为原点,并记

$$A_i=\left(\frac{a_i}{b_i},\frac{c_i}{d_i}\right),i=0,1,\cdots,2n,$$

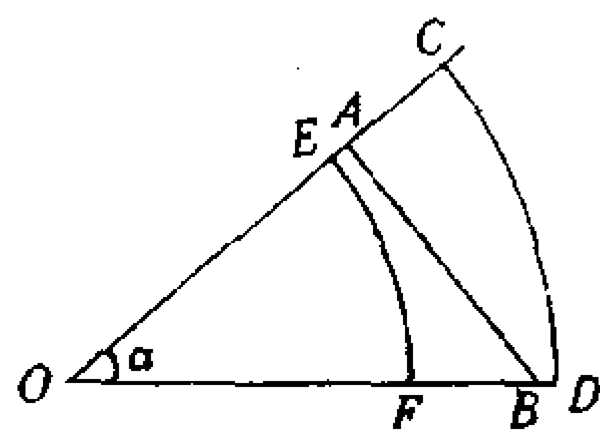
其中 $a_0=c_0=0,b_0=d_0=1,\frac{a_i}{b_i},\frac{c_i}{d_i},(i=1,\cdots,2n)$ 都是最简分数.于是由前段的结论知,b_i,d_i 都是奇数,$i=1,2,\cdots,2n,2n+1$,且 a_i-c_i 与$a_{i+1}-c_{i+1}$ 的奇偶性不同,$i=0,1,\cdots,2n$.因 $a_0-c_0=0$ 为偶数,故可推得 $a_{2n+1}-c_{2n+1}$ 为奇数,矛盾.这表明满足题中要求的闭折线不可能存在.

12·126　试证一个正方形不可能与多于 8 个互不重叠，大小与之相同的正方形相邻接(指有公共边界点但没有公共内点)．

(第 12 届莫斯科数学奥林匹克，1949 年)

[证 1]　设给定的正方形 Q 的边长为 1，中心为点 O．易见，与正方形 Q 邻接的正方形的中心都落在以点 O 为心，分别以 1 和 $\sqrt{2}$ 为半径的两圆所界的圆环上(包括边界)．

若有 9 个正方形都与 Q 邻接，则把它们的中心都与点 O 连结起来，于是以点 O 为顶点的周角被分成 9 个角，其中的最小角 $\angle AOB \leqslant 40°$，这里点 A 和 B 分别是两个与 Q 邻接的正方形的中心．因为分别以点 A 和 B 为中心的两个正方形内部不重叠，故有 $AB \geqslant 1$．



另一方面，当分别记两圆与射线 OA，OB 的交点为 E，F，C，D 时(见图)，我们有

$$AB \leqslant \max\{AF, AD\}, AF \leqslant \max\{EF, CF\},$$
$$AD \leqslant \max\{ED, CD\}, EF < CD, CF = ED.$$

故得

$$AB \leqslant \max\{CD, CF\}. \quad ①$$

因为 $OD = \sqrt{2}$，$\alpha \leqslant \frac{2\pi}{9}$，故有

$$CD < \overset{\frown}{CD} = \sqrt{2}\alpha \leqslant \sqrt{2} \times \frac{2\pi}{9} < \sqrt{2} \times 0.7 < \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1. \quad ②$$

同时由余弦定理又有

$$CF^2 = OC^2 + OF^2 - 2OC \cdot OF \cdot \cos\alpha$$
$$= 2 + 1 - 2\sqrt{2}\cos\alpha < 2 + 1 - 2\sqrt{2}\cos 45° = 1. \quad ③$$

将 ② 和 ③ 代入 ①，即得 $AB < 1$，矛盾．

[证 2]　若不然，则至少有 9 个互不重叠且大小均与给定正方形 Q 相同的正方形都与 Q 相邻接．当一个正方形与 Q 有 1 条公共边或仅有 1 个公共点在 Q 的某边内部时，称该正方形邻接于 Q 的该边；当正方形 Q 的某顶点属于另一正方形的某边内部或为与另一正方形的惟一公共点时，称另一正方形与 Q 的过该顶点的两条边相邻接．

9 个正方形与正方形 Q 的 4 条边相邻接，由抽屉原理知其中必有 3 个与 Q 的同一条边邻接．易见，3 个正方形中两边的两个必通过这条边

的顶点与 Q 邻接,即二者各与 Q 的两条边邻接.这样一来,当去掉中间的正方形后,其余8个正方形都分别与 Q 的另3条边之一相邻接.由抽屉原理知,3边中必有两边各与3个正方形相邻接.重复上述证明可知,正方形 Q 的每边都与3个正方形邻接,从而每个顶点都与一个正方形邻接.但这又导致正方形 Q 与8个不同的正方形邻接,矛盾.

12·127　已知在一条自交的闭折线中,它的每一条边都恰好与其他边相交一次,求证这条折线共有偶数条边.

(第19届莫斯科数学奥林匹克,1956年)

[证]　因为折线的每一条边都恰好与其他边相交一次,故当令每条边都对应于其上的交点时,就得到一个映射.又因每个交点都是两条边交出来的,故这个映射是倍数为2的倍数映射,所以边数是交点数的2倍,当然是偶数.

12·128　已知一个凸多边形的各边都位于某个凸100边形的对角线上,求证这个凸多边形的边数不会超过100.

(第43届莫斯科数学奥林匹克,1980年)

[证]　按逆时针方向为内部的多边形的每条边都标上箭头,并令其每条边对应于该边上的箭头所指的外部的凸100边形的顶点.因为内部多边形是凸的,故不可能有两边对应于同一个顶点,即这个对应是单射.故知内部多边形的边数不超过外部多边形的顶点数100.

12·129　已知一个凸多边形的所有对角线的长度都相等,求多边形边数的所有可能值.

(第37届莫斯科数学奥林匹克,1974年)

[解]　显然,正方形和正五边形的对角线的长度都相等.

另一方面,当 $n \geqslant 6$ 时,设凸 n 边形的顶点依次为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$.考察凸四边形 $A_1A_3A_4A_6$,则有 $A_1A_4 + A_3A_6 > A_1A_3 + A_4A_6$.由于这4条线段都是凸多边形的对角线,故其中必有两条对角线长度不相等.

可见,满足题中要求的多边形的边数为4或5.

12·130　有1000块正100边形的木头被钉在地板上,我们用绳子把整个体系箍起来,绷紧的绳子将界出某个多边形.求证此多边形的顶点多于99个.

(第32届莫斯科数学奥林匹克,1969年)

[证]　正多边形的外角之和为 2π,故正 100 边形的每个外角都等于 $\frac{2\pi}{100}=\frac{\pi}{50}$.

记绳子所界的多边形为 M. 因为 M 的每个内角都大于或等于正 100 边形的内角,所以 M 的每个外角都不大于 $\frac{\pi}{50}$. 若 M 的边数小于 100,则 M 的外角之和小于 2π,此不可能,故知 M 的顶点数必多于 99 个.

12·131　今有 16 个同样的弹子球,欲从中取出 n 个球来搭成一个空间形体,使得其中每个球都恰好与另外 3 个球相切,求所有满足条件的 n,并说明 n 个球应如何搭放?

（第 54 届莫斯科数学奥林匹克,1991 年）

[解]　若有 n 个球可以搭放得满足要求,则每个球上恰有 3 个切点,共有 $3n$ 个点,但在这个计数过程中恰好每点计数两次,故知不同的切点恰有 $\frac{3}{2}n$ 个. 可见,n 必为偶数且 $n>2$.

当 $n=4$ 时,可将 4 个球心分放在棱长为球的直径长的正四面体的 4 个顶点上. 当 $n=2k$,$k\geqslant 3$ 时,可先将 k 个弹子球放在一个平面上,使得它们的中心恰为一个边长等于球的直径长的正 k 边形的 k 个顶点,然后再在每个球的正上方放 1 个弹子球,使得该 2 球相切即可.

综上可知,所有可以满足要求的 n 为 $\{4,6,8,10,12,14,16\}$.

12·132　设在半径为 1 的圆上作出若干条弦,已知任何一条直径都不能与多于 6 条弦相交,求证所有这些弦的长度之和小于 19.

（基辅数学奥林匹克,1982 年）

[证]　将每条弦都对应于它所对的劣弧. 显然,弦长之和小于它们所对应的弧长之和. 故只须证明这些弧长之和不超过 19.

显然,与弦相交的直径必与该弦所对应的弧相交,即直径的 1 个端点落在该弧上(当弦为直径时,约定它所对应的半圆只带 1 个端点). 按已知,每条直径至多与 6 条弦相交,所以它的两个端点至多共落在 6 条弧上.

任作圆的一条直径,并把在该直径下方的劣弧或其一部分关于圆心对称到上半圆上去. 这样一来,上半圆上的每一点至多被 6 条弧所覆盖. 因而这些弧的长度之和不超过半周长的 6 倍,即这些弧的长度之和

$L \leqslant 6\pi < 19$.从而知所给的弧长之和小于 19.

12·133 在方格纸上作闭折线,使折线的每个顶点都是方格纸上的结点,而且折线的各边之长都相等,求证折线的边数必为偶数.

(第 27 届莫斯科数学奥林匹克,1964 年)

[证] 取以一个结点为原点,以过该结点的水平网格线为 x 轴,以方格一条边长为单位长的直角坐标系.设折线的第 i 条边在坐标轴上的投影分别为 $x_i, y_i, i = 1,2,\cdots,n$.于是

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \quad y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 0, \qquad ①$$

$$x_i^2 + y_i^2 = C, i = 1,2,\cdots,n, \qquad ②$$

其中 C 为固定的自然数.

下面我们分 3 种情形来证明.

(1)C 为奇数.因为完全平方数必为 $4k$ 或 $4k+1$ 的形式,故由 $x_i^2 + y_i^2$ 为奇数便知 x_i 与 y_i 奇偶性不同.设 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 中有 m 个奇数,于是 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 中有 $n - m$ 个奇数.由 ① 知 $m, n - m$ 均为偶数,故知 n 为偶数.

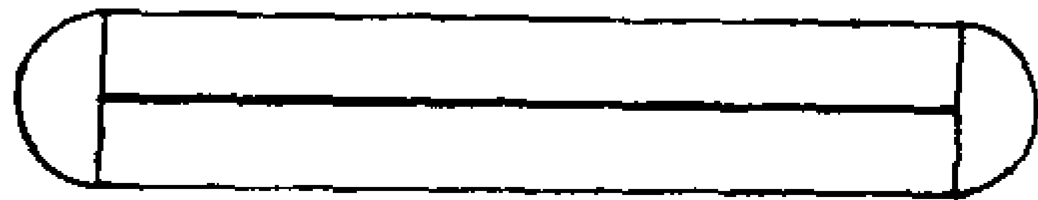
(2)$C = 4k + 2$.这时,由 ② 知 x_i, y_i 均为奇数.再由 ① 便知 n 为偶数.

(3)$C = 4k$.由 ② 知 x_i, y_i 均为偶数.设 2^m 是所有 x_i 和 y_i 都能被其整除的 2 的最高方幂.这时,只要把坐标系的单位取成方格边长的 2^m 倍,上述情形就化成了前两种情形之一.因而结论也成立.

12·134 在边长为 100 的正方形内,放着 n 个半径为 1 的圆.已知正方形内的任何一条长度为 10 的线段都至少与一个圆相交,求证 $n \geqslant 400$.

(第 23 届莫斯科数学奥林匹克,1960 年)

[证] 在下面的图形中,中间是 1 个 2×10 的矩形,两边各并上 1 个半径为 1 的半圆,我们称之为"圆头矩形":如果有某个半径为 1 的圆与圆头矩形中间的长为 10 的线段(图中粗实线画出的线段)相交,则圆心必在圆头矩形中.



将所给的边长 100 的正方形用平行于底边的平行线把它分成 50 个 2×100 的矩形.显然,在每个矩形中可放 8 个圆头矩形且互不相交.既

然每条长度为 10 的线段都至少与一个圆相交，故每个圆头矩形中至少有一个所给圆的圆心. 从而知 $n \geqslant 400$.

12·135　已知在边长为 50 的正方形内有一条折线，且对正方形内任意一点，折线上总有一个点与它的距离不大于 1，求证折线的长度大于 1248.

（前捷克斯洛伐克数学奥林匹克，1973 年）

［证］　将圆心属于点集 M 且半径为 1 的所有圆面的并集记为 $V(M)$，并对 $n \in N$ 用数学归纳法证明，对任意折线 $A_0A_1\cdots A_n$，都有

$$S_{V(A_0A_1\cdots A_n)} \leqslant 2\sum_{i=1}^{n} A_{i-1}A_i + \pi, \qquad ①$$

其中 $S_{V(M)}$ 表示集合 $V(M)$ 的面积.

当 $n = 1$ 时，集合 $V(A_0A_1)$ 可以分成两个半径为 1 的半圆面和 1 个边长为 A_0A_1 与 2 的矩形，因此有

$$S_{V(A_0A_1)} = 2A_0A_1 + \pi,$$

即当 $n = 1$ 时 ① 式成立. 设当 $n = k$ 时 ① 式成立. 当 $n = k+1$ 时，记

$$X = V(A_0A_1\cdots A_k), Y = V(A_kA_{k+1}), Z = X \cap Y.$$

因为 $V(A_k) \subset Z$，故有 $S_Z \geqslant \pi$. 于是由归纳假设便有

$$S_V(A_0A_1\cdots A_kA_{k+1}) = S_{X\cup Y} = S_X + S_Y - S_Z$$

$$\leqslant \left(2\sum_{i=1}^{k} A_{i-1}A_i + \pi\right) + (2A_kA_{k+1} + \pi) - \pi = 2\sum_{i=1}^{k+1} A_{i-1}A_i + \pi,$$ 即当 $n = k+1$ 时 ① 式成立.

设给定的折线为 $A_0A_1\cdots A_n$，正方形为 Q，按已知应有

$$V(A_0A_1\cdots A_n) \supset Q. \qquad ②$$

由 ① 和 ② 便知，折线的长度

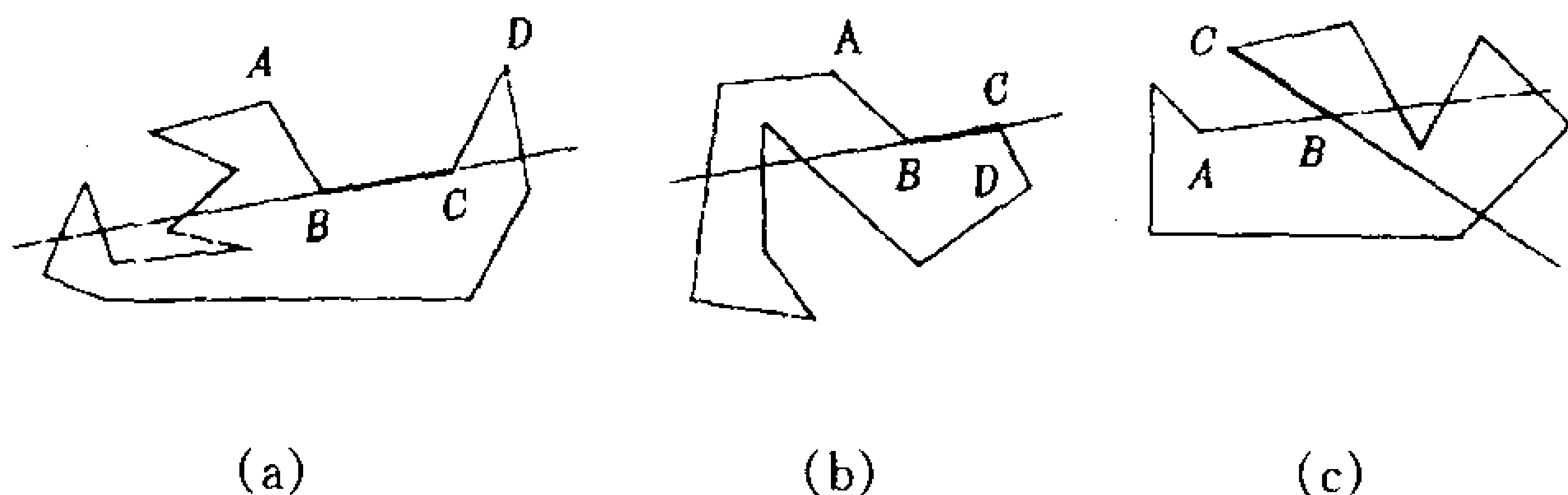
$$\sum_{i=1}^{n} A_{i-1}A_i \geqslant \frac{1}{2}(S_{V(A_0A_1\cdots A_n)} - \pi) > \frac{1}{2}(50^2 - 4) = 1248.$$

12·136　在平面上给定一条不自交的闭折线，它的任何 3 个顶点都不共线. 如果不相邻的两条边中的一条边的延长线与另一条边相交，则称它们是“奇异对”. 求证这种奇异对共有偶数个.

（第 11 届全苏数学奥林匹克，1977 年）

［证］　将折线的某一条边 BC 延长后所得的直线与其他的边相交的次数是偶数还是奇数取决于它的两条邻边 AB，CD 在直线 BC 的同

侧还是异侧,属于后一种情形的边 BC,称之为奇异边.奇异边延长后所得的直线与折线的奇数条边相交,当然构成奇数个奇异对.因此,问题归结为证明折线上共有偶数条奇异边.



(a) (b) (c)

当我们沿折线按逆时针方向行走时,可以指出在每个顶点是左拐还是右拐.容易看出,一条边为奇异边,当且仅当在它的两个端点处的拐弯是异向的.

将左拐顶点对应于1,右拐顶点对应于 -1,每条边对应于它的两个端点所对应数的乘积.则奇异边对应于 -1.因为折线是封闭的,所以,所有边所对应的数之积为1,故对应于 -1 的边,即奇异边的条数为偶数.

12·137 已知某个图形在空间中恰有 n 条对称轴,求证 n 为奇数.

(波兰数学奥林匹克,1969年)

[证] 我们先来证明两条引理.

引理1 如果直角坐标系的 x 轴和 y 轴都是图形 F 的对称轴,那么 z 轴也是这个图形的对称轴.

设点 $A=(x,y,z)$ 是图形 F 上的任意点.因为 x 轴和 y 轴都是对称轴,所以 $(x,-y,-z)$ 和 $(-x,-y,z)$ 都是 F 上的点.但后者恰为点 A 关于 z 轴的对称点.

引理2 如果直线 l_1 和 l_2 都是图形 F 的对称轴,那么直线 l_1 关于直线 l_2 的对称直线 l_3 也是 F 的对称轴.

设点 A_1 是图形 F 上的任意一点,A_2 是 A_1 关于直线 l_2 的对称点,A_3 是 A_2 关于直线 l_1 的对称点,A_4 是 A_3 关于 l_2 的对称点.按已知,A_2,A_3,A_4 都是图形 F 上的点.易见,点 A_4 是 A_1 关于直线 l_3 的对称点.由 $A_1\in F$ 的任意性便知 l_3 也是 F 的对称轴.

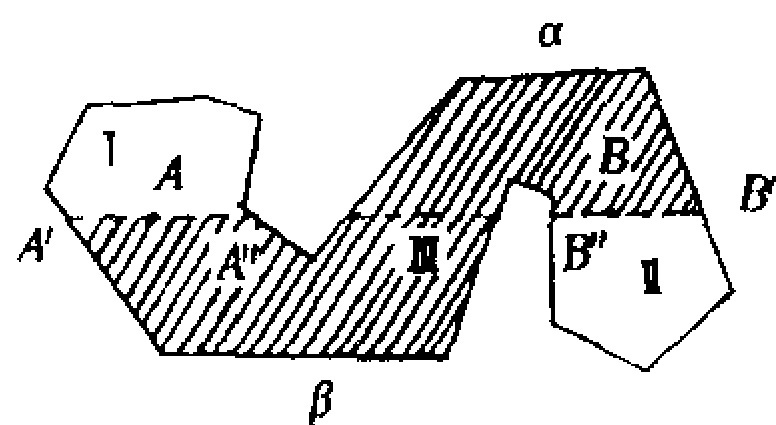
现在回到题目结论的证明.设图形 F 的 n 条互不相同的对称轴为

$l_1, l_2, \cdots, l_n$. 不妨设 $n > 1$. 对于任意的 $l_i, i \geqslant 2$, 如果 l_i 与 l_1 垂直相交，则由引理1知必有过二者交点且与二者都垂直的对称轴 l_j，令 l_i 与 l_j 对应，显然，l_i 与 l_j 互相对应；如果 l_i 与 l_1 不交或相交但不垂直，则由引理2知，l_i 关于 l_1 的对称直线 $l_j(\neq l_i)$ 也是图形 F 的对称轴，令 l_i 与 l_j 对应，则二者也是互相对应. 这样一来，除 l_1 之外，其余的 $n-1$ 条对称轴恰好配成若干对，即 $n-1$ 为偶数，所以 n 为奇数.

12·138　已知在多边形中存在着两点 A 和 B，使得任何连结着 A，B 且整个位于多边形内部或边上的折线的长度都大于1，求证多边形的周长大于2.

（第21届莫斯科数学奥林匹克，1958年）

［证］　如果线段 AB 整个地含于多边形之中，则直线 AB 将多边形的周界分为两部分，每部分的长度都大于1，周长当然大于2.



现在设线段 AB 不是整个地含于多边形之中. 我们在直线 AB 上取两个它与多边形边界的交点 A' 和 B'，二者都在线段 AB 的延长线上且分别最靠近于点 A 和 B；再类似地在线段 AB 上取两个它与多边形边界的交点 A'' 和 B''，二者分别最靠近于点 A 和 B（见上图）. 于是线段 $A'A''$ 和 $B'B''$ 将整个多边形分成3部分：区域 Ⅰ 的边界由线段 $A'A''$ 及多边形的部分边界组成；区域 Ⅱ 的边界由线段 $B'B''$ 及多边形的部分边界组成；区域 Ⅲ 的边界由线段 $A'A''$，$B'B''$ 以及多边形的两部分边界 α, β 组成. 折线 $AA''\alpha B'B$ 和 $AA'\beta B''B$ 都整个含于原多边形内部及边界上，按已知，二者的长度都大于1，两条折线的长度之和大于2. 当用区域 Ⅰ 和 Ⅱ 与原多边形共有的边界分别代替 $A'A''$ 和 $B'B''$ 时，长度和不减. 从而知原多边形的周长大于2.

12·139　设平面上凸 n 边形的所有对角线的长度之和为 d，周长为 p，求证

$$n-3<\frac{2d}{p}<\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2. \qquad ①$$

（第25届国际数学奥林匹克，1984年）

［证］　设凸 n 边形为 $A_1A_2\cdots A_n$，A_iA_j 为它的一条对角线. 于是由三角不等式有

$$A_iA_j + A_{i+1}A_{j+1} > A_iA_{i+1} + A_jA_{j+1},$$

其中若有 $k > n$,则约定 $A_k = A_{k-n}$.把上式对所有对角线求和,则每条对角线在左边出现两次,而每条边在右边出现 $n-3$ 次,故得

$$n - 3 < \frac{2d}{p}. \quad ②$$

为证 ① 中第二个不等式,考察对角线 A_iA_j.因为这是连结 A_i 和 A_j 的最短线,故有

$$A_iA_j < A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + \cdots + A_{j-1}A_j, \quad ③$$

$$A_iA_j < A_jA_{j+1} + A_{j+1}A_{j+2} + \cdots + A_{i-1}A_i. \quad ④$$

若 n 为奇数,设 $n = 2k-1$,对于每个 A_iA_j,取 ③,④ 两式中右端式子中项数较少的一个,并把这 $\frac{1}{2}n(n-3)$ 个不等式相加,于是左边得到 d,右边得到各边长度的和,其中每一条边都恰好出现 $2+3+\cdots+(k-1) = \frac{1}{2}k(k-1)-1$ 次.因此

$$d < \frac{p}{2}[k(k-1)-2] = \frac{p}{2}\left(\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}-2\right) = \frac{p}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2\right). \quad ⑤$$

若 $n = 2k$ 为偶数,除对角线 A_iA_{i+k}(称为"直径")外再加上运用不等式 ③ 和 ④.对直径我们直接有不等式

$$A_iA_{i+k} \leqslant \frac{1}{2}p, i = 1,2,\cdots,k.$$

把这些不等式相加,得到

$$d < k\cdot\frac{1}{2}p + \frac{p}{2}[k(k-1)-2] = \frac{p}{2}\left(\frac{n^2}{4}-2\right) = \frac{p}{2}\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]-2\right). \quad ⑥$$

将 ⑤ 与 ⑥ 合起来即得证 ①.

12·140　已知一个长方体盒子,可用单位正方体填满.如果改放尽可能多的体积为 2 的正方体且使每个正方体的棱与盒子的棱分别平行,则盒子的容积恰被填满 40%,试求出具有这种性质的盒子的容积($\sqrt[3]{2} = 1.2599\cdots$).

(第 18 届国际数学奥林匹克,1976 年)

[解] 设 Q 为一个具有题中所述性质的长方体盒子，其3边长分别为 a,b,c 且 $a\leqslant b\leqslant c$. 由于盒子可被单位正方体填满，故 a,b,c 均为自然数. 因为体积为2的正方体的棱长为 $\sqrt[3]{2}$，故有 $a\geqslant 2$. 当在盒子中放体积为2的正方体时，最多可放入

$$\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right]$$

个. 由于其体积为盒子体积的40%，故有

$$2\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right]=0.4abc. \qquad ①$$

为便于讨论，我们将①改写成

$$\frac{a}{\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]}\cdot\frac{b}{\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]}\cdot\frac{c}{\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right]}=5. \qquad ②$$

为求②的自然数解组 $\{a,b,c\}$，考虑函数

$$g(n)=\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]},\quad n=2,3,\cdots. \qquad ③$$

为讨论函数 $g(n)$ 的性质，我们列表如下：

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]$	1	2	3	3	4	5	6	7	7	…
$g(n)$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{10}{7}$	…

由表中可以看出，从 $n=6$ 开始，便有 $g(n)\leqslant\frac{3}{2}$，且当 $n\geqslant 7$ 时，$g(n)<\frac{3}{2}$. 下面我们来具体证明这一点. 事实上，当 $n>10$ 时，直接估算便有

$$g(n)=\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]}\leqslant\frac{n}{\frac{n}{\sqrt[3]{2}}-1}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{n}}<\frac{1}{\frac{1}{1.26}-0.1}$$

$$=\frac{1.26}{1-0.126}<\frac{1.26}{0.87}=\frac{42}{29}<1.5. \qquad ④$$

由②和④及上表所列的结果可知 $a=2$.若不然,则 $a\geqslant 3$,从而 $g(a)\leqslant\frac{5}{3}$,$g(b)\leqslant\frac{5}{3}$,$g(c)\leqslant\frac{5}{3}$,故得 $g(a)g(b)g(c)\leqslant(\frac{5}{3})^3=\frac{125}{27}<5$,此与②矛盾.

将 $g(a)=2$ 代入②式,得到

$$g(b)g(c)=\frac{5}{2}. \qquad ⑤$$

由⑤可知,$g(b)$ 和 $g(c)$ 中至少有一个大于 $\frac{3}{2}$,因此,可能的情形只有下列两种;

(1) $g(b)=2,g(c)=\frac{5}{4}$;

(2) $g(b)=\frac{5}{3},g(c)=\frac{3}{2}\left(\text{或 } g(b)=\frac{3}{2},g(c)=\frac{5}{3}\right)$.

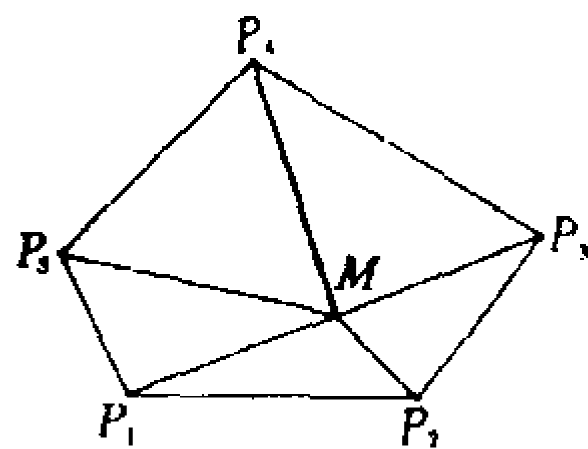
但因 $g(n)\geqslant\sqrt[3]{2}>1.25$,所以(1)不可能.而由(2)及上表便知⑤的解有两组:$b=5,c=6$ 和 $b=3,c=5$.

综上可知,长方体盒子的容积是 $2\times3\times5=30$ 或 $2\times5\times6=60$.

12·141 试证平面上的整点凸五边形(即五个顶点坐标都是整数的凸五边形)的面积不小于 $\frac{5}{2}$.

(第51届美国普特南数学竞赛,1990年)

[**证**] 对于五个整点,必有两点的连线的中点 M 也是整点,因为是整点凸边形,所以 M 在五边形的内部或边界上.

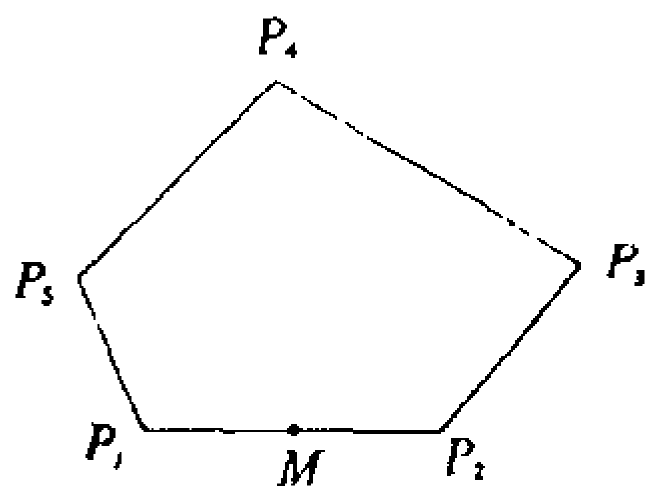


(1) 若 M 在凸五边形的内部:

不妨设 M 为凸五边形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 中 P_1P_3 的中点,连结 P_2M,P_4M,P_5M,得到五个整点三角形.

因为每个整点三角形面积不小于 $\frac{1}{2}$,

所以五边形面积不小于 $5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.



(2) 若 M 在边界上,设 M 是 P_1P_2 的中点.

因为 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 是凸五边形,所以 P_3P_4,

P_4P_5 这两条边中必有一条与 P_1P_2 不平行.

设 P_3P_4 与 P_1P_2 不平行.

这时 $\triangle P_2P_3P_4$, $\triangle MP_3P_4$, $\triangle P_1P_3P_4$ 的面积互不相等,

又因为每个整点三角形的面积均为 $\frac{1}{2}\times$ 整数,所以上述三个三角形中面积最大的一个必不小于 $\frac{3}{2}$,设 $\triangle P_1P_3P_4$ 的面积不小于 $\frac{3}{2}$,于是

$$S_{\text{五边形}P_1P_2P_3P_4P_5} = S_{\triangle P_1P_3P_4} + S_{\triangle P_1P_2P_3} + S_{\triangle P_1P_4P_5}$$
$$\geqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

由以上,命题得证.

12·142 在坐标平面上给定一个 100 边形 P,满足条件:

(1) P 的顶点都是整点;

(2) P 的边都与坐标轴平行;

(3) P 的边长都是奇数.

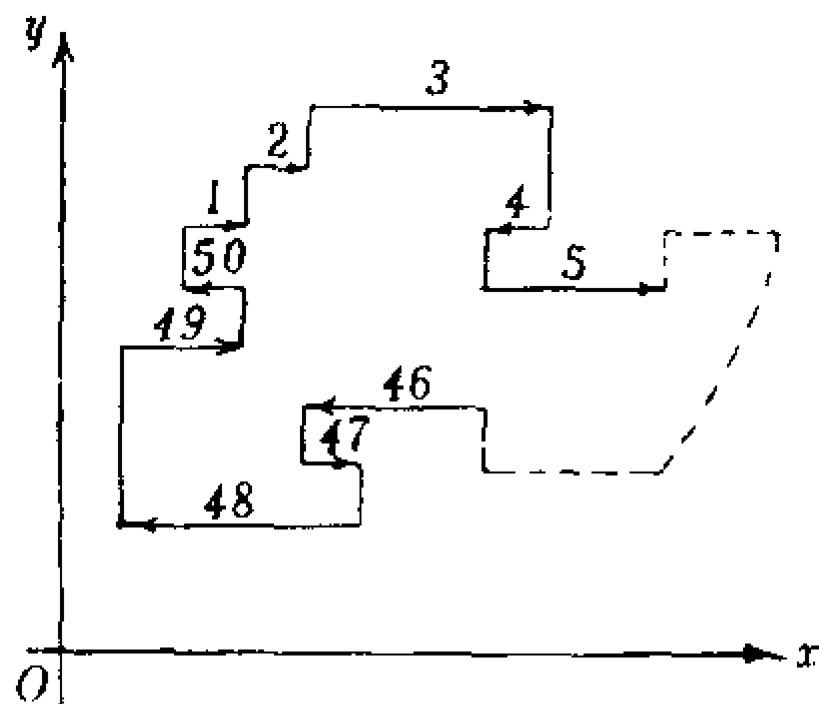
求证 P 的面积是奇数.

(中国国家集训队选拔试题,1987 年)

[证] 不妨设多边形 P 全在第一象限内部,否则可经过一个适当的平移化成这种情形.沿多边形 P 的边界顺时针绕行一周,将依次经过的 50 条水平边分别编号为 $1,2,\cdots,50$.将底边在 x 轴上并以第 i 号水平边为上底的矩形的面积记为 $S_i(i=1,2,\cdots,50)$.于是 P 的面积 S 可以表为诸 S_i 的代数和:

$$S = \sum_{i=1}^{50}(\pm S_i),$$

其中的正负号视沿该矩形上底前行时的方向与 x 轴的正向相同还是相反而定.例如,下图中的多边形 P 的面积 S 为



$$S = S_1 + S_2 + S_3 - S_4 + S_5 + \cdots + S_{47} - S_{48} + S_{49} - S_{50}.$$

由于矩形的上底长为奇数,故其面积的奇偶性由其高度来决定.易见,编号相邻的两个矩形,它们的高度差为奇数,因而面积的奇偶性不同.从而在 50 个矩形面积值中,

奇偶数交替出现,其中恰有25个奇数.故知 S 为奇数.

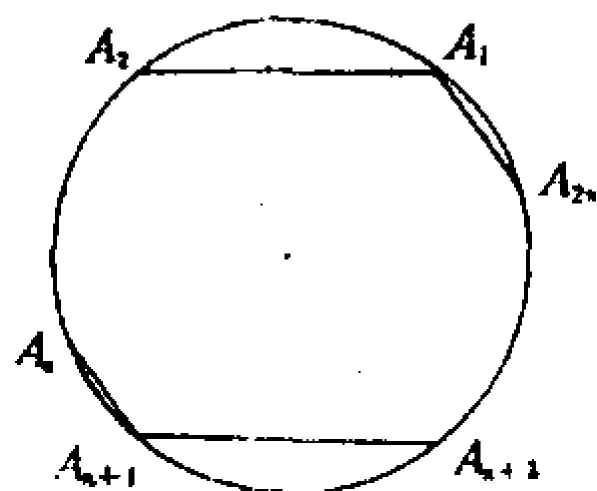
12·143　求所有可能的 $n \in (N - \{1\})$,使当圆内接 $2n$ 边形中有 $n-1$ 组对边分别平行时,余下的1组对边也平行.

(芬兰数学奥林匹克,1980年)

[解]　我们断言,满足题中要求的所有 n 的集合为

$$M = \{n \mid n = 2k+1, k \in N\}.$$

设 $n \in M$,且在 $2n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 中除1组对边 A_1A_{2n}, A_nA_{n+1} 外,其他 $n-1$ 组对边分别平行.如果 $\overparen{A_1A_2A_{n+1}} = 180° + \alpha$(见图),则因 $A_1A_2 \parallel A_{n+1}A_{n+2}$,故有



$$\begin{aligned}\overparen{A_2A_{n+1}A_{n+2}} &= \overparen{A_2A_nA_{n+1}} + \overparen{A_{n+1}A_{n+2}} \\ &= \overparen{A_1A_{2n}A_{n+2}} + \overparen{A_{n+2}A_{n+1}} \\ &= 360° - \overparen{A_1A_2A_{n+1}} = 180° - \alpha.\end{aligned}$$

同理有

$$\overparen{A_3A_{n+2}A_{n+3}} = 180° + \alpha, \overparen{A_4A_{n+3}A_{n+4}} = 180° - \alpha,$$

$$\overparen{A_nA_{n+1}A_{2n}} = 180° + (-1)^{n-1}\alpha = 180° + \alpha.$$

由此即得

$$\overparen{A_1A_2A_n} = 180° + \alpha - \overparen{A_nA_{n+1}} = \overparen{A_{n+1}A_{n+2}A_{2n}}.$$

所以 $A_nA_{n+1} \parallel A_1A_{2n}$.这表明 M 中的所有 n 都满足题中要求.

下面证明任何偶数 m 都不满足题中要求.令 $n = m+1$,则 $n \in M$.构造一个圆内接 $2n$ 边形,使得它的每组对边都平行,但 $\overparen{A_1A_2A_{n+1}} < 180°$.为此,只需在圆上先取 $\overparen{A_1A_{n+1}} = 178°$,然后用分点 $A_2, A_3, \cdots, A_n$ 将它 n 等分.再依次作弦 $A_{n+1}A_{n+2} \parallel A_1A_2$, $A_{n+2}A_{n+3} \parallel A_2A_3, \cdots, A_{2n-1}A_{2n} \parallel A_{n-1}A_n$.由前段证明知,$A_{2n}A_1 \parallel A_nA_{n+1}$.这时有

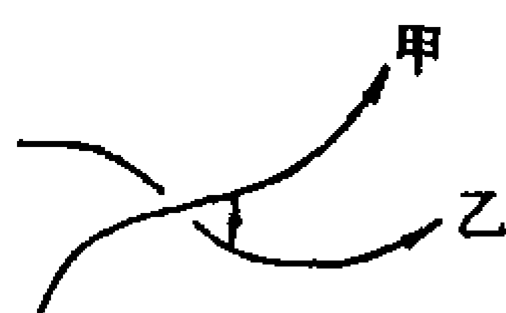
$$\overparen{A_2A_{n+1}A_{n+2}} = 360° - \overparen{A_1A_2A_{n+1}} = 182° = \overparen{A_{2n}A_1A_n}.$$

因而得到

$$\begin{aligned}&\overparen{A_2A_3A_n} - \overparen{A_{2n}A_{2n-1}A_{n+2}} = \overparen{A_2A_{n+1}A_{n+2}} - \overparen{A_{2n}A_{n+1}A_n} \\ &= \overparen{A_2A_{n+1}A_{n+2}} - (360° - \overparen{A_{2n}A_1A_n}) = 4° \neq 0.\end{aligned}$$

由此可知 A_2A_{2n} 与 A_nA_{n+2} 不平行，即圆内接 $2m$ 边形 $A_2A_3\cdots A_nA_{n+2}A_{n+3}\cdots A_{2n}$ 有 $m-1$ 组对边分别平行，但另一组对边却不平行.

12·144 对两条有方向的曲线的交叉点 A，我们定义"交叉特征值" $\varepsilon(A)$ 如下：



$\varepsilon(A)=-1$

（甲在乙的上面）



$\varepsilon(A)=+1$

（甲在乙的下面）

现有一张两条曲线圈放在一起的模糊照片（在各交点处哪条曲线在上面已分辨不清）对两条曲线圈所规定的方向

如图中所示，照片中四个点的交叉特征值满足

$$\varepsilon(A_1)+\varepsilon(A_2)+\varepsilon(A_3)+\varepsilon(A_4)=0.$$

求证这两条曲线圈实际上是可以完全分离开的（即成为两个单独放置没有重叠的曲线圈）.

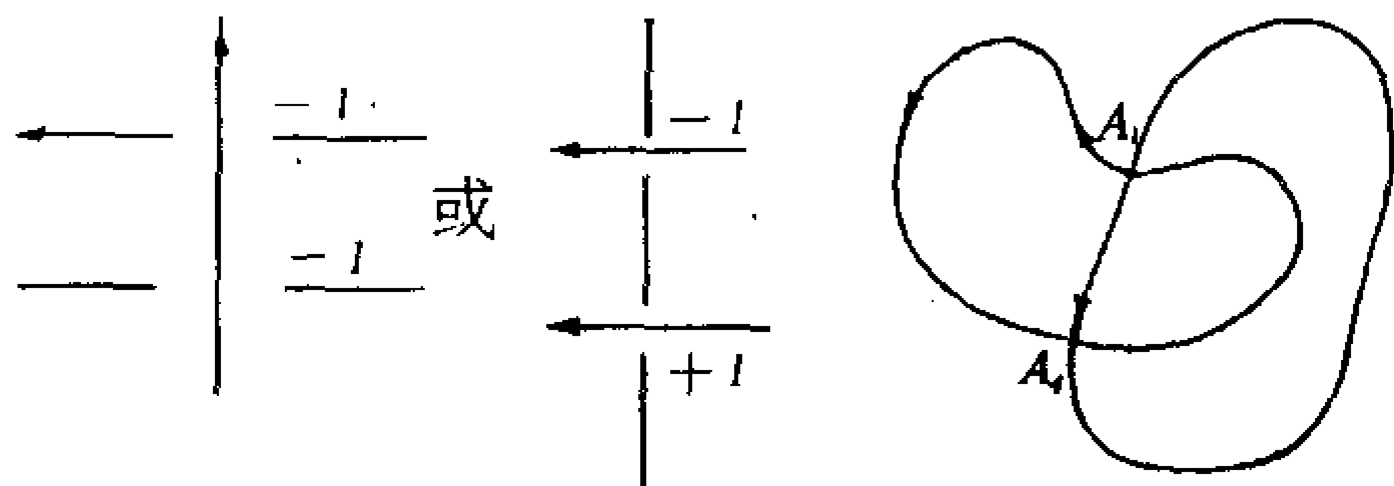
（中国北京市数学竞赛，1991 年）

[证] 因为 $\varepsilon(A_1)+\varepsilon(A_2)+\varepsilon(A_3)+\varepsilon(A_4)=0$，

所以 $\varepsilon(A_i)$ 中必有两个 $+1$，两个 -1.

因此在 (A_1,A_2)，(A_2,A_3)，(A_3,A_4)，(A_4,A_1) 中必有一对的交叉特征值正好符号相反. 不妨设为 (A_2,A_3) 两点的交叉特征值符号相反，即 $\varepsilon(A_2)$，$\varepsilon(A_3)$ 中一个为 -1，另一个为 $+1$.

则依交叉特征值定义可以判定，横向的两股曲线都在竖向的上部



或下部.如图

从而可分离成如图的样子.

但 A_1, A_4 两点的交叉特征值也一个为 $+1$,一个为 -1.

所以同样两圈可以分离,变为分离状态.即可分成两个单独的没有重叠的曲线圈.

12·145　已知一个多面体有 12 个面且满足下列条件:

(1) 所有面都是等腰三角形;

(2) 棱的长度只有 x 和 y 两个值;

(3) 交会于每一顶点的棱数为 3 或 6;

(4) 所有的二面角都相等.

求比 $\frac{x}{y}$ 之值.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

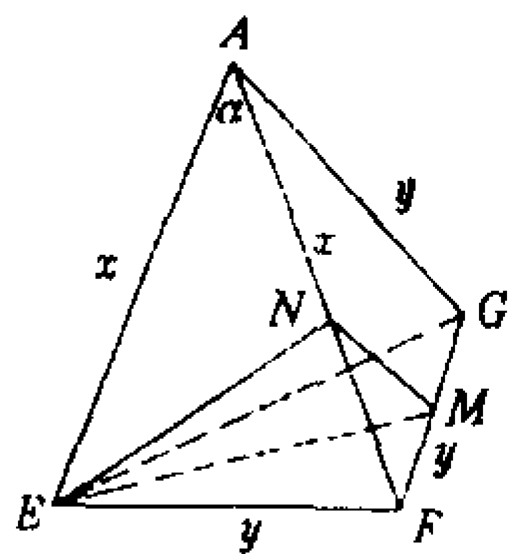
[解]　这个多面体共有 12 个面,每个面有 3 条边,每条棱恰为两个面的公共边,所以,多面体共有 18 条棱.由欧拉公式知,它共有 8 个顶点.设引出 3 条棱的顶点有 u 个,引出 6 条棱的顶点有 v 个,于是有

$$u + v = 8,\quad 3u + 6v = 36.$$

解得 $u = 4, v = 4$.

设引出 3 条棱的 4 个顶点是 A, B, C, D,引出 6 条棱的 4 个顶点是 E, F, G, H.因为 E, F, G, H4 点间至多有 6 条棱,故由它们至少向前 4 点引出 12 条棱.而由 A, B, C, D 这 4 点共引出 12 条棱,故这 4 点之间没有棱.

设从点 A 引出的 3 条棱为 AE, AF, AG,则 $AE = AF = AG$.若不然,不妨设 $AE = AF = x, AG = y, x \neq y$,而 $EF = y$.如果 $FG = x$,那么 $\triangle AEF \cong \triangle FGA$,从而有 $\angle EAF = \angle AFG$.因已知所有二面角都相等,所以 $\angle EAF = \angle FAG = \angle GAE$(记为 α).从而有 $\angle FAG = \angle AFG$,由此得到 $x = FG = AG = y$,矛盾.可见,$FG = y$(见上图).同理 $EG = y$.设 $\frac{y}{x} = \lambda$,于是从 $\triangle EAF$ 得到 $y = 2x\sin\frac{\alpha}{2}$,从 $\triangle AGF$ 得到 $x = 2y\cos\alpha$,故得



$$\lambda = 2\sin\frac{\alpha}{2},\quad \frac{1}{\lambda} = 2\cos\alpha.$$

由此可得关于 λ 的方程

$$(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-1) = \lambda^3-2\lambda+1 = 0.$$

解得惟一满足要求的解为 $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 从而得到 $\cos\alpha = \frac{1}{2\lambda} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$. 由特殊角的三角函数值知 $\alpha = 36°$.

过 E, F 分别作 AG 的垂线,由于 $\angle AGE = \angle AGF = 108°$,由余弦定理知,二面角 $E-AG-F$ 的平面角的余弦值等于

$$\frac{(y\sin72°)^2+(y\sin72°)^2-y^2}{2(y\sin72°)^2} = \frac{\cos36°}{1+\cos36°} = \frac{1}{2\lambda+1} > 0. \text{①}$$

另一方面,设 M 是 FG 的中点,过 M 作 FG 的垂线交 AF 于点 N,则 $\angle EMN$ 是二面角 $E-FG-A$ 的平面角,对 $\triangle EMN$ 和 $\triangle EFN$ 使用余弦定理,得到

$$\cos EMN = \frac{NM^2+EM^2-EN^2}{2NM\cdot EM},$$

其中 $EN^2 = NF^2+EF^2-2NF\cdot EF\cos72°$. 因而有

$$\cos EMN = \frac{\frac{y^2}{4}(4\lambda^2-1)+\frac{3}{4}y^2-y^2\left\{\lambda^2+1-2\lambda\left(\frac{1}{2\lambda^2}-1\right)\right\}}{2\cdot\frac{y}{2}\mathrm{tg}36°\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}y}$$

$$= \frac{-4\lambda^2-\lambda+2}{\lambda\sqrt{3}\mathrm{tg}36°} = \frac{3\lambda-2}{\lambda\sqrt{3}\mathrm{tg}36°} < 0, \qquad \text{②}$$

其中最后的不等式是因为

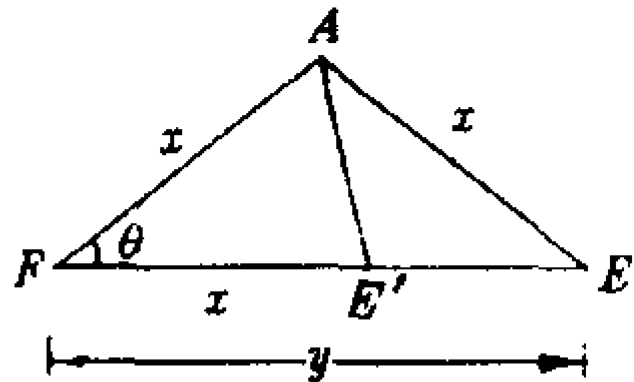
$$3\lambda-2 = 3\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}-2 = \frac{1}{2}(3\sqrt{5}-7) < 0.$$

由 ① 和 ② 可见,二面角 $E-AG-F$ 为锐角而二面角 $A-GF-E$ 为钝角. 又因二面角 $A-GF-E$ 为多面体的以 GF 为棱的二面角的一部分,所以多面体的这两个二面角不等,此与已知矛盾. 从而得知,$AE = AF = AG = x$, $EF = FG = GE = y$.

对顶点 B, C, D 进行类似论证可知,这个 12 面体是由一个边长为 y 的正四面体 $EFGH$ 出发,在它的每一个面上向外作一个正棱锥 $AEFG$, $BEFH$, $CFGH$, $DEGH$ 而构成的.

过 A,B,C 三点作一个平面分别交 EF,HF,GF 于 E',F',G' 三点.于是由对称性易知六边形 $AE'BF'CG'$ 是正六边形,且 $FA=FE'=x$,$AE'=\frac{x}{\sqrt{3}}$.(如右图)

记 $\angle AFE=\theta$,则有



$$\frac{y}{2x}=\cos\theta=1-2\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2,$$

$$\frac{x}{2\sqrt{3}x}=\cos\left(90^\circ-\frac{\theta}{2}\right)=\sin\frac{\theta}{2}.$$

由此即得 $\frac{x}{y}=\frac{5}{3}$.

12·146　由2×2方格纸去掉1个方格所余下的图形称为拐形.用这种拐形去覆盖5×7的方格板,每个拐形恰覆盖3个方格,可以重叠但不能超出方格板的边界.问能否使方格板上每个方格被覆盖的层数都相同?说明理由.

(第22届全俄数学奥林匹克,1996年)

[解]　将5×7方格板的每个方格中都填写 -2 或1如右图所示.易见,每个拐形所覆盖的3个方格中的3数之和非负.因而无论用多少个拐形覆盖方格板多少次,盖住的所有数之和(一个数被盖几层就计数几次)都是非负的.

-2	1	-2	1	-2	1	-2
1	1	1	1	1	1	1
-2	1	-2	1	-2	1	-2
1	1	1	1	1	1	1
-2	1	-2	1	-2	1	-2

另一方面,方格板上共有12个 -2 和23个1,总和是 -1.当被覆盖 k 层时,盖住的所有数之和又等于 $-k$,矛盾.这表明题中所要求的覆盖是不可能实现的.

12·147　将凸九边形 T 的一个顶点记为 A.在平面上平移 T,使得顶点 A 依次重合于原多边形的其余8个顶点,得到8个与 T 全等的凸九边形.求证这8个凸九边形中总有两个局部重叠.

(第57届莫斯科数学奥林匹克,1994年)

[证]　以顶点 A 为中心,以2为相似比,作多边形 T 的同向位似图形 T'.容易证明,平移所得的8个凸九边形全都位于 T' 之中.因此,

$$S\left(\bigcup_{i=1}^{8}T_i\right)\leqslant S(T')=4S(T),\qquad ①$$

其中 $T_1T_2,\cdots,T_8$ 表示平移所得的 8 个凸九边形，$S(T)$表示图形，T 的面积．因为

$$S(T_i)=S(T),\quad i=1,2,\cdots,8, \qquad ②$$

所以由①和②得到

$$S(\bigcup_{i=1}^{8}T_i)\leqslant 4S(T)<8S(T)=\sum_{i=1}^{8}S(T_i).$$

由此可知，必存在 $1\leqslant i<j\leqslant 8$，使得

$$S(T_i\cap T_j)>0,$$

即凸九边形 T_i 与 T_j 局部重叠．

12·148 对于任何自然数 k，我们将规格为 $1\times k$ 的矩形都称为"长条"．求所有自然数 n，使得规格为 $1995\times n$ 的矩形可以划分为两两规格不同的一组长条．

（第 58 届莫斯科数学奥林匹克，1995 年）

［解］ 显然，划分成的所有长条的边都应分别平行于所给的大矩形的边．将问题分为两种情形来分别加以解决．

(1)设 $n<1995$．这时所能分出的长条的最大长度为 1995．于是规格不同的长条至多 1995 个，它们所能覆盖的面积至多为

$$1+2+\cdots+1955=\frac{1}{2}\times 1996\times 1995=998\times 1995.$$

由此立即得到 $n\leqslant 998$．

对于每个自然数 $n\leqslant 998$，首先作一组平行于矩形长边的平行线，将矩形分成 n 个长为 1995 的长条，然后第 1 个长条不动，第 2 个长条分成长度分别为 1 和 1994 的两个长条，第 3 个长条分成长度分别为 2 和 1993 的两个长条．这样继续下去，即可将整个 $1995\times n$ 的矩形划分成两两规格不同的长条．

(2)设 $n\geqslant 1995$．这时所能划分出的最长的长条的长度为 n．长度不大于 n 的规格互不相同的一组长条所能覆盖的面积至多为

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1),$$

$$1995n\leqslant\frac{1}{2}n(n+1).$$

由此可得 $n\geqslant 3989$．易见，用类似于(1)中的分法总能将 $1995\times n$ 的矩形划分成两两规格不同的长条．

综上可知,满足条件的自然数 n 为 $n\leqslant 998$ 和 $n\geqslant 3989$.

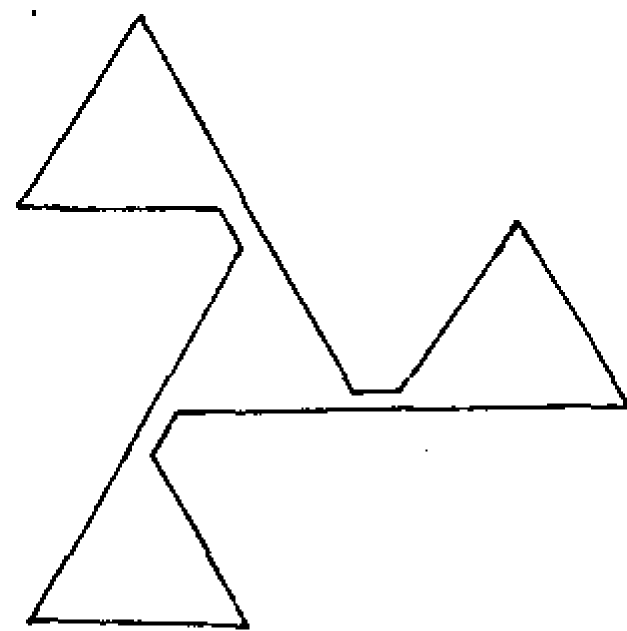
12·149 如果位于多边形不同边上的两点之间的连线全在该多边形内部,则称这条连线是多边形的一条弦.

(1)是否对任何多边形(不一定是凸的),总能找到它的一条弦将多边形分成面积相等的两部分?

(2)求证任何多边形中总能找到它的一条弦将多边形分成两部分,使得每部分的面积都不小于多边形面积的$\frac{1}{3}$.

(第 57 届莫斯科数学奥林匹克,1994 年)

[解] (1)将 4 个相同的正三角形之间用狭窄的通道连起来如右图所示.易见,这个凹多边形的任何一条弦都不能把它分成面积相等的两部分.



(2)由于在任何边数大于 3 的多边形内部总可以作出一条对角线,故知对任何多边形总可以用对角线作三角剖分,即对任何多边形都可用一组不在形内相交的对角线将它划分成若干个三角形.显然,这些对角线都是多边形的弦.对于划分出的每个三角形 T,如果它的某条边是原多边形的对角线,则该边就将原多边形划分成两部分.其中一部分包含 T,另一部分不包含 T.以下我们将不包含 T 的那一部分称为三角形 T 的该边的外部.

现设已对多边形作了三角剖分.如果其中存在某个三角形,它的某条边的外部的面积不小于$\frac{S}{3}$且不大于$\frac{2S}{3}$(其中 S 为原多边形的面积),则该边就是满足要求的弦.

假设不存在上述的三角形,于是必可找出一个三角形 T,使得在 T 的每一边的外部的面积都小于$\frac{S}{3}$.如果三角形的某边的外部的面积大于$\frac{2S}{3}$,就可以到该外部中去找三角形 T.将三角形 T 记为$\triangle ABC$.

(i)如果 T 仅有一条边 AB 是原多边形的对角线,另两边都是原多边形的边,那么只有第 1 条边的外部大于 0 但小于$\frac{S}{3}$,从而三角形 T

的面积大于$\frac{2S}{3}$.这时,取 BC 中点 D,连结 AD,则弦 AD 就满足题中的要求.

(ii)如果 T 有两条边 AB、AC 都是原多边形的对角线而边 BC 是原多边形的一条边,则 AB 和 AC 的外部的面积都大于 0 小于$\frac{S}{3}$.这时仍可取 BC 的中点 D,而弦 AD 满足题中要求.实际上,弦 AD 将多边形分成的两部分的面积之差等于 AB 外部与 AC 外部的面积之差,小于$\frac{S}{3}$,当然满足题中要求.

(iii)设三角形 T 的 3 条边都是原多边形的对角线.这时 3 条边的外部面积都大于 0 且小于$\frac{S}{3}$.让点 D 从点 B 开始沿着 BC 向点 C 方向移动,并观察多边形被过 A,D 两点的弦所划分成的两部分的面积的变化情形.将点 B 所在部分的面积记为 S_{BAD},而将点 C 所在部分的面积记为 S_{CAD}.如果在移动过程中可使 S_{BAD} 在某一时刻恰为$\frac{S}{3}$,那么立即将点 D 停住,且此时的划分即为所求.否则,必存在边 BC 上的点 E,使当点 D 未越过 E 时,$S_{BAD}<\frac{S}{3}$,而当点 D 越过 E 后,又有 $S_{BAD}>\frac{S}{3}$.这时,在越过点 E 且非常接近点 E 之处取点 D,于是有

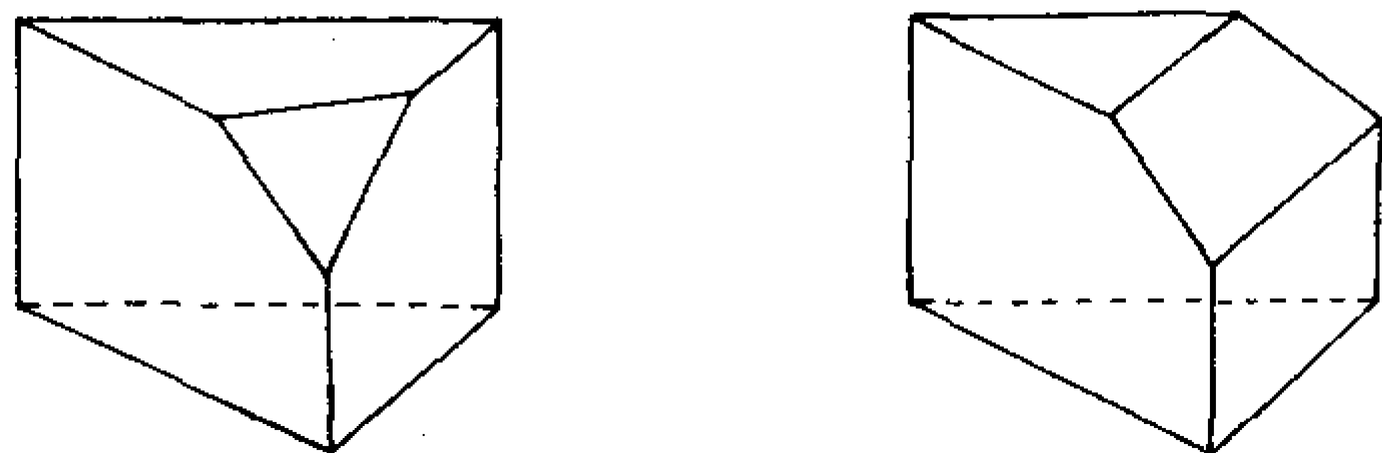
$$\begin{aligned}S_{BAD}&\leqslant S_{BAE}+S_{BC}+S_{\triangle AED}\\&<\frac{2S}{3}+S_{\triangle AED},\end{aligned}\qquad ⊛$$

其中 S_{BC} 表示 BC 外部的面积.前面说到点 D 非常靠近点 E,就是要靠近到足以保证⊛式右端仍小于$\frac{2S}{3}$.这就完成了全部证明.

12·150 试找出一个多面体,使得它的任何 3 个侧面的边数都不全相等.

(第 57 届莫斯科数学奥林匹克,1994 年)

[解] 将一个三棱柱于一个顶点处切去一个小四面体或于一条棱处切于一个上下底不平行的小"三棱柱"后所得到的多面体如下图所示



易见,这两个多面体都是共有 6 个面,其中三角形、四边形和五边形各两个.当然满足题中要求.

12·151 在凸1994 边形 M 中连出 997 条对角线,使得 M 的每个顶点都恰好引出 1 条对角线.每条对角线都把 M 的周界分成两部分,其中边数较少的部分中边的条数定义为这条对角线的长度.将 997 条对角线的长度按递减次序排成数列$(d_1,d_2,\cdots,d_{997})$.问对角线长度的序列能否实现

(1)$(d_1,d_2,\cdots,d_{997})=(3,3,\cdots,3,2,2,\cdots,2)$,其中有 991 个 3 和 6 个 2?

(2)$(d_1,d_2,\cdots,d_{997})=(8,\cdots,8,6,\cdots,6,3,\cdots,3)$,其中有 4 个 8,985 个 6 和 8 个 3?

(捷克数学奥林匹克,1994 年)

[解] 首先证明如下的

引理 如果在一个凸 $2n$ 边形中连出 n 条对角线,使得这个凸 $2n$ 边形的每个顶点都恰好连出 1 条对角线,那么长度为偶数的对角线的条数必为偶数.

引理的证明 将凸 $2n$ 边形的 $2n$ 个顶点相间地涂成黑色与白色,于是黑白两色的顶点各有 n 个.易见,具有同色端点的对角线的长度为偶数,具有异色端点的对角线的长度为奇数.

设有 k 条对角线的端点异色,于是另外的 $n-k$ 条对角线的端点同色.去掉前 k 条对角线连同它们的端点,则还有黑白顶点各 $n-k$ 个.由于这 $n-k$ 个黑点都只能连出顶点同色的对角线,且每个顶点都恰连出 1 条,所以黑顶点的个数 $n-k$ 必为偶数,即长度为偶数的对角线的条数为偶数.

因为(2)中共有 $985+4=989$ 条对角线的长度为偶数,与引理的结论矛盾,所以不可能实现.

为解问题(1),设 M 为 $A_1A_2\cdots A_{1994}$. 连出对角线 A_1A_3, A_4A_6, A_7A_9, A_8A_{10}, $A_{11}A_{13}$和 $A_{12}A_{14}$,这 6 条对角线的长度都是 2. 再连出对角线

$$A_{9+6j}A_{12+6j}, A_{10+6j}A_{13+6j}, A_{11+6j}A_{14+6j},$$
$$j=1,2,3,\cdots,330$$

及 A_2A_5,共得到991 条长度为 3 的对角线. 容易验证,这 997 条对角线满足题中的要求. 可见.(1)中所要求的对角线长度的序列存在.

第十三章　其他组合问题

13·1　商店里运到了大罐牛奶. 售货员有一架缺少砝码的天平(秤盘中可放牛奶瓶),并有3个一样的牛奶瓶,其中有两个是空的,另一个中盛有1升牛奶. 怎样才能在一个瓶中刚好装进85升牛奶,而使用天平称量不超过8次(假定牛奶瓶的容积超过85升)?

（第48届莫斯科数学奥林匹克,1985年）

［解］　先称量5次,数量分别为1,1,2,4,8升,再加上原有的1升,均倒入一个瓶内,共17升. 然后3次称出17,17,34升,倒入1个瓶内恰为85升.

13·2　有5个砝码,它们的重量分别为1000克,1001克,1002克,1004克,1007克,但砝码上并未注明质量而外观又完全相同. 现有一台带有指针的台秤,它可以指出物体质量的克数. 要求经3次称量就确定出重为1000克的砝码,问该怎样称量?

（第44届莫斯科数学奥林匹克,1981年）

［解］　将5个砝码分成3组,个数分别为2,2,1. 将前两组砝码各称量一次,因为5个砝码中每对砝码的质量和各不相同,故这时由称量结果便知质量为1000克的砝码在哪一组中. 如果在第3组,问题就解决了;如果在前两组之一,则再将该组的砝码之一称量一次就行了.

13·3　在101枚硬币中有50枚伪币,伪币重量比真币少1克. 现有一架天平,它的指针能指出天平左右两盘重量的差值. 要求使用天平一次判定指定的一枚硬币是真币还是伪币.

（基辅数学奥林匹克,1977年）

［解］　将其余的100枚硬币分放到天平的两盘中,每盘放50枚,

进行一次称量.称量的结果,如果差值是偶数,表明两盘中伪币数奇偶性相同,伪币总数为偶数,故指定的一枚硬币是真币.如果差值是奇数,则两盘中伪币数目之和为奇数,故知指定的硬币是伪币.

13·4 已知有 $n+1$ 个砝码,总重量为 $2n$,每个砝码的重量都是自然数.一架天平的两个盘处于平衡状态.将砝码按由重到轻的顺序逐个放到天平盘中去且每次放砝码时总是放到较轻的一方.如果天平处于平衡状态,则可将下一个砝码随意放到一个盘中.求证当所有砝码都放完时,天平处于平衡状态.

(第 18 届全苏数学奥林匹克,1984 年)

[证] 用反证法容易证明,若最重砝码的重量为 k,则重量为 1 的砝码的个数 $m \geqslant k$.

当将所有重量大于 1 的砝码都放完之后,两盘砝码重量之差不超过 k,故当把重量为 1 的砝码逐个放入后,必处于平衡状态.

13·5 已知利用一组 6 个砝码可以用天平称量重量是连续自然数的 63 个重物.求出这组砝码.

(第 21 届全苏数学奥林匹克,1987 年)

[解] 因为砝码的部分和可以是连续自然数,故其中必有一砝码重量为 1,而且前 3 个砝码应为 1,2,4.于是第 4 个不超过 8,第 5 个不超过 16,第 6 个不超过 32.若第 6 个砝码的重量少于 32,则无法称量 63,故知 6 个砝码的重量分别为 1,2,4,8,16,32.

13·6 已知 5 枚硬币中有 1 枚是伪造的,它在重量上与真币不同,但不知较重还是较轻.真币的重量是 5 克.现有一台天平和一枚质量为 5 克的砝码,问应怎样称量,才能只称量两次就找出伪币?

(基辅数学奥林匹克,1964 年)

[解] 取两枚硬币放在天平的左盘中,再取 1 枚硬币连同砝码放在天平右盘中,并进行第 1 次称量.

若称量结果是平衡,说明伪币在未称量的两枚之中.取其中 1 枚与砝码进行称量.若平衡,则未称量的 1 枚是伪币;若不平衡,则天平上的 1 枚是伪币.

若第一次称量的结果是不平衡,不妨设左轻右重.将左盘中的两枚硬币分放天平两盘中进行第 2 次称量.若不平衡,则轻的 1 枚是伪币;若平衡,则第 1 次称量时右盘中的 1 枚是伪币.

13·7　从一组质量分别为 1,2,…,26 的砝码中,可以选出 6 个来,使得从它们中不能找出两个质量和相同的不同砝码组合.求证不可能选出 7 个砝码,使它们也具有这种性质.

(第 30 届莫斯科数学奥林匹克,1966 年)

[证]　取砝码组{26,25,24,22,19,11},则可以验证,它满足题中的要求.

对于任何一个有 7 个砝码的组合 S,如果 $26,25,24,23 \in S$,则 $26 + 23 = 25 + 24$,S 不满足题中要求.如果 26,25,24,23 不同时属于 S,则 S 中任何 4 个砝码的质量之和都不超过 97.但是,从 S 中选取不超过 4 个砝码的不同组合共有 $C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 = 98$ 个.从而由抽屉原理知,其中必有两组不同砝码的质量之和相等.这就证明了任何有 7 个砝码的集合都不满足要求.

13·8　已知 19 个砝码中的每一个都不重于 70 克,并且质量都是整数克,求证由它们不能组成多于 1230 个质量不同的砝码组.

(第 33 届莫斯科数学奥林匹克,1970 年)

[证]　首先,每个砝码的质量都不超过 70 克,19 个砝码的总质量不超过 1330 克.

设质量最小的一个砝码为 k 克,于是这些砝码既不能组成 $1,2,\cdots,k-1$ 克,也不能组成 $1261+k,1262+k,\cdots,1330$ 克,共计 69 个不同质量.

再设质量第二小的一个砝码重 $k+j$ 克,其中 $0 \leqslant j \leqslant 70$.于是这些砝码除上面指出的质量外,还不能组成 $k+1,k+2,\cdots,k+j-1,k+j+1,\cdots,2k+j-1$ 以及 $1190+2k+j+1,1190+2k+j+2,\cdots,1260+k$ 克,共计至少有 68 个不同质量.可见,这组砝码不能组成的不同质量已多于 100 个,故知结论成立.

13·9　今给出若干个内容完全相同的集合,集合由 4 件重量均为整数克的物件组成.现欲用这些物件作砝码,称出 1 克至 1985 克(含 1985 克)之间的每一整数克的重物,为使当作砝码的物件总重量达到最小,有多少种不同的选配 4 件物体重量的方案?

(奥地利—波兰数学奥林匹克,1985 年)

[解]　显然,当作砝码的物件的总重量不能少于 1985 克,而

$$1985 = 5 \times 397.$$

于是,每一集合的4件物件的总重量的最小值为5.

选配为4件整数克的物件只能是{1,1,1,2}.

因此,只有一种选配4件物件重量的方案,共选配397组.

13·10 一组砝码共有100个,其中每两个的质量之差均不大于20克.试证可以把这些砝码放入两个秤盘,每个盘中50个,使得两个盘中砝码的质量之差不大于20克.

(第33届莫斯科数学奥林匹克,1970年)

[证] 将100个砝码任意排好顺序并将前两个砝码分别放入两个秤盘中.然后把第3个砝码放入较轻的一个盘中(如果两盘质量相等,则可随意放入一个盘中).以后轮到每个砝码时都放入质量较轻的一个盘中,直到放完为止.由放砝码的原则便知,两盘砝码的质量之差不大于20克.

13·11 已知6个外观相同的砝码,分别重1,2,3,4,5,6克,在它们的面上分别刻有"1克","2克","3克","4克","5克"和"6克"的字样.现有一架天平,但无其他砝码.问怎样通过两次称量,来检验出其中有字样而与实际质量不相符的现象?

(第54届莫斯科数学奥林匹克,1991年)

[解] 通过两次称量来验证下列两个关系式:

$$x_1+x_2+x_3=x_6, \quad ①$$

$$x_1+x_6<x_3+x_5, \quad ②$$

其中 x_k 表示刻有"k 克"的砝码的质量.如果①和②式中至少有1个不成立,就说明确有字样与实际质量不符的现象;如果①和②都成立,则每个砝码所标的质量数都名副其实.

事实上,因为

$$x_1+x_2+x_3\geqslant 1+2+3=6\geqslant x_6,$$

故由①可推得 $x_6=6$ 以及

$$\{x_1,x_2,x_3\}=\{1,2,3\},\{x_4,x_5\}=\{4,5\}. \quad ③$$

由此及②和估计式 $x_1\geqslant 1, x_3\leqslant 3, x_5\leqslant 5$ 又可推得关系式

$$7\leqslant x_1+x_6<x_3+x_5\leqslant 8,$$

由此可得 $x_1+x_6=7, x_3+x_5=8$,从而有 $x_1=1, x_3=3, x_5=5$.再由③即得 $x_2=2, x_4=4$,即对 $k=1,2,3,4,5,6$,均有 $x_k=k$.

13·12　在天平的两个盘中各放有 k 个砝码,且均用 1 到 k 编号,而且左边的盘较重.如果交换任意两个具有同样号码的砝码,则总是右盘变重或者两盘平衡.求 k 的所有可能值.

(第 33 届莫斯科数学奥林匹克,1970 年)

[解]　由已知,左盘中每个砝码都重于右盘中同号的砝码,记其重量差为 $m_i, i=1,2,\cdots,k$.因为只要交换一对号数相同的砝码的位置,右盘就变重或平衡,故有

$$m_i \geqslant \sum_{j\neq i} m_j, i=1,2,\cdots,k.$$

将上式对 i 从 1 到 k 求和即得

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \geqslant \sum_{i=1}^{k}\sum_{j\neq i} m_j = (k-1)\sum_{i=1}^{k} m_i.$$

由此得到 $k\leqslant 2$.当 $k=1$ 时显然成立;当 $k=2$ 时,每盘中的两个砝码重量都相等即可.故知满足题中要求的 k 值只有两个:1 和 2.

13·13　给定成等比数列的 4 个砝码和一架等臂天平,说明怎样只用这天平两次就找出最重的砝码.

(第 8 届加拿大数学奥林匹克,1976 年)

[解]　假定砝码的重量为

$$a, ar, ar^2, ar^3 \quad (r>1).$$

第一次称量:在天平的每一盘中放两个砝码,由于 $r>1$,则

$$(ar^3+a)-(ar^2+ar)=a(r^2-1)(r-1)>0,$$
$$(ar^3+ar)-(ar^2+a)=a(r^2+1)(r-1)>0,$$
$$(ar^3+ar^2)-(ar+a)=a(r^2-1)(r+1)>0,$$

因此放有 ar^3 的盘(H)会比较重.

第二次称量:只要比较较重的盘(H)上的两个砝码就能找出最重的砝码 ar^3.

13·14　在法庭上作为物证出示了 14 枚硬币.鉴定人发现,第 1 枚至第 7 枚硬币是假的,第 8 枚至第 14 枚硬币是真的.法庭仅知道,假硬币的重量都相同,真硬币的重量也相同,并且假币比真币轻.鉴定人使用的是没有砝码的天平.试证鉴定人可以利用三次称量就向法庭证明,前 7 枚是假硬币而后 7 枚是真的.

(第 7 届全苏数学奥林匹克,1973 年)

［证］ 第一次称量：将第 1 枚放在天平的左盘而将第 8 枚放在右盘. 称量结果是右盘较重，故知第 1 枚是假币而第 8 枚是真币.

第二次称量：将第 2,3,8 枚放在左盘，将第 1,9,10 枚放在右盘. 称量结果是右盘较重，故知第 2,3 两枚是假币而第 9,10 两枚是真币.

第三次称量：将第 4,5,6,7,8,9,10 这七枚放在左盘而将另外七枚放在右盘. 称量的结果是右盘较重，故知 4,5,6,7 这四枚是假币而 11,12,13,14 这四枚是真币.

13·15 一架天平有两个盘和一个指针，但没有砝码，指针沿一根量尺移动. 当左盘重量为 L 而右盘重量为 R 时，指针恰指在量尺上的 $R—L$ 处.

现有 $n(\geqslant 3)$ 袋硬币，每袋装有 $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ 枚硬币. 所有硬币的形状和颜色都相同，其中有 $n-1$ 袋真币和 1 袋伪币. 所有真币重量相同，所有伪币的重量相同，但真币与伪币重量不同.

两个盘中都放上硬币并读出指针所指的数算做一次称量，求证只要称量两次即可断定哪一袋是伪币.

（第 30 届国际数学奥林匹克候选题，1989 年）

［证］ 设 n 为偶数. 从每袋中各取 1 枚，将一半放在左盘，另一半放在右盘进行称量，所得读数 x 便是一枚真币与一枚伪币重量之差.

第 2 次称量时将第 1 袋中的 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 枚放在右盘. 而从第 i 袋中取出 i 枚 $(i=1,2,\cdots,n)$ 放在左盘. 设这时读数为 y，则 $y=mx, m\in N$. 当 $m\leqslant n$ 时，第 m 袋是伪币；当 $m>n$ 时，第 1 袋是伪币.

设 n 为奇数. 对前 $n-1$ 袋进行与上面一样的称量. 若两边相等，则第 n 袋为伪币. 设两盘之差 $x\neq 0$，则第 n 袋为真币. 在 $n>3$ 时，像上面一样地称量即可判定出伪币. 当 $n=3$ 时，从第 1,3 两袋各取 1 枚分别放在左右两盘进行称量. 若读数为 0，则第 2 袋为伪币；若读数不为 0，则第 1 袋为伪币.

13·16 设有两种重量（分别重 p 和 q 且 $p>q$）的球共 5 个，每个球都涂有红，黄，蓝三色之一. 两个红球，两个黄球的重量都不相同；一个蓝球的重量不知为 p 还是 q 且由外形无法确定球的轻重. 现有一台无砝码的天平（只能比较轻重而不能称出具体重量），准许称量两次而

将 5 个球的轻重都区分出来,问该怎样称量?

(中国初中数学联赛,1984 年)

[解] 分别将两个红球,两个黄球和一个蓝球记为 r_1,r_2,y_1,y_2 和 b.

将 r_1+b 与 r_2+y_1 分别放入天平的两个盘中进行第 1 次称量,结果可能有 3 种情形:$r_1+b=r_2+y_1$,$r_1+b>r_2+y_1$,$r_1+b<r_2+y_1$.

(1)$r_1+b=r_2+y_1$.因为 $r_1\neq r_2$,故 $b\neq y_1$.将 b 和 y_1 分别放在天平两盘中进行第 2 次称量.

若 $b>y_1$,则 $b=p,y_1=q,y_2=p,r_1=q,r_2=p$;

若 $b<y_1$,则 $b=q,y_1=p,y_2=q,r_1=p,r_2=q$.

(2)$r_1+b>r_2+y_1$.因 $r_1\neq r_2$,故有 $r_1=p,r_2=q$.若 $b<y_1$,则 $b=q,y_1=p$,于是 $r_1+b=r_2+y_1$,矛盾,故有 $b\geqslant y_1$.

现将 b 与 y_2 分别放在两盘中进行第 2 次称量.

若 $b>y_2$,则 $b=p,y_2=q,y_1=p$;

若 $b=y_2$,则 $b\geqslant\max\{y_1,y_2\}$,所以有 $b=p,y_2=p,y_1=q$;

若 $b<y_2$,则 $b=q,y_2=p,y_1=q$.

(3)$r_1+b<r_2+y_1$.因 $r_1\neq r_2$,故有 $r_1<r_2$.因而有 $r_1=q,r_2=p$,且有 $b\leqslant y_1$.

将 b 与 y_2 进行第 2 次称量.

若 $b>y_2$,则 $b=p,y_2=q,y_1=p$;

若 $b=y_2$,则 $b\leqslant\min\{y_1,y_2\}$,所以有 $b=q,y_2=q,y_1=p$;

若 $b<y_2$,则 $b=q,y_2=p,y_1=q$.

13·17 有一根由 60 个环组成的锁链,每环重 1 克.最少砍断几个环,就可以利用断成的一段段锁链,凑出 1 克,2 克,…,59 克,60 克的重物来(被砍断的环仍重 1 克)?

(第 14 届莫斯科数学奥林匹克,1951 年)

[解] 将锁链上的第 5,14,31 环砍断,则整个锁链断成 7 部分,其重量分别为 1,1,1,4,8,16,29.容易验证,由它们可以组成从 1 克到 60 克的任何一个整数重量.

当仅砍断两环时,整个锁链被分成 5 部分.5 个元素的集合只有 31

个非空子集，故由5部分锁链所能组成的不同重量不超过31个，当然不满足题中要求.

综上可知，最少要砍断3个环.

13·18 设有25枚外观相同的硬币，其中有3枚伪币和22枚真币.所有真币的重量都相同，所有伪币的重量也都相同，但伪币轻于真币.现有一架没有砝码的天平，问该如何称量两次，以便找出6枚真币来？

（第16届全俄数学奥林匹克，1990年）

[解] 任意去掉1枚硬币，将其余的24枚硬币分放到天平两盘中，每盘12枚并进行第1次称量.

(1) 如果称量的结果是平衡，则天平两盘中各有1枚伪币，11枚真币.再将一盘中的12枚硬币分放天平两盘中，每盘6枚并进行第2次称量.重的一盘中的6枚硬币都是真币.

(2) 如果第1次称量的结果是不平衡，则较重的一盘中至多有1枚伪币.将轻的一盘中的硬币取下后，将重盘中的6枚硬币移过来并进行第2次称量.如果平衡，则两盘中的12枚硬币都是真币；如果不平衡，则重盘中的6枚硬币都是真币.

13·19 已知在80枚金币中有1枚伪币，重量较轻.要求用一架没有砝码的天平称量4次而找出伪币，问该怎样称量？

（基辅数学奥林匹克，1947年）

[解] 将80枚金币分成3组，枚数依次为27，27，26，并将前两组金币分别放入天平的两盘中，进行第1次称量.若不平衡，则伪币在较轻的盘子中；若平衡，则伪币在第3组中，再给第3组加上1枚，也变成27枚金币.

将包括伪币在内的这组27枚金币分成3组，每组9枚并将前两组金币分别放入天平的两盘进行第2次称量.像上次一样地可以确定出含有伪币的一组9枚金币.

再将这9枚金币均分成3组并重复上述过程即可确定出包含伪币在内的3枚金币.最后再对这3枚金币重复上述过程进行第4次称量，便可确定出伪币.

13·20 有11袋硬币和一台有两个秤盘的天平，天平上有指针，可以指出哪一边重以及重多少.已知有1袋装的是伪币而其余袋子中全是真币，所有真币的重量都相同，所有伪币的重量也相同但与真币重量

不同.问最少要称量多少次,才能够确定出哪个袋中是伪币?

（第 28 届莫斯科数学奥林匹克,1965 年）

[解 1] 将前 10 袋中各 1 枚硬币放在天平的左盘中,最后一袋中的10枚硬币放在右盘进行第1次称量.显然不会平衡,不妨设左轻右重并记下重量差 a.

然后从前 10 袋中分别取出 $1,2,\cdots,10$ 枚硬币放在左盘中,从最后一袋中取 55 枚硬币放在右盘中进行第 2 次称量.当然还是左轻右重并记下重量差 b.如果 $a:b=2:11$,则最后一袋是伪币;如果 $a:b=1:j(1\leqslant j\leqslant 10)$,则第 j 袋是伪币.可见,最少称量两次即可找出伪币.

[解 2] 从前 5 袋中分别取出 1,2,3,4,5 枚硬币放入天平的左盘中,从接下 5 袋中也分别取 1,2,3,4,5 枚硬币放入右盘中进行第 1 次称量.若平衡,则最后一袋是伪币;若不平衡,则最后一袋是真币.

在不平衡的情况下不妨设左轻右重并记下重量差 a.然后从前 10 袋中各取 1 枚放在左盘中,并从最后一袋取 10 枚真币放入右盘中进行第2次称量.若左方重,则伪币重,于是伪币在6,7,8,9,10号袋之一中.若左方轻,则伪币轻,伪币在前 5 袋之一中.记下重量差 b.当 $a:b=j:1(1\leqslant j\leqslant 5)$ 时并视伪币轻重即可定出伪币的袋子.可见,称量两次即可找出伪币.

另一方面,称量 1 次时若不平衡显然无法确定伪币.所以,为确定伪币最少要称量两次.

13·21 给定 13 个砝码,它们的重量都是整数克重.已知其中任意12个砝码都可分为两组,每组 6 个砝码且两组砝码的重量和相等.求证所有砝码的重量都相等.

（第 12 届莫斯科数学奥林匹克,1949 年）

[证] 由已知,任意 12 个砝码都可以分为重量和相等的两组,故知这12个砝码的重量和是偶数.又因任何两组不同的12个砝码中恰有11 个砝码相同,故知任何两个砝码的重量之差是偶数.这又意味着所有砝码的重量同为奇数或同为偶数.不妨设为后者,因若所有砝码的重量都是奇数,则可转而考察每个砝码重量都加 1 的情形.

下面,我们以两克为单位来表示砝码的重量,则所有砝码的重量都是整数.重复上面的证明即知任何两个砝码的重量差都是偶数.即当以克为单位时,任何两个砝码的重量差都是 4 的倍数.类似地可以证明,

任何两个砝码的重量差都是 2 的任意整数次幂的倍数. 因为重量差为有限数,故必为零,即所有砝码的重量都相等.

13·22　已知在1000枚硬币中可能有0,1或2枚伪币. 已知伪币的重量彼此相同但与真币不同. 试问能否使用一架没有砝码的天平称量3次,即确定出来其中有无伪币及伪币与真币谁轻谁重?

(第 35 届莫斯科数学奥林匹克,1972 年)

[解]　将 1000 枚硬币分放到天平两盘中,每盘各放 500 枚,进行第 1 次称量. 结果当然可能有两种情形:

(1) 不平衡,不妨设左端较重. 这表明有伪币存在(可能有 1 枚或 2 枚),且所有伪币都在同一端(如果两端各有 1 枚,则应平衡). 这时,将重的一端的硬币均分成两组,每组 250 枚,分放到天平两盘中进行第 2 次称量. 结果如果是不平衡,则可断定伪币在这 500 枚中且较真币重,问题解决不必再进行第 3 次称量. 如果第 2 次称量的结果是平衡,则或者伪币在另外 500 枚之中(且较真币轻),或者伪币有两枚,在左右两盘中各 1 枚. 这时再将一盘中的 250 枚硬币分成两组,每组 125 枚,进行第 3 次称量. 因这时天平上的 250 枚硬币中至多 1 枚伪币,故若结果是平衡,就知伪币较真币轻;若结果是不平衡,则伪币较真币重.

(2) 平衡,这意味着伪币可能有 0 或 2 枚. 将其中 1 组均分为两组,每组 250 枚进行第 2 次称量. 若称量结果又是平衡,则 1000 枚硬币中没有伪币;若结果是不平衡,则表明伪币有两枚,且其中 1 枚在天平上. 再将较重的一组分为两组,每组 125 枚,进行第 3 次称量. 若结果是平衡,则伪币较真币轻;若结果是不平衡,则伪币比真币重.

13·23　已知质量皆为整数的若干个砝码可被分成 k 个质量相同的砝码组. 试证至少有 k 种不同的方法从中取走 1 个砝码,使得剩下的砝码不能再分成 k 个质量相同的组.

(第 37 届莫斯科数学奥林匹克,1974 年)

[证]　如果 1 个砝码被取走之后,我们无法把其余的砝码分成 k 个质量相同的砝码组,则称这个砝码是本质性的. 不具备这种性质的砝码称为非本质性的. 我们要证的结论是:至少有 k 个本质性的砝码.

若不然,则本质性的砝码少于 k 个. 我们要来证明,对于任意自然数 n,每一个非本质性的砝码的质量都是 k^n 的倍数. 从而质量只能是 0,矛盾. 下面就用数学归纳法来证明这一命题.

首先,全体砝码之和是 k 的倍数.取走 1 个非本质性砝码之后,余下的砝码又可分成质量相同的 k 组.故其质量之和也是 k 的倍数.从而取走的非本质性砝码的质量也是 k 的倍数.由任意性知每个非本质性砝码都是 k 的倍数,即命题于 $n=1$ 时成立.

设命题于 $n=m$ 时成立,即每个非本质性砝码的质量都是 k^m 的倍数,我们来证明它们也都是 k^{m+1} 的倍数.因为本质性砝码少于 k 个,故 k 组中至少有 1 组砝码全是非本质性的.于是这组砝码的质量之和是 k^m 的倍数.但 k 组砝码质量和相等,故全部砝码的质量和是 k^{m+1} 的倍数.同理可证,在将任何一个非本质性砝码取走之后,所有余下的砝码的质量之和也是 k^{m+1} 的倍数.因此每个非本质性砝码的质量都是 k^{m+1} 的倍数,这就证明了命题.

13·24 一堆石块的总重量是 100 千克,其中每块的重量都不超过 2 千克.以各种方式取出其中的一些石块,并求出这些石块的重量之和与 10 千克的差,设这些差中绝对值的最小值是 d,求 d 的最大值.

(第 42 届莫斯科数学奥林匹克,1979 年)

[解] 为使 d 的值较大,应使每块石头的重量都较大,当然不能超过 2 千克.但是,过于接近 2 千克时,5 块石头与 10 千克的差又变小.为此,若设石块重量为 x,可使

$$10-5x=6x-10.$$

解得 $x=\frac{20}{11}$.易见,当取 55 块石头,每块重量都是$\frac{20}{11}$千克时,总重量为 100 千克,$d=\frac{10}{11}$.因此,d 的最大值不小于$\frac{10}{11}$.

另一方面,设 d 的最大值D 大于$\frac{10}{11}$,则必存在某堆石块总重量为 100 千克,且从中取出任何一组石块的重量 M 都满足不等式

$$|M-10|>\frac{10}{11}. \qquad ①$$

我们考察其中的这样一组石块,它们的重量之和 $M>10$,但任意去掉其中一块之后,重量之和都小于 10.将这一组石块的重量分别记为 $x_1,x_2,\cdots,x_k$.于是由 ① 有

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=M>10+\frac{10}{11}. \qquad ②$$

而对每个 x_i,都有

$$M - x_i < 10 - \frac{10}{11}. \quad ③$$

由 ② 和 ③ 知

$$x_i > \frac{20}{11}, i = 1,2,\cdots,k. \quad ④$$

又因 $x_i \leqslant 2, i = 1,2,\cdots,k$,故有

$$10 \geqslant x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 5 \times \frac{10}{11}.$$

这表明 5 块石头的重量之和与 10 千克的差小于$\frac{10}{11}$,此与 ① 矛盾.

综上可知,d 的最大值为$\frac{10}{11}$.

13·25　已知 4 枚硬币中可能混有伪币,每枚真币重 10 克,伪币重 9 克.现有一台具有一个秤盘的台秤,可以称出盘中物体的总重量.为了鉴别出每枚硬币的真伪,最少要进行几次称量?

(第 51 届莫斯科数学奥林匹克,1988 年)

[解]　将 4 枚硬币的重量分别记为 a,b,c,d.称量 3 次,第 1 次称出 $S_1 = a + b + c$,第 2 次称出 $S_2 = a + b + d$,第 3 次称出 $S_3 = a + c + d$.于是有

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 3a + 2b + 2c + 2d.$$

由 S 的奇偶性可知 a 为 9 还是为 10.因为

$$S_2 + S_3 - S_1 - a = 2d,$$

故可求得 d 之值.因而又可由 $S_2 - a - d$ 和 $S_3 - a - d$ 而得到 b 和 c 的值.可见,称量 3 次可以鉴别出每枚硬币的真伪.

若仅称量两次是不够的:

(1) 若第 1 次仅称 1 枚,则第 2 次无法判别 3 枚硬币的真伪;

(2) 若第 1 次称量两枚重 19 克,则第 2 次无法同时分辨 4 枚硬币的真伪;

(3) 若第 1 次称量 3 枚重 29 克,则第 2 次或称量 3 枚中的一部分,或称量第 4 枚,均无法同时分辨 4 枚硬币的真伪.

综上可知,最少要称量 3 次.

13·26　已知 8 枚硬币中有两枚伪币,一枚轻于真币而另一枚重于真币.现有一架没有砝码的天平,试问能否经过 3 次称量就确定出两枚伪币的重量之和与两枚真币的重量之和相比,是轻,重还是相

等？

（第 53 届莫斯科数学奥林匹克，1990 年）

[解] 可以做到．将真币记作 a，重的伪币记作 w，轻的伪币记作 l，它们的质量也用相同的字母代表．

第 1 次称量，在天平的左右两盘中各放两枚硬币．如果平衡，则一盘为 aa，另一盘为 aa 或 wl．然后将这 4 枚硬币集中于左盘，将另 4 枚硬币放于右盘进行第 2 次称量．若平衡，则两枚伪币重量之和与真币相同；若不平衡，则右盘的轻重决定两枚伪币重量和的轻重．

如果第 1 次称量时不平衡，不妨设为左轻右重．然后将右盘两枚取下并另换两枚放上，进行第 2 次称量并对称量结果进行分析判断：

(1) 平衡，天平两盘中的 4 枚均为真币；

(2) 保持原状，从右盘取下和补上的 4 枚均为真币；

(3) 左轻右重倾斜加剧，从右盘取下的两枚和两次称量都未用到的两枚共 4 枚为真币；

(4) 左轻右重倾斜减轻，第 1 次称量未用的 4 枚为真币；

(5) 左重右轻，左盘两枚和未称的两枚共 4 枚为真币．

第 3 次称量时，将 4 枚真币放在左盘而另 4 枚放在右盘即可得到所要的结果．

13·27 已知一架精确天平的左，右两盘中均可放置砝码，为了能分别称量出 $1,2,\cdots,n(n\in N)$ 克的 n 个钢球的质量，最少需要多少个砝码？

（中国国家集训队训练题，1990 年）

[解] 设需要 s 个砝码，其质量分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_s$．易见，形如

$\varepsilon_1a_1+\varepsilon_2a_2+\cdots+\varepsilon_sa_s,\varepsilon_i\in\{-1,0,1\},i=1,2,\cdots,s$ 的数共有 3^s 个，或者说互不相同的数最多有 3^s 个．但其中有 1 个是 0，其余的正负各半，故知这种形式的正数最多有 $\frac{1}{2}(3^s-1)$ 个．所以，这 s 个砝码至多能称量 $\frac{1}{2}(3^s-1)$ 个不同质量．要表示出 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个质量，必有

$$n\leqslant\frac{1}{2}(3^s-1),$$

$$s\geqslant\log_3(2n+1).$$

由此可见，当$2n+1$为3的幂时，至少要$s=\log_3(2n+1)$个砝码；当$2n+1$不是3的幂时，$s=[\log_3(2n+1)]+1$.

另一方面，取s个砝码的质量分别为$1,3,3^2,\cdots,3^{s-1}$，则这些砝码的质量和为$\frac{1}{2}(3^s-1)\geqslant n$.而且对任何$0<k\leqslant n\leqslant\frac{1}{2}(3^s-1)$，$k$都可以用3的前$s$个幂的系数为$-1,0,1$的代数和来表示.故用这$s$个砝码确实可称出$1,2,\cdots,n$克的质量.

综上可知，最少需要s个砝码：

$$s=\begin{cases}\log_3(2n+1), & \text{当 } 2n+1 \text{ 为 3 的幂},\\ [\log_3(2n+1)]+1, & \text{其他情形}.\end{cases}$$

13·28　已知在20块大小和形状全都相同的金属立方块中，有一些(至少1块)是铝制的，其余的则为硬铝合金(比铝重)制的.现欲用一架没有砝码的天平在称量不超过11次的限制下确定出硬铝合金块的数目，问该如何称量？

(第10届莫斯科数学奥林匹克，1947年)

[解]　首先，在天平的两个盘中各放入一个金属块.如果不平衡，则其中重的一块为硬铝合金.然后把这两块都放在左盘中，并在右盘中每次放入两块进行称量，并可视右盘轻、平、重而断定其中有0,1,2块硬铝合金块.这样一来，10次即可确定出硬铝合金块的个数.

如果第一次称量的结果是平衡，则也把二者都放在左盘中，并逐次在右盘中放入两个金属块进行称量，直到第一次(第k次称量)出现不平衡为止.若左盘重，则前$2(k-1)$块全为硬铝合金；若左盘轻，则前$2(k-1)$块全为铝块，接着把右盘中的两块分放到天平的两盘中进行称量.若不平衡，则重的为硬铝合金；若平衡，则是与前$2(k-1)$块不同的金属块.至此，共进行了$k+1$次称量，还有$2(10-k)$块待定.最后，取两种金属块各一块放入左盘，并每次将余下的$2(10-k)$块中的两块放入右盘进行称量，进行$10-k$次即可完全确定硬铝合金块的数目，总共恰好进行了11次称量.

13·29　在一张桌子上放着一架天平和n个不同重量的砝码，把砝码依次放到天平盘中(每一步从桌子上任取一个砝码放到两盘之一中).

(1) 试证可以按适当次序来放砝码，首先使得左边的盘子较重，然

后让右边的较重,接着再左边较重,随后右边较重,等等.我们用字母 L 和 R 来分别表示左边或右边较重，于是称量过程就对应一个单词 $LRLRLR\cdots$.

(2) 试证对于由 L 和 R 构成的有 n 个字母的任何一个单词,都可以设计一个加放砝码的程序,使得称量结果的序列恰好对应于给定的单词.

(第 11 届全苏数学奥林匹克,1977 年)

[证]　设砝码的重量为 $m_1 < m_2 < \cdots < m_n$.

(1) 先将 m_1 放到左盘,然后将 m_2 放到右盘.接着将 m_3 放到左盘,再将 m_4 放到右盘,继续这个过程直到放完为止.容易看出,称量过程对应的单词恰为 $LRLRLR\cdots$.

(2) 将所有砝码按号码的奇偶性分成两组,并将含有最重砝码 m_n 的一组依给定单词的最后一个字母是 L 还是 R 而放到左盘或右盘中,另一组砝码放到余下的一盘中.现在我们从反向考察给定的单词,即从后面字母往前看.如果倒数第 2 个字母与最后一个字母相同,则把最轻的砝码 m_1 拿掉;如果这两个字母不同,则把最重的砝码 m_n 拿掉.这样一来,问题就化成了有 $n-1$ 个砝码的情形.因为 $n=1$ 时结论显然成立,故由归纳法知结论成立.

13·30　已知在 2000 枚硬币中有两枚是伪币,其中一枚比真币轻,另一枚比真币重.现要在不带砝码的天平上通过 4 次称量来确定两枚伪币的重量之和与两枚真币的重量之和相比,是轻,重还是相等,问该如何称量?

(第 23 届全苏数学奥林匹克,1989 年)

[解]　将硬币分成 4 堆,每堆 500 枚.

第一次称量:将 1,2 两堆分别放到天平的两盘中,称量一次.结果或是平或是 1 轻 2 重(2 轻 1 重也同样).

若为平,则再把 3,4 两堆硬币分放到两盘上进行第二次称量.若又是平,则答案就是重量之和相等.若为 3 轻 4 重,则把前两堆与后两堆分放两盘中进行第三次称量.后两堆的轻、平、重就表明伪币与真币重量和相比的轻、等、重.

若第一次称量的结果是 1 轻 2 重.则把 3,4 两堆分放到两盘中进行第二次称量.若为平,则与前类似地用第三次称量即可得出结果.若为

3轻4重.则再将1,3两堆分放两盘进行第3次称量.这时两堆中恰有一堆含有轻伪币,故不会平,不妨设1轻3重.于是第3堆中全是真币,从而重的伪币必在第4堆中.将1,4两堆和2,3两堆分放两盘中进行第四次称量,视1,4两堆的轻,重,平即知两枚伪币的重量之和与真币相比为轻、重,相等.

13·31　已知11个球中有两个具有放射性,对于任何一组球经过一次检测可知其中有无具有放射性的球(但不能知道其中有几个球具有放射性).试证,若检测次数不足7次,则不能保证可找出那一对具有放射性的球,而经过7次检测则总可以找出它们来.

(第29届莫斯科数学奥林匹克,1966年)

[证]　首先,我们指出几个解决问题时应该遵循的原则:

(1) 如果在 k 个小球中有一个具有放射性,$2^{n-1} < k \leqslant 2^n$,则恰须经过 n 次检测可以找到它.这只要每次对分(奇数时取大于半数的最小整数)并取一半称量即可.

(2) 如果在 k 个球中有两个具有放射性,则在哪一对球是有放射性的问题上,存在着 C_k^2 种可能性.类似于(1),如果 $C_k^2 > 2^n$,则经 n 次检测不能保证找出那对放射性球.

(3) 如果从 k 个球中第1次对 m 个进行检测,则结果为"-"(表示没有放射性)时,两个放射球存在于余下的 $k-m$ 个球中,还有 C_{k-m}^2 种可能性;当结果为"+"时,还有 $C_k^2 - C_{k-m}^2$ 种可能性.可见,每次检测的最佳选择在于使这两个数尽可能相同或相近.

如果从11球中取两球做第1次检测而且结果为"-",则余下9个球中含有两个放射球而 $C_9^2 = 36 > 2^5$,由(2)知再进行5次检测是不够的.如果第1次取4个球进行检测而且结果为"+",则余下的可能性为 $C_{11}^2 - C_7^2 = 34 > 2^5$,5次检测还是不够.故知第1次检测一定取3个球,设结果为"-".于是接着要从其余8球中检测出两个放射球.容易看出,第2次检测应取两个球.假设结果又是"-".于是问题化为从6个球中检测出两个放射球.若第3次检测取1个球,则结果为"-"时导致 $C_5^2 = 10 > 2^3$,再用3次检测是不够的;若在第3次检测时取两个球,则结果为"+"时导致 $C_6^2 - C_4^2 = 9 > 2^3$,3次检测也是不够的.这就证明了6次检测不能保证确定出两个放射球.

7次检测足以确定出两个放射球.第1次检测3个球,若结果为

"+",则第 2 次再检测其中两个,若为"-",则余下 1 个为放射球;若为"+",则第 3 次称量其中之一,无论结果如何,都可定出 1 个放射球.其余 10 个球中还有 1 个放射球,进行 4 次检测当然足以定出来.如果第 1 次检测为负,则第 2 次再从其余 8 球中取 2 个进行检测.若结果为"+",则再取其中之一进行第 3 次称量,必可定出一个放射球,以下检测同上,当然 7 次可以解决.若结果为"-",则余下 6 个球中有两个放射球,还有 5 次检测,当然毫无问题.

13·32　已知有 13 枚银币,其中恰有 1 枚假币,其重量与真币不同.

(1) 如何使用无砝码的天平称量 3 次而找出假币?

(2) 求证上述做法不一定能判断出假币比真币轻还是重.若增加一枚已知的真币,则可称量 3 次后找出假币并断定其轻重.

(3) 若 14 枚银币中恰有 1 枚假币,则无法用天平称量 3 次而找出假币.

(中国国家集训队训练题,1986 年)

[解] (1) 将 13 枚银币分成 4,4,5 三堆,并将前两堆分放入天平两盘中进行第 1 次称量,结果有两种可能:

(i) 平衡.从左盘中取下 3 枚并换第 3 堆中的 3 枚进行第 2 次称量.若仍为平衡,则第 3 堆中未称量过的 2 枚银币中有 1 枚是假的.再将其中之一与真币进行比较即可判定哪 1 枚是假币.注意,第 3 次称量若仍为平衡,则最后 1 枚是假币,但不知其轻重.若第 2 次称量不平衡,则换上来的 3 枚中有 1 枚假币且其轻重与所在盘的轻重一致.于是再取 3 枚中的 2 枚进行第 3 次称量即可判定出假币及其轻重.

(ii) 第 1 次称量的结果是不平衡,不妨设左轻右重.将这 8 枚银币分成 3 组:左 2 右 1,左 2 右 1,右 2,并将前两组分放入天平两盘进行第 2 次称量.

(a) 平衡.假币在第 3 组且是重的.对这 2 枚进行第 3 次称量即可判定出假币.

(b) 左轻.假币或为左盘中原在左盘的两枚之一,或为右盘中原在右盘的那一枚.于是再对前两枚进行第 3 次称量即可定出假币并指出其轻重.

(c) 左重.类似于(b) 即可解决.

(2) 设将 13 枚银币分成 3 堆,枚数分别为 $a,a,13-2a$,并对前两堆进行第 1 次称量.由前面称量过程中(i)的情形知 $a=4$ 时,不一定能确定假币的轻重.而且类似的分析表明,$a>4$ 或 $a<4$ 时,更加行不通,即连假币也确定不出来.

在有了一枚已知真币的情况下,我们将这 14 枚银币分成 5,5,4 三堆,并记住已知的真币在第 1 堆中.将前两堆分别放入天平两盘进行第 1 次称量.

(i) 若平衡,则假币是第 3 堆的 4 枚之一.从第 3 堆取 3 枚与 3 枚真币进行称量.若不平衡,则像上面(i) 中那样称量即可解决;若平衡,则第 3 堆中余下的 1 枚是假币.再和 1 枚真币进行第 3 次称量即可判定其轻重.

(ii) 若第 1 次称量结果是不平衡,不妨设左轻右重.除去已知的真币(在左盘),余下 9 枚再分成 3 堆:左 2 右 1,左 2 右 1,右 3.像(i)—(ii)那样进行称量即可找出假币并指出其轻重.

(3) 将 14 枚银币分成 3 堆:$a,a,14-2a$,并将前两堆分别放入天平两盘中进行第 1 次称量.

(i) 若 $a\leqslant 4$,则在平衡的情况下,余下两次称量无法断定 6 枚银币中的一枚不知轻重的假币.

(ii) 若 $a\geqslant 5$,则在不平衡的情况下,余下两次称量无法判定出假币.

综合起来即知,用 3 次称量无法指出 14 枚银币中惟一的不知轻重的假币.

13·33　已知有 $4m$ 枚硬币,其中恰有一半是伪造的.真币的重量都相同,伪币的重量也都相同但比真币轻.现要求用没有砝码的天平称量 $3m$ 次后确定出全部伪币,问该如何称量?

(第 24 届全苏数学奥林匹克,1990 年)

[解]　我们对偶数的 n 用数学归纳法来证明:若已知 n 枚硬币中伪币的数目,则经过 $\left[\frac{3n}{4}\right]$ 次称量即可确定全部伪币.当 $n=0$ 和 $n=2$ 时,结论显然成立.

设 $n\geqslant 4$.任取两枚硬币进行称量.

如果二者重量不同,则二者的真伪立定.于是问题化为 $n-2$ 枚硬

币的情形,且有

$$\left[\frac{3(n-2)}{4}\right]+1\leqslant\left[\frac{3n}{4}\right].$$

设二者重量相同.将这两枚硬币与另取一对硬币进行称量比较.如果两对硬币重量不同,则再比较后两枚,从而通过3次称量而确定了4枚硬币的真伪.因为

$$\left[\frac{3(n-4)}{4}\right]+3=\left[\frac{3n}{4}\right],$$

于是问题化为 $n-4$ 枚硬币的情形,从而由归纳假设知这时结论成立.

设第二次称量中两对硬币重量相同.将这4枚硬币同另外4枚进行称量比较,如果两组重量不同,则前一组的4枚硬币的真伪即可确定且问题又化成了 $n-4$ 的情形.如果两组重量相同,则将这8枚硬币同另外8枚进行称量比较,等等.一般说来,如果在某一步称量出 2^m 枚硬币与另一组 2^m 枚重量不同,则前一组的 2^m 枚硬币的真伪即得到确定.又因

$$\left[\frac{3(n-2^m)}{4}\right]+(m+1)\leqslant\left[\frac{3n}{4}\right],\quad m\geqslant 2,$$

所以问题化为 $n-2^m$ 枚硬币的情形并由归纳假设而得到证明.否则,进行到某一步时,对某组 2^m 枚相同的硬币已经找不到另外的 2^m 枚来比较了,即 $2^m>\frac{n}{2}$ 了,则由已知伪币的数目是否超过一半即可断定这 2^m 枚硬币的真伪,而其余的由归纳假设即可得到解决.

13·34　在平面上的4个定点安装了4个点状的探照灯,它们都能分别照亮一个直角形区域,但这些角的边仅可以朝北,朝南,朝东和朝西.试证可以适当安排这些探照灯的照射方向,使它们照亮整个平面.

(第30届莫斯科数学奥林匹克,1967年)

[证]　将4个探照灯分成北两个,南两个,如果有两个以上在一条水平线(纬线)上,则可任取.然后再将北方两个探照灯分成西北和东北各1个.如果两个在一条竖直线(经线)上,则可任取.类似地,将南方的两个探照灯分成西南,东南各1个.现将西北,东北,东南,西南的4个探照灯分别朝向东南,西南,西北和东北,即可满足要求.

13·35　天文探照灯可以照亮一个卦限(所有平面角都是直角的三面角及其内部),现将它置于正方体的中心,能否将它转到适当角度,

使它不能照亮正方体的任何一个顶点?

（第 39 届莫斯科数学奥林匹克，1976 年）

［解］ 可以做到.在正方体的中心处安放 8 盏探照灯，使它们恰好照亮整个空间.由于主对角线之间的夹角是锐角，故可将 8 盏灯同时旋转，使其中 1 盏灯照亮正方体的两个顶点.于是其余 7 盏灯至多照亮正方体的6个顶点.由抽屉原理知其中必有1盏灯没有照亮正方体的任何顶点.

13·36 能否在空间中放置 4 个铅球和 1 个点光源，使得从点光源发出的每一根光线都至少与一个铅球相交?

（第 38 届莫斯科数学奥林匹克，1975 年）

［解］ 可以做到.取一个正四面体并将点光源放在它的中心 O.考察如下的 4 个圆锥(其高是无限大的):它们具有公共顶点 O 并分别将锥体 $OBCD$，$OACD$，$OABC$，$OABD$ 严格地含于内部.这 4 个圆锥体彼此之间有些重叠部分，因此由点光源发出的每一根光线都至少含于 1 个圆锥之内.在每个圆锥面内作内切球，并调整它们的半径，使这 4 个球互不相交(为此，这些球的半径应当相差悬殊).显然，由点光源发出的每一根光线都至少与 1 个球相交.

13·37 在球状的太阳表面上发现有限个圆形黑斑，其中每一个黑斑所占面积都小于太阳表面积的一半.这些黑斑都是闭区域且彼此不相交.求证在太阳表面上有同一直径上的相对两点都未被黑斑盖住.

（第 39 届莫斯科数学奥林匹克，1976 年）

［证］ 我们来考察半径最大的黑斑，并过它的中心所在的半径上的一点作垂直于该半径的平面与球面交得一个圆周，使得这块最大黑斑全在这个圆周所界的范围内且这个圆周不与其他黑斑相交.

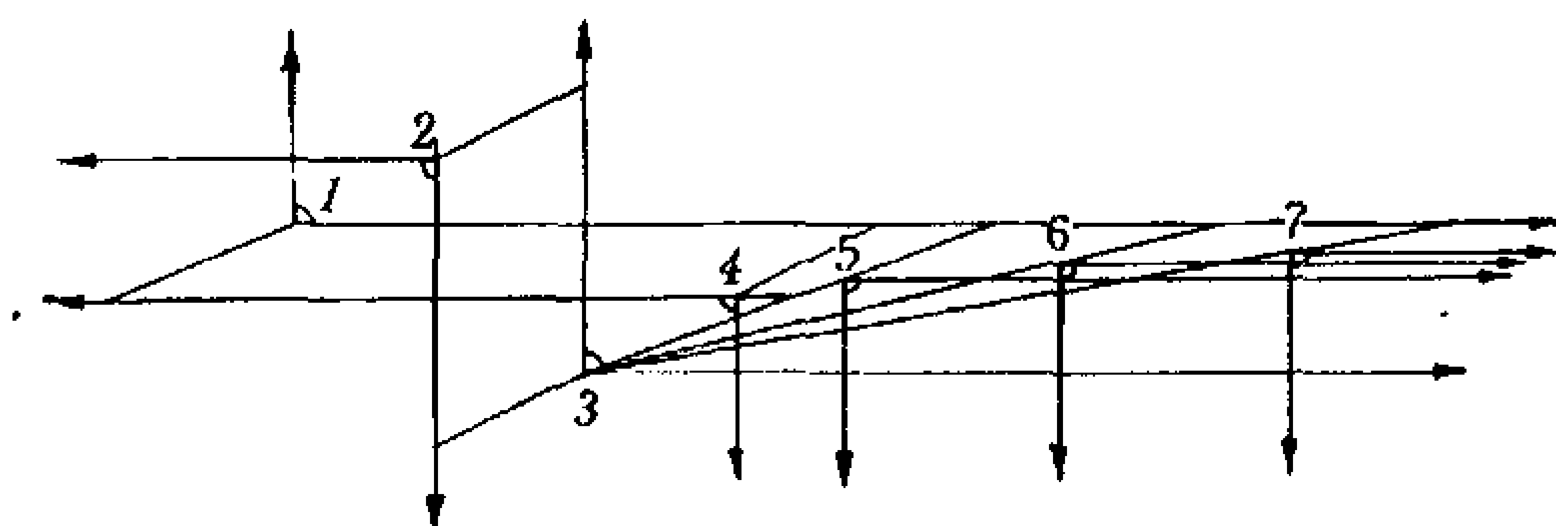
将其他黑斑全都关于太阳中心作对称映射.因为这些映射象互不相交且每个都没有所作的圆周半径大，故它们不能盖住整个圆周.任取圆周上没有被盖住的一点 A，过点 A 的直径的另一端点为 A'，则 A 和 A' 都未被黑斑盖住.

13·38 在平面上安放着 7 盏点式探照灯，每盏灯都可照亮一个 $90°$ 的角域.如果在某盏探照灯所照亮的区域中设有另一盏探照灯，那么后者就会在平面上投下阴影，即一条无限长的暗色射线.试证可以适

当安置 7 盏灯，使得其中每一盏灯投下的阴影长度都恰为 7 千米.

（第 34 届莫斯科数学奥林匹克，1971 年）

［证］　按下图所示去安置 7 盏灯. 首先安置前 4 盏灯，使之满足要求. 然后再按要求安置 5,6,7 盏即可.



13·39　在圆上的一点 A 向圆内发射光线，当光线进行中遇到圆周时，就按反射角等于入射角的规律反射. 在圆周上的反射点依次为 $B,C,D,\cdots$，求证圆上存在无穷多个点，使得光线一次也射不到它们.

（基辅数学奥林匹克，1957 年）

［证］　不妨设圆的周长为 1. 光线在圆周上向圆内反射，相当于在过该点的圆的切线上反射. 反射角等于入射角，即标志进入的弦与反射出的弦的弦切角相等. 因而两弦长度相等. 这表明光线屡经反射所成的折线的线段，都是圆中的等弦. 又因等弦对等弧，因此相邻的两个反射点间所夹的弧都相等. 将弧长记为 α，则每个反射点到出发点 A 沿圆周的距离都是 α 的整数倍. 若 α 为有理数，则所有反射点到 A 的距离都是有理数. 于是圆上对应无理数的点都不是反射点，当然有无穷多个；若 α 为无理数，则所有反射点到 A 的距离都是无理数. 于是圆上对应有理数的点都不是反射点，也有无穷多个.

综上可知，圆上总有无穷多个点不是反射点.

13·40　将规格为 $m\times n$ 的矩形屏幕划分成 mn 个单位小方格，其中亮着的小方格多于 $(m-1)\times(n-1)$ 个. 如果在某个 2×2 的正方形中有 3 个小方格不亮，那么经过一段时间后，第 4 个小方格也会熄灭. 求证任何时候在屏幕上都至少有 1 个小方格亮着.

（第 54 届莫斯科数学奥林匹克，1991 年）

［证］　若不然，设有一次，屏幕上的所有小方格全都熄灭，则可以断言，从一开始便有如下两条成立：

(1) 在每行每列中都至少有 1 个小方格不亮；

(2) 任何两个不亮的小方格都是相通的,即可以找到一串不亮的方格连接二者,这串小方格中的任何两个相接的方格都或者在同一行或者在同一列(但不一定是相邻方格).

(1) 是显然的. 为证(2),我们来进行反推. 应当指出,在最后时刻,(2) 是成立的. 如果在方格 A 熄灭之后(2) 成立,则在包含 A 的某个 2×2 的正方块中,另 3 个单位方格也是熄灭的. 设这 3 个方格分别为 B,C,D,其中 B 与 A 同行而 D 与 A 同列. 对于在 A 熄灭之后的任何两个不亮的方格 E 和 F,由假设知 E 和 F 相通. 如果所取的一串连接 E,F 的方格中不含 A,则二者在 A 熄灭之前就是相通的;如果这串方格中含有 A,则按相通定义知,方格 E 和 F 均与 B,D 之一相通,从而二者可由一串不经过 A 的方格相通,即在 A 熄灭之前也相通. 这就证明了(2).

为了完成反证的证明,只须再证如下的引理:

引理　使(1) 和(2) 成立的屏幕上至少有 $m+n-1$ 个不亮的方格.

显然,引理的结论与已知条件矛盾. 我们对 $k=m+n$ 使用归纳法来证明引理.

当 $k=2$ 时,结论显然成立. 设当 $k=h$ 时结论成立. 如果 $k=h+1$ 时结论不成立,即这时屏幕上的不亮方格数 $l\leqslant h-1=m+n-2$,不妨设 $m\geqslant n$,于是由抽屉原理知 m 行中必有 1 行,其中至多有 1 个不亮的方格 G. 所以当屏幕上的任何两个不亮的方格 H 和 K 相通时,所选的一串连接 H 和 K 的方格或者不通过 G,或者沿方格 LGM 通过 G,这时 L 和 M 都与 G 同列,故可划掉 G 而仍然相通. 从而可把 G 所在的一行方格划去而余下的 $(m-1)\times n=k-1$ 的屏幕仍然满足(1) 和(2). 但这时屏幕上不亮方格数 $l-1\leqslant h-2$,此与归纳假设矛盾. 这就完成了归纳证明.

13·41　已知信号盘上共有 64 个灯泡,分别由 64 个按钮控制——每个灯泡各由自己的按钮控制. 每一次启动时,可以揿动任意一组按钮,并可以记录下来各个灯泡的亮灭状态. 为了搞清各个灯泡各由哪个按钮控制,最少应当启动多少次?

(第 53 届莫斯科数学奥林匹克,1990 年)

[解]　将 64 个按钮从 0 到 63 编号,并将这些号码用二进制来表

示,分别记为000000,000001,…,111111.在第k次启动时,就揿动那些k位数字为1的按钮($k=1,2,\cdots,6$),并把那些变亮的指示灯在第k位记为1,未亮的灯记为0.于是启动6次之后,每盏指示灯都得到一个二进制的6位数.显然,该6位数就是控制它的按钮的编号.可见,启动6次可以解决问题.

另一方面,可以指出,启动5次是不够的.事实上,第1次启动时,无论揿动哪些按钮,至少总有32个指示灯处于相同的亮灭状态.第2次启动时,这32个指示灯中又至少有16个处于相同状态.这样继续下去,直到第5次启动,总有两个指示灯处于相同状态.这意味着这两盏指示灯在5次启动中状态全都相同,因而无法分清控制这两盏灯的按钮到底谁控制哪一个灯.

综上可知,最少应该启动6次.

13·42 调度室里有若干个按钮,用它们可以控制色灯信号盘.每揿一个按钮,在信号盘上都会有一些色灯改变亮灭状态(每一个按钮控制着一些色灯,不同的按钮所控制的部分可能有交).求证信号盘所可能呈现的状态的总数目恰好是2的某一个方幂.

(第43届莫斯科数学奥林匹克,1980年)

[证] 对按钮的个数n使用归纳法.当$n=1$时,信号盘显然有两个状态.设当$n=k$时结论成立.当$n=k+1$时,我们先看前k个按钮的情形.由归纳假设知可设这时有2^m种不同状态.然后把第$k+1$个按钮加进去.如果对于原有2^m种状态中的每一种,揿动第$k+1$号按钮都得到一种新状态,显然这些新状态也互不相同,于是不同状态的种数增加1倍,变为2^{m+1},结论成立.否则,必有原2^m种状态中的一种,在揿动第$k+1$号按钮时,变为原2^m种状态的另一种.设在两种状态下所揿动的按钮除去相同的之外分别为$i_1,i_2,\cdots,i_h$和$j_1,j_2,\cdots,j_l,k+1$.于是将$i_1,i_2,\cdots,i_h,j_1,j_2,\cdots,j_l$都揿动一次时,与揿动$k+1$号按钮的效果是一样的.这就是说,第$k+1$号按钮控制的信号灯是前$k$号按钮的一个组合.所以,它的加入并不能使信号盘的状态有所增加,仍然是2^m种.这就完成了归纳证明.

13·43 演马戏的圆形舞台被n盏探照灯照亮,其中每盏探照灯都照亮舞台上的一个凸图形.已知当关闭其中任何一盏探照灯时,舞台仍可被全部照亮;但若关闭任何两盏灯,舞台就不能被全部照亮了.求

所有可能的 n 值.

(第 38 届莫斯科数学奥林匹克,1975 年)

[解] 对所有 $n \geqslant 2$,都有可能. $n=1$ 显然不满足要求;$n=2$ 时,只须安排每盏灯都照亮整个舞台就行了.

当 $n \geqslant 3$ 时,将这些探照灯分别编号为 $1,2,\cdots,n$. 则由 $\{1,2,\cdots,n\}$ 组成的不同的数对 (i,j) 共有 $\frac{1}{2}n(n-1)=m$ 个,我们将它们按字典排列法排成 $1,2,\cdots,m$ 的顺序: $(1,2),(1,3),\cdots(1,n),(2,3),\cdots,(2,n),(3,4),\cdots,(n-1,n)$. 考察圆形舞台及其内接正 m 边形. 这个正 m 边形的每条边都与圆周的劣弧围成一个小弓形,共有 m 个小弓形. 将 m 个数对与 m 个小弓形一一对应. 对于第 i 盏探照灯,我们取正 m 边形及所有含 i 的数对所对应的小弓形之并(当然为凸图形)作为它的照明区域,则显然满足题中要求.

事实上,每个小弓形对应一个数对 (i,j),因而有两盏灯同时照亮它. 当从 n 盏灯中关闭一盏时,当然仍能照亮整个舞台. 而当关闭两盏灯时,两盏灯的号码对所对应的小弓形将没有被照亮.

13·44 在一个(不知其内部结构的)"黑匣子"上,安装有一个由 n 盏指示灯组成的信号盘和一个由 n 个开关组成的控制器,其中每个开关都有两种不同状态. 当对控制器上的开关作一切可能的状态变换时,信号盘上的指示灯则相应地呈现出一切可能的"亮""灭"组合,且信号盘上指示灯的亮灭状态惟一地取决于控制器上开关的状态. 已知每变换一个开关的状态时,都恰好能改变一盏指示灯的亮灭状态. 求证每一盏指示灯的状态都惟一地取决于一个开关的状态(即每盏指示灯都有一个自己的控制开关).

(第 36 届莫斯科数学奥林匹克,1973 年)

[证] 若不然,则必有一盏指示灯取决于至少两个开关的状态. 不妨设它恰取决于两个开关的状态. 记这盏指示灯为 a,两个开关分别为 α,β.

因为已知当 n 个开关作一切可能的状态变换时,n 个指示灯的一切可能的亮灭状态均可取得. 故可把 n 个开关都扳到某种状态,使得所有指示灯都灭掉. 我们把每个开关现在所处的状态称为"断",另一种状态称为"通".

控制指示灯 a 的两个开关共有 4 种不同状态：{断，断}，{断，通}，{通，断} 和 {通，通}. 按上一段的规定，{断，断} 肯定对应于灯 a 是灭的. 设 n 盏灯处于上段所说的全灭状态. 现在保持其他开关不动，仅把开关 α 扳到"通". 由于每变换一个开关的状态，都恰好改变一盏指示灯的亮灭状态，故这时灯 a 是亮的，其他灯都是灭的. 再将开关 β 扳到通，则又得改变一盏灯的状态，且这盏灯只能是 a，于是又回到所有灯都灭的状态. 这意味着灯的全灭状态对应于开关组的两种不同状态，矛盾.

13·45 甲城的路灯昼夜都亮着，这些路灯都由电池供电. 若电池是新的，则路灯能照亮半径为 200 米的圆内的地面. 电池工作时，该半径按每小时 10 米的比例线性地减少. 城市的居民有时把某些废电池换成新的. 已知在一昼夜间耗尽了 18000 个电池，且该城地域是半径为 10 千米的圆. 求证在该城中至少有一点在某一时刻被多于 1 个路灯照亮.

（基辅数学奥林匹克，1982 年）

［证］ 在城市所在的平面上引入直角坐标系，然后用 Z 轴表示时间. 我们就在这个 3 维空间中来研究路灯照亮地面的变化过程，即在时刻 t 被路灯照亮的地面用平面 $z = t$ 上的一个集合 $\{(x, y, z) \mid z = t\}$ 来表示. 设在时刻 t_0，某一路灯的电池换成新的，路灯的坐标是 (x_0, y_0)，于是在平面 $z = t_0$ 上，以点 $O(x_0, y_0, t_0)$ 为心，以 200 米为半径的圆面 $S(t_0)$ 被照亮. 当 $t_0 < t < t_0 + 20$ 时，此路灯照亮的范围是以 $O_1(x_0, y_0, t)$ 为心，以 $200 - 10(t - t_0)$ 为半径的平面 $\{z = t\}$ 上的圆 $S(t)$. 在 $t = t_0 + 20$ 时，圆 $S(t)$ 退化为点 $S(x_0, y_0, t_0 + 20)$，即路灯熄灭. 由此可见，换一次新电池后，路灯照亮的范围 $Q = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in S(z)\}$ 是一个以圆面 $S(t_0)$ 为底面，高为 20，顶点为 S 的圆锥. 我们称之为该路灯的光锥.

显然，当且仅当地面上的点 (x, y) 在时刻 z 被路灯照亮时，$(x, y, z) \in Q$. 由此可见，若两个路灯的光锥 Q_1 和 Q_2 有公共点 (x, y, z)，则点 (x, y) 在时刻 z 被两个路灯同时照亮. 因而只须证明存在两个路灯，二者的光锥相交.

按已知，在一昼夜期间，该城耗掉 18000 个电池. 这意味着有 18000 个光锥. 每个光锥的体积是

$$V_0 = \frac{\pi}{3}(200)^2 \times 20 = \frac{8}{3}\pi \times 10^5.$$

如果这些光锥中的任何两个都不相交,则它们的体积之和为

$$V = 18000V_0 = 48\pi \times 10^8.$$

另一方面,城市半径为 10 千米 = 10^4 米,故光锥底面都在半径为 $10^4 + 200$ 米的圆内(城市边缘的路灯能照亮离城市 200 米的地面).由于这 18000 个光锥的顶点在平面 $\{z = t_0\}$ 与 $\{z = t_0 + 24\}$ 之间,故它们的底面在平面 $\{z = t_0 - 20\}$ 的上方.这意味着这 18000 个光锥都在高为 44,底面半径为 $10^4 + 200$ 的圆柱内.这个圆柱的体积为

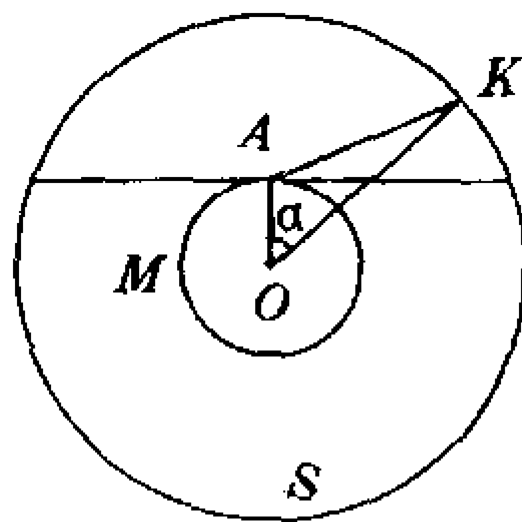
$$V' = \pi(10^4 + 200)^2 44 = 45.7776\pi \times 10^8 < V,$$

矛盾.故知必有两个光锥相交.

13·46　能否在直径为 1 的球形行星的表面上安置 8 个观察站,使得位于离行星表面高度为 1 的高处的任何目标物都至少能被两个观察站看到?

(基辅数学奥林匹克,1969 年)

[解]　可以做到.考察同心球 M 和 S,其中 M 直径为 1 而 S 直径为 3.对于球面 M 上的任何一点 A,由它能观察到的点 K 的集合是球面 S 被球面 M 的过点 A 的切平面截出的那一部分(见上图).记 $\angle AOK = \alpha$,于是有



$$\cos\alpha \geqslant \frac{OA}{OK} = \frac{1}{3}.$$

由余弦定理有

$$AK^2 = OA^2 + OK^2 - 2OA \cdot OK \cdot \cos\alpha \leqslant 2 = OK^2 - OA^2.$$

由此可知,$\angle OAK$ 为钝角或直角,故从点 A 可以看到点 K.

在球 M 内作一个内接正方体,并在正方体的 8 个顶点处各设置一个观察站,即可满足题中要求.由前段证明知,为证此,只须证明,对任何 $K \in S$,正方体上必存在两个顶点 A 和 B,使得

$$\cos\angle AOK \geqslant \frac{1}{3}, \cos\angle BOK \geqslant \frac{1}{3}.$$

设射线 OK 交正方体的一个面于点 K_1(可以交于面的边界或顶点),以 A 和 B 表示该面中最接近点 K_1 的两个顶点.于是

$$AK_1 \leqslant AB, \qquad BK_1 \leqslant AB.$$

因为 $OA = OB = \frac{1}{2}, AB = \frac{\sqrt{3}}{3}$,故有

$$\cos\angle AOK=\cos\angle AOK_1\geqslant\cos\angle AOB=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},$$

同理,$\cos\angle BOK\geqslant\frac{1}{3}$.

13·47　已知6台电子计算机中,每两台之间都有导线相连,现有5种颜色,问应怎样为每条导线涂上1种颜色,才能使得从每台计算机连出的5条导线的颜色都互不相同?

（第47届莫斯科数学奥林匹克,1984年）

［解］　用6点$A_1,A_2,\cdots,A_6$来代表6台电子计算机,用两点间连线来代表导线,并将15条线段分成5组:

$\{A_1A_2,A_3A_4,A_5A_6\}$,$\{A_2A_3,A_4A_5,A_6A_1\}$,

$\{A_1A_3,A_4A_6,A_2A_5\}$,$\{A_2A_4,A_5A_1,A_3A_6\}$,

$\{A_3A_5,A_6A_2,A_1A_4\}$.

易见,只要把5组导线各涂上1种颜色便满足题中要求.

13·48　今有13台仪器和12种不同颜色的导线,每两台仪器之间都用1根导线连接.问能否做到使从每台仪器连出的12根导线都是12种不同颜色?

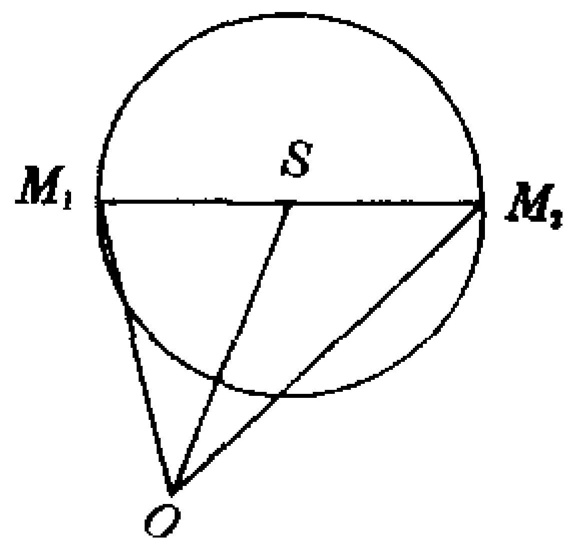
（第47届莫斯科数学奥林匹克,1984年）

［解］　不能实现.设第1种颜色是红色.如果每台仪器都恰连有1条红导线,则13台仪器连有13条红导线.但每条红导线恰连结两台仪器,故从13台仪器连出的红导线数必为偶数,矛盾.

13·49　设在桌子上放有50块走时准确的手表.求证存在某一时刻,使这时从桌子中心到分针末端的距离之和大于从桌子中心到手表中心的距离之和.

（第10届全苏数学奥林匹克,1976年）

［证］　考察一块手表上相距30分钟的两个时刻分针末端M_1和M_2.设点O和S分别为桌子中心和手表中心.显然,OS为$\triangle OM_1M_2$的中线,所以有$2OS\leqslant OM_1+OM_2$,其中等号当$\triangle OM_1M_2$退化为一条直线段时成立.



选定相距30分钟的两个时刻,使得至少有一

块手表上，这两个时刻分针末端的连线不过 O 点. 于是便知这两个时刻从桌子中心到所有手表分针末端距离之和 $D_1 + D_2$ 大于从桌子中心到所有手表中心距离之和 L 的2倍. 故 D_1 和 D_2 中至少有一个大于 L.

13·50　圆形花坛的中心装有一个浇灌设备，它的浇灌面是一个顶角为$\frac{2\pi}{11}$的扇形. 浇灌设备绕着花坛的中心匀速转动. 花坛中栽有 100 棵玫瑰，任何两棵玫瑰都不在同一条半径上. 试证必有某一时刻恰好同时浇到 10 棵玫瑰，并问能否断言，必有某一时刻恰好同时浇到 11 棵玫瑰?

（原苏联教委推荐试题，1990 年）

[解]　(1) 将圆均分为 11 个全等的扇形，于是每个扇形的圆心角都是$\frac{2\pi}{11}$. 100 棵玫瑰栽在 11 个扇形中，由抽屉原理知，其中必有 1 个扇形中至少栽有 10 棵玫瑰. 如果有一个扇形中恰好栽有 10 棵玫瑰，则前一个问题就解决了. 以下设 11 个扇形中所栽的玫瑰数都不是 10，于是必有一个扇形中的玫瑰数不少于 11. 同理，也必有一个扇形中的玫瑰数不多于 9. 将前一个扇形绕着圆心转向后一个扇形. 因为任何两棵玫瑰都不在同一半径上，所以在转动过程中，扇形中的玫瑰数每次只能改变 1. 于是在由不少于 11 变化到不多于 9 的过程中，必有某一时刻扇形中的玫瑰数恰好为 10.

(2) 将圆面分成 10 个圆心角各为$\frac{2\pi}{11}$的扇形和 10 个圆心角各为$\frac{\pi}{55}$的扇形，且使每两个大扇形之间都夹有一个小扇形. 在每个小扇形内部各栽种 10 棵玫瑰，则花坛中共有 100 棵玫瑰. 显然，对于这种栽法，任何时刻都无法同时浇灌到多于 10 棵玫瑰. 这表明不能断定必有某一时刻能同时恰好浇到 11 棵玫瑰.

13·51　两个相同的齿轮各有 32 个齿，它们在啮合时同时掉了 6 对齿. 试证可以适当安排两个齿轮的位置，使得它们在转动时，一个齿轮的断齿恰好碰上另一个齿轮的整齿.

（第 37 届莫斯科数学奥林匹克，1974 年）

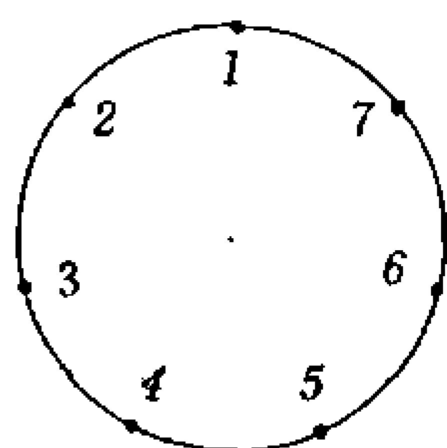
[证]　若不然，则对于两个齿轮的任何一种位置安排，都总有两个齿轮的各 1 个断齿碰在一起. 两个齿轮的原有位置有 6 对断齿碰在一起. 保持一个齿轮不动，另一个齿轮转动位置，则共有 32 个不同位置.

除原有的位置外,还有 31 个不同位置. 每种情形下至少有一对断齿碰在一起,共得到 37 对断齿. 但另一方面,一个齿轮固定,另一个旋转一周时,两个齿轮上的每个断齿互碰一次,共有 36 对断齿,矛盾.

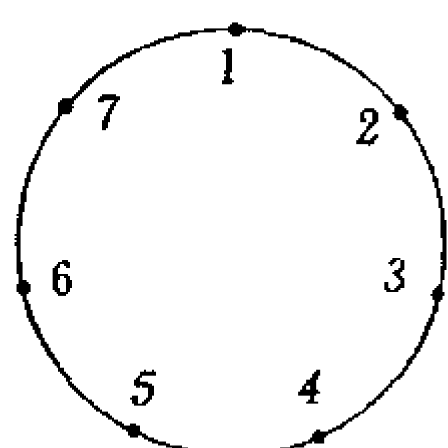
13·52　电子管的底面圆周上有 7 个管脚,插座上相应地有 7 个插孔(设它们都等距地分布在圆周上). 能否分别将管脚和插孔都编上号码(从 1 到 7),使得无论怎样将电子管插在插座中,都至少有 1 个管脚插在同号插孔中?

(第 20 届莫斯科数学奥林匹克,1957 年)

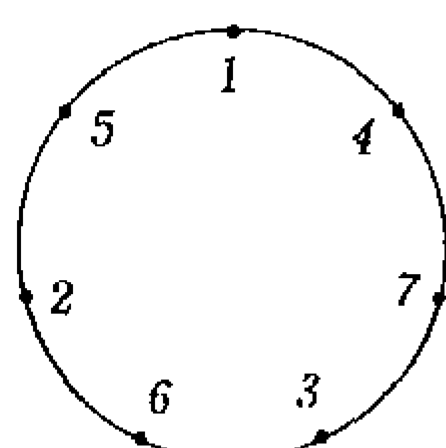
[解]



(1)



(2)



(3)

当电子管的管脚编号如图(1),插座的插孔编号如图(2)或(3)时,就满足题中的要求.

13·53　当电子管的管脚和插座的插孔的数目都是 20 时,是否对于任何编号方式,都有一种插入方式使得每个管脚与它插入的插孔的号码都不相同?

(第 20 届莫斯科数学奥林匹克,1957 年)

[解]　我们指出,只要管脚和插孔的数目是偶数,就会对于任何编号方式,都有题中所要求的插入方式. 当然,我们只对数目为 20 的情形来证明.

若不然,则在每种插入方式中,都至少有一个管脚的号码与它所插入的插孔的号码相同. 因为共有 20 种不同的插入方式,故知每种插入方式都恰有一组管脚与插孔号码相同.

设第 i 个管脚的编号是 a_i,第 i 个插孔的编号是 b_i. 于是对所有 i, $a_i - b_i \pmod{20}$ 应当取遍 0,1,2,…,19. 从而有

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_{20} - b_{20})$$
$$\equiv 0 + 1 + 2 + \cdots + 19 \equiv 10 \pmod{20}.$$

但另一方面,又有

$a_1+a_2+\cdots+a_{20}\equiv10(\bmod\ 20),b_1+b_2+\cdots+b_{20}\equiv10(\bmod\ 20)$,

故有

$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_{20}-b_{20})\equiv0(\bmod\ 20),$$

矛盾.

13·54 设有一环形公路上有 n 个汽车站,每一站存有汽油若干桶(其中有的站可以不存),n 个站的总存油量足够一辆汽车沿此公路行驶一周,现在使一辆原来没油的汽车依反时针方向沿公路行驶,每到一站即把该站的存油全部带上(出发的站也如此).试证 n 站之中至少有一站可以使汽车从这站出发环行一周,不致在中途因缺油而停车.

(中国北京市数学竞赛,1964 年)

[证 1] 设绕此环行公路行一周共需汽油 a 桶,又将此 n 个站按逆时针方向依次记为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$.设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 站上存有汽油 k_i 桶,

我们用数学归纳法证明该命题.

若不为 0 的 k_i 只有一个,不妨设为 k_1,则 $k_1\geqslant a$,于是汽车只须从 A_1 站开出即可.

今设不为 0 的 k_i 的个数为 $s(s\geqslant2)$,则必存在两个站 A_l 和 A_m,$l<m$,使得 $k_l>0,k_m>0,k_{l+1},\cdots,k_{m-1}$ 皆为 0,而且从 A_l 出发,用 k_l 桶汽油足够将汽车开到 A_m,A_l 和 A_m 的存在可由 $k_1+k_2+\cdots+k_n\geqslant a$ 得出.

于是,汽车若从 A_l 动身,它就可开到 A_m,我们现把 A_m 站的汽油 k_m 桶全部挪到 A_l,这样一来,不为 0 的 k_i 就是 $s-1$ 个.

由归纳假设,存在一个站 A_j,若车从该站出发,则可依反时针方向绕行一周.由于 $k_{l+1},\cdots,k_{m-1}$ 都为 0,故 $j\neq l+1,\cdots,m-1,m$.由于汽车必先经过 A_l,然后再到 A_m,因 A_l 原来所存的 k_l 桶汽油已足够开到 A_m,故若不挪动 A_m 的汽油,汽车同样也可从 A_l 开到 A_m,即依照原来存放的汽油桶数,汽车总可绕此环行公路行驶一周,因而对任意 n 个汽车站命题都成立.

[证 2] 我们将 n 个站依反时针方向顺次记为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$.

假定汽车从 A_1 出发,不能依反时针方向绕公路一周.汽车一定要停在某两站 A_{k_1} 与 A_{k_1+1} 之间,这表明,$A_1,A_2,\cdots,A_{k_1}$ 这些站的汽油总量不够汽车从 A_1 到 A_{k_1+1} 之用,我们设缺油量为 h_1.由于 n 个站的汽油总量足够汽车环行公路一周,所以 $k_1<n$.

假定汽车从 A_{k_1+1} 出发不能到达 A_1,它一定停在某两站 A_{k_2} 与 A_{k_2+1} 之间,这表明 $A_{k_1+1},\cdots,A_{k_2}$ 这些站的存油量不够汽车从 A_{k_1+1} 到 A_{k_2+1} 之间,设缺油量为 h_2,且 $k_2<n$.

这样继续下去,我们把公路分成了 $r+1$ 段,其中 r 段上的缺油总量为 $h_1+h_2+\cdots+h_r$.最后一段是从 A_{k_r+1} 到 $A_1(k_r<n)$,由于 n 个站的存油总量足够汽车环行公路一周,所以在最后一段,汽车可从 A_{k_r+1} 开到 A_1,并且汽车上所剩的油不少于 $h_1+\cdots+h_r$,因此,汽车从 A_{k_r+1} 出发就可以环行公路一周,不致因缺油而停车.

13·55　现在要把产油地 A 的汽油运往 B 地,已知运油车最大载油量恰等于运油车往返 A,B 两地所需耗油量(运油车要求回到 A 地).因此不直接将油运往 B 地,如果在 A,B 之间设一转运站 C,那么

(1) 当 C 设在离 A 地 $\frac{1}{3}AB$ 处时,怎样以最经济的方法,将 A 地汽油运往 B 地,使 B 地收汽油最多?此时运油率 $\left(\frac{B\text{ 地收到的汽油量}}{A\text{ 地运出的汽油量}}\right)$ 等于多少?

(2) 转运站设在何处,运油率最大?此时运油率是多少?

(中国上海市数学竞赛,1960 年)

[解]　(1) $AC=\frac{1}{3}AB$,则 $CB=\frac{2}{3}AB$.

设运油车的最大载油量为 a.

因为往返 AB 之耗油量为 a,所以单程 AB 之耗油量为 $\frac{a}{2}$.

单程 AC 之耗油量为 $\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{6}$.

单程 CB 之耗油量为 $\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{3}$.

往返 CB 之耗油量为 $2\cdot\frac{a}{3}=\frac{2a}{3}$.

所以若在 C 处满载油 a 到 B 最多可卸下油 $\frac{a}{3}$. 因此下述方法是最经济方法：

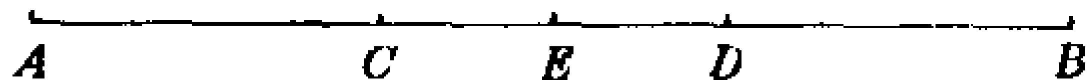
① 第一次由 A 载油 a 至 C，剩油 $\frac{5}{6}a$，卸下 $\frac{2}{3}a$，余油 $\frac{1}{6}a$，车返 A 地油恰好用完. $\left(\text{此时 } C \text{ 储油} \frac{2}{3}a\right)$.

② 第二次由 A 载油 a 至 C，剩油 $\frac{5}{6}a$，再装上油 $\frac{1}{6}a$，继续开到 B，用油 $\frac{a}{3}$，剩油 $\frac{2a}{3}$，卸下 $\frac{a}{3}$，用余油 $\frac{a}{3}$，返 C，车上的油恰好用完，再装油 $\frac{a}{6}$，返 A，车上的油恰好用完 $\left(\text{此时 } C \text{ 储油} \frac{a}{3}, B \text{ 储油} \frac{a}{3}\right)$.

③ 第三次同第二次，则 C 处油用完，B 储油 $\frac{2}{3}a$.

$$\text{此时运油率} = \frac{\frac{2a}{3}}{3a} = \frac{2}{9} \approx 22.2\%.$$

(2)① 设 $AD = \frac{2}{3}AB$，



则由(1)，也有最佳方案车运三次，

B 储油 $\frac{2}{3}a$，运油率也为 22.2%.

② 由对称性，考虑在 AB 中点 E 设储油站，则可得最佳方案：

车运两次，B 储油 $\frac{a}{2}$，此时运油率为

$$\frac{\frac{a}{2}}{2a} = \frac{1}{4} = 25\%.$$

所以储油站设在中点 E 处，运油率最大为 25%.

13·56　已知 13.5 吨货物分装在一批箱子里，箱子的自重极轻，每个箱子所装货物的重量都不超过 350 千克. 求证可以用 11 辆载重量为 1.5 吨的卡车一次运走这批货物.

（第 19 届莫斯科数学奥林匹克，1956 年）

［证］　将所有货箱任意排定顺序，首先将货箱依次装上第一辆卡车并直到再装一个就超过载重量为止，并将这最后不能装上的箱子放在第一辆汽车之旁. 然后按同样办法装第二辆，第三辆，…，直到第八辆

车装完并在车旁放了一个货箱为止.显然,前 8 辆车中每辆车所装货箱及车旁所放一箱的重量和超过 1.5 吨.故所余货箱的重量和不足 1.5 吨,可以全部装入第九辆卡车.然后把前 8 辆卡车旁所放的各一箱货物分别装入后两辆卡车,每车 4 箱,显然不超载.这样装车就可用 11 辆卡车一次运走全部货物.

13·57　一些信号灯依次编号为 $1,2,\cdots,m(m\geqslant 2)$,沿单线铁路等距离的分布着.按照安全规定,当有火车在一个信号灯与下一个信号灯之间行驶时,其他火车不允许通过这个信号灯.但火车可以在一个信号灯处,一辆接一辆地停着不动(火车的长度认为是 0).

现有 n 辆列车需从信号灯 1 驶到信号灯 m,n 辆列车的速度互不相同,但每辆车在行驶过程中总是匀速的.试证不论列车运行的顺序如何安排,从第一辆车驶离信号灯 1 到第 k 辆车到达信号灯 m 所需的最短时间总是相等的.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年）

[证]　设第 i 辆车从一个信号灯驶到下一个信号灯所用的时间为 t_i,$i=1,2,\cdots,n$.不妨设 $t_1<t_2<\cdots<t_n$.如果列车按照 $1,2,\cdots,n$ 的次序开出,且为使总时间最短,每辆车都是在按规则允许时即时开出.于是所用的总时间为

$$t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}+(m-1)t_n. \qquad ①$$

下面用数学归纳法来证明,不论列车行驶的顺序如何,所用的最短总时间均为 ①.

当 $n=1$ 时,结论显然成立.设结论 ① 对 $n=k$ 成立.当 $n=k+1$ 时,如果 $k+1$ 辆列车按速度从大到小依次开出,则 ① 照样成立.故只须再证按任意顺序开出所用的时间都是 ①.

设最先开出的是列车 i_1,然后是列车 i_2.如果 $i_1<i_2$,则列车 i_1 对整个行驶过程的影响仅在于列车 i_2 在它驶出 t_{i_1} 之后启动.由归纳假设知,后面 k 辆车所用最短时间为

$$t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}+(m-1)t_n-t_{i_1}.$$

故知所用总时间仍为 ①,其中 $n=k+1$.如果 $i_1>i_2$,我们将列车 i_1 与 i_2 的速度对调,看看对总时间产生什么影响.在 1 号灯至 2 号灯这一段,列车 i_2 原来需等待 t_{i_1},行驶用时 t_{i_2},距列车 1 开出时共用 $t_{i_1}+t_{i_2}$.

速度对调后，等待时间为 t_{i_2}，行驶用 t_{i_1}，其和仍为 $t_{i_1}+t_{i_2}$. 自2号灯起，在每两个相邻信号灯之间，列车 i_2 原来需等待 $t_{i_1}-t_{i_2}$，行驶要用 t_{i_2}，共用 t_{i_1}. 对调后，不用等待，而行驶要用时 t_{i_1}，仍与对调前相同. 可见，前两辆车速度对调后，对于列车 i_2 在每段行驶所用的时间没有影响. 因此，对于 i_2 后面的列车的行驶也没有影响，即总时间保持不变. 于是由前一种情形的讨论即知这时仍有 ① 式成立.

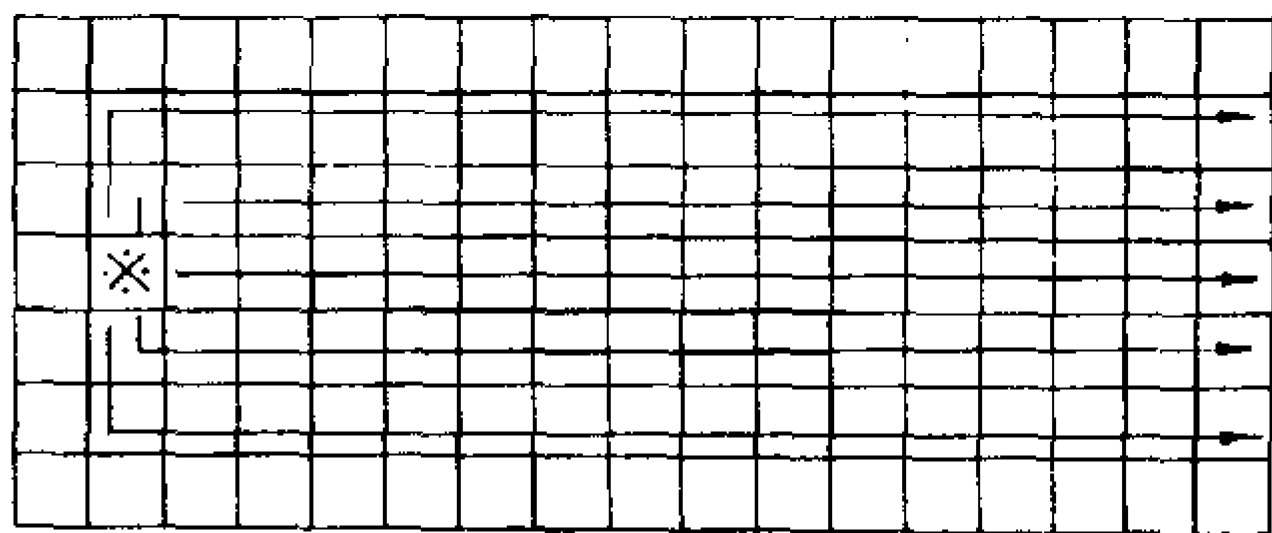
13·58　一块沙漠形如半平面，将此半平面分割为规格为 1×1 的许多小方格，距边界15个小方格的沙漠中有一个能量 $E=59$ 的机器人，每个小方格的"耗能"为不大于5的自然数，而任意一个规格为 5×5 的沙漠正方形的"耗能"为88，机器人可以进入与它相邻的四个小方格中的任一个中去(有公共边的小方格称为相邻的)每进入一格，机器人的能量会减少一个它所进入的小方格的"耗能"数. 问机器人能否走出沙漠?

(第16届全俄数学奥林匹克，1990年)

[解]　如图所示，用带箭头的路线表示机器人5条不同的行动路线(※号表示机器人所在的位置).

这5条路线所经过的小方格的耗能总和不超过

$$3\times88+2\times10+2\times5=294.$$



上述5条路线共经过3个 5×5 的正方形每格1次，经过机器人所在方格的上下两个相邻方格各两次，经过机器人所在方格的上下两方隔1格的方格各1次. 由于

$$294<5\times59.$$

因此在这5条不同的路线中至少有一条所经过的所有小方格的"耗能"之和少于59，因此机器人沿这条路线移动就可以走出沙漠.

13·59　7个矮人围坐在圆桌周围，在每个矮人面前放有一只盛有

牛奶的杯子.一个矮人把自己的牛奶都均分到其余的杯子中去,接着他右边的邻居照样做一遍,然后下一个,等等,在第7个矮人把自己的牛奶分到其他杯子中后,每一个杯子中的牛奶恰与当初未互倒时相同.已知所有杯子中共有3升牛奶,问当初每个杯子中各有多少牛奶?

(第11届全苏数学奥林匹克,1977年)

[解] 因为7个矮人依次倒奶轮一周后又恢复原状,故当继续倒下去时也是以7为周期的循环出现.设在某次倒奶后某个矮人 A 的牛奶达到最大值,有 x 升.当然下一个就轮到 A 分倒牛奶了.他倒给每人 $\frac{x}{6}$ 升.然后,其余6人依次倒向 A 的杯中,每次倒的牛奶至多为 $\frac{x}{6}$ 升.但6人都倒一次之后应恢复原状为 x 升.故当每人倒奶时都倒了 $\frac{x}{6}$ 升.因而轮到每人倒奶时杯中都有 x 升.由此可见,7个矮人的杯中应分别有奶 $\frac{k}{6}x$ 升,$k=0,1,\cdots,6$.又因共有牛奶3升,可得 $x=\frac{6}{7}$.故知7个矮人的杯中牛奶数依次为 $\frac{6}{7},\frac{5}{7},\frac{4}{7},\frac{3}{7},\frac{2}{7},\frac{1}{7},0$.

13·60 在 n 个容量充分大的杯子里注入了等量的水,允许自任何一个杯子往其他任何一个杯子中倒水,但倒入的水量必须与后者中已有的水量相等.已知经过有限次倒水后,可以将所有杯中的水全都倒进一个杯子之中,求所有可能的自然数 n.

(第27届莫斯科数学奥林匹克,1964年)

[解] 设开始时每个杯子中的水量都是1.既然经过有限次倒水后,所有水都倒入一个杯子中,我们就来考察这一个杯子被倒入水的情形.由已知,这只杯子每被倒入1次水,杯中的水量就增加1倍.如果先后共往这只杯子里倒 k 次水,则杯子里的水量为 2^k.既然开始时每只杯子中水量都是1,故知共有 2^k 只杯子,即满足要求的所有 n 即为 $\{1,2,\cdots,2^k,\cdots\}$.

13·61 在 n 个带有刻度的量杯中分别装满了 n 种不同液体,此外还有一个空量杯.问能否通过有限次的混合手续,使得各个量杯中的液体全都变得成份相同(即每个量杯中都有原来每种液体的 $\frac{1}{n}$,而且还有一个空量杯)?

(第27届莫斯科数学奥林匹克,1964年)

[解]　首先，将每杯液体都倒入空量杯中$\frac{1}{n}$，便得到一杯满足要求的液体.

然后用第1杯液体将其余 $n-1$ 杯填满，则这 $n-1$ 杯液体中各有 $\frac{1}{n}$ 的第1种液体而第1杯是空杯. 再将这 $n-1$ 杯中的液体每种都倒入空杯$\frac{1}{n-1}$. 容易验证，这一杯混合液体又满足要求.

接着用第2杯余下的液体将其余 $n-2$ 杯填满. 再把这 $n-2$ 杯液体每种都倒入空杯$\frac{1}{n-2}$，于是就又得到一杯满足要求的混合液体. 这样进行下去，直到最后为止.

13·62　圆形跑道上 n 个不同点处各有一辆汽车准备出发，每辆车都以匀速每小时跑1圈. 听到信号后，它们各选一个方向同时出发. 如果两辆车相遇，则同时改变方向以原速前进. 求证必有某一时刻，所有汽车都回到原出发点.

（第30届国际数学奥林匹克预选题，1989年）

[证]　因为任何两辆汽车的速度都相同，所以同向运行的汽车不会发生超越现象. 而当两辆汽车迎面相遇时，又各自改变方向行驶，所以 n 辆汽车的顺序永不改变.

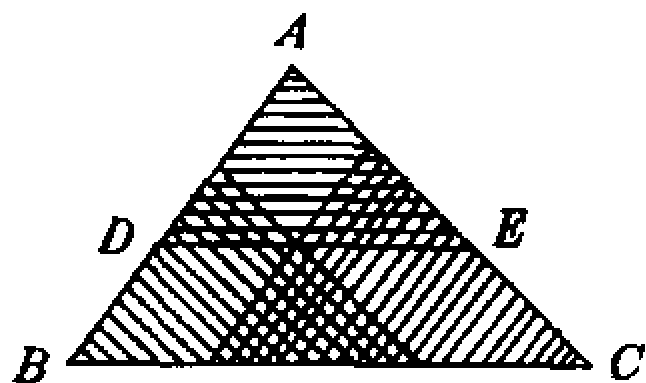
若在两辆汽车相遇时即行交换两辆车的号码，则相当于两辆车各自按原方向行驶而不受相遇的影响. 从而行驶1小时后各自回到原来的出发点.

将以上两点结合起来即知，行驶1小时后，原来的 n 个出发点处各有1辆汽车且汽车的方向都与该点原来的汽车的方向相同. 由于 n 辆汽车的顺序不变，故这时与原出发时相比，必为各辆汽车位置的一个“旋转”（这个旋转当 n 点分布不均匀时，不是刚性的），具体地说，是汽车号码的一个轮换，即每个号码都增加 k，$0 \leqslant k < n$（当 $i+k>n$ 时，理解为 $i+k-n$）. 显然，n 个小时之后每辆车都回到自己的出发点.

13·63　三只甲虫沿着 $\triangle ABC$ 的边界爬行，使由这三只甲虫所构成的三角形的重心保持在一点不动. 试证如果有一只甲虫爬过了三角形一周，则三只甲虫所构成的三角形的重心与 $\triangle ABC$ 的重心重合.

（第9届全苏数学奥林匹克，1975年）

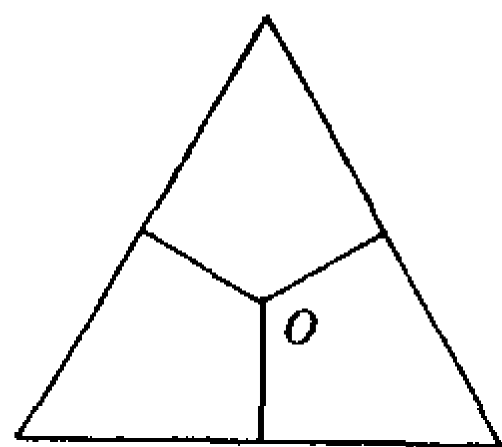
［证］ 如果一只甲虫在顶点 A，那么由甲虫构成的三角形的重心必在 $\triangle ADE$ 中(见右图)，其中 $DE \parallel BC$ 且过 $\triangle ABC$ 的重心．既然有一只甲虫爬过 $\triangle ABC$ 的三个顶点，故甲虫三角形的不动的重心应该同时属于图中有边的平行线族标出的三个三角形．但三个三角形的惟一公共点就是 $\triangle ABC$ 的重心．



13·64 一只狼被猎人赶进了一块边长为 100 米的等边三角形的林间凹地．已知这位猎人只要在离它不超过 30 米的距离上就可以杀死它，求证只要狼逃不出凹地，那么不论它在凹地中跑得有多快，猎人总能杀死它．

(第 50 届莫斯科数学奥林匹克，1987 年)

［证］ 猎人可以先占据等边三角形的中心 O．点 O 到每边的距离都不到 30 米，所以狼无法从右图所示的一个区域中跑到另一个区域中去．这样，猎人只要从点 O 出发向着狼所在区域的三角形顶点走去，必能与狼的距离小于 30 米而杀死狼．



13·65 在形状为正方形的地块中央有一只狼，而在正方形的 4 个顶点各有一只狗．狼可以在整个地块上跑来跑去，而狗只能沿正方形的边界跑．已知狼能咬死单独的一只狗，两只狗一起可以咬死狼；每只狗的最大速度是狼的最大速度的 1.5 倍．求证这些狗可以不让狼逃出正方形．

(第 3 届全苏数学奥林匹克，1969 年)

［证］ 设 v 为狼的最大速度．过狼所在的那一点作两条平行于正方形对角线的直线，它们与正方形的周界分别交于 4 点：C_1, C_2, C_3, C_4．显然，当狼跑动时，这 4 点就沿着正方形的周界移动，且移动的速度不大于$\sqrt{2}v < \frac{3}{2}v$．

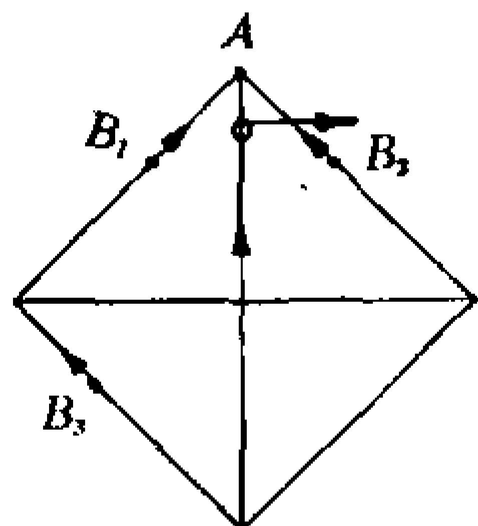
由于开始时 4 只狗恰好在 C_1, C_2, C_3, C_4 这 4 点上，所以 4 只狗只要随着 4 点一起移动，狼就无法逃出正方形．

13·66 在正方形的中心坐着一只兔子，在 4 个顶点上各有一只狼．假定狼只能沿着正方形的周界跑动，且狼的最大速度是兔子最大速

度的 1.4 倍,问兔子能否从正方形中逃出去?

(第 48 届莫斯科数学奥林匹克,1985 年)

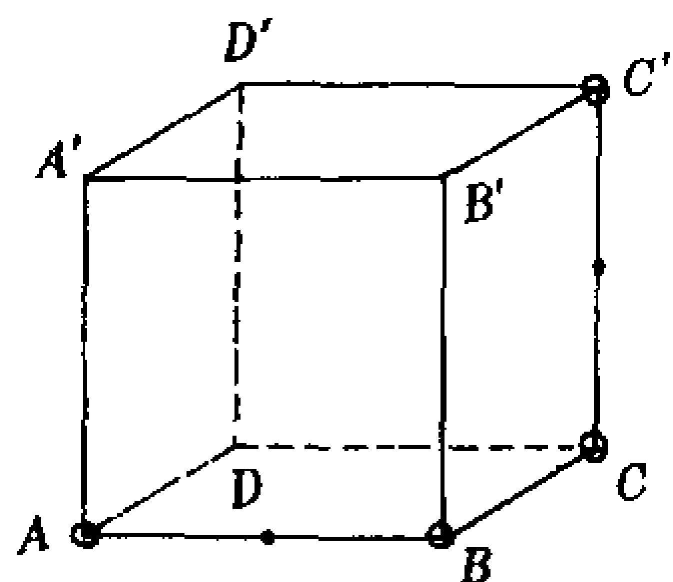
[解] 可以逃出.兔子应该这样来跑:首先,它选取正方形的一个顶点 A,并以最大速度沿对角线朝 A 跑去.设正方形的边长为 1.一直跑到离点 A 不足 $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1.4)$ 的地方(例如可到距点 A 为 0.005 的地方),然后拐弯 90°,沿着垂直于原对角线的方向(如果点 A 的狼未动,可任意左拐或右拐;如果狼在左边,则右拐),即可逃出正方形.因为狼的速度是兔子的 1.4 倍,这时尚未跑到,无法拦截.



13·67 沿着透明立方体的棱有 3 只蜘蛛和 1 只苍蝇在爬行.苍蝇的最大速度是蜘蛛的最大速度的 3 倍.在开始时,蜘蛛都在立方体的同一个顶点上,苍蝇则位于相对的顶点上.问蜘蛛能抓住苍蝇吗(在整个过程中,蜘蛛和苍蝇都能相互看见)?

(第 33 届莫斯科数学奥林匹克,1970 年)

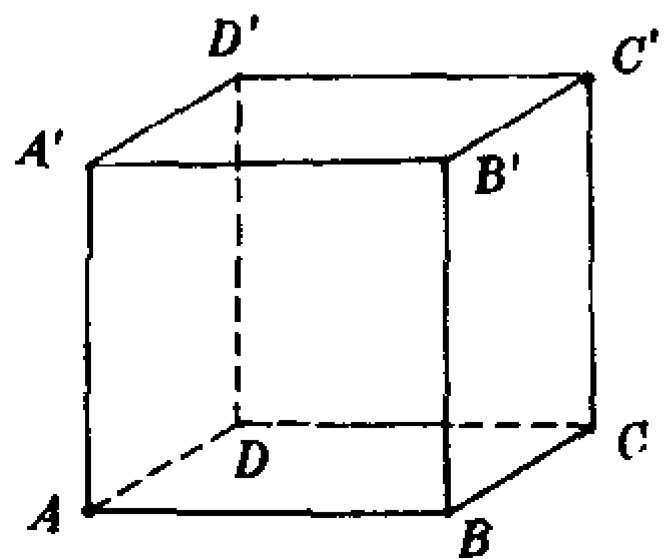
[解] 可以抓住.一只蜘蛛守住 AB,另一只守住 CC',并随着苍蝇离自己所在棱的哪一个端点近而随时游动.这样,苍蝇就无法通过这 4 个顶点.而去了这 4 个顶点,正方体上就没有闭回路了,于是第 3 只蜘蛛只要在后面追就可以了.



13·68 沿着透明立方体的棱有两只蜘蛛和 1 只苍蝇在爬行.苍蝇和蜘蛛的爬行速度一样且在整个过程中彼此都能看见.问蜘蛛能抓住苍蝇吗?

(第 33 届莫斯科数学奥林匹克,1970 年)

[解] 可以抓住.一只蜘蛛占住顶点 A 并守住 B,D,A' 3 点.另一只蜘蛛从 C' 出发.不妨设苍蝇在棱 BC 上.这时第二只蜘蛛从 C' 出发沿 $C'C$ 棱追击苍蝇.苍蝇跑过顶点 B 后自然沿棱 BB' 爬行,蜘蛛在后追一直追得苍蝇越过顶点 B'.如果苍蝇进入 $B'A'$,则位于 A 的第一只



蜘蛛沿AA'去堵截;如果苍蝇进入棱$B'C'$,则蜘蛛A不动,仍由第二只去追.直追得苍蝇越过C',不妨设苍蝇进入$C'C$并接着越过顶点C进入CB,这时蜘蛛从点A启动去堵截即可捉住苍蝇.

13·69　一只蜗牛在桌面上以固定的速度爬行,它每隔15分钟便折转90°,在每两次折转之间都沿着直线前进.求证只有经过整数个小时的爬行,蜗牛才可能回到出发点.

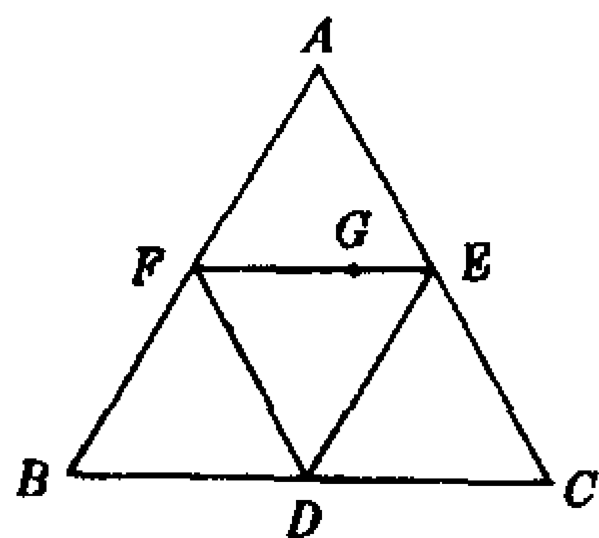
(第20届莫斯科数学奥林匹克,1957年)

[证]　显然,蜗牛爬行的路线是一条折线,当蜗牛回到出发点时,折线就是封闭的.蜗牛每15分钟所爬过的直线段是折线的一条边.把蜗牛开始15分钟所爬过的线取为横轴,第2个15分钟爬行所在的直线取为纵轴.因为折线是封闭的,故蜗牛横向爬行时,向右爬行和向左爬行的边数同样多,故知它在其上横向爬行的边数是偶数.又因蜗牛每次折转90°,故它横向爬行和纵向爬行的边数同样多,所以,折线的边数是4的倍数.因此总共要用整数个小时.

13·70　动物园里共有6条道路,恰好构成一个等边三角形和它的3条中位线.两位值班人员正在追赶一只从笼中跑出的猴子.假定猴子奔跑的速度是人的3倍且都只能沿道路奔跑,在奔跑过程中互相都能看见,问这两个值班人员能抓住猴子吗?

(第33届莫斯科数学奥林匹克,1970年)

[解]　可以抓住.开始时,两位值班人甲和乙可以分站E,F两处.显然,这时猴子若在$\triangle AFE$的边上,则很快便可抓住.故可设猴子在$\triangle BDF$的边上.于是乙可沿FD去追猴子,猴子不能跑入$\triangle CDE$,只能沿$\triangle BDF$的周界跑.这时甲可移到$G(GF=2GE)$看守点E和点F.一旦猴子从点D进入$\triangle DCE$或从点F进入$\triangle FAE$,则乙在后追,



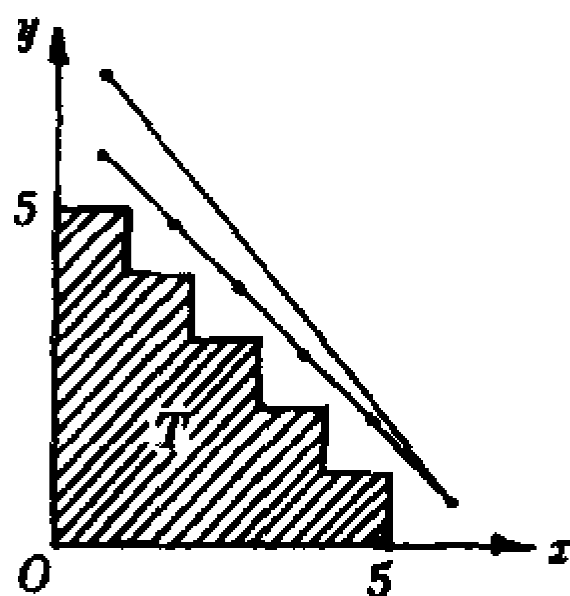
甲赶到点E堵截,便可抓住猴子.当猴子沿着$\triangle BFD$顺时针跑时,一跑过点D,甲便从点G赶到点F堵截,而乙在后追,也必可抓住猴子.

13·71　已知松鼠在坐标平面的第一象限($x\geqslant 0, y\geqslant 0$)内按以下方式跳动:它可以由点$(x,y)$跳到点$(x-5,y+7)$或者跳到点$(x+1,y-1)$,但不能跳出第一象限去.问松鼠从哪些初始点$(x,y)$不能跳到与坐标原点距离大于1000的点上?画出所有这样点的集合并求出其

面积.

（第 13 届全苏数学奥林匹克，1979 年）

［解］ 不能从它出发跳到无穷远的那些点的集合是一个阶梯形，即右图中标有斜线的图形，但阶梯形的边界 $\{(0,y)\mid 0\leqslant y<5\}$，$\{(x,0)\mid 0\leqslant x<5\}$ 包括在内而另外部分不在内.



从阶梯形 T 之外的任何点均可利用若干步 $(1,-1)$ 而到达 $x\geqslant 5$ 的区域中，然后再按 $(-5,7)\pm 5(1,-1)=(0,2)$ 的方式跳，即可跳到足够远处.

13·72 在正方体的每个顶点处都停有 1 只苍蝇. 现在让所有苍蝇同时飞起然后再落下来，仍然是每个顶点处都落有一只苍蝇. 试证其中必有 3 只苍蝇，它们在飞起前的位置与落下后所处的位置所构成的两个三角形全等.

（原苏联教委推荐试题，1991 年）

［证］ 考察原来处于正方体的一条对角线的两个端点处的苍蝇 A 和 B 重新落下的情形.

(1) 苍蝇 A 和 B 仍处于某条对角线的两端，则可任取一只异于 A 和 B 的苍蝇 C. 只须注意有两个顶点为正方体的一条对角线的两个端点的所有三角形都全等，便知苍蝇 A,B,C 满足题中要求.

(2) 苍蝇 A 和 B 不再处于某条对角线的两端. 这时，取落下后与 A 处于一条对角线两端的另一只苍蝇为 C，则苍蝇 A,B,C 便满足题中要求.

13·73 设在一个正方形的 3 个顶点处各有 1 只蚂蚱，它们玩“跳背游戏”，即一只从另一只的背上跃过去. 已知当蚂蚱 A 跃过了蚂蚱 B 的背之后，落地时同 B 的距离与起跳时离 B 的距离相等，而且这 3 点还自然地保持在同一条直线上. 问能否经过几次跳跃，有一只蚂蚱跳到了正方形的另一个顶点上？

（第 36 届莫斯科数学奥林匹克，1973 年）

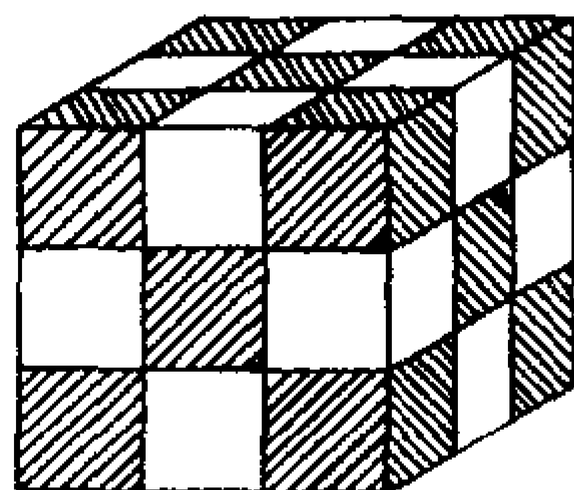
［解］ 不能实现.

在平面上引入直角坐标系，使得 3 只蚂蚱所在顶点的坐标分别为 $(0,0),(1,0),(0,1)$，于是正方形的另一顶点的坐标为 $(1,1)$. 按奇偶性

来看,前3个顶点为(偶,偶),(奇,偶),(偶,奇)而后1个顶点为(奇,奇).按题中要求知,蚂蚱每次起跳和落地所在的两个顶点的坐标奇偶性相同,故它们所跳到的新点的坐标必属于前3类,即永远也跳不到第4类整点,当然也就跳不到正方形的另一个顶点了.

13·74 把一个正方体均分成27个小正方体.已知在中心的小正方体中有一只甲虫,甲虫能从每个小正方体走到与它相邻的(即有一个公共面的)6个小正方体的任意一个之中.如果要求甲虫只能到每个小正方体一次,那么甲虫能走遍所有的小正方体吗?

(基辅数学奥林匹克,1979年)



[解] 将27个小正方体相间地涂上黑色与白色,即任何相邻两个正方体都异色,不妨设8个角上的正方体都是黑色,每面中心的正方体都是黑色,即共有14个黑的和13个白的正方体.

另一方面,甲虫每走一步,它所在的正方体都要改变颜色.因为中心正方体是白色的,故若甲虫能走遍每个方格刚好一次,则必然共有14个白的正方体和13个黑的正方体,矛盾.这表明题中所要求的甲虫走法是不能实现的.

13·75 将一张无限大的方格纸的每个方格都涂上黑白两色之一(不一定按某种规则涂色).一只螽斯在黑格之间跳跃,一只跳蚤在白格之间跳跃,每次跳跃可沿竖直方向或水平方向跳过任意多个方格.求证它们可以在至多共跳3次之后成为相邻.

(第52届莫斯科数学奥林匹克,1989年)

[证] 设二者所在的方格既不同行也不同列,否则可以少跳一次.考察螽斯所在的行与跳蚤所在的列相交处的方格.若为黑格,则令螽斯跳一次而跳到此格;若为白格,则令跳蚤跳入此格,不妨设为前者.这时,两只虫子处在同一列中,螽斯在黑格而跳蚤在白格.若这两个方格不相邻,则在两格中间一定存在两个相邻方格,使其中之一为黑格,另一个为白格.于是只要令螽斯和跳蚤各跳一次,分别进入这两个相邻方格中的黑格与白格就行了.至此,二者至多跳了3次.

13·76 蜗牛非匀速地向前爬行(不向后退),若干个人依次在6分钟的时间内观察了它的爬行,每个人都在前一人尚未结束时即已开始观察,而且都恰好观察1分钟.已知每个人在自己观察的1分钟内都发

现蜗牛爬行了1米,求证蜗牛在这6分钟时间内所爬行的距离不超过10米.

(第23届莫斯科数学奥林匹克,1960年)

[证] 设α_1为第1个观察者,α_2是在α_1停止观察之前即已开始观察的人中最后一个开始观察的人,α_3是在α_2停止观察之前即已开始观察的人中最后一个开始观察的人,如此下去,直到取完为止.于是,奇数号观察者$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5,\cdots$的观察区间互不相交,偶数号观察者的观察区间也互不相交,这是由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots$的选法所保证的.由于每个观察区间都是1分钟,而所有观察者的全部观察区间为6分钟,所以无论是偶数号观察者还是奇数号观察者的观察总时间都不超过5分钟,因此选定的观察者的人数不超过10人.从而蜗牛爬行的距离不超过10米.(它在如下情形下恰好爬行10米:共可选出10人,当且仅当只有一个人观察时,它即爬行1米,而在有两人观察时,它即停止不动.)

13·77 有5只猴子和5个梯子,每个梯子的顶端各放一根香蕉.梯子之间有若干绳子相连,每条绳子连接两个梯子的两级,任一梯子的同一级上没有两条绳子接入,开始时5只猴子分别位于不同梯子的底端,它们沿梯子上爬,每遇到绳子都沿之爬到另一梯子,然后继续上爬.求证无论有多少绳子,最后每只猴子都各拿到一根香蕉.

(第21届加拿大数学奥林匹克,1989年)

[证] 作一有向图G,它的顶点是五个梯子的起点,终点及所有系绳子的点(我们叫它为"节点"),它的所有有向棱是猴子可通行的线段(沿梯子的向上段和沿绳子的来回段),每只猴子的爬行路线是G的一条路.由一个起点出发,不会再次经过任一起点且不会终止于任一"节点".

又,如果一条路线中出现重复的棱

$$\cdots e_{j-1}e_j\cdots e_{i-1}e_i\cdots,$$

其中$j<i$,且$e_j=e_i$,则必有$e_{j-1}=e_{i-1}$.

任一猴子的路线必是由起点到终点的无重复棱的路线(图G中棱的总数有限).同理可知,任二猴子的路线终点不同(否则它们必最后一条棱相同,可逆推得起点亦相同).于是每只猴子只能各拿到一根香蕉.

13·78 把1600颗花生分给100只猴子,证明不管怎么分,至少有4只猴子得到的花生一样多,并设计一种分法,使得没有5只猴子得到

一样多的花生.

（中国北京市数学竞赛，1962 年）

[解] 要使没有 4 只猴子分得的花生一样多，最经济的分法是：

3 只得 0 颗，3 只得 1 颗，3 只得 2 颗，…，3 只得 32 颗，还有 1 只得 33 颗.

这样共需花生颗数是

$$3\times(1+2+\cdots+32)+33=1617,$$

超过了 1600 颗.

所以，不管怎么分，都至少有 4 只猴子得到的花生一样多.

没有 5 只猴子一样多的分法是很多的，如

4 只得 0 颗，3 只得 1 颗，3 只得 2 颗，…，3 只得 31 颗，2 只得 32 颗，1 只得 48 颗，这样共计

$$3\times(1+2+\cdots+31)+2\times32+48=1600.$$

13·79 在半径为 10 米的圆形表演场地中，有一头狮子在跑，它沿着折线共跑了 30 千米，求证它在转弯中所转过的角之和不小于 2998 弧度.

（第 36 届莫斯科数学奥林匹克，1973 年）

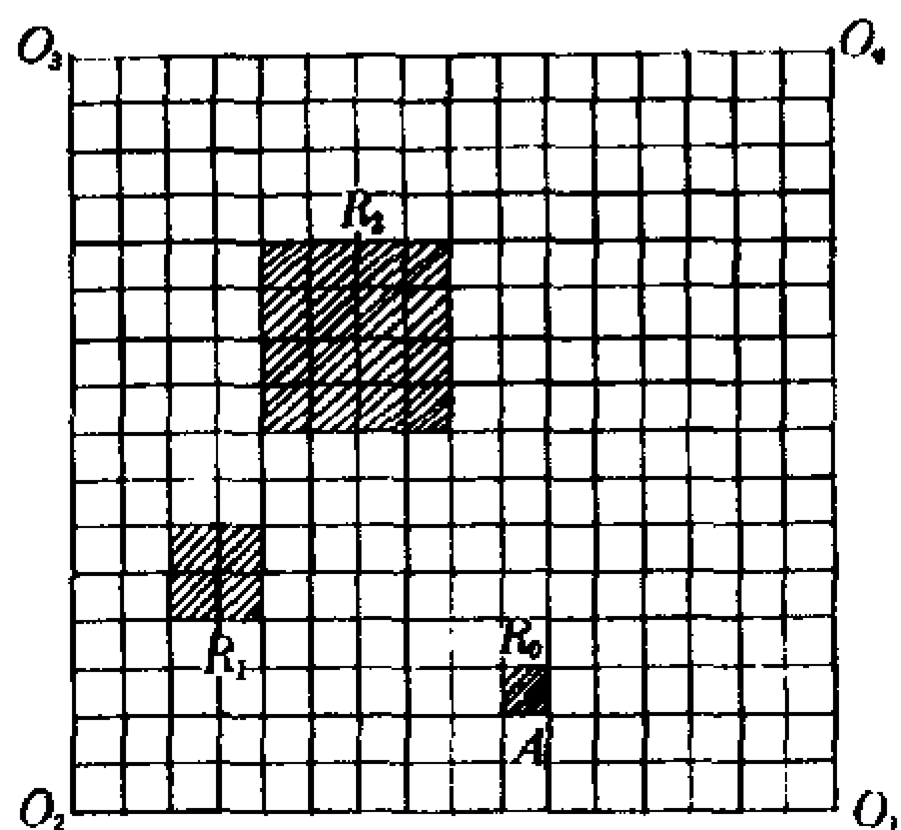
[证] 依次以狮子奔跑的转弯点为心来旋转场地，把狮子奔跑的折线变成直线. 在每一次这样的旋转中，场地的中心 O 都转过了一段弧，其长度不超过狮子的相应转角之值（以弧度计算）同 10 米的乘积（点 O 的旋转半径不超过圆形场地的半径）. 因此，在整个过程中，点 O 移动的距离之和不超过狮子的转角之和的 10 倍. 但另一方面，将点 O 与狮子奔跑起点用半径连结起来，将点 O 旋转后的终点与狮子奔跑的终点旋转后的位置连起来. 则点 O 旋转路线加上两头的半径与狮子奔跑的直线起点和终点都相同，故知在旋转中点 O 所走的距离大于 29980 米. 从而知狮子转角之和大于 2998 弧度.

13·80 在面积为 1 平方米的正方形天花板上有一只蜘蛛和一只苍蝇. 已知苍蝇在原地不动而蜘蛛可以在 1 秒钟内跳到连结它与天花板 4 个顶点的 4 条线段中任何一条的中点. 求证蜘蛛在 8 秒钟内能接近苍蝇，使距离不超过 1 厘米.

（第 23 届全苏数学奥林匹克，1989 年）

[证] 将正方形天花板分成 $2^8\times2^8$ 个小方格，每个方格的边长为

2^{-8}.记苍蝇的落点为 A,它所在的小方格为 R_0.以天花板4个顶点中距 R_0.最近的一个顶点为位似中心(上图中的 O_1),作位似系数为2的同向位似.显然,R_0 的像 R_1 落在大正方形中,且 R_1 的边长为 2^{-7}.再以天花板的4个顶点中距 R_1 最近的顶点为位似中心(上图中的 O_2),作位似系数为2的同向位似.R_1 的像 R_2 落在大正方形中,且 R_2 的边长为 2^{-6}.继续这个过程直到第8次后,得到的像 R_8 含在大正方形中且边长为1,故它就是整个天花板.



现在我们将上述过程逆转回去,从大正方形出发,经过8次系数为 $\frac{1}{2}$ 的同向位似后,所得的位似像恰为 R_0.设蜘蛛所在点为 B,则 B 的像在 R_0 中,因而这时蜘蛛与苍蝇的距离不超过 $2^{-8}\sqrt{2} < 0.01$,而时间恰用8秒.

13·81　设在某片树林中有 $n \geqslant 3$ 个椋鸟巢,而且它们之间的距离互不相等.在每个巢中都有一只椋鸟.在某些时刻任意一些椋鸟飞离自己的巢而落到其他的巢中.如果在飞起的鸟中,某一对椋鸟之间的距离小于另外一对椋鸟之间的距离(一只椋鸟可以与其他任何一只椋鸟结成"一对"),那么在飞落之后,总是使第一对椋鸟的距离大于第二对椋鸟之间的距离.问当 n 取何值时能够做到这一点?

(第23届全苏数学奥林匹克,1989年)

[解]　当 $n \geqslant 4$ 时,设某一次共飞起4只椋鸟,它们飞起的4个巢分别为 A_1, A_2, A_3, A_4,而落下的4个巢分别为 A'_1, A'_2, A'_3, A'_4,且 A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 是 A_1, A_2, A_3, A_4 的一个排列.因为任何两对鸟之间的距离的大小要互反,故有

$$\{A'_1, A'_2\} = \{A_3, A_4\}, \{A'_1, A'_3\} = \{A_2, A_4\},$$
$$\{A'_1, A'_4\} = \{A_2, A_3\}.$$

从而有

$$A'_1 \in \{A_3, A_4\} \cap \{A_2, A_4\} \cap \{A_2, A_3\} = \varnothing,$$

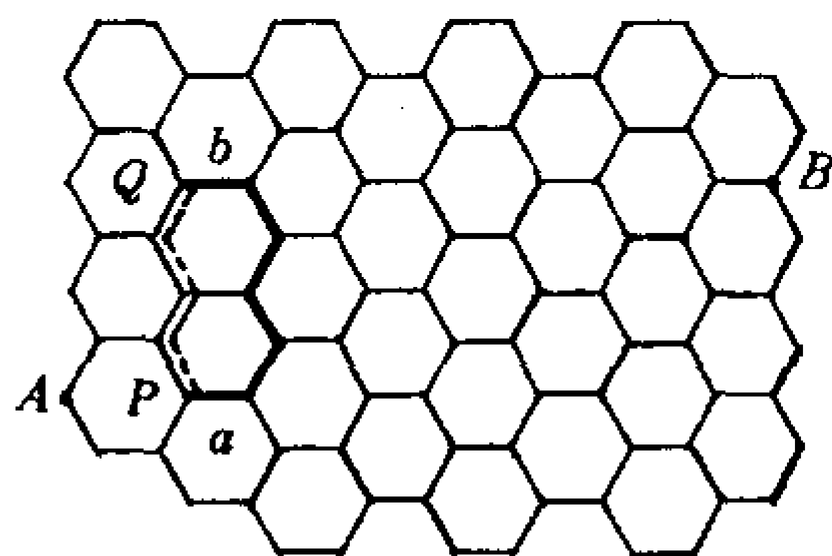
此不可能.这个矛盾说明 $n \geqslant 4$ 都不满足题中的要求.而 $n = 3$ 显然满

足题中要求.

13·82　在一个由边长为1的正六边形构成的网格平面上有两点 A 和 B，沿网格线从 A 到 B 的最短路径的长度为100. 一只昆虫沿这条路线由 A 爬到 B. 求证昆虫爬行过程中有一半的路程爬行的方向相同.

（第4届全俄数学奥林匹克，1964年）

[证]　显然，网格平面上只有三种不同方向的线段. 不妨设由 A 到 B 的100条线段中，水平方向的线段最多(参看上图).

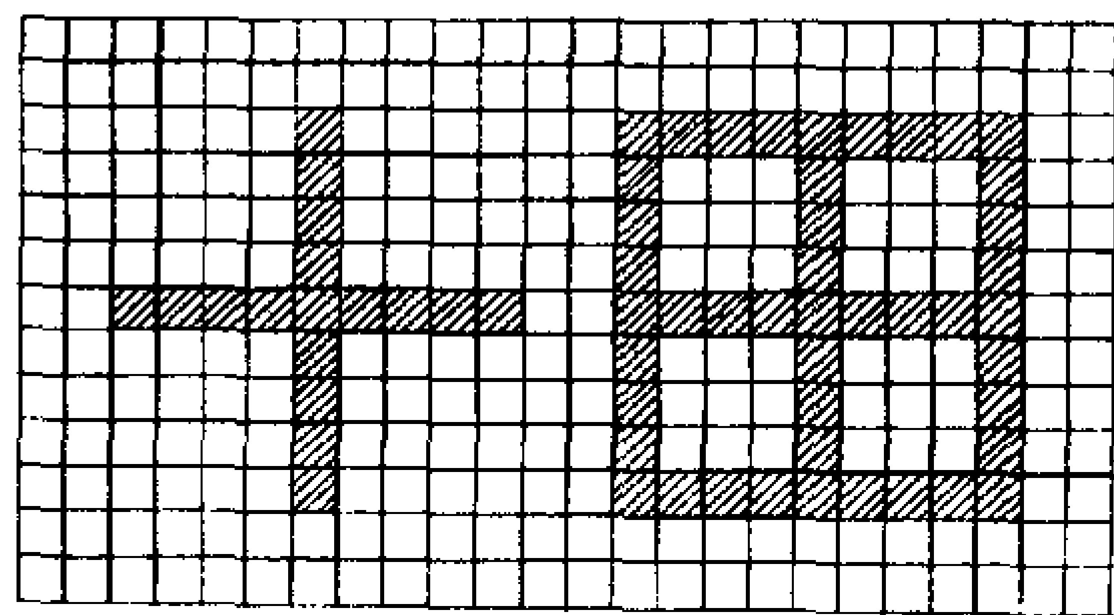


首先，我们证明，昆虫爬行的路线中的任何两条相邻的水平线段之间夹有的其他方向的线段条数必为奇数(所谓两条相邻的水平线段指二者之间不再有水平线段).

设 a 和 b 是这条路线上的两条相邻水平线段，中间夹有偶数条其他方向的线段. 于是当昆虫由 P 出发经过 a 和偶数条其他方向的线段到达线段 b 时，只能沿与 a 相反的方向通过 b 而到达点 Q. 但这时，由 P 出发沿虚线到达点 Q 的路径更短，此不可能(参看上图).

同理可知，任何两条同向线段之间所夹的其他方向的线段数均为奇数. 因而，当将所记路线上的线段依次编号为 $1,2,\cdots,100$ 时，任何两条同向线段的编号都具有相同的奇偶性. 故知线段条数最多的一种方向的线段数必为50条.

13·83　在 99×99 的方格板上画有图形 T(这个图形在下列3个问题中互不相同)，在图形 T 的每个格子中各有一只甲虫. 在某一时刻，所有的甲虫都飞起来然后重新落到图形 T 的方格中去，而且从相邻方格(指两个方格有公共边或公共顶点)中起飞的甲虫，可以仍然落入相邻方格中，也可以落入同一方格中，允许在一个方格中有若干个甲虫.



(a)　　　　(b)

(1) 设图形 T 是“十字形”(右图(a))，求证必有一只甲虫落入它原来的格中或与原格相邻的方格中.

(2) 若图形是“田字形”(图

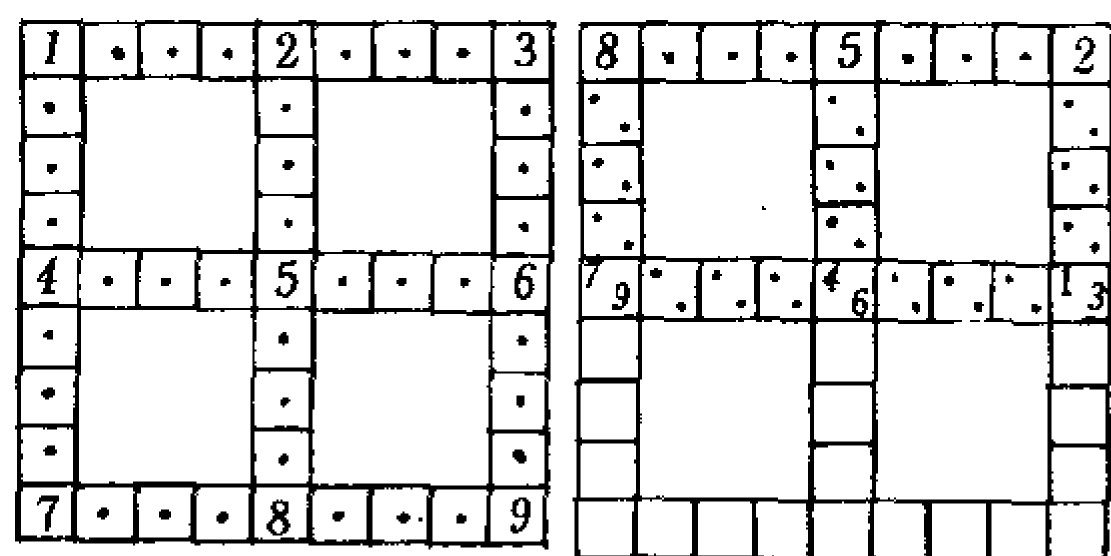
(b)),问(1) 中结论是否仍然成立?

(3) 如果图形是整块方格板,问(1) 中结论是否仍然成立?

(第 10 届全苏数学奥林匹克,1976 年)

[解] (1) 如果从中心方格飞起的甲虫落回到中心或与中心相邻的方格,结论已经成立.以下认为从中心方格飞起的甲虫向右移动了 $k \geqslant 2$ 个方格.考察从中心方格向右这一行 49 个方格.容易看出,从这些方格中飞起的甲虫还得落回到这行方格之中.在每一格中写上一个整数,它表示该方格中起飞的甲虫移动的方格数,向右飞是正的,向左是负的.显然,这行中最右端方格中的数是负的,但中心方格中的数 $k \geqslant 2$,而且相邻两格中的数之差的绝对值不超过 2.从而当方格中的数从左向右由 k 变到负数时,中间必有一个方格中的数是 $1,0,-1$ 这三数之一,这就意味着从这个方格中飞起的甲虫落回到原方格或其相邻方格中.

(2) 右图给出的例子说明这时(1) 中的结论不成立.图(a) 方格中的数表示甲虫的号码,图(b) 中的数是该号码的甲虫落在该方格中.甲虫的落点满足题中的要求,但任何甲虫的落点都远离原来的方格.



(a) (b)

(3) 我们对 $m \times n$ 个格子的矩形关于 $m+n$ 使用归纳法来证明,这时(1) 的结论仍然成立.

对于 $1 \times 1, 2 \times 2, 1 \times 2$ 的矩形,结论显然成立.对于 $1 \times n, 2 \times n$ 的矩形,可像(1) 中一样地进行证明.不难看出,为了实现归纳过渡,只须证明从 $m \times n(n \geqslant m > 2)$ 矩形 D 中可以得到较小的矩形 D',使凡是从 D' 中飞起的甲虫全都落回到 D' 之中.

现在利用国际象棋中"王"从 A 格走到 B 格所用的最少步数来定义 A 与 B 两格之间的距离 $\rho(A, B)$.显然,对于 $r = 1,2,\cdots$,与 C 格距离不超过 r 的方格恰好构成以 C 格为中心的正方形,它有 $(2r+1) \times (2r+1)$ 个方格.记从方格 K 飞起的甲虫落下的方格为 $f(K)$.按已知,对于任何两个使 $\rho(A, B) = 1$ 的方格 A 和 B,都有 $\rho(f(A), f(B)) \leqslant 1$.从而对任意两个方格 A 和 B,都有

$$\rho(f(A),f(B))\leqslant\rho(A,B).\qquad ⊛$$

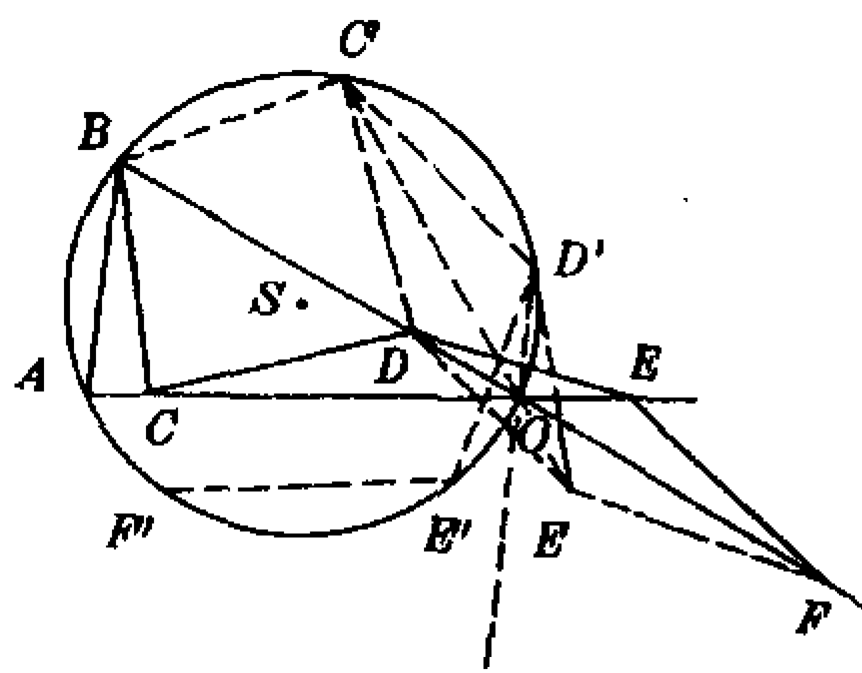
在 $m\times n(m\leqslant n)$ 矩形中，把到矩形某一方格的距离为 $n-1$ 的方格称为"边格". 如果 $m<n$，边格组成两个边行(矩形的短边)，在 $n\times n$ 正方形中，它们组成4个边行. 注意，相对两个边行中的各一个方格之间的距离 $\rho=n-1$，而其他任何两个方格之间的距离不超过 $n-2$.

如果飞起的 $m\times n$ 个甲虫一个也不落在某一边行中，则去掉这个边行的 $m\times(n-1)$ 矩形即为较小的矩形 D'. 否则，将所有边行去掉所得的较小矩形即可作为 D'. 事实上，这时每个边行中至少落有一只甲虫，即存在方格 K_i(两个，三个或四个)，使在每一边行中都至少包含一个方格 $f(K_i)$. 因为对于 D' 的任一方格 M，都有 $\rho(M,K_i)\leqslant n-2$，故由⊛式便得 $\rho(f(M)-f(K_i))\leqslant n-2$. 从而知 $f(M)\in D'$.

13·84　平面上两条直线相交成 α 角，在一条直线上蹲着一只蚂蚱，每隔1秒钟它由一条直线跳向另一条直线(交点算作两条直线的公共点). 已知它每次跳的距离都是1，而且任何时刻它都不跳回1秒钟前的位置. 经过若干时间后，它跳回了开始时的出发点. 求证当用度为单位时，角 α 为有理数.

(第31届莫斯科数学奥林匹克，1968年)

[证]　设蚂蚱沿折线 $ABCDEF$ 跳跃(如右图所示). 关于直线 OB 作点 C 的对称点 C'，则 $\angle BC'O=\angle BCO=180°-\angle A$，所以 O,A,B,C' 四点共圆，记为圆 S. 再关于直线 OB 作点 E 的对称点 E'，于是折线 $BCDEF$ 就对称为折线 $BC'DE'F$. 然后以 OC' 为对称轴，重复上面的过程，便知 D 的对称点 D' 也在圆 S 上. 类似地，E 和 F 都可在 S 上找到自己的对应点 E''，F''，且有 $AB=BC'=C'D'=D'E''=E''F''$.



按已知，蚂蚱经若干次跳跃后又回到出发点，这意味着存在自然数 n 和 k，使得 $n\cdot\overset{\frown}{AB}=k\cdot360°$，从而得到 $\alpha=\dfrac{k}{n}180°$，当然是有理数.

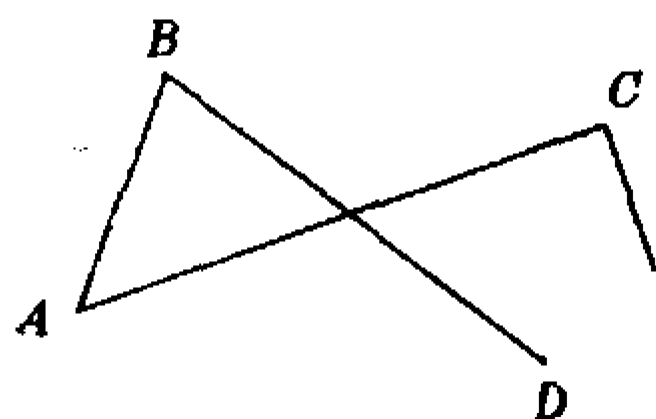
13·85　已知某片树林中的任何两棵树之间的距离，都不超过它们的高度之差，而且每棵树的高度都不超过100米. 求证可以用200米

长的篱笆将树林围起来.

（第 35 届莫斯科数学奥林匹克，1972 年）

［证］ 将每棵树的位置视为平面上一点，作这些点的凸包. 显然，只要证明凸包多边形的周长不超过 200 米就行了.

设凸包多边形的顶点中，顶点 A_1 处的树最高，顶点 A_n 处的树最矮. 让我们来证明，从 A_1 出发，沿着凸包多边形的周界从两个方向到 A_n 的距离都不超过 100 米. 只须证明折线 $A_1A_2\cdots A_n$ 的长度不超过 100 米.



按这 n 个顶点的树高来递减排列这 n 个顶点为 $A_1, A_{i_2}, A_{i_3}, \cdots, A_{i_{n-1}}, A_n$. 因为任何两点间的距离都不超过两点处树高的差，故折线 $A_1A_{i_2}A_{i_3}\cdots A_{i_{n-1}}A_n$ 的长度不超过 A_1, A_n 两点处的树高之差，故不超过 100 米. 这条折线如果是不自交的，则它恰好就是折线 $A_1A_2\cdots A_n$，问题就解决了. 不妨设它是自交的. 但当把折线自交的两边（右图中的 AC, BD）用以它们为对角线的四边形的一组对边来代替时，折线的长度变小. 由此可见，折线 $A_1A_2\cdots A_n$ 的长度不大于折线 $A_1A_{i_2}\cdots A_{i_{n-1}}A_n$ 的长度，当然不超过 100 米.

13·86 在一块地块上植有 10000 株树，每行 100 棵，共 100 行，形成整齐的方格网. 试问最多可以砍去多少棵树，可以保证站在每个树墩上时，都看不见树后面的任何一个树墩？这里可以认为树足够地细.

（第 33 届莫斯科数学奥林匹克，1970 年）

［解］ 将行和列都依次编号为 1，2，…，100. 将所有行和列的号码均为奇数的树砍掉，则共砍掉 2500 棵树. 易证，这种砍法满足题中要求，故知所求的最大值不小于 2500. 另一方面，这些树恰好处于 99×99 的方格表的结点位置. 将行和列的号码均为奇数的方格取出，共有 2500 个方格（见右图），它们的 10000 个顶点互不相重，恰为 99×99 的方格表的 10000 个结点. 当砍掉 2501 棵树，也就是选 2501 个结点时，由抽屉

原理知，总有两点是某个选取的方格的顶点. 这两棵树都砍掉不满足要求.

综上可知，最多砍掉 2500 棵树.

13·87　正方形田地被分成了 100 块同样的正方形小块，在其中的 9 小块上萌发有杂草. 已知一年后杂草能且只能蔓延到那些至少已有两个相邻(有公共边)小块长有杂草的小块之中，求证杂草永远不会蔓延到整块田地.

(第 49 届莫斯科数学奥林匹克，1986 年)

[证]　考察已长有杂草的地块的边界的总长度. 因为任何一块新长杂草的正方形小块都至少与两块已长有杂草的地块相邻，故在长有杂草地块面积增加的情况下，边界的总长度并不增加. 因为开始时有 9 小块长有杂草，当设正方形小块边长为 1 时，长有杂草地块的边界总长不超过 36，而整个地块的边界长为 40，故知杂草永远不会蔓延到整块田地.

13·88　设有 n 张卡片，每张卡片的两面各写上 1 个由 $1,2,\cdots,n$ 中选出的自然数，而且每个数都在这 n 张卡片上恰好出现两次. 试证可以将这 n 张卡片摆在桌面上，使得朝上的一面 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数都出现.

(第 25 届莫斯科数学奥林匹克，1962 年)

[证]　首先，取一张写有 1 的卡片并将 1 朝上摆在桌面上. 如果这张卡片的背面也是 1，则接着取一张写有 2 的卡片并将 2 朝上摆在桌面上. 如果第 1 张卡片的背面是 $j \neq 1$，则把另一张写有 j 的卡片取出并将 j 朝上摆在桌面上. 如果这张写有 j 的卡片的另一面写有 1，则可随便另取一张卡片摆在桌面上并继续下去；如果这张正面为 j 的卡片背面写有 $k \neq 1$，则又可把另一张写有 k 的卡片取来并将 k 朝上摆在桌面上. 如此继续下去，直到摆完为止. 因为每个不超过 n 的自然数都恰好出现两次，故这个过程一定可以进行到最后.

13·89　给出 n 张卡片，在每张卡片的两面各写一个非负整数：在第 1 张上写 0 和 1，第 2 张上写 1 和 2，…，第 n 张上写 $n-1$ 和 n. 一个人按任意顺序抽出卡片，并让第二人逐张看到这些取出的卡片的一面. 试指出在哪些情况下，第二个人可以判断出他所看到的最后一张卡片的背面的数?

(第 21 届莫斯科数学奥林匹克，1958 年)

[解] 如果在最后一张卡片的正面写着数 k,则当 $k=0$ 或 $k=n$ 时,立刻可以断定背面的数是 1 或 $n-1$. 当 $0<k<n$ 时,背面的数或是 $k-1$,或是 $k+1$.

如果第二人已见过两张 $k+1$,或者对某个 $1\leqslant j\leqslant n-k-1$,已见过 1 张 $k+1,\cdots,1$ 张 $k+j$ 和两张 $k+j+1$(当 $k+j+1=n$ 时,只须看到 1 张),则可断定最后一张卡片的背面为 $k-1$. 如果第二人见过两张 $k-1$,或者对某 $1\leqslant j\leqslant k-1$,第二人见过 1 张 $k-1,\cdots,1$ 张 $k-j$ 和两张 $k-j-1$(当 $k-j-1=0$ 时,只须见过 1 张),则可断定最后一张卡片的背面是 $k+1$.

13·90 有 20 张卡片,将数字 0 至 9 中的每一个数字都写在两张卡片上. 试问能否将这些卡片排成一行,使得两个 0 相邻,而在两个 1 之间恰有一张卡片,两个 2 之间恰有两张卡片,…,两个 9 之间恰有 9 张卡片?

(第 28 届莫斯科数学奥林匹克,1965 年)

[解] 考察两对数 i,i 和 j,j 的位置情形:

(1)i,i,j,j 或 j,j,i,i,这时被夹的卡片数为 0;

(2)i,j,i,j 或 j,i,j,i,这时被夹的卡片数为 2;

(3)i,j,j,i 或 j,i,i,j,这时被夹的卡片数为 2.

可见,任何两对数中被夹的卡片数总是偶数. 如果题中所要求的排法可以实现,则被夹卡片的总数是偶数(同一张卡片被几对数所夹就算几次). 但另一方面,又因两个 i 之间夹有 i 张卡片,$i=0,1,\cdots,9$,故被夹卡片的总数又应为 $1+2+\cdots+9=45$ 为奇数,矛盾. 这说明题中所要求的排法是不能实现的.

13·91 在 99 张卡片上分别写有自然数 $1,2,3,\cdots,99$. 将卡片的顺序打乱,让空白面朝上,并在其上再分别写上数 $1,2,3,\cdots,99$. 然后将每张卡片两个面上的数相加,再将这 99 个和数相乘. 求证所得的积必为偶数.

(第 33 届莫斯科数学奥林匹克,1970 年)

[证] 因为这 99 个数中有 50 个奇数和 49 个偶数,故知卡片中必有一张,两面写的都是奇数,因而两数之和为偶数. 从而 99 个和数的乘积必为偶数.

13·92 从 1 到 50 各数分别打印在各张卡片上,这些卡片打乱,然

后将字面向上排成5行，每行10张，重排每行的卡片，使它们从左到右的数目增大，然后重排每列的卡片，使它们从上到下的数目增大，在最后的排列中，各行卡片是否从左到右的数目仍增大.

（第12届加拿大数学奥林匹克，1980年）

［解］ 考虑一般情形.

设有 mn 张卡片排成 m 行 n 列. 设 C_{ij} 表示最后排列中第 i 行第 j 列的卡片上的数.

假定存在下标 i,j,k，$1 \leqslant i \leqslant m$，$1 \leqslant j < k \leqslant n$，使得

$$C_{ij} > C_{ik}.$$

因为各列的数从上到下增大，所以比较第 j 列从 C_{ij} 以下的 $m-i+1$ 个数：

$$C_{ij}, C_{i+1,j}, C_{i+2,j}, \cdots, C_{mj}, \qquad ①$$

和第 k 列从 C_{ik} 以上的 i 个数：

$$C_{ik}, C_{i-1,k}, C_{i-2,k}, \cdots, C_{1k}. \qquad ②$$

由 $C_{ij} > C_{ik}$ 知，① 中的各个数都大于 ② 中的各个数.

原来在各行重排之后，各列重排之前，① 和 ② 共 $(m-i+1)+i=m+1$ 个数分布在 m 行中，所以至少有 ① 的一个数和 ② 的一个数在同一行中（这是因为 ① 中的任二数不同行，② 中的任二数也不同行），这与当时各行的数从左到右增大的事实相矛盾.

因此，对所有 $1 \leqslant i \leqslant m$，$1 \leqslant j < k \leqslant n$，都有

$$C_{ij} < C_{ik}.$$

即最后的排列中，各行的数仍从左到右增大.

13·93 设有1000张号码分别为000，001，…，999的卡片和100个号码为00，01，…，99的小匣子. 如果小匣子的号码能由一张卡片的号码中删去其中的一位数字而得到，那么这张卡片就可以放到这个小匣子中去.

(1) 求证可以把所有卡片分别放到50个小匣子中去；

(2) 求证不可能把所有卡片分放到少于40个小匣子中去；

(3) 求证不可能把所有卡片分放到少于50个小匣子中去.

(4) 如果卡片的号码是4位数，从0000直到9999，且当小匣子的号码能由卡片的号码删去两位数字而得到时，卡片就可以放到这个小匣

子中去.求证能把所有4位数字的卡片分放到34个小匣子中去.

(5) 对于k位号码的卡片($k=4,5,6,\cdots$),最少需要多少个小匣子才能把它们按要求分放进去?

(第11届全苏数学奥林匹克,1977年)

[证] (1) 将10个数字分成两组:$\{0,1,2,3,4\}$和$\{5,6,7,8,9\}$并选用那些号码中的两个数字属于同一组的匣子.因为从5个元素中任取两个的有重复排列数为25,故知共选用了50个小匣子.又因每张卡片号码中的三个数字中,总有两个属于同一组,故它必然可放到这50个小匣子之一中去.

(2) 显然,号码分别为00,11,…,99的10个匣子是一定要用的.但是,号码中的3位数字互不相同的卡片共有$C_{10}^3=720$张,而它们中的任何一张都不能放到上述10个匣子中去.每一个号码中两位数字不同的匣子,例如号码为$\overline{pq}(p\neq q)$,其中至多能放入24张卡片(即号码为$\overline{rpq},\overline{prq},\overline{pqr}$的卡片,$r\neq p,r\neq q,0\leqslant r\leqslant q$).可见,为装下720张卡片,至少还需要30个匣子.

(3) 把被选用的匣子按其号码的首位数字分成10组,每组的首位数字相同,并设匣子数最少的一组有x个匣子.不妨设这组匣子的首位数字是9,而x个匣子的号码分别为$99,98,\cdots,\overline{9y}$,其中$y=10-x$.于是任何号码为$\overline{9pq}(p<y,q<y)$的卡片都不能放入上面的$x$个匣子内.因而为了放置卡片$\overline{9pq}$,必须选用号码为$\overline{pq}$的匣子,而这样的匣子共有$y^2$个,它们的两位数字均从0到$y-1$.又因首位从$y$到9的$x$组中每组至少有$x$个匣子且与上述$y^2$个匣子不重复,故知选用的匣子总数不少于

$$x^2+y^2=x^2+(10-x)^2\geqslant 50.$$

(4) 对于自然数k和s,用$F(k,s)$表示函数$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2$在条件$x_1,x_2,\cdots,x_k$都是非负整数且$x_1+x_2+\cdots+x_k=s$下的最小值.易见,可以用k和s来表示$F(k,s)$:如果$s=kq+r,0\leqslant r<k,q\geqslant 0$,则有

$$F(k,s)=(k-r)q^2+r(q+1)^2=kq^2+r(2q+1).$$

现在我们来研究一般的问题(5),而把问题(4)作为它的特殊情况来处理.对于号码为k位数,每位数都可从0到$s-1$这s个数字中取值的所有卡片(共s^k张),我们要证明当放卡片的规则是从卡片号码中删

掉 $s-2$ 位数字而只余两位数字为 $\overline{pq}$ 时,可以放入号码为 $\overline{pq}$ 的匣子中,这时所需要匣子的最少个数 $M(k,s)=F(k-1,s)$.

写 $s=(k-1)q+r$,把 s 个数字分成 $k-1$ 组,前 $k-1-r$ 组每组有 q 个数字而后 r 组每组有 $q+1r$ 数字.然后把号码中两位数字属于同一组的所有匣子都取出来,共有 $F(k-1,s)$ 个.对于任意一张有 k 个号码的卡片,其上的 k 个数字中必有两个属于同一组,于是就可以把这张卡片放入相应的匣子中去.这说明 $M(k,s)\leqslant F(k-1,s)$.

另一方面,我们关于 $k+s$ 用数学归纳法来证明反向的不等式.而这又只要注意到

$$M(k,s)\geqslant\min_{1\leqslant x\leqslant s}M\{(k-1,s-x)+x^2\}$$

就行了.

为了给出具体结果,列表如下:

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…	…	n	…
$M(k,10)$	50	34	26	20	18	16	14	12	10	…	…	10	…

特别当 $k=4$ 时,最少要 34 个匣子,即(4) 成立.

13·94　对怎样的自然数 n 和 k,二项式系数

$$C_n^{k-1},C_n^k,C_n^{k+1}$$

成等差数列?

(匈牙利数学奥林匹克,1973 年)

[**解**]　所求的自然数 n 和 k 应满足方程

$$C_n^{k-1}-2C_n^k+C_n^{k+1}=0.\qquad①$$

显然应有 $k-1\geqslant 0,k+1\leqslant n$,即有

$$1\leqslant k\leqslant n-1.\qquad②$$

将方程 ① 两端同时乘以 $(k+1)(n-k+1)(C_n^k)^{-1}$,得到

$$k(k+1)-2(k+1)(n-k+1)+(n-k)(n-k+1)=0.$$

化简得到

$$n=(n-2k)^2-2.\qquad③$$

我们把 ③ 式改写成

$$n=u^2-2,\qquad④$$

其中 u 是满足关系式 $u = n - 2k$ 或 $u = 2k - n$ 的自然数. 由此可得 k 的值为

$$k_1 = \frac{n-u}{2} = \frac{u^2-u}{2} - 1 = C_u^2 - 1, \quad ⑤$$

$$k_2 = \frac{n+u}{2} = \frac{u^2+u}{2} - 1 = C_{u+1}^2 - 1. \quad ⑥$$

由 ⑤ 和 ⑥ 可知, k 取整数值.

为使 n 取自然数值, 由 ④ 知 $u \geqslant 2$. 但当 $u = 2$ 时, $k_1 = 0$ 且 $k_2 = 2$, $n = 2$, 此与 ② 矛盾, 故有 $u \geqslant 3$. 这时,

$$k_1 = C_u^2 - 1 \geqslant 2, k_1 = \frac{n-u}{2} < n.$$

又因 $k_1 + k_2 = n$ 且 $k_1 < k_2$, 所以 k 的两个值都满足不等式 ②.

综上所述, 我们得到二项式系数 $C_n^{k-1}, C_n^k, C_n^{k+1}$ 成等差级数的充分必要条件是: $n = u^2 - 2, k = C_u^2 - 1$ 或 $k = C_{u+1}^2 - 1, u \geqslant 3$.

13·95 设 n 和 r 都是自然数且有 $r + 3 \leqslant n$, 求证二项式系数

$$C_n^r, C_n^{r+1}, C_n^{r+2}, C_n^{r+3}$$

不可能是一个等差级数的连续 4 项.

(波兰数学奥林匹克, 1974 年)

[证] 若不然, 则 r 和 $r+1$ 都是方程

$$C_n^x - 2C_n^{x+1} + C_n^{x+2} = 0 \quad ①$$

的自然数解. 将 ① 式两端同乘 $(x+2)(n-x)(C_n^{x+1})^{-1}$, 便得到关于 x 的二次方程

$$(x+1)(x+2) - 2(x+2)(n-x) + (n-x)(n-x-1) = 0, \quad ②$$

它恰有两个解, 即 r 和 $r+1$ 是它仅有的两个解.

另一方面, 由于对任意 $k \leqslant n$, 总有

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad ③$$

所以 $x = n - r - 2, x = n - r - 3$ 也满足方程 ①, 从而也是方程 ② 的解. 由二项式系数的对称性 ③ 知可设 $r \leqslant \frac{n}{2}$, 从而 $r \leqslant \frac{n}{2} - 2$. 于是 $n - r - 2 \geqslant n - \frac{n}{2} + 2 - 2 = \frac{n}{2}$, 这意味着 $r, r+1, n-r-2$ 是方程 ② 的 3 个不同的解, 此不可能.

13·96　求证恒等式 $\sum_{k=0}^{r} C_m^k C_n^{r-k} = C_{m+n}^r$.

（中国国家集训队训练题，1986 年）

［证 1］　因为

$$\sum_{j=0}^{m+n} C_{m+n}^j x^j = (1+x)^{m+n} = (1+x)^m \cdot (1+x)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k \cdot \sum_{h=0}^{n} C_n^h x^h,$$

考察等式两端 x^r 项的系数即得所欲证.

［证 2］　设一班学生中有 m 个男生和 n 名女生，现在要从班里派 r 个人参加宣传队，则所有不同的派法种数当然是 C_{m+n}^r. 另一方面，把所有派法按男学生数 k 的不同分成 $r+1$ 组，每组派法中男学生数依次为 $k=0,1,\cdots,r$. 当 r 名学生中有 k 名男生时，有 $r-k$ 名女生. 所以第 k 组派法种数为 $C_m^k C_n^{r-k}$. 故所有取法的种数为 $\sum_{k=0}^{r} C_m^k C_n^{r-k}$. 由此即得所欲证的恒等式.

13·97　试证对任意 $n \in N$，均有

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} = (C_{2n}^n)^2.$$

（第 23 届国际数学奥林匹克候选题，1982 年）

［证］　将恒等式

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$$

展开，按二项式定理有

$$\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k = \left(\sum_{j=0}^{n} C_n^j x^j\right)^2.$$

比较上式两端 x^n 项的系数，并利用 $C_n^k = C_n^{n-k}, k=0,1,\cdots,n$，得到

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2.$$

因此有

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n!)^2}{(k!)^2((n-k)!)^2}$$

$$= C_{2n}^n \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = (C_{2n}^n)^2.$$

13·98　试证对任意 $n \in N$,都有

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \frac{1}{i_1 i_2 \cdots i_k} = n,$$

其中求和是对所有取自集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的数组 $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, $k = 1,2,\cdots,n$ 进行的.

(奥地利 — 波兰数学奥林匹克,1980 年)

［证 1］　考虑多项式

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{1}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\cdots\left(x + \frac{1}{n}\right), \qquad ①$$

它的展开式记为

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n. \qquad ②$$

由韦达定理有

$$a_1 = \sum_{i_1 = 1}^{n} \frac{1}{i_1}, a_2 = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \frac{1}{i_1 i_2}, \cdots,$$

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n}. \qquad ③$$

于是由 ① - ③ 即知,所求证的等式左端的和式即为

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = P(1) - 1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$$

$$= (n + 1) - 1 = n.$$

［证 2］　记所求证的恒等式左端为 S_n,并用数学归纳法来证明 $S_n = n$.

当 $n = 1$ 时,显然有 $S_1 = 1$.设 $n \geqslant 2$ 且 $S_{n-1} = n - 1$.于是有

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k = n} \frac{1}{i_1 i_2 \cdots i_k}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{1 + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant n-1} \frac{1}{i_1 i_2 \cdots i_m}\right\}$$

$$= \frac{1}{n}(1 + S_{n-1}).$$

由此即得

$$S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n}(1 + S_{n-1}) = n - 1 + 1 = n.$$

这就完成了归纳证明.

13·99　求证恒等式 $n! = \sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C_n^m (n-m)^n$.

（中国国家集训队训练题,1986 年）

[证]　由二项式定理有

$$\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m (n-m)^n = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k n^{n-k} m^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k n^{n-k} \sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m m^k. \qquad ①$$

由此可见,证明的关键在于计算 ① 式右端后一个和式的值.下面我们就用数学归纳法来证明一组恒等式:

$$\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m m^k = \begin{cases} 0, & k = 0,1,\cdots,n-1, \\ (-1)^n n!, & k = n. \end{cases} \qquad ②$$

当 $n = 1$ 时,② 式显然成立.设当 $n = h$ 时 ② 式成立.当 $n = h + 1$ 时,对于 $k = 0$ 的情形,② 式化为熟知的组合恒等式,当然成立.当 $1 \leqslant k \leqslant h + 1$ 时,利用关系式 $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$,我们有

$$\sum_{m=0}^{h+1}(-1)^m C_{h+1}^m m^k = -n \sum_{m=1}^{h+1}(-1)^{m-1} C_h^{m-1} m^{k-1}$$

$$= -(h+1) \sum_{m=0}^{h}(-1)^m C_h^m (m+1)^{k-1}. \qquad ③$$

若 $k = 1$,则 ③ 式右端为 0;若 $k > 1$,则由二项式定理又有

$$\sum_{m=0}^{h+1}(-1)^m C_{h+1}^m m^k = -(h+1) \sum_{m=0}^{h}(-1)^m C_h^m \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j m^j$$

$$= -(h+1) \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j \sum_{m=0}^{h}(-1)^m C_h^m m^j. \qquad ④$$

再由归纳假设便知当 $n = h + 1$ 时,② 式成立.

将 ② 式的结果代入 ① 式右端,便得

$$\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m (n-m)^n = (-1)^n C_n^n n^{n-n} \cdot (-1)^n n! = n!.$$

13·100　设 $n = 2^{s_1} + 2^{s_2} + \cdots + 2^{s_m}$,其中 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ 都是正整数且 $s_1 < s_2 < \cdots < s_m$,求证组合数 $C_n^0, C_n^1, \cdots, C_n^n$ 中奇数的个数等于 2^m.

（中国国家集训队训练题,1986 年）

[证] (1) 首先证明,对任何自然数 s,在 $(1+x)^{2^s}$ 的展开式中,只有两项,即 1 和 x^{2^s} 的系数为奇数.

当 $s=1$ 时,$(1+x)^2=1+2x+x^2$,命题显然成立.设命题于 $s=k$ 时成立,即 $(1+x)^{2^k}$ 的展开式中只有 1 和 x^{2^k} 的系数为奇数.当 $s=k+1$ 时,我们写

$$(1+x)^{2^{k+1}}=(1+x)^{2^k}(1+x)^{2^k}.$$

由此可见,在 $(1+x)^{2^{k+1}}$ 的展开式中,系数为奇数的项只能 $(1+x^{2^k})(1+x^{2^k})$ 的展开式中系数为奇数的项,而后者当然只有 1 和 $x^{2^{k+1}}$ 这两项,这就证明了命题于 $s=k+1$ 时成立.

(2) 因为 $n=2^{s_1}+2^{s_2}+\cdots+2^{s_m}$ 且 $s_1<s_2<\cdots<s_m$,故有

$$(1+x)^n=(1+x)^{2^{s_1}}(1+x)^{2^{s_2}}\cdots(1+x)^{2^{s_m}}.$$

由此并利用(1)中的结果便知,$(1+x)^n$ 的展开式中,系数为奇数的项只能为乘积表达式

$$f(x)=(1+x^{2^{s_1}})(1+x^{2^{s_2}})\cdots(1+x^{2^{s_m}})$$

的展开式中系数为奇数的项.显然,$f(x)$ 的展开式共有 2^m 项,且因 $s_1<s_2<\cdots<s_m$,故知这 2^m 项中没有同类项,所以这 2^m 项的系数都是 1,当然都是奇数.又因 $(1+x)^n$ 的展开式的系数恰为 $C_n^0,C_n^1,\cdots,C_n^n$.所以 $C_n^0,C_n^1,\cdots,C_n^n$ 中奇数的个数等于 2^m.

13·101 设 $t_n=1+x+x^2+\cdots+x^n$,$s_n=1+\frac{1+x}{2}+\left(\frac{1+x}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1+x}{2}\right)^n$,$n=1,2,\cdots$,求证

$$C_{n+1}^1+C_{n+1}^2t_1+C_{n+1}^3t_2+\cdots+C_{n+1}^{n+1}t_n=2^ns_n. \quad ①$$

(匈牙利数学奥林匹克,1923 年)

[证 1] 显然,为证恒等式①,只须证明①式两端含 $x^k(k=0,1,\cdots,n)$ 的项的系数分别相等就够了,即只须证明

$$C_{n+1}^{k+1}+C_{n+1}^{k+2}+\cdots+C_{n+1}^{n+1}=2^{n-k}C_k^k+2^{n-k-1}C_{k+1}^k+\cdots+C_n^k. \quad ②$$

我们对 $n-k$ 用数学归纳法来证明②式.当 $n-k=0$ 时,②式显然成立.设 $n-k=m$ 时成立.考察当 $n-k=m+1$ 时的②式左端.

这时有

$$C_{n+1}^{k+1}+C_{n+1}^{k+2}+\cdots+C_{n+1}^{n}+C_{n+1}^{n+1}$$

$$=(C_n^k+C_n^{k+1})+(C_n^{k+1}+C_n^{k+2})+\cdots+(C_n^{n-1}+C_n^n)+C_n^n$$

$=C_n^k+2(C_n^{k+1}+C_n^{k+2}+\cdots+C_n^n)$. $n-(k+1)=m$,由归纳假设便有

$$C_{n+1}^{k+1}+C_{n+1}^{k+2}+\cdots+C_{n+1}^{n+1}$$

$$=C_n^k+2(2^{n-k-1}C_k^k+2^{n-k-2}C_{k+1}^k+\cdots+C_{n-1}^k)$$

$$=2^{n-k}C_k^k+2^{n-k-1}C_{k+1}^k+\cdots+2C_{n-1}^k+C_n^k,$$

这就完成了归纳证明.

[证 2] 我们先来证明当 $x=1$ 时①式成立.这时,$t_n=n+1,s_n=n+1$,因而①式化为

$$C_{n+1}^1+2C_{n+1}^2+\cdots+(n+1)C_{n+1}^{n+1}=2^n(n+1). \quad ③$$

利用组合恒等式

$$kC_{n+1}^k=(n+1)C_n^{k-1},k=1,2,\cdots,n+1,$$

便得

$$C_{n+1}^1+2C_{n+1}^2+\cdots+(n+1)C_{n+1}^{n+1}$$

$$=(n+1)(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n)=(n+1)2^n.$$

当 $x\neq1$ 时,将①式两端分别乘以如下恒等式

$$1-x=2\left(1-\frac{1+x}{2}\right)$$

的两端表达式,然后利用等比数列求和公式

$$(1-x)t_k=1-x^{k+1},\left(1-\frac{1+x}{2}\right)s_n=1-\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n+1},$$

便知为证①,只须证明

$$C_{n+1}^1(1-x)+C_{n+1}^2(1-x^2)+\cdots+C_{n+1}^{n+1}(1-x^{n+1})$$

$$=2^{n+1}-(1+x)^{n+1}. \quad ④$$

而④式恰为下列两个牛顿二项式的差:

$$C_{n+1}^0+C_{n+1}^1+\cdots+C_{n+1}^{n+1}=2^{n+1},$$

$$C_{n+1}^0+C_{n+1}^1x+\cdots+C_{n+1}^{n+1}x^{n+1}=(1+x)^{n+1}.$$

13·102 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为正实数,S_k 为从 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中每次取 k 个所得乘积的和.证明

$$S_k \cdot S_{n-k} \geqslant (C_n^k)^2 a_1 a_2 \cdots a_n, k = 1,2,\cdots,n-1.$$

（亚太地区数学奥林匹克，1990 年）

［证］ 由于

$$S_k = a_1 a_2 \cdots a_k + a_2 \cdots a_k a_{k+1} + \cdots + a_n a_1 \cdots a_{k-1}$$

共有 C_n^k 项，其中 a_i 出现 C_{n-1}^{k-1} 次. 于是

$$\left(\frac{S_k}{C_n^k}\right)^{C_n^k} \geqslant (a_1 a_2 \cdots a_n)^{C_{n-1}^{k-1}},$$

即

$$S_k \geqslant C_n^k (a_1 a_2 \cdots a_n) \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k}.$$

同理有

$$S_{n-k} \geqslant C_n^{n-k} (a_1 a_2 \cdots a_n) \frac{C_{n-1}^{n-k-1}}{C_n^{n-k}}$$

所以有

$$\begin{aligned} & S_k \cdot S_{n-k} \\ \geqslant & C_n^k C_n^{n-k} (a_1 a_2 \cdots a_n) \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} + \frac{C_{n-1}^{n-k-1}}{C_n^{n-k}} \\ = & (C_n^k)^2 (a_1 a_2 \cdots a_n) \frac{C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{n-k-1}}{C_n^k} \\ = & (C_n^k)^2 (a_1 a_2 \cdots a_n) \frac{C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}}{C_n^k} \\ = & (C_n^k)^2 (a_1 a_2 \cdots a_n) \frac{C_n^k}{C_n^k} \\ = & (C_n^k)^2 a_1 a_2 \cdots a_n. \end{aligned}$$

$$k = 1,2,\cdots,n-1.$$

13·103 若 n 是正整数，找出和

$$C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 \cdot 2^2 + C_{n+3}^3 \cdot 3^2 + \cdots + C_{2n}^n \cdot n^2$$

的公式.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1992 年）

［解］ 考虑一个具有 $2n+1$ 名国际象棋选手的俱乐部，选手按等

级从第 1 排到第 $2n+1$.

挑选 $n+1$ 名选手组成一个队,参加即将举行的与一个具有竞争力的俱乐部比赛.此外,从剩下的 n 名选手中,挑选一名领队和一名副领队.同一名选手可以兼任正副领队,但是每个领队的等级至少要高于一个队员.

若 k 是最低等级的队员,则 $n+2\leqslant k\leqslant 2n+1$.对每一个这样的 k,剩下的 n 个队员可有

$$C_{k-1}^{n}=C_{k-1}^{k-1-n}$$

种挑选方法,而领队有 $(k-1-n)^2$ 种挑选方法.

因此,挑选方法的总数是

$$C_{n+1}^{1}+C_{n+2}^{2}\cdot 2^2+C_{n+3}^{3}\cdot 3^2+\cdots+C_{2n}^{n}\cdot n^2.$$

这就是所要求的和.

用 C_{2n+1}^{n+1} 种方法挑选队员,而用 n^2 种方法挑选领队,然而,不能不除去这样一些选择,即至少有一个领队的级别低于所有队员.假定两个领队的职务由同一个选手担任,因此可以用 C_{2n+1}^{n+2} 种方法选择队,再加上这个领队而且让这 $n+2$ 名选手中级别最低的选手充当这惟一的领队.假定领队和教练不是同一个选手,可用 C_{2n+1}^{n+3} 种方法选择队加上这两位领队,若这 $n+3$ 名选手中级别最低的选手只担任一个领队,再确定其余 $n+2$ 名选手的其他职位.由此推出方法的总数是

$$n^2C_{2n+1}^{n+1}-C_{2n+1}^{n+2}-2(n+2)C_{2n+1}^{n+3}$$
$$=\frac{n(n+1)^3C_{2n+1}^{n+1}}{(n+2)(n+3)}.$$

此即为所求的和的公式.

13·104　设 $n,k\in N$ 且 $k<n$,求证每个小于 C_n^k 的自然数都可用惟一的方式表示成 $C_{a_1}^{1}+C_{a_2}^{2}+\cdots+C_{a_k}^{k}$ 的形式,其中 $0\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_k<n$.

(圣彼得堡代表队选拔试题,1992 年)

[证]　首先,我们有

$$0=C_0^1+C_1^2+\cdots+C_{k-1}^{k},$$
$$1=C_0^1+C_1^2+\cdots+C_{k-2}^{k-1}+C_k^k,$$

其中 $C_{m-1}^{m}=0(m=1,2,\cdots)$.对于大于 1 且小于 C_n^k 的自然数 x,我们

先取出不超过 x 的最大组合数 C_m^k，并令 $a_k = m$，易见 $k \leqslant m < n$.然后令 $y = x - C_m^k$，于是有 $y < C_{a_k+1}^k - C_{a_k}^k = C_{a_k}^{k-1}$.因而又可像上面一样地找出不超过 y 的最大组合数 C_h^{k-1}，并令 $a_{k-1} = h$，易见 $k-2 \leqslant h = a_{k-1} < a_k$.如此继续下去，即可得到所求的表达式.

另一方面，对于小于 C_n^k 的不同非负整数，所得到的表达式当然也不同.因此至少有 C_n^k 个互不相同的表达式.而每个这样的表达式，被它的 k 个下标 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 惟一确定.因为从 $\{0, 1, \cdots, n-1\}$ 中取 k 个不同元素的取法总数恰为 C_n^k，故题中所述形式的表达式共有 C_n^k 种，所以每个小于 C_n^k 的非负整数的表达式都是惟一确定的.

13·105　设 A 是一个 n 元集合，A 的 m 个子集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两互不包含.试证

(1) $\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{1}{C_n^{|A_i|}} \leqslant 1$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{m} C_n^{|A_i|} \geqslant m^2$，

其中 $|A_i|$ 表示 A_i 所含元素的个数.

（中国高中数学联赛，1993 年）

［证］　按定义有

$$\frac{1}{C_n^{|A_i|}} = \frac{|A_i|!(n-|A_i|)!}{n!},$$

由此可见，为证(1)，只须证明等价不等式

$$\sum_{i=1}^{m} |A_i|!(n-|A_i|)! \leqslant n!. \qquad ①$$

对于每个 A_i，利用 A_i 构造集 A 中的 n 个元素的排列如下：前 $|A_i|$ 个位置是 A_i 中的所有元素的一个排列，后 $(n-|A_i|)$ 个位置是 A_i 的补集 A_i^c 中的所有元素的一个排列.这样的排列称之为从属于 A_i 的排列.按乘法定理知，这样的排列数是 $|A_i|!(n-|A_i|)!$.

当 $j \neq i$ 时，不妨设 $|A_j| \geqslant |A_i|$，如果有一个 A 的元素的排列既从属于 A_i，又从属于 A_j，则其中的前 $|A_i|$ 个元素都属于 A_i，前 $|A_j|$ 个元素都属于 A_j.从而有 $A_i \subset A_j$，此与已知矛盾.这表明从属于不同子集的任何两个排列互不相同.因为 A 中 n 个元素的所有排列总数为

$n!$,故得不等式 ①.

对于任何 m 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$,由柯西不等式有

$$m^2=\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{a_i}}\cdot\sqrt{a_i}\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\right). \quad ②$$

在 ② 中令 $a_i=C_n^{|A_i|}$,$i=1,2,\cdots,m$,由已证的不等式(1) 即得

$$m^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{|A_i|}}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}C_n^{|A_i|}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{m}C_n^{|A_i|}.$$

13·106 设 $P_n(k)$ 表示 n 个元素中有 k 个不动的所有排列的种数.求证

$$\sum_{k=0}^{n}kP_n(k)=n!. \quad ①$$

(第 28 届国际数学奥林匹克,1987 年)

[证 1] 因为 $P_n(k)=C_n^kP_{n-k}(0)=\frac{n!}{k!(n-k)!}P_{n-k}(0)$,所以有

$$\sum_{k=0}^{n}kP_n(k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{kn!}{k!(n-k)!}P_{n-k}(0)=n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}P_{n-1-k}(0)$$

$$=n\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^kP_{n-1-k}(0)=n\sum_{k=0}^{n-1}P_{n-1}(k). \quad ②$$

因为对所有 $n\in N$,都有 $\sum_{k=0}^{n}P_n(k)=n!$,故由 ② 即得 ①.

[证 2] 设 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是一个 n 元集.对于 S 的任一排列,我们让它对应一个向量 $e=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$,其中的 e_i 定义如下:当 a_i 是不动元时,$e_i=1$;当 a_i 不是固定元时,$e_i=0$,$i=1,2,\cdots,n$.

对于任一恰有 k 个不动元的排列,它所对应的向量中恰有 k 个分量为 1.所以,所有排列所对应的向量中含有 1 的个数为

$$m=\sum_{k=0}^{n}kP_n(k). \quad ③$$

另一方面,a_i 为不动元的排列恰有$(n-1)!$个.因而,所有向量中第 i 个分量共有$(n-1)!$个是 1.所以,所有向量的分量中含有 1 的个数又应为

$$m=n\cdot(n-1)!=n!. \quad ④$$

由 ③ 和 ④ 即得 ①.

13·107 设 S 为 n 元集合,使 S 中恰有 k 个元素不动的排列数记为 $P_n(k)$,求证

$$\sum_{k=0}^{n}(k-1)^2P_n(k)=n!.$$

(第 28 届国际数学奥林匹克预选题,1987 年)

[证] 因为

$$P_n(k)=C_n^kP_{n-k}(0),\ \sum_{k=0}^{n}P_n(k)=n!, \qquad ①$$

故有

$$\sum_{k=1}^{n}kP_n(k)=\sum_{k=1}^{n}kC_n^kP_{n-k}(0)=n\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}P_{n-k}(0)$$

$$=n\sum_{k=1}^{n}P_{n-1}(k-1)=n!. \qquad ②$$

于是由 ① 和 ② 即得

$$\sum_{k=0}^{n}(k-1)^2P_n(k)=\sum_{k=1}^{n}k^2P_n(k)-2\sum_{k=1}^{n}kP_n(k)+n!$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2P_n(k)-n!$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2C_n^kP_{n-k}(0)-n!$$

$$=n\sum_{k=1}^{n}kC_{n-1}^{k-1}P_{n-k}(0)-n!$$

$$=n\sum_{k=1}^{n}(k-1)P_{n-1}(k-1)=n!.$$

13·108 地质队在考察中共采集了80种岩芯样本,它们的重量各不相同但都已知且登记有清单.一段时间后,样本盒子上所贴的标签变得模糊不清,惟有保管员知道它们各是哪种样本.他不用打开盒子,仅利用清单和一台有指针的天平(可以指示两端的重量之差)来证明他所说的全是对的.求证他最少要用天平称量 4 次.

(第 58 届莫斯科数学奥林匹克,1995 年)

[证] 为下面叙述方便起见,另拿来一个空盒子,重量为 0.将它与原来的 80 个装有岩芯的盒子放在一起,共 81 个盒子且重量互不相同.

保管员可以按如下程序来进行4次称量.首先,他将81个盒子按从轻到重的顺序依次编号为1,2,…,81(由于他记住了哪个盒子装的是什么样本,所以他可以做到).这样,他只须向别人显示他的编号正确即可.

第1步　他将81个盒子分成3组:第1组由1号到27号的27个盒子组成,称为轻组;第3组由55号到81号的27个盒子组成,称为重组;由28号到54号的27个盒子组成第2组,称为中组.保管员将轻组和重组分别放到天平的左右两盘中进行第1次称量.这时天平的指针显示出两端重量之差 d.由于留有清单,当然能算出最轻的27个盒子与最重的27个盒子的重量之差 d'.既然保管员是记准了的,必有 $d = d'$,从而证明保管员的3组中确实是第1组为最轻的27个盒子,第3组是最重的27个盒子.从而第2组是中间的27个盒子.

第2步　保管员将每一组中的27只盒子都均分成3组,每组都是轻组,中组和重组各9个盒子.他将3组的轻组与3组中的重组各27个盒子分别放到天平的左右两盘中进行第2次称量.这样,保管员又可通过天平指针显示的重量差与按清单计算的重量差的一致来证明这9组分组的正确性.

第3步　再将已经分成的9组中的每组9盒均分成3组,每组都是轻组,中组和重组各3盒.然后将9个轻组与9个重组分别放到天平的左右两盘中进行第3次称量,又可证明27组分组的正确性.

第4步　最后将27组中每组的轻盒共27盒放入天平的左盘,每组的重盒共27盒放入天平的右盘进行第4次称量.通过天平指针显示的重量差与按清单计算出的重量差的一致来证明81盒样本的正确性.这表明保管员通过4次称量可以证明自己的判断全是对的.

另一方面,再证保管员只进行3次称量是不足以证明自己的正确性的.

显然,每次称量都是将81个盒子分成3组,将其中两组分放到两盘中进行称量,并留下一组未进行称量,然后通过显示的重量差与由清单算出的重量差的一致来证明分组的正确性,但是第1次分组时,3组中总有1组中至少有27个盒子,第2次分组时这至少27个盒子又分成3组,总有1组中至少有9个盒子.第3次分组时总有1组的盒子数不少于3个.因此,经过3次称量,只能判定这一组的盒子是哪几个,却无法确

定组中的至少 3 个盒子哪个是几号. 这表明只称量 3 次是不够的.

综上可知,保管员最少要称量 4 次.

13·109 给定正整数 n,已知用克数都是正整数的 k 块砝码和一台天平可以称出质量为 $1,2,\cdots,n$ 克的所有物品的质量.

(1) 求 k 的最小值 $f(n)$;

(2) 当且仅当 n 取什么值时,上述 $f(n)$ 块砝码的组成方式是惟一确定的?证明你的结论.

(中国高中数学联赛,1999 年)

[解] (1) 设这 k 块砝码的质量分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_k,1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_k,a_i\in N,i=1,2,\cdots,k$. 因为天平两端都可以放砝码,故可称出质量为

$$\sum_{i=1}^{k}x_ia_i,x_i\in\{-1,0,1\},i=1,2,\cdots,k \qquad ①$$

的所有不同质量. 显然,若利用这 k 个砝码可以称量质量 $1,2,\cdots,n$,则由对称性知,① 中的表达式的值也可以为 $0,-1,-2,\cdots,-n$. 从而有

$$\{-n,\cdots,-1,0,1,\cdots,n\}\subset\left\{\sum_{i=1}^{k}x_ia_i\,\middle|\,x_i\in\{-1,0,1\}\right\},$$

由此可得

$$2n+1\leqslant\left|\left\{\sum_{i=1}^{k}x_ia_i\,\middle|\,x_i\in\{-1,0,1\}\right\}\right|\leqslant3^k.$$

解得 $n\leqslant\frac{1}{2}(3^k-1)$.

易见,当 $\frac{1}{2}(3^{m-1}-1)<n\leqslant\frac{1}{2}(3^m-1)$ 时,为了能称量出 $1,2,\cdots,n$ 克不同质量,应有 $m\leqslant k$,这表明 k 的最小值 $f(n)\geqslant m$.

另一方面,当 $k=m$ 时,取 $a_i=3^{i-1}(i=1,2,\cdots,m)$ 即可满足题中要求. 这时,由整数的三进制表示可知,对任意 $h\in Z$,$0\leqslant h\leqslant3^m-1$,都可写成

$$h=\sum_{i=1}^{k}y_i3^{i-1},y_i\in\{0,1,2\},i=1,2,\cdots,m.$$

于是

$$h-\frac{1}{2}(3^m-1)=\sum_{i=1}^{m}y_i3^{i-1}-\sum_{i=1}^{m}3^{i-1}=\sum_{i=1}^{m}(y_i-1)3^{i-1}.$$

令 $x_i=y_i-1$，于是 $x_i\in\{-1,0,1\}, i=1,2,\cdots,m$. 因此对所有 $-\frac{1}{2}(3^m-1)\leqslant l\leqslant\frac{1}{2}(3^m-1)$ 的整数 l，都有

$$l=\sum_{i=1}^{m}x_i3^{i-1}, x_i\in\{-1,0,1\}, i=1,2,\cdots,m.$$

故知 k 的最小值 $f(n)=m\left(\frac{1}{2}(3^{m-1}-1)<n\leqslant\frac{1}{2}(3^m-1)\right)$.

(2) 首先，当 $\frac{1}{2}(3^m-1)<n<\frac{1}{2}(3^{m+1}-1)$ 时，由(1)中论证可知，$1,3,\cdots,3^{m-1},3^m$ 就是满足要求的一种砝码的组成方式. 下面证明，$1,3,\cdots,3^{m-1},3^m-1$ 也是满足要求的一种组成方式.

当 $1\leqslant l\leqslant\frac{1}{2}(3^m-1)$ 时，由(1)知可写成

$$l=\sum_{i=1}^{m}x_i3^{i-1}, x_i\in\{-1,0,1\}, i=1,\cdots,m.$$

从而有

$$l=\sum_{i=1}^{m}x_i3^{i-1}+0\cdot(3^m-1), x_i\in\{-1,0,1\}. \quad ②$$

当 $\frac{1}{2}(3^m-1)<l\leqslant n<\frac{1}{2}(3^{m+1}-1)$ 时，$\frac{1}{2}(3^m-1)<l+1\leqslant\frac{1}{2}(3^{m+1}-1)$，于是由(1)知可写成

$$l+1=\sum_{i=1}^{m+1}x_i3^{i-1}, x_i\in\{-1,0,1\}, i=1,\cdots,m+1,$$

且其中 $x_{m+1}=1$. 从而有

$$l=\sum_{i=1}^{m}x_i3^{i-1}+(3^m-1), x_i\in\{-1,0,1\}. \quad ③$$

② 和 ③ 表明砝码组 $1,3,\cdots,3^{m-1},3^m-1$ 满足题中要求. 这样，就证明了当 $n\neq\frac{1}{2}(3^m-1)(m\in N)$ 时，满足题中要求的 $f(n)$ 块砝码的组成方式不惟一.

下面证明，当 $n=\frac{1}{2}(3^m-1)(m\in N)$ 时，满足要求的 $f(n)=m$

块砝码的组成方式是惟一确定的,即 $a_i = 3^{i-1}, i = 1,2,\cdots,m$.

若对每个 $-\frac{1}{2}(3^m - 1) \leqslant l \leqslant \frac{1}{2}(3^m - 1)$,都有

$$l = \sum_{i=1}^{m} x_i a_i, x_i \in \{-1,0,1\}, i = 1,2,\cdots,m,$$

即有

$$\{0, \pm 1,\cdots, \pm \frac{1}{2}(3^m - 1)\} \subset \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i a_i \mid x_i \in \{-1,0,1\} \right\},$$

则必有

$$\{0, \pm 1,\cdots, \pm \frac{1}{2}(3^m - 1)\} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i a_i \mid x_i \in \{-1,0,1\} \right\}. \quad ④$$

从而对于满足条件 $-\frac{1}{2}(3^m - 1) \leqslant l \leqslant \frac{1}{2}(3^m - 1)$ 的每个整数 l,都可惟一地表示为

$$l = \sum_{i=1}^{m} x_i a_i, x_i \in \{-1,0,1\}, i = 1,2,\cdots,m.$$

特别当所有 x_i 都为 1 时,必有

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{1}{2}(3^m - 1).$$

于是

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i + 1)a_i = \sum_{i=1}^{m} x_i a_i + \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} x_i a_i + \frac{1}{2}(3^m - 1).$$

令 $y_i = x_i + 1$,于是 $y_i \in \{0,1,2\}, i = 1,2,\cdots,m$.从而对每个 $0 \leqslant l \leqslant 3^m - 1$,都可惟一地表示为

$$l = \sum_{i=1}^{m} y_i a_i, y_i \in \{0,1,2\}, i = 1,2,\cdots,m. \quad ⑤$$

由 ④ 可知,$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots a_m$.

最后,用数学归纳法证明 $a_i = 3^{i-1}, i = 1,2,\cdots,m$.

当 $i = 1$ 时,为使 ⑤ 中 l 可取值 1,必有 $a_1 = 1$.设当 $i = 1,2,\cdots,h$ 时,有 $a_i = 3^{i-1}$.由于

$$\sum_{i=1}^{h} y_i a_i = \sum_{i=1}^{h} y_i 3^{i-1}, y_i \in \{0,1,2\}$$

恰为整数的三进制表示,所以它们所表示的 3^h 个数恰好是 $0,1,2,\cdots,$

3^h-1，再由④知 a_{h+1} 应是除上述 3^h 个数外 $\left\{\sum_{i=1}^{m} y_i a_i \mid y_i \in \{0,1,2\}\right\}$ 中最小的数，即应有 $a_{h+1}=3^h$. 这就完成了归纳证明.

综上可知，当且仅当 $n=\frac{1}{2}(3^m-1)(m\in N)$ 时，满足题中要求的 $f(n)$ 块砝码的组成方式是惟一确定的.

13·110　若干人沿同一条直线道路匀速行走，且在某段时间内这些人的两两距离之和不断减小，求证一定存在一个人，在这段时间里他与其余所有人的距离之和也在不断减小.

（第 22 届全俄数学奥林匹克，1996 年）

［证］　设共有 n 个行人 $P_1,P_2,\cdots,P_n$，并用 V_{ij} 来表示 P_i 与 P_j 靠近的速度，$1\leqslant i,j\leqslant n$，约定 $V_{ii}=0,i=1,2,\cdots,n$. 当 P_i 与 P_j 相向而行时，$V_{ij}>0$；当 P_i 与 P_j 相背而行时，$V_{ij}<0$；当 P_i 与 P_j 同向而行时，V_{ij} 可正可负也可能为 0. 但是，由于任何两人的行走方向都固定不变，故二人至多相遇或追及 1 次. 在发生相遇或追及前后，V_{ij} 由正变负；不发生这种情形时，V_{ij} 不变. 可见，所有的 V_{ij} 都是不增的.

因为在所考察的一段时间内，n 个人的两两距离之和在不断减小，所以在这段时间内总有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} V_{ij}>0. \qquad ①$$

又因 $V_{ij}=V_{ji},V_{ii}=0,1\leqslant i,j\leqslant n$，所以①式左端可以化为

$$0<\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} V_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} V_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} V_{ij}. \qquad ②$$

由于 n 个人只有有限多次相遇和追及的机会，故可在所考察的一段时间内选取一个在最后一次相遇或追及后的时刻，这时由②可知，存在某个 $j,1\leqslant j\leqslant n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} V_{ij}>0. \qquad ③$$

再由 V_{ij} 的不增性及没有相遇和追及发生时的不变性即知③式在整个所考察的一段时间内都成立，而它恰好表明第 j 个人与其余所有人的距离之和在整段时间里都在不断减小.

13·111　指示板上装有若干个电灯泡，且都亮着. 今有若干个按

钮,可以改变与该按钮相连接的所有灯泡的亮灭状态.现知对任何一组灯泡,都有一个按钮与该组内的奇数个灯泡相连,求证可以通过揿动这些按钮熄灭所有的灯炮.

(第58届莫斯科数学奥林匹克,1995年)

[证] 注意,最终的亮灭状态与揿动按钮的顺序无关.

设灯泡的个数为 n,我们对 n 进行归纳来证明.

当 $n=1$ 时结论显然成立.设结论于 $n=k$ 时成立.下面来看 $n=k+1$ 的情形.从 $k+1$ 盏灯中去掉第 i 盏,于是由归纳假设知,可以通过揿动一组按钮,熄灭其余的全部 k 盏灯而第 i 盏灯可亮可灭.将这一组按钮的集合记为 S_i,将 i 依次取值 $1,2,\cdots,k+1$,于是得到相应的按钮集合 $S_i, i=1,2,\cdots,k+1$.

如果存在 $1\leqslant i_0\leqslant k+1$,使当从全亮状态开始揿动 S_{i_0} 中所有按钮后,不但除第 i_0 盏灯之外全都熄灭,而且连第 i_0 盏灯也熄灭了,则问题就解决了.所以,只须考察对每个 i,在揿过 S_i 中所有按钮后,第 i 盏灯都亮着的情形.

不难看出,当揿过 S_i 与 $S_j(i\neq j)$ 中所有按钮之后,仅有第 i 与 j 两盏灯改变了亮灭状态,因为其他的灯泡都改变了两次状态,等于没有改变.按题中条件知,存在一个按钮 T,它连接着奇数个灯泡,设这些盏灯的号码为 $i_1,i_2,\cdots,i_{2k-1}$.我们先揿动 S_{i_1} 中的所有按钮,于是所有灯都熄灭,只有第 i_1 号灯亮着.然后揿动 S_{i_2} 与 S_{i_3} 中的所有按钮,则除第 i_2 与 i_3 号灯改变状态外,其余的灯的状态不变.结果第 i_1,i_2,i_3 这3盏灯亮着而其他灯都熄灭了.接着再揿动 S_{i_4},S_{i_5} 中的所有按钮,继续进行下去,直到最后揿动 $S_{i_{2k-2}},S_{2k-1}$ 中的所有按钮为止.这时编号为 $i_1,i_2,\cdots,i_{2k-1}$ 的灯全都亮着而其他灯全都灭着.显然,只要再揿动按钮 T,就使得所有灯都灭了,即 $n=k+1$ 时也成立.这就完成了归纳证明.

附录

索引

本索引列出了本卷所载的全部数学竞赛题及一些相关题目.将所有题目按出处归类，对于出处相同的题目，则按年代排列，以便于读者查找.括号中每题的第1个号码是章号，第2个号码是该章中的题号.例如国际数学奥林匹克，1992年(4·39)表示本卷第4章第39题是1992年国际数学奥林匹克的试题.

国际数学奥林匹克

1991年（5·84，7·2，7·95，9·80）
1992年（2·112，4·23，6·20，13·103）

中国中学生数学冬令营

1986年（2·52，2·105，9·7，12·81）
1987年（3·33，6·28，12·17）
1989年（1·14，7·33，10·84）
1990年（1·44，4·19，11·91）
1991年（3·84，7·83）
1992年（4·21，8·118）
1993年（2·92，5·55）
1994年（1·99，8·146，13·108）
1995年（2·70，8·96）
1996年（2·13，5·33）
1997年（3·91，8·168）
1998年（2·122）
1999年（1·113，7·120）

中国高中数学联赛

1979年（6·46，12·42）
1983年（1·88，7·88）
1985年（10·70）
1986年（9·19）
1987年（1·102，6·14，11·64）
1988年（6·31，11·22）
1989年（3·32）
1990年（1·59，5·71）
1991年（2·63）
1992年（10·94）
1993年（7·77，13·105）
1994年（4·29）
1995年（9·8）
1996年（1·107，5·119）
1997年（1·108，3·89）

日本数学奥林匹克

1990 年 (1·101, 2·30)

1991 年 (1·56, 1·100, 2·18, 10·39)

波兰数学奥林匹克

1956 年 (12·6)

1961 年 (5·39)

1964 年 (10·21)

1965 年 (4·8, 12·44, 12·108)

1966 年 (10·71)

1967 年 (2·106, 5·2, 5·3)

1968 年 (2·109, 4·13, 5·6, 10·19, 10·42)

1969 年 (12·74, 12·100, 12·137)

1970 年 (1·22, 11·28)

1971 年 (5·85, 12·111)

1972 年 (11·82)

1973 年 (11·8)

1974 年 (4·18, 13·95)

1975 年 (11·7)

1978 年 (1·17)

1991 年 (1·72).

罗马尼亚数学奥林匹克

1978 年 (1·84, 5·28, 8·44, 11·83)

新加坡数学奥林匹克

1987 年 (1·34)

西班牙数学奥林匹克

1992 年 (5·80)

瑞典数学奥林匹克

1982 年 (9·32)

全苏数学奥林匹克

1967 年 (3·69)

1968 年 (1·79, 4·69, 5·42, 6·21, 8·100)

1969 年 (3·12, 4·55, 6·4, 10·5, 13·65)

1991 年（3·35，3·36，3·42，5·103，8·71，8·83，8·115，11·23，11·41，11·56，11·60）

全俄数学奥林匹克

1961 年（4·2，8·99，8·130，8·131，11·42，12·7，12·119）

1962 年（3·17，3·80）

1963 年（1·7，3·3，3·56，6·33，11·47，12·57）

1964 年（13·82）

1965 年（5·76，5·96，5·97，8·27，10·53）

1966 年（1·73，4·70，5·48，5·51，7·90，12·14）

1980 年（2·3）

1984 年（8·125）

1986 年（3·66，9·78，10·3）

1987 年（8·108）

1988 年（3·57，3·61，8·78）

1989 年（7·36，8·56，8·129，8·138）

1990 年（3·24，3·53，6·8，6·19，8·46，8·47，8·86，13·18，13·58）

1991 年（3·54，9·63，12·40）

1992 年（2·35，4·52，4·76，4·79，8·21，8·53，9·69，10·56，11·24）

1993 年（3·67，4·31，5·41，5·113，6·17，7·11，7·43，7·112，8·41，8·94，8·101，9·62，10·55，11·59，11·61）

1994 年（3·86，5·32，8·23，8·40，8·102，9·10，9·17，12·18，12·19）

1995 年（2·117，3·87，8·167，8·170，12·146，13·110）

1996 年（2·115，3·92，5·117，5·118，8·164，8·165）

莫斯科数学奥林匹克

1935 年（1·61）

1937 年（1·94）

1938 年（7·47）

1940 年（1·105）

1941 年（10·35）

1969 年 (1·39, 3·60, 5·105, 6·3, 8·3, 8·4, 8·6, 8·49, 8·50, 8·51, 8·95, 8·149, 8·152, 8·156, 8·157, 9·57, 11·73, 12·37, 12·130)

1970 年 (2·95, 3·51, 5·89, 5·95, 5·98, 5·110, 6·15, 7·97, 7·100, 8·109, 8·155, 9·56, 10·44, 10·62, 12·38, 13·8, 13·10, 13·12, 13·67, 13·68, 13·70, 13·86, 13·91)

1971 年 (3·76, 3·78, 5·107, 6·6, 7·30, 8·7, 8·15, 8·124, 9·11, 9·25, 11·25, 12·39, 13·38)

1972 年 (1·95, 4·62, 5·43, 5·90, 5·111, 7·89, 8·106, 9·14, 10·25, 11·49, 13·22, 13·85)

1973 年 (1·12, 3·29, 9·49, 9·50, 9·76, 9·89, 12·28, 12·59, 13·44, 13·73, 13·79)

1974 年 (4·1, 5·7, 5·47, 7·5, 8·107, 12·4, 12·21, 12·62, 12·83, 12·118, 12·129, 13·23, 13·51)

1975 年 (4·56, 4·57, 6·5, 8·18, 8·90, 12·36, 12·104, 13·36, 13·43)

1976 年 (9·20, 9·68, 10·48, 10·68, 12·5, 12·95, 12·96, 12·99, 13·35, 13·37)

1977 年 (6·12, 7·16, 7·32, 9·1, 9·66, 9·101, 10·91)

1978 年 (5·24, 5·109, 7·7, 9·21, 11·40, 12·3, 12·68)

1979 年 (4·49, 5·114, 8·32, 11·3, 11·16, 12·31, 12·105, 13·24)

1980 年 (3·25, 3·26, 9·23, 12·86, 12·128, 13·42)

1981 年 (2·79, 5·36, 10·12, 12·27, 12·58, 13·2)

1982 年 (10·64, 10·95, 12·43)

1983 年 (3·63, 4·11, 4·74, 5·59, 12·97)

1984 年 (3·8, 6·47, 7·93, 10·80, 13·47, 13·48)

1985 年 (1·15, 1·67, 4·54, 5·25, 7·8, 13·1, 13·66)

1986 年 (2·19, 2·20, 3·59, 7·110, 12·79, 13·87)

1987 年 (2·10, 2·85, 5·63, 6·22, 7·38, 9·82, 12·22, 13·64)

1988 年 (7·81, 8·85, 8·86, 13·25)

1974 年（8·66，10·2）

1975 年（7·22，8·60，8·127）

1977 年（1·19，2·26，10·82）

1980 年（7·69）

1981 年（2·73）

1983 年（8·59，8·61）

友谊杯国际数学奥林匹克

1988 年（3·28）

亚洲太平洋地区数学奥林匹克

1989 年（1·25）

1990 年（5·22，13·102）

1991 年（9·22）

1992 年（11·20）

拉丁美洲地区数学奥林匹克

1988 年（2·49）

历届国际数学奥林匹克概况

届次	时间	举办国家（或地区）	总分第一	总分第二	总分第三
1	1959年	罗马尼亚	罗马尼亚 249分	匈牙利 233分	前捷克斯洛伐克 192分
2	1960年	罗马尼亚	前捷克斯洛伐克 257分	匈牙利 248分	罗马尼亚 248分
3	1961年	匈牙利	匈牙利 270分	波　兰 203分	罗马尼亚 197分
4	1962年	前捷克斯洛伐克	匈牙利 289分	前苏联 263分	罗马尼亚 257分
5	1963年	波　兰	前苏联 271分	匈牙利 234分	罗马尼亚 191分
6	1964年	前苏联	前苏联 269分	匈牙利 253分	罗马尼亚 213分
7	1965年	前民主德国	前苏联 281分	匈牙利 244分	罗马尼亚 222分
8	1966年	保加利亚	前苏联 293分	匈牙利 281分	前民主德国 280分
9	1967年	前南斯拉夫	前苏联 275分	前民主德国 257分	匈牙利 251分
10	1968年	前苏联	前民主德国 304分	前苏联 298分	匈牙利 291分
11	1969年	罗马尼亚	匈牙利 247分	前民主德国 240分	前苏联 231分
12	1970年	匈牙利	匈牙利 233分	前苏联前民主德国 221分	
13	1971年	前捷克斯洛伐克	匈牙利 255分	前苏联 205分	前民主德国 142分
14	1972年	波　兰	前苏联 270分	匈牙利 263分	前民主德国 239分
15	1973年	前苏联	前苏联 254分	匈牙利 215分	前民主德国 188分
16	1974年	前民主德国	前苏联 256分	美　国 243分	匈牙利 237分
17	1975年	保加利亚	匈牙利 258分	前民主德国 249分	美　国 247分
18	1976年	奥地利	前苏联 250分	英　国 214分	美　国 188分
19	1977年	前南斯拉夫	美　国 202分	前苏联 192分	匈牙利　英国 190分
20	1978年	罗马尼亚	罗马尼亚 237分	美　国 225分	英　国 201分
21	1979年	英　国	前苏联 267分	罗马尼亚 240分	前联邦德国 235分

届次	时间	举办国家(或地区)	总分第一	总分第二	总分第三
22	1981年	美国	美国 314分	前联邦德国 312分	英国 301分
23	1982年	匈牙利	前联邦德国 145分	前苏联 137分	前民主德国、美国 136分
24	1983年	法国	前联邦德国 212分	美国 171分	匈牙利 170分
25	1984年	前捷克斯洛伐克	前苏联 235分	保加利亚 203分	罗马尼亚 199分
26	1985年	芬兰	罗马尼亚 201分	美国 180分	匈牙利 168分
27	1986年	波兰	前苏联、美国 203分		前联邦德国 196分
28	1987年	古巴	罗马尼亚 250分	前联邦德国 248分	前苏联 235分
29	1988年	澳大利亚	前苏联 217分	中国、罗马尼亚 201分	
30	1989年	前联邦德国	中国 237分	罗马尼亚 223分	前苏联 217分
31	1990年	中国	中国 230分	前苏联 193分	美国 174分
32	1991年	瑞典	前苏联 241分	中国 231分	罗马尼亚 225分
33	1992年	俄罗斯	中国 240分	美国 181分	罗马尼亚 177分
34	1993年	土耳其	中国 215分	德国 189分	保加利亚 178分
35	1994年	中国香港	美国 252分	中国 229分	俄罗斯 224分
36	1995年	加拿大	中国 236分	罗马尼亚 230分	俄罗斯 227分
37	1996年	印度	罗马尼亚	美国	匈牙利
38	1997年	阿根廷	中国 223分	匈牙利 219分	伊朗 217分
39	1998年	中国台北	伊朗	保加利亚	匈牙利美国
40	1999年	罗马尼亚	中国、俄罗斯 182分		越南 177分
41	2000年	韩国	中国 218分	俄罗斯 215分	美国 184分
42	2001年	美国	中国 225分	俄罗斯、美国 196分	

注:第39届IMO中国未参加.

编者的话



当今的世界，数学已成为广泛渗透到各种自然科学、社会科学，并发挥着重大作用的一门基础和应用学科.从教育要面向世界，面向未来，面向现代化这一高度来看，让青少年从小就打下扎实的数学基础，这对我国今后的发展是极为重要的.国际上为推动数学的发展而进行的数学奥林匹克活动，现在已成为一种培养和选拔数学人才的特殊事业.

目前，数学奥林匹克在我国正方兴未艾，数学竞赛遍及五湖四海，尤其是我国中学生选手在国际数学奥林匹克中屡夺金牌，成绩显赫，捷报频传，令世人瞩目，为祖国赢得了骄傲和荣誉.这些，充分显示了我国的数学水平和中华民族的聪明才智.为此，许多数学奥林匹克教练员，许多大、中学的教师，许多学生及其家长都渴望在自己的案头有一部能够指导数学奥林匹克解题的工具书.希望这部书能够广泛收集国内外数学奥林匹克试题的精品，包揽数学奥林匹克的精髓，以开阔自己的眼界，提高数学能力，品鉴数学的魅力，也希望这部书能够提供这些试题的更精确、更简捷的解法，以开拓思路，提高技巧.为适应各界的这种渴求，这部《世界数学奥林匹克解题大辞典》终于问世了.

这部大辞典的出版，是中国数学奥林匹克委员会，南开大学数学系和河北少年儿童出版社通力合作的产物；是中国

数学奥林匹克专家和教练员辛勤劳动的结晶;也是老一代数学家关心和支持的结果.我们不能不非常高兴地告诉大家,这部辞典在编辑过程中始终得到数学前辈陈省身先生,吴大任先生的关心和指导;中国数学会名誉理事长王元先生专为本辞典作序.可以这样说,如果没有作为数学泰斗的老一代数学家的关怀与支持,没有一批才华横溢的中青年数学家的艰苦努力,没有极具胆识的出版工作者的辛勤劳动,艰难而浩大的世纪工程——《世界数学奥林匹克解题大辞典》是难以如此顺利出版的.

这部大辞典精选了国内外数学竞赛的有代表性的试题,其中大部分是已经赛过并经过锤炼的试题,还有少部分竞赛的备选题和训练题.本辞典共分五卷,其中有四卷是按奥林匹克数学一般的分类方法而分为《代数卷》、《几何卷》、《数论卷》、《组合卷》;为了普及数学奥林匹克,完善辞典中题目类型,又编辑了《选择题卷》.

《世界数学奥林匹克解题大辞典》五卷共约500万字.《代数卷》、《数论卷》和《选择题卷》是按知识内容分章的;《组合卷》是按题目的内容分章的;《几何卷》则是按题目的结论分章的.每一卷的正文包括试题,试题的出处及解答三部分,试题的多种解法,则由解1,解2或证1,证2等给出.正文后有附录,附本卷常用的有关数学知识提要;还有本卷的索引,索引是按书中涉及到的参赛地区、国家和竞赛名称,按英文字母的顺序排列的.

《世界数学奥林匹克解题大辞典》的出版,无疑对我国数学奥林匹克事业的发展,对我国跨世纪科技人才的培养、造就和选拔有重要的促进作用,并为之摇橹扬帆、推波助澜!

愿数学奥林匹克之花香飘四海,

盼新一代科学精英普降神州!

本书的出版仅仅是一个尝试,殷切希望广大读者帮助我

们完善它.我们相信,经过不断地去粗取精,去伪存真,去旧增新,伴随着我国数学水平的不断提高,这部大辞典必将成为数学奥林匹克的经典之作.